МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ЗБІРНИК
ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ ТА КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ
З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів 1, 2 курсів всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030601 "Менеджмент")

Харків – ХНАМГ – 2011

Збірник завдань для самостійних та контрольних робіт з дискретної математики (для студентів 1, 2 курсів всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030601 "Менеджмент") / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Л. Б. Коваленко, Ю. В. Ситникова. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 84 с.

Укладачі: Л. Б. Коваленко, Ю. В. Ситникова

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. А. І. Колосов

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 6 від 26 січня 2011 р.

З М І С Т

Передмова

У «Збірнику завдань для самостійних та контрольних робіт з дискретної математики» подано завдання з усіх розділів дискретної математики, вивчення яких передбачено в другому семестрі згідно з діючою програмою для студентів за напрямом підготовки 6.030601 "Менеджмент організації". Завдання призначені для перевірки поточної успішності, а також можуть використовуватися для організації модульного контролю.

Контрольні роботи представлені за такими темами курсу: теорія множин і відношень, алгебра логіки, алгебра логіки висловлень, теорія графів та комбінаторики.

Задля покращення підготовки студентів до контрольних робіт у посібнику містяться розв'язання типових варіантів контрольних робіт з розширеними поясненнями та вказані джерела рекомендованого теоретичного матеріалу для повторення (сторінки з підручника: Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. Дискретна математика: Навчальний посібник. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 192 с.).

Рекомендації, щодо часу відведеного для проведення контрольних (самостійних) робіт, дозволяють викладачу раціонально використовувати (планувати) академічні години, а студентам своєчасно підготуватися до контролю й потренуватися.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

Тема: ТЕОРІЯ МНОЖИН

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: $[1]$, стор. 4-11.

Рекомендований час виконання роботи: 45 хв.

Приклад розв’язання типового варіанту

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ x^2 < 20\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{1;\ 3;\ \{5{,}7\}\}$, $B = \{2;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$, $C = \{0;\ 1;\ 3;\ 8\}$. Знайти $C - B,\ A \cap B,\ A + C,\ B - (A \cup C)$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $A + (\overline{B} \cap C)$.

Розв’язання:

1. Перелічимо елементи множини $A = \{1, 4, 9, 16\}$. Кількість елементів множини A дорівнює 4, отже потужність множини $|A| = 4$. Визначимо булеан множини A. Перелічимо всі підмножини множини A:

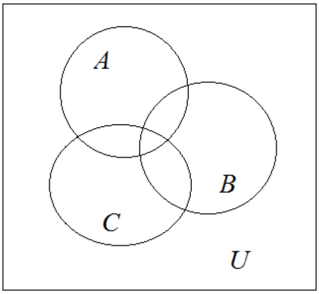
$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{4\}, \{9\}, \{16\}, \{1, 4\}, \{1, 9\}, \{1, 16\}, \{4, 9\}, \{4, 16\}, \{9, 16\},$$
$$\{1, 4, 9\}, \{1, 4, 16\}, \{1, 9, 16\}, \{4, 9, 16\}, \{1, 4, 9, 16\}\}.$$

Потужність булеану (кількість всіх підмножин множини) $|P(A)| = 16$.

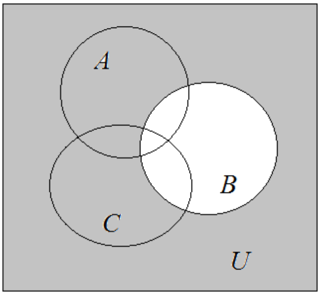
2. $C - B = \{0, 1, 3\}$; $A \cap B = \varnothing$; $A + C = \{0, \{5, 7\}, 8\}$;

$B - (A \cup C) = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{0, 1, 3, 8, \{5, 7\}\} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.

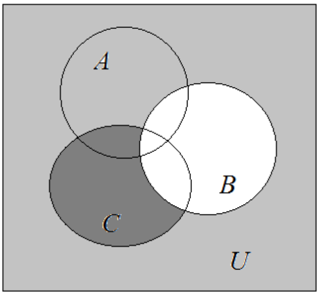
3. Зобразимо задані множини та крок за кроком виконаємо дії над множинами:



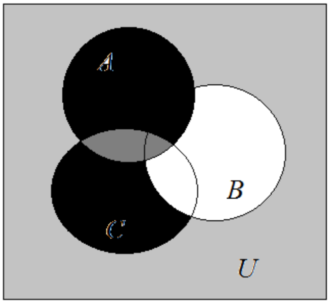
$A, \quad B, \quad C$



$\overline{B}$



$\overline{B} \cap C$



$A + \left(\overline{B} \cap C\right)$

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. Дано множину $A = \left\{x \middle| x \in N,\ (x+1)^2 < 27\right\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{0,1,\{2,3\}\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{5,6\}$. Знайти $C - A,\ A \cap C,\ B + C,\ A - (B \cup C)$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $(A \cap B) + (A \cap C)$.

Варіант № 2

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ 2x + 1 < 12\}$ Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{1,\{2,3\},\{4,5\}\}$, $B = \{2,\{4,5\}\}$, $C = \{3,4,5\}$. Знайти $C - B$, $(A \cup C) - (B \cap A)$, $A + B$, $B \cup C$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $(A \cap B - C) \cup (A \cap C - B)$.

Варіант № 3

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ x^2 + x < 18\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{0,1,3,5\}$, $B = \{\{0,1\},\{3,5\},3\}$, $C = \{3,5,6\}$. Знайти $A - C$, $A \cap C$, $B + C$, $(B \cap C) + A$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

Варіант № 4

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ x^3 - 1 < 27\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{1,2,3,\{6,7\}9\}$, $B = \{\{1,2\},3,4\}$, $C = \{\{2,3\},7,8,9\}$. Знайти $B + C$, $A \cap B$, $(B \cap C) + B$, $(A \cup B) - C$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $(\overline{A \cap B \cap C})$.

Варіант № 5

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ |x - x^2| < 13\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{0,1,\{2,3\}5,7\}$, $B = \{1,2,3,\{5,6\}\}$, $C = \{0,1,2,6,7\}$. Знайти $A + C$, $B - C$, $A \cap C$, $(A \cap B) \cup (B + C)$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $(A \cap B) + (A \cap C)$.

Варіант № 6

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ x^2 + 2x - 3 < 22\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $C=\{0,1,2\}$. Знайти $B-C$, $A\cup B$, $(A\cap C)-B$, $(A\cup B)+C$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $C+(\overline{B}\cap A)$.

Варіант № 7

1. Дано множину $A=\{x|x\in N,\ 3x-2<11\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A=\{0,1,\{2,3\}5,7\}$, $B=\{1,2,3,\{5,6\}\}$, $C=\{0,1,2,6,7\}$. Знайти $B-C$, $B\cup A$, $A\cap C$, $A\cup(B+C)$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $(A\cap B)+(A\cap C)$.

Варіант № 8

1. Дано множину $A=\{x|x\in N,\ |2x-x^2|<10\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A=\{1,2,\{3,5\},4,6\}$, $B=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $C=\{0,1,3\}$. Знайти $B-C$, $C\cup B$, $(A\cap C)+B$, $(A\cup B)-C$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $C-\overline{(B\cup A)}$.

Варіант № 9

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ x + 1 \le 5\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{0,1,\{2,3\}4,7\ \}$, $B = \{1,2,\{3,7\}\}$, $C = \{0,5,6\}$. Знайти $C - A$, $A - (B \cup C)$, $B + C$, $C \cap B$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $(A + B) \cap (C - B)$.

Варіант № 10

1. Дано множину $A = \{x | x \in N,\ 2^x \le 16\}$. Знайти потужність, булеан та потужність булеану множини.

2. Дано множини $A = \{0,3,5,\{6,9\}\ \}$, $B = \{2,3,9\}$, $C = \{0,2,3\}$. Знайти $B - C$, $A \cap B$, $(A \cup C) - B$, $A + C$.

3. Використати діаграми Вена та заштрихуйте ті її частини, що зображують множину $C - (B + A)$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Тема: ВІДНОШЕННЯ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 14-42.

Рекомендований час виконання роботи: 60 хв.

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$: $R=\{a+b \ \textit{кратне} \ a+3\}$.

2. З'ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	1	0	0
b	1	0	1
c	0	1	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	1	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	0
d	1	1	0	0

Розв'язання:

1. Побудуємо матрицю відношення:

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

З'ясуємо властивості відношення.

Відношення R *не рефлексивне*, тому що на головній діагоналі матриці відношення розташовані не лише одиниці (наприклад, $\langle 1,1 \rangle \notin R$).

Відношення R *не антирефлексивне*, тому що на головній діагоналі матриці відношення розташовані не лише нулі (наприклад, $\langle 3,3 \rangle \in R$).

Методом безпосереднього перескладання перевіримо, чи є дане відношення симетричним.

№	$\langle a,b\rangle \in R$	$\langle b,a\rangle$	$\langle b,a\rangle \in R$?
1	$\langle 1,3\rangle$	$\langle 3,1\rangle$	ні
2	$\langle 1,7\rangle$	$\langle 7,1\rangle$	ні
3	$\langle 2,3\rangle$	$\langle 3,2\rangle$	ні
4	$\langle 2,8\rangle$	$\langle 8,2\rangle$	ні
5	$\langle 3,9\rangle$	$\langle 9,3\rangle$	так
6	$\langle 4,3\rangle$	$\langle 3,4\rangle$	ні
7	$\langle 4,10\rangle$	$\langle 10,4\rangle$	ні
8	$\langle 5,3\rangle$	$\langle 3,5\rangle$	ні
9	$\langle 6,3\rangle$	$\langle 3,6\rangle$	ні
10	$\langle 7,3\rangle$	$\langle 3,7\rangle$	ні
11	$\langle 8,3\rangle$	$\langle 3,8\rangle$	ні
12	$\langle 9,3\rangle$	$\langle 3,9\rangle$	так
13	$\langle 10,3\rangle$	$\langle 3,10\rangle$	ні

Робимо висновок, що відношення R не є *ні симетричним*, *ні антисиметричним*.

З'ясуємо, чи є відношення транзитивним за допомогою метода безпосереднього перескладання.

№	$\langle a,b\rangle \in R$	$\langle b,c\rangle \in R$	$\langle a,c\rangle$	$\langle a,c\rangle \in R$?
1	$\langle 1,3\rangle$	$\langle 3,3\rangle$	$\langle 1,3\rangle$	так
2	$\langle 1,3\rangle$	$\langle 3,9\rangle$	$\langle 1,9\rangle$	ні

Далі проводити перескладання проводити не має сенсу, ми вже знайшли впорядковану пару, транзитивність в якій порушена. Отже, робимо висновок, що відношення *не транзитивно*.

Тому що відношення не є рефлексивним, симетричним, транзитивним, воно *не є еквівалентним*.

2. З’ясуємо властивості відношення R:

- не рефлексивне (тому що головна діагональ матриці відношення містить не лише одиниці);
- не антирефлексивне (тому що головна діагональ матриці відношення містить не лише нулі);
- не симетрично (тому що матриця відношення не симетрична відносно головної діагоналі, наприклад $\langle b,a\rangle \in R,$ але $\langle a,b\rangle \notin R$);
- не антисиметричне (тому що є одиниці, симетричні відносно головної діагоналі, наприклад, $\langle b,c\rangle \in R,$ $\langle c,b\rangle \in R$);
- не транзитивне (тому що існують пари, для яких порушується умова транзитивності, наприклад, $\langle b,c\rangle \in R,$ $\langle c,b\rangle \in R$, $\langle b,b\rangle \notin R$).

Виконаємо операції над відношенням:

$R \cup R = R$; $R - R = \varnothing$; $R \cap R = R$;

$\overline{R} = U - R = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle\}$;

$R^{-1} = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle\}$.

Виконаємо процедуру виявлення нетранзитивності заданого відношення. Виявлений лише один випадок: $\langle b,c\rangle \in R,\ \langle c,b\rangle \in R$, $\langle b,b\rangle \notin R$. Додавши цю пару до відношення, одержимо транзитивне замикання:

$R^0 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$.

Рефлексивне замикання знайдемо за визначенням: $R^* = R^0 \cup E$. Відношення R^0 рефлексивно, тому $R^* = R^0$.

Побудуємо матриці отриманих відношень:

$\overline{R}$	a	b	c
a	0	1	1
b	0	1	0
c	1	0	0

R^{-1}	a	b	c
a	1	1	0
b	0	0	1
c	0	1	1

$R^0 = R^*$	a	b	c
a	1	0	0
b	1	1	1
c	0	1	1

3. Визначимо властивості відношення R_1:

- рефлексивне (в матриці відношення на головній діагоналі всі одиниці;
- не анти рефлексивне;
- не симетричне (матриця відношення не симетрична відносно головної діагоналі, наприклад, $\langle a,c\rangle \in R_1$, $\langle c,a\rangle \notin R_1$);
- не антисиметричне, тому що існують елементи, симетричні відносно головної діагоналі, наприклад, і $\langle a,d\rangle \in R_1$, і $\langle d,a\rangle \in R_1$;

- перевіримо на транзитивність методом безпосереднього перескладання

№	$\langle a,b\rangle \in R_1$	$\langle b,c\rangle \in R_1$	$\langle a,c\rangle$	$\langle a,c\rangle \in R_1$?
1	$\langle a,c\rangle$	$\langle c,c\rangle$	$\langle a,c\rangle$	так
2	$\langle a,d\rangle$	$\langle d,a\rangle$	$\langle a,a\rangle$	так
3	$\langle a,d\rangle$	$\langle d,d\rangle$	$\langle a,d\rangle$	так
4	$\langle b,c\rangle$	$\langle c,c\rangle$	$\langle b,c\rangle$	так
5	$\langle d,a\rangle$	$\langle a,a\rangle$	$\langle d,a\rangle$	так

Робимо висновок, що відношення транзитивне.

- не еквівалентно.

Аналогічно, визначимо властивості відношення R_2:

- не рефлексивне, не антирефлексивне, тому що на головній діагоналі матриці відношення є як нулі, так і одиниці;
- не симетричне (наприклад, $\langle a,b\rangle \in R_2$, $\langle b,a\rangle \notin R_2$), не антисиметричне (наприклад, $\langle a,d\rangle \in R_2$, $\langle d,a\rangle \in R_2$;
- не транзитивне. Переконаємося в цьому методом безпосереднього перескладання:

№	$\langle a,b\rangle \in R_1$	$\langle b,c\rangle \in R_1$	$\langle a,c\rangle$	$\langle a,c\rangle \in R_1$?
1	$\langle a,b\rangle$	$\langle b,b\rangle$	$\langle a,b\rangle$	так
2	$\langle c,b\rangle$	$\langle b,b\rangle$	$\langle c,b\rangle$	так
3	$\langle d,a\rangle$	$\langle a,b\rangle$	$\langle d,b\rangle$	так
4	$\langle d,a\rangle$	$\langle a,d\rangle$	$\langle d,d\rangle$	ні

- не еквівалентне.

Виконаємо бінарні операції над відношеннями. Для зручності задамо ці відношення перерахуванням:

$R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,d\rangle\}$;

$R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle\}$.

Об'єднання відношень: $R_1 \cup R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle,$ $\langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,d\rangle\}$.

Побудуємо матрицю отриманого відношення:

$R_1 \cup R_2$	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	1	1	0
c	0	1	1	0
d	1	1	0	1

- рефлексивне;
- не антирефлексивне;
- не симетричне ($\langle a,c\rangle \in R_1 \cup R_2$, $\langle c,a\rangle \notin R_1 \cup R_2$);
- не антисиметричне ($\langle a,d\rangle \in R_1 \cup R_2, \langle d,a\rangle \in R_1 \cup R_2$);
- не транзитивне ($\langle d,a\rangle \in R_1 \cup R_2$; $\langle a,c\rangle \in R_1 \cup R_2$, $\langle d,c\rangle \notin R_1 \cup R_2$;

- не еквіваленте.

Перетинання відношень: $R_1 \cap R_2 = \{\langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle\}$.

Побудуємо матрицю отриманого відношення:

$R_1 \cap R_2$	a	b	c	d
a	0	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	1	0	0	0

- не рефлексивне;
- не антирефлексивне;
- симетричне;
- не антисиметричне;
- не транзитивне;
- не еквівалентне.

Різниця відношень: $R_1 - R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$.

Побудуємо матрицю отриманого відношення:

$R_1 - R_2$	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	0	1	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	1

- не рефлексивне;
- не антирефлексивне;
- не симетричне;
- антисиметричне;
- не транзитивне;
- не еквівалентне.

Композиція $T = R_1 \circ R_2$:

$\langle a,a\rangle \in R_1$ і $\langle a,b\rangle \in R_2 \rightarrow \langle a,b\rangle \in T$;

$\langle a,a\rangle \in R_1$ і $\langle a,d\rangle \in R_2 \rightarrow \langle a,d\rangle \in T$;

$\langle a,c\rangle \in R_1$ і $\langle c,b\rangle \in R_2 \rightarrow \langle a,b\rangle \in T$;

$\langle a,c\rangle \in R_1$ і $\langle c,c\rangle \in R_2 \rightarrow \langle a,c\rangle \in T$;

$\langle a,d\rangle \in R_1$ і $\langle d,a\rangle \in R_2 \rightarrow \langle a,a\rangle \in T$;

$\langle a,d\rangle \in R_1$ і $\langle d,b\rangle \in R_2$ $\to$ $\langle a,b\rangle \in T$;

$\langle b,b\rangle \in R_1$ і $\langle b,b\rangle \in R_2$ $\to$ $\langle b,b\rangle \in T$;

$\langle b,c\rangle \in R_1$ і $\langle c,b\rangle \in R_2$ $\to$ $\langle b,b\rangle \in T$;

$\langle b,c\rangle \in R_1$ і $\langle c,c\rangle \in R_2$ $\to$ $\langle b,c\rangle \in T$;

$\langle c,c\rangle \in R_1$ і $\langle c,c\rangle \in R_2$ $\to$ $\langle c,c\rangle \in T$;

$\langle d,a\rangle \in R_1$ і $\langle a,b\rangle \in R_2$ $\to$ $\langle d,b\rangle \in T$;

$\langle d,a\rangle \in R_1$ і $\langle d,d\rangle \in R_2$ $\to$ $\langle d,d\rangle \in T$;

$R_1 \circ R_2$	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	1	0	1

- рефлексивне;
- не антирефлексивне;
- не симетричне;
- антисиметричне;
- не транзитивне;
- не еквівалентне.

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$: $R = \{a \times b \;\; кратне\; 3\}$.

2. З'ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	0	0	1
b	0	1	1
c	0	1	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	1	0	0
c	0	1	1	0
d	1	0	1	0

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	0
c	0	1	1	0
d	1	0	0	1

Варіант № 2

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, 10\}$: $R=\{a+b \ \textit{кратне} \ 4\}$.

2. З'ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	1
c	0	0	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	0	0	1	1
b	1	0	1	0
c	0	0	0	0
d	1	0	1	0

R_2	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	0
d	0	1	0	1

Варіант № 3

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$: $R=\{a+b \text{ } кратне \text{ } a+2\}$.

2. З'ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	0	1	1
b	1	0	1
c	1	0	0

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	0	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	1	1	0
d	1	0	0	0

R_2	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	0
d	1	1	0	0

Варіант № 4

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$: $R=\{a\times b \;\; кратне \;\; 7\}$.

2. З'ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	1
c	1	1	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	0	0
d	1	1	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	1	1	0	0

Варіант № 5

1. Побудувати матрицю відношення R та з’ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, 10\}$: $R=\{a+b \ \textit{кратне} \ a+2\}$.

2. З’ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	1	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	0	0	1	1
b	1	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	1	0	1

R_2	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	1	1	0	1

Варіант № 6

1. Побудувати матрицю відношення R та з’ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$: $R=\{a\times b \;\; кратне \;\; a+3\}$.

2. З’ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	1
c	0	0	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	1	1	1	0
c	1	0	1	0
d	1	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	1
d	0	1	0	0

Варіант № 7

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, 10\}$: $R=\{a+b \ \ \textit{кратне} \ \ a+1\}$.

2. З'ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	1	0	1
b	1	0	1
c	0	1	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	1	0	0	0
d	1	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	1	0	0
c	0	1	0	0
d	1	1	0	0

Варіант № 8

1. Побудувати матрицю відношення R та з’ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, 10\}$: $R=\{a+2b \ \textit{кратне} \ 2\}$.

2. З’ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	1	1	0
b	0	1	1
c	0	0	1

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	0	1	0
c	0	1	1	0
d	1	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	0
d	1	1	0	0

Варіант № 9

1. Побудувати матрицю відношення R та з’ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$: $R=\{a+b \text{ кратне } 5\}$.

2. З’ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	0	0	0
b	1	0	1
c	0	1	0

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині $A=\{a,b,c,d\}$ задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	1	0	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	1	0	0
c	0	1	1	0
d	1	1	0	0

Варіант № 10

1. Побудувати матрицю відношення R та з'ясувати його властивості. Відношення задано на множині $A=\{1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, 10\}$ $R=\{a\times b \text{ кратне } a+4\}$.

2. З'ясувати властивості відношення R, що задано матрицею:

R	a	b	c
a	0	0	0
b	1	0	1
c	0	1	0

Виконати унарні операції. Побудувати матриці отриманих відношень.

3. На множині задані відношення R_1 і R_2 матрицями. Визначити властивості відношень. Виконати бінарні операції над відношеннями R_1 і R_2. Визначити властивості отриманих відношень.

R_1	a	b	c	d
a	1	1	0	1
b	0	0	1	0
c	0	0	1	0
d	1	1	0	1

R_2	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	1	1	0
c	0	1	0	1
d	1	1	0	0

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

Тема: ФУНКЦІЇ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 46-50.

Рекомендований час виконання роботи: 45 хв.

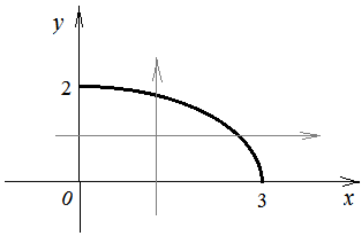
Приклад розв'язання типового варіанту

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f=\left\{\langle x,y\rangle \middle| \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;\quad x,y\in R^+\right\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f\circ g$ і $g\circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x)=2x^2+5$; $g(x)=\log_3(x+1)$.

Розв'язання:

1. Побудуємо задане відношення:



Промінь, спрямований паралельно осі ординат перетинає графік відношення в одній точці, тобто не існує упорядкованих пар, що мають однакові перші координати. Робимо висновок, що дане відношення є *функцією*. Промінь, спрямований паралельно осі абсцис перетинає графік функції в одній точці, з цього робимо висновок, що дана функція є *взаємно однозначною*. Знайдемо обернену f^{-1}:

$$f^{-1} = \left\{ \langle y, x \rangle \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad x, y \in R^+ \right\};$$

$$f^{-1} = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1; \quad x, y \in R^+ \right\};$$

$$f^{-1} = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad x, y \in R^+ \right\}.$$

2. Знайдемо композицію функцій:

$$f \circ g = f(g(x)) = f(\log_3(x+1)) = 2(\log_3(x+1))^2 + 5;$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(2x^2 + 5) = \log_3(2x^2 + 5 + 1) = \log_3(2x^2 + 6).$$

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \left\{ \langle x, y \rangle \middle| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad x, y \in R^+ \right\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = tg(3x^2)$, $g(x) = (x+1)^3$.

Варіант № 2

1. З’ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \{\langle x, y\rangle \mid y = x^2 + 2; \quad x, y \in R^+\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = e^{3x^2}$, $g(x) = \sqrt{3x+2}$.

Варіант № 3

1. З’ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \{\langle x, y\rangle \mid y = |\log_2(x-1)|; \quad x, y \in R^+\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = \sin(x+2)$, $g(x) = \ln\sqrt{x}$.

Варіант № 4

1. З’ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \left\{\langle x, y\rangle \,\middle|\, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1; \quad x \in R, y \in R^+\right\}$ Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = (x+2)^5$, $g(x) = 3^{\cos x}$.

Варіант № 5

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \{\langle x, y\rangle | y = 2^x; \quad x, y \in R\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = ctg(x-4)$, $g(x) = \sqrt{x^3}$.

Варіант № 6

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \{\langle x, y\rangle | y = x^2 + 2; \quad x, y \in R\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = \log_3(x+2)$, $g(x) = x^3 - 2$.

Варіант № 7

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \{\langle x, y\rangle | y = \ln x; \quad x, y \in R\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = \cos(x^3 + 2)$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Варіант № 8

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \{\langle x, y\rangle \mid y = \sqrt{2x+1};\quad x, y \in R\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = \sqrt[5]{x}$.

Варіант № 9

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1;\quad x \in R, y \in R^+\right\}$. Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = 5x + 7$, $g(x) = \sin 2x^2$.

Варіант № 10

1. З'ясувати, чи є відношення f функцією: $f = \{\langle x, y\rangle \mid y = x^3 - 2;\quad x, y \in R\}$ Якщо так, то чи буде вона взаємооднозначною? Знайти обернену.

2. Знайти композицію функцій $f \circ g$ і $g \circ f$, заданих на множині дійсних чисел, якщо $f(x) = \ln(5x + 7)$, $g(x) = 2\sin x^2$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

Тема: ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 52-68.

Рекомендований час виконання роботи: 60 хв.

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

A – «я повернуся в п'ятницю з роботи раніше»;

B – «я завітаю до друга»;

C – «я відправлюсь в кіно»;

D – «я відпочину вдома перед телевізором».

Записати в символьній формі висловлення: «Якщо у п'ятницю мені вдасться раніше повернутися з роботи, я зможу завітати до друга і відправитися з ним у кіно або відпочити вдома перед телевізором».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення $P \vee R \leftrightarrow (Q \to \sim (R \wedge Q))$, якщо $P = 1, Q = 0, R = 1$.

3. Скласти таблицю істинності висловлення $(\sim Q \leftrightarrow P) \to R \wedge \sim (P \vee Q)$.

4. Довести, що формула $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Розв’язання:

1. Дане висловлення має вигляд $A \to ((B \wedge C) \vee D)$.

2. Підпишемо істинностне значення під кожним з простих висловлень та за допомогою таблиць істинності з’ясуємо значення висловлення

$$P \vee R \leftrightarrow (Q \to \sim (R \wedge Q))$$

1 1 0 1 0

0

1

1

1

1

Отже, висловлення істинне.

3. Складемо таблицю істинності, враховуючи порядок дій та таблиці істинності сентенційних зв'язок:

P	Q	R	$\sim Q$	$\sim Q \leftrightarrow P$	$P \vee Q$	$\sim (P \vee Q)$	$R \wedge \sim (P \vee Q)$	$(\sim Q \leftrightarrow P) \to R \wedge \sim (P \vee Q)$
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

4. За допомогою арифметичних процедур і перетворення основних істинностних функцій на такі формули, як:

$\sim P = 1 + P$; $P \wedge Q = P + Q + PQ$; $P \vee Q = PQ$;

$P \rightarrow Q = (1 + P)Q$; $P \leftrightarrow Q = P + Q$,

беручи до уваги, що $2P = 0$, $(1 + P)P = 0$, отримаємо

$B \wedge C = B + C + BC$; $A \vee (B \wedge C) = A(B + C + BC)$;

$A \vee B = AB$; $(A \vee B) \wedge (B \vee C) = AB + BC + ABBC$;

$B \vee C = BC$. Отже,

$$\begin{aligned} & A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (B \vee C) = \\ & = AB + AC + ABC + AB + AC + ABBC = \\ & = 2AB + 2AC + ABC(1 + A) = 0. \end{aligned}$$

Оскільки тавтологією в даній алгебрі є істиностна функція, яка тотожно дорівнює 0, тож задана формула є тавтологією.

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

   A – «я заощаджу кошти під час відпочинку»;

   B – «я забронюю номер в готелі»;

   C – «я отримаю знижку»;

   D – «я відпочиватиму на дачі у друзів».

Записати в символьній формі висловлення: «Я заощаджу кошти під час відпочинку, якщо заздалегідь забронюю номер в готелі і отримаю знижку або відпочиватиму на дачі у друзів».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення $P \vee \sim Q \to \left(R \wedge \sim (P \leftrightarrow R)\right)$, якщо $P = 1, Q = 0, R = 1$.
3. Скласти таблицю істинності висловлення $P \to \left(P \wedge \sim Q \leftrightarrow (\sim P \vee R)\right) \vee Q$.
4. Довести, що формула $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 2

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

A – «популярні пісні співають усі»;

B – «всі знають авторів»;

C – «всі знають виконавців»;

D – «пісня не буде народна».

Записати в символьній формі висловлення: «Якщо популярні пісні співають всі, всі знають авторів та всі знають виконавців, то ця пісня дійсно буде народна».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення $Q \vee \sim (R \to \left(P \wedge \sim Q \leftrightarrow R)\right)$, якщо $P = 0, Q = 0, R = 1$.
3. Скласти таблицю істинності висловлення $R \vee (P \leftrightarrow Q) \to \sim (R \wedge Q)$.
4. Довести, що формула $(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 3

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

   A – «Вірогідність дощу зростає»;

   B – «Низька вологість повітря»;

   C – «Дує західний вітер»;

   D – «Низька хмарність».

Записати в символьній формі висловлення: «Вірогідність дощу зростає, якщо низька вологість повітря і дує західний вітер або низька хмарність».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення $P \leftrightarrow \sim R \to \left(Q \wedge \sim P\right)$, якщо $P = 1, Q = 0, R = 0$.

3. Скласти таблицю істинності висловлення $\sim Q \to R \wedge \left(P \leftrightarrow Q\right) \to \sim R$.

4. Довести, що формула $\left(A \to \left(B \to C\right)\right) \to \left(A \wedge B \to C\right)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 4

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

   A – «Зима буде суворою»;

   B – «Літо буде холодне»;

   C – «Випаде небагато снігу»;

   D – «Будуть сильні морози».

Записати в символьній формі висловлення: «Якщо літо буде нехолодне, то зима буде суворою, випаде багато снігу і будуть сильні морози».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення

$\sim (P \leftrightarrow R) \vee \sim P \rightarrow Q \wedge R$, якщо $P = 1, Q = 1, R = 0$.

3. Скласти таблицю істинності висловлення

$(Q \leftrightarrow \sim P) \vee R \wedge (P \rightarrow Q)$.

4. Довести, що формула $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 5

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

A – «Продукція ексклюзивна»;

B – «Продукція невисокої якості»;

C – «Конкурентоспроможність продукції зростає»;

D – «Продукція має низьку собівартість».

Записати в символьній формі висловлення: «Конкуренто-спроможність продукції зростає тоді і тільки тоді, коли продукція ексклюзивна та високої якості або має низьку собівартість».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення

$P \vee \sim (Q \rightarrow P \wedge \sim (R \leftrightarrow Q))$, якщо $P = 0, Q = 0, R = 1$.

3. Скласти таблицю істинності висловлення

$\sim (R \rightarrow Q) \sim Q \leftrightarrow P \vee R$.

4. Довести, що формула $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 6

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

A – «Я не укладу вигідну угоду»;

B – «Мене премують»;

C – «Я отримаю підвищення посади»;

D – «Я отримуватиму більшу платню».

Записати в символьній формі висловлення: «Якщо я укладу вигідну угоду, то я отримаю підвищення посади, тоді я отримуватиму більшу платню або мене тільки премують».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення $(R \wedge \sim (P \to R)) \to P \leftrightarrow \sim Q$, якщо $P = 0, Q = 0, R = 1$.

3. Скласти таблицю істинності висловлення

$P \to Q \to \sim (P \vee (R \leftrightarrow \sim Q))$.

4. Довести, що формула $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 7

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

A – «Ти вмієш керувати життєвими ситуаціями»;

B – «Життя яскраве і цікаве»;

C – «Ти не маєш свою мету»;

D – «Ти маєш позитивне ставлення до життя».

Записати в символьній формі висловлення: «Життя яскраве і цікаве, якщо вмієш керувати життєвими ситуаціями або маєш свою мету, якщо маєш позитивне ставлення до життя».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення $\sim R \leftrightarrow Q \vee \left(Q \wedge \sim (P \leftrightarrow R)\right)$, якщо $P = 0, Q = 0, R = 1$.

3. Скласти таблицю істинності висловлення $\sim (P \wedge R) \to P \leftrightarrow Q \wedge \sim R$.

4. Довести, що формула $(A \leftrightarrow B) \wedge ((B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C))$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 8

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

A – «Стиль керівництва «перетворюючий»»;

B – «Стиль керівництва спрямований на взаємодію з підлеглими»;

C – «Стиль керівництва спрямований на підтримку співробітників у складних ситуаціях»;

D – «Жінка-менеджер є керівником підприємства».

Записати в символьній формі висловлення: «Якщо стиль керівництва «перетворюючий» і спрямований на взаємодію з підлеглими або підтримку співробітників у складних ситуаціях, то керівником такого підприємства є жінка-менеджер».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення

$R \vee (P \to \sim Q) \wedge (P \leftrightarrow R) \to \sim R$, якщо $P=1, Q=0, R=1$.

3. Скласти таблицю істинності висловлення

$\sim P \vee (Q \leftrightarrow R) \to (R \wedge \sim Q)$.

4. Довести, що формула $(A \to B) \wedge (C \to B) \leftrightarrow (A \vee C \to B)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 9

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

A – «Успішний менеджер»;

B – «Менеджер швидко приймає рішення»;

C – «Менеджер вміє повести за собою людей»;

D – «Менеджер добре володіє ситуацією».

Записати в символьній формі висловлення: «Успішний менеджер лише тоді, коли він швидко приймає рішення і вміє повести за собою людей або добре володіє ситуацією».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення

$Q \wedge (R \leftrightarrow ((Q \to \sim P) \to \sim R))$, якщо $P=1, Q=0, R=1$.

1. Скласти таблицю істинності висловлення

$(P \vee \sim R \leftrightarrow Q) \to P \wedge Q$.

2. Довести, що формула $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Варіант № 10

1. Нехай A, B, C, D позначають наступні висловлення:

А – «Взимку випаде багато снігу»;

В – «Я кататимусь на санчатах»;

С – «Я кататимусь на лижах»;

D – «Я куплю собі лижі».

Записати в символьній формі висловлення: «Якщо взимку випаде багато снігу, то я кататимусь на санчатах або на лижах і це тільки, якщо я куплю собі лижі ».

2. Знайти істинносте значення наступного висловлення

$P \vee (Q \to (R \to \sim Q)) \leftrightarrow \sim R$, якщо $P = 1, Q = 0, R = 1$.

1. Скласти таблицю істинності висловлення

   $(P \wedge Q) \vee R \leftrightarrow P \wedge Q \to \sim R$.

2. Довести, що формула $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to C)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

Тема: АЛГЕБРА ЛОГІКИ. ЛОГІЧНІ ФУНКЦІЇ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 80-85.

Рекомендований час виконання роботи: 30 хв.

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Обчислити значення функції
   $f(x_1, x_2, x_3) = \psi_7(\psi_3(x_3, x_1), \psi_{11}(x_1, x_2))$ на наборі $(1{,}1{,}0)$.
2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою
   $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \oplus (x_1 \downarrow \overline{x}_3)$.

Розв'язання:

1. Скористаємося таблицею істинності логічних функцій двох змінних (табл. 4.2, $[1]$) і обчислимо значення кожної логічної змінної складної функції:
   $\psi_3(x_3, x_1) = \psi_3(0{,}1) = 0$;
   $\psi_{11}(x_1, x_2) = \psi_{11}(1{,}1) = 1$;
   $f(x_1, x_2, x_3) = \psi_7(\psi_3(x_3, x_1), \psi_{11}(x_1, x_2)) = \psi_7(0{,}1) = 1$.

Отже, на зазначеному наборі функція приймає істинне значення.

2. Складемо таблицю істинності, істинностне значення додавання за модулем 2 та стрілки Пірса знайдемо як значення функцій ψ_6 та ψ_8 (табл. 4.2, $[1]$).

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$x_1 \downarrow \bar{x}_3$	$x_2 \oplus \left(x_1 \downarrow \bar{x}_3\right)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. Обчислити значення функції

   $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \psi_{13}\left(\psi_7\left(x_3, x_1\right), \psi_1\left(x_2, x_1\right)\right)$ на наборі $(0,1,0)$.

2. Складати таблицю істинності функції, заданої формулою

   $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\bar{x}_2 | x_1\right) \oplus \left(x_1 \downarrow \bar{x}_3\right)$.

Варіант № 2

1. Обчислити значення функції

   $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \psi_3\left(\psi_8\left(x_2, x_1\right), \psi_{10}\left(x_1, x_3\right)\right)$ на наборі $(0,1,1)$.

2. Складати таблицю істинності функції, заданої формулою

   $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\bar{x}_2 \leftarrow x_3\right) \oplus \left(x_2 | \bar{x}_1\right)$.

Варіант № 3

1. Обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_6(\psi_{11}(x_2, x_1), \psi_1(x_3, x_2))$$ на наборі $(1,0,1)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 x_3) \oplus (x_2 \downarrow x_3).$$

Варіант № 4

1. Обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_8(\psi_1(x_2, x_3), \psi_4(x_1, x_2))$$ на наборі $(1,0,0)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \oplus \bar{x}_3) \downarrow (\bar{x}_1 \to x_2).$$

Варіант № 5

1. Обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_9(\psi_5(x_3, x_1), \psi_2(x_2, x_1))$$ на наборі $(0,0,1)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_2 | x_1) \oplus (x_1 \bar{x}_3 \vee x_2).$$

Варіант № 6

1. Обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_6(\psi_7(x_2, x_1), \psi_{14}(x_3, x_2))$$ на наборі $(1,0,0)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 | \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2).$$

Варіант № 7

1. Обчислити значення функції

$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_2(\psi_3(x_3), \psi_8(x_2, x_1))$ на наборі $(1,0,1)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_2 \vee x_3) \downarrow \overline{(x_1 | \bar{x}_3)}$.

Варіант № 8

1. Обчислити значення функції

$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_{14}(\psi_4(x_1, x_3), \psi_{15}(x_3, x_2))$ на наборі $(1,1,0)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \oplus \bar{x}_3) \leftarrow (\bar{x}_1 \vee x_2)$.

Варіант № 9

1. Обчислити значення функції

$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(\psi_8(x_2, x_3), \psi_6(x_1, x_2))$ на наборі $(0,1,1)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 | x_3) \oplus \overline{(x_3 \downarrow x_2)}$.

Варіант № 10

1. Обчислити значення функції

$f(x_1, x_2, x_3) = \psi_{13}(\psi_7(x_1, x_3), \psi_{11}(x_1, x_2))$ на наборі $(0,1,0)$.

2. Скласти таблицю істинності функції, заданої формулою

$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_2 \oplus x_1)(x_3 \downarrow x_2)$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6

Тема: АЛГЕБРА ЛОГІКИ. ДОВЕРШЕННІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ. ФУНКЦІОНАЛЬНО ПОВНІ СИСТЕМИ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 86-100.

Рекомендований час виконання роботи: 45 хв.

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(\bar{x}_3 | x_2)$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $xyz \vee \bar{x} \vee y$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_2$, $\sum_4$, $\sum_6$.

Розв'язання:

1. Складемо таблицю істинності функції:

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_3 \vert x_2$	$x_1(\bar{x}_3 \vert x_2)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1

Функція має три одиничних набора, ДДНФ має вигляд:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.

Функція має п’ять нульових набора, ДКНФ має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

2. Представимо функцію у запропонованих базисах.

Згадаємо, що у базисі $\sum_2 = \{\vee, \sim\}$ - диз’юнктивній системі Буля, необхідно виключити кон’юкцію. Скористаємося законом де Моргана: $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$:

$$xyz \vee \bar{x} \vee y = \overline{\bar{x} \vee \overline{\overline{yz}}} \vee \bar{x} \vee y = \overline{\bar{x} \vee \overline{\overline{\bar{y} \vee \bar{z}}}} \vee \bar{x} \vee y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \vee \bar{x} \vee y.$$

Система $\sum_4 = \{\downarrow\}$ - система Пірса. Формули переходу від заперечення та диз’юнкції мають вигляд:

$$\bar{x} = x \downarrow x; \quad x \vee y = \overline{x \downarrow y}.$$

Для того, щоб представити функцію у системі Пірса, скористаємося результатами, отриманими при запису функції у диз’юнктивній системі Буля, та виключимо заперечення та диз’юнкцію:

$$\overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}} \vee \bar{x} \vee y = \overline{(x \downarrow x) \vee (y \downarrow y) \vee (z \downarrow z)} \vee (x \downarrow x) \vee y =$$

$$= \overline{\overline{(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)} \vee (z \downarrow z)} \vee \overline{(x \downarrow x) \downarrow y} =$$

$$= \overline{((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \vee (z \downarrow z)} \vee$$
$$\vee ((x \downarrow x) \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow y) =$$

$$=\overline{\overline{\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(z\downarrow z\right)}}\vee$$

$$\vee\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)=$$

$$=\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(z\downarrow z\right)\vee$$

$$\vee\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)=$$

$$=\overline{\left(\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(z\downarrow z\right)\right)\downarrow\left(\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\right)}=$$
$$=\left(\left(\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(z\downarrow z\right)\right)\downarrow\left(\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\right)\right)\downarrow$$
$$\downarrow\left(\left(\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow\left(y\downarrow y\right)\right)\downarrow\left(z\downarrow z\right)\right)\downarrow\left(\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\downarrow\left(\left(x\downarrow x\right)\downarrow y\right)\right)\right)$$

Для переходу до системи $\sum_6=\{\to,\sim\}$ - імплікаційній системи, за допомогою формули $x\to y=\bar{x}\vee y$, знов скористаємося представленням функції у диз’юнктивній системі Буля:

$$\overline{\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}}\vee\bar{x}\vee y=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z}}\vee\left(x\to y\right)=\overline{x\to\left(\bar{y}\vee\bar{z}\right)}\vee\left(x\to y\right)=$$
$$\overline{x\to\left(y\to\bar{z}\right)}\vee\left(x\to y\right)=\left(x\to\left(y\to\bar{z}\right)\right)\to\left(x\to y\right).$$

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. Логічну функцію $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\bar{x}_1\vee\left(x_2\downarrow x_3\right)$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $xy\vee\bar{y}z$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_2$, $\sum_4$, $\sum_6$.

Варіант № 2

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_2 | x_3) \vee \bar{x}_1$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $\bar{x} \vee yx \vee yz$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_1$, $\sum_3$, $\sum_5$

Варіант № 3

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_3 | x_2$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $x\bar{y}z \vee \bar{x}y$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_2$, $\sum_4$, $\sum_6$.

Варіант № 4

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee (\bar{x}_3 | x_1)$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $x \vee \bar{x}yz \vee \bar{y}$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_1$, $\sum_3$, $\sum_5$.

Варіант № 5

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 | x_2) \vee x_1 x_3$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.

2. Подати логічну функцію $xz \vee \bar{x} \vee yz$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_2$, $\sum_4$, $\sum_6$.

Варіант № 6

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2(\bar{x}_3 \downarrow x_1)$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $\bar{y}z \vee \bar{x} \vee y$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_1$, $\sum_3$, $\sum_5$.

Варіант № 7

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \downarrow (\bar{x}_3 | x_1)$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $x \vee \bar{x} \vee \bar{z}y \vee yx$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_2$, $\sum_4$, $\sum_6$.

Варіант № 8

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_3 | x_2$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $xyz \vee \overline{xy} \vee yz$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_1$, $\sum_3$, $\sum_5$.

Варіант № 9

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \downarrow x_3\bar{x}_2$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $xz \vee \bar{y} \vee \bar{z}y$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_2$, $\sum_4$, $\sum_6$.

Варіант № 10

1. Логічну функцію $f(x_1, x_2, x_3) = x_2(\bar{x}_1 | x_3)$ представити у вигляді ДДНФ та ДКНФ.
2. Подати логічну функцію $xyz \vee \bar{y} \vee z$, задану булевою формулою, у базисах $\sum_1$, $\sum_3$, $\sum_5$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

Тема: АЛГЕБРА ЛОГІКИ. ПОХІДНА ВІД БУЛЕВОЇ ФУНКЦІЇ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: $[1]$, стор. 101-104.

Рекомендований час виконання роботи: 45 хв.

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_3$

Розв'язання:

1. Скористаємося визначенням похідної від булевої функції та закони логіки Буля:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (\bar{x}_2 x_3 \vee 1 x_2 \bar{x}_3) \oplus (\bar{x}_2 x_3 \vee 0 x_2 \bar{x}_3) = (\bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3) \oplus (\bar{x}_2 x_3 \vee 0) =$$
$$= (\bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_2 x_3 .$$

Ця формула не є булевою, спробуємо представити їх у вигляді ДКНФ або ДДНФ. Для цього отримаємо її таблицю істинності:

x_2	x_3	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$	$(\bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_2 x_3$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0

Таблиця істинності має один одиничний набір, тому доречно представити похідну у вигляді ДДНФ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \bar{x}_2 x_3 .$$

Знайдемо похідну логічної функції по змінній x_2:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \left(\bar{1} x_3 \vee x_1 1 x_3\right) \oplus \left(\bar{0} x_3 \vee x_1 0 x_3\right) = \left(0 x_3 \vee x_1 x_3\right) \oplus \left(1 x_3 \vee 0\right) =$$

$$= \left(0 \vee x_1 x_3\right) \oplus x_3 = x_1 x_3 \oplus x_3 = x_3\left(x_1 \oplus 1\right) = \bar{x}_1 x_3 .$$

Отриманий вираз є булевою формулою, тому спрощення не потребує.

Знайдемо похідну логічної функції по змінній x_3:

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \left(\bar{x}_2 1 \vee x_1 x_2 1\right) \oplus \left(\bar{x}_2 0 \vee x_1 x_2 0\right) = \left(\bar{x}_2 \vee x_1 x_2\right) \oplus \left(0 \vee 0\right) =$$

$$= \left(\bar{x}_2 \vee x_1 x_2\right) \oplus 0 = \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 .$$

Отриманий вираз є булевою формулою, тому спрощення не потребує.

Остаточно маємо: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \bar{x}_2 x_3$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \bar{x}_1 x_3$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$.

2. Для знаходження похідних другого порядку необхідно знайти похідні першого порядку.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(1 x_2 \vee \bar{x}_3\right) \oplus \left(0 x_2 \vee \bar{x}_3\right) = \left(x_2 \vee \bar{x}_3\right) \oplus \bar{x}_3$$

Ця формула не є булевою, представимо їх у вигляді ДКНФ або ДДНФ. Для цього отримаємо її таблицю істинності:

x_2	x_2	$\overline{x}_3$	$x_2 \vee \overline{x}_3$	$(x_2 \vee \overline{x}_3) \oplus \overline{x}_3$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

Таблиця істинності має один одиничний набір, тому доречно представити похідну у вигляді ДДНФ:

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 x_3$. Аналогічним чином знайдемо похідні заданої логічної функції по змінним x_2 та x_3, та отримаємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (x_1 1 \vee \overline{x}_3) \oplus (x_1 0 \vee \overline{x}_3) = (x_1 \vee \overline{x}_3) \oplus \overline{x}_3 = x_1 x_3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (x_1 x_2 \vee 0) \oplus (x_1 x_2 \vee 1) = x_1 x_2 \oplus 1 = \overline{x_1 x_2}\,.$$

Тепер послідовно знайдемо похідні другого порядку, де в якості функції виступатимуть знайдені перші похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = 1x_3 \oplus 0x_3 = x_3 \oplus 0 = x_3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = x_2 1 \oplus x_2 0 = x_2 \oplus 0 = x_2\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = 1x_3 \oplus 0x_3 = x_3 \oplus 0 = x_3\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = x_1 1 \oplus x_1 0 = x_1 \oplus 0 = x_1\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2} = \frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \overline{1 x_2} \oplus \overline{0 x_2} = \bar{x}_2 \oplus 1 = x_2\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \overline{x_1 1} \oplus \overline{x_1 0} = \bar{x}_1 \oplus 1 = x_1\,.$$

Остаточно маємо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = x_3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = x_1.$$

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$

від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$.

Варіант № 2

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \vee x_2 \bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$.

Варіант № 3

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$

від булевої функції трьох змінних $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2$.

Варіант № 4

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=\bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_3$.
2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 x_2$.

Варіант № 5

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=\bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$.
2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$

від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2$.

Варіант № 6

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$$

від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3$.

Варіант № 7

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$$

від булевої функції трьох змінних $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 x_3$.

Варіант № 8

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_2\bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$.

Варіант № 9

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$

від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2$.

Варіант № 10

1. Знайти похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

2. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3}$ від булевої функції трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 8

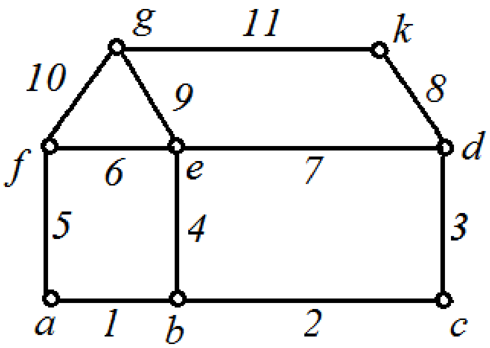
Тема: ТЕОРІЯ ГРАФІВ. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ. СПОСОБИ ЗАВДАННЯ ГРАФІВ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 133-147.

Рекомендований час виконання роботи: 45 хв.

Приклад розв’язання типового варіанту

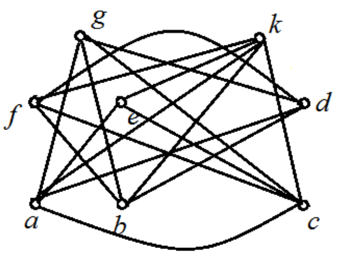
Дано граф:



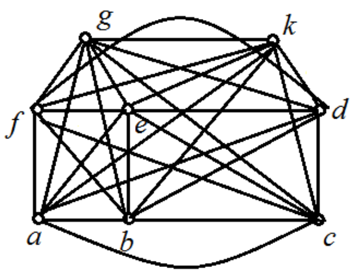
1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Розв’язання:

1. Даний граф не є повним. Знайдемо доповнення та побудуємо повний граф:



$\overline{G}$



G

2. Знайдемо степені всіх вершин графа:

$\deg(a)=2$; $\deg(b)=3$; $\deg(c)=2$; $\deg(d)=3$; $\deg(e)=4$; $\deg(f)=3$; $\deg(g)=3$; $\deg(k)=2$.

$$\sum_i \deg v_i = 2+3+2+3+4+3+3+2 = 22 = 2\cdot 11.$$

3. Матриця інцидентності має вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
f	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Матриця суміжності має вигляд:

	a	b	c	d	e	f	g	k
a	0	1	0	0	0	1	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	1
e	0	1	0	1	0	1	1	0
f	1	0	0	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0
k	0	0	0	1	0	0	1	0

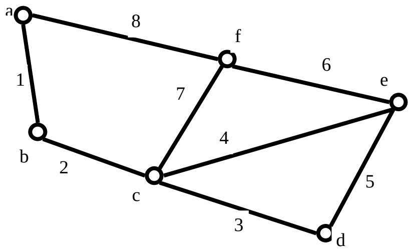
Список ребер має вигляд:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вершина	п	*a*	*b*	*c*	*b*	*a*	*f*	*d*	*d*	*e*	*f*	*k*
	к	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*e*	*e*	*k*	*g*	*g*	*g*

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

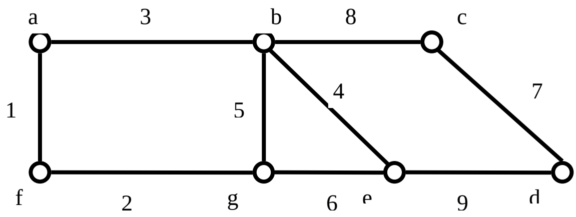
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 2

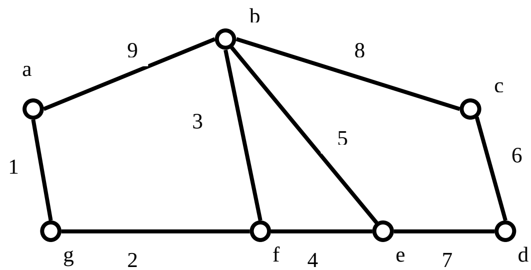
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 3

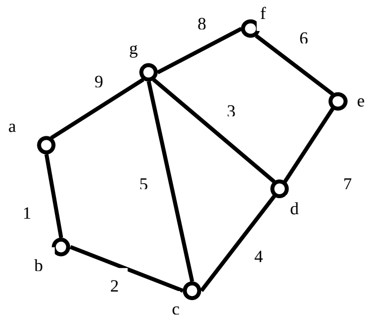
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 4

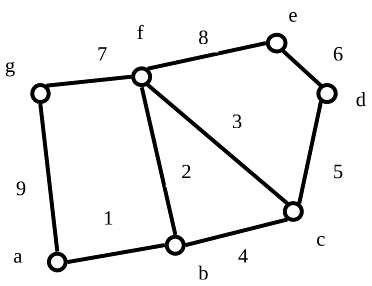
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 5

Дано граф:

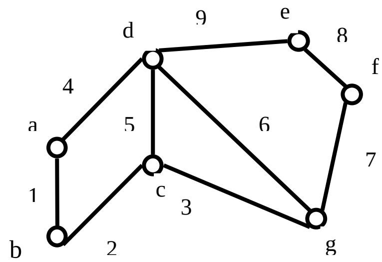


1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.

3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 6

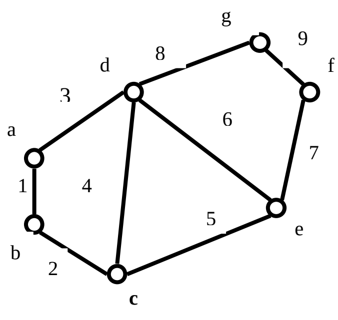
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 7

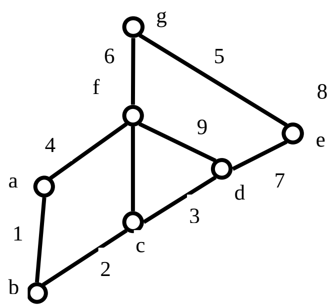
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 8

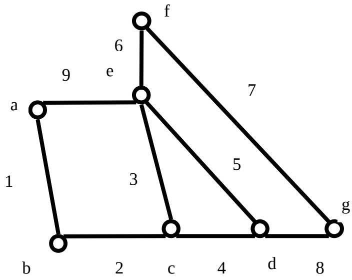
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 9

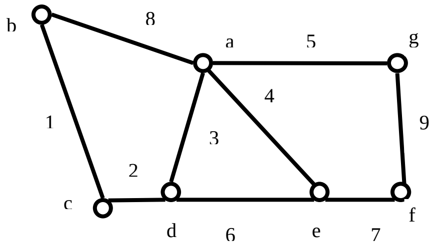
Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Варіант № 10

Дано граф:



1. Визначити, чи є даний граф повним, якщо ні, знайти доповнення графа. Побудувати повний граф.
2. Визначити степені вершин графа.
3. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 9

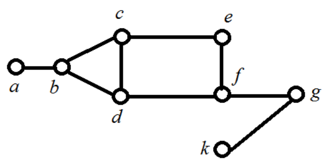
Тема: ТЕОРІЯ ГРАФІВ. МЕТРИКА НА ГРАФАХ

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 150-160.

Рекомендований час виконання роботи: 45 хв.

Приклад розв’язання типового варіанту

Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Розв’язання: 1. Матриця відстаней має вигляд:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*k*
a	0	1	2	2	3	3	4	5
b	1	0	1	1	2	2	3	4
c	2	1	0	1	1	1	2	3
d	2	1	1	0	2	1	2	3
e	3	2	1	2	0	1	2	3
f	3	2	1	1	1	0	1	2
g	4	3	2	2	2	1	0	1
k	5	4	3	3	3	2	1	0

3. Для того, щоб визначити центр та периферійні вершини, знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа. Скористаємося отриманою матрицею відстаней:

$l(a)=5;\ l(b)=4;\ l(c)=3;\ l(d)=3;\ l(e)=3;\ l(f)=3;\ l(g)=4;\ l(k)=5$

Найменша максимальна відстань від вершин $c,\ d,\ e,\ f$, отже центр графа – множина вершин $\{c, d, e, f\}$. Найбільша максимальна відстань від вершин $a,\ k$, отже саме вони є периферійними вершинами: $\{a,\ k\}$.

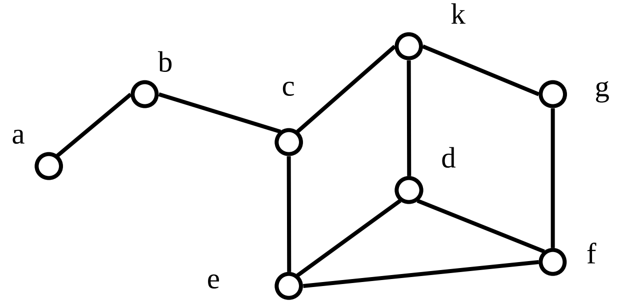
4. Для визначення радіусу та діаметру теж скористаємося матрицею відстаней.

Бачимо, що найменше відхилення геодезичної дорівнює 3, отже $R(G)=3$, а найбільше відхилення геодезичної дорівнює 5, отже $D(G)=5$.

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

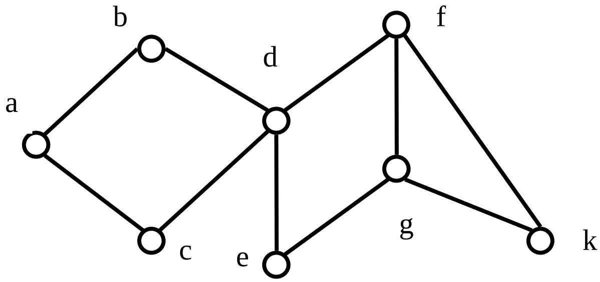
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 2

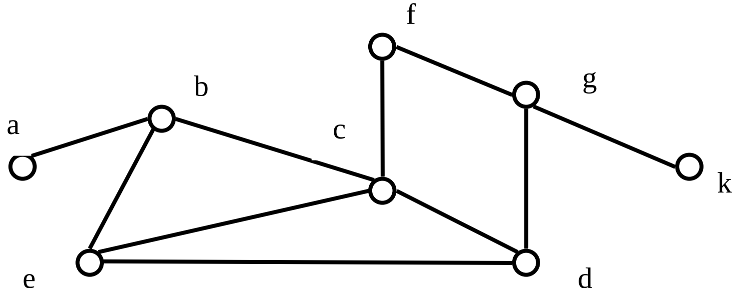
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 3

Дано граф:

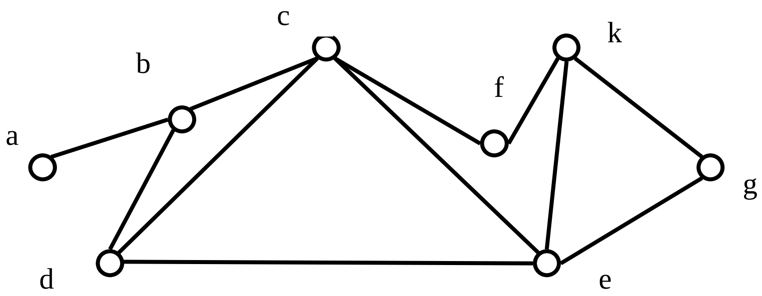


1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.

3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 4

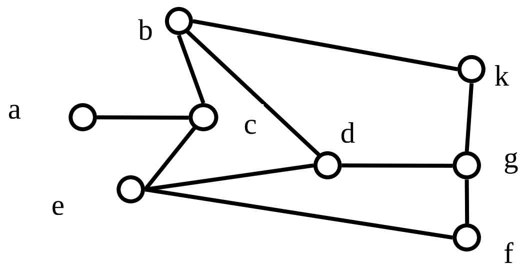
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 5

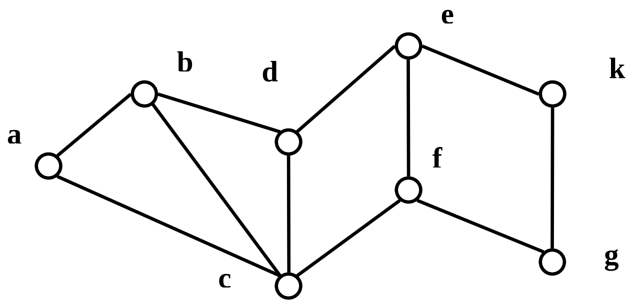
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 6

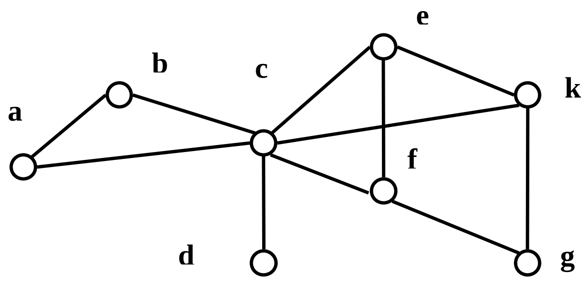
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 7

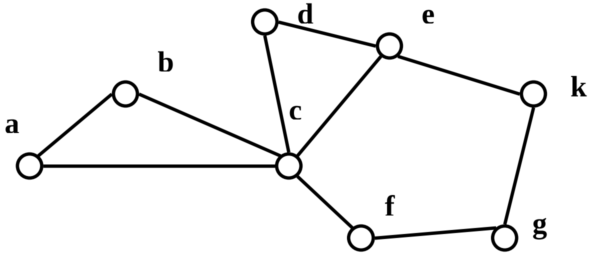
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 8

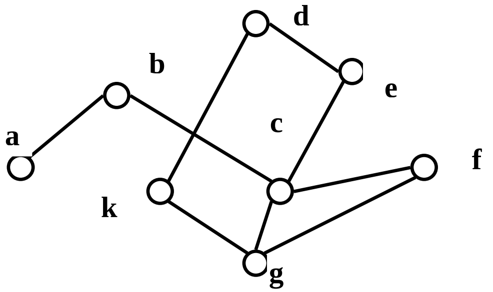
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 9

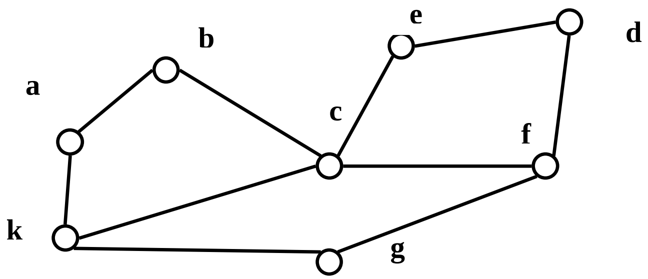
Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

Варіант № 10

Дано граф:



1. Побудувати матрицю відстаней графа.
2. Знайти центр, периферійні першини графа.
3. Знайти радіус та діаметр графа.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 10

Тема: КОМБІНАТОРИКА

Перед виконанням контрольної роботи радимо повторити теоретичний матеріал: [1], стор. 181-184.

Рекомендований час виконання роботи: 45 хв.

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Розв'язати рівняння $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^{3}$.
2. Обчислити $\dfrac{3!+4!}{5!}$.

3. Спростити вираз $\dfrac{A_{n-1}^{n-3}}{C_n^{n-2}}$.

Розв'язання:

1. Зрозуміло, що $x > -3$. Скористуємося формулами для обчислення числа розміщення та сполучення ($[1]$, стор. 182-183) і отримаємо: $A_{x+6}^3 = \dfrac{(x+6)!}{(x+3)!}$,

$C_{x+8}^{x+3} = \dfrac{(x+8)!}{(x+8-(x+3))!(x+3)!} = \dfrac{(x+8)!}{5!(x+3)!}$. Спростимо отримані вирази згідно з визначенням факторіала:

$$A_{x+6}^3 = \frac{(x+6)!}{(x+3)!} = \frac{(x+3)!(x+4)(x+5)(x+6)}{(x+3)!} =$$
$$= (x+4)(x+5)(x+6);$$
$$C_{x+8}^{x+3} = \frac{(x+3)!(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot (x+3)!} =$$
$$= \frac{(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)}{120}.$$

Підставивши в рівняння отримані вирази, маємо:

$$\frac{(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)}{120} = 5(x+4)(x+5)(x+6).$$

Скоротимо чисельник і знаменник рівняння на множники $(x+4)(x+5)(x+6)$, які не дорівнюють нулю: $\dfrac{(x+7)(x+8)}{120} = 5$, після спрощення отримаємо квадратне рівняння: $x^2 + 15x - 544 = 0$. Його корені: $x_1 = -32$ та $x_2 = 17$. Корень

$x_1 = -32$ не задовільняє області визначення, тому розв'язком рівняння є корінь $x_2 = 17$.

2. За визначенням, факторіал - це добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно, отже $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 3! \cdot 4 \cdot 5$. Підставимо в завдання отримані вирази, спростимо його. Отже, маємо результат:

$$\frac{3!+4!}{5!} = \frac{3!+3!\cdot 4}{3!\cdot 4 \cdot 5} = \frac{3!\left(1+4\right)}{3!\cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{4}.$$

3. Для спрощення виразу використаємося формулами для обчислення числа розміщення та сполучення ($[1]$, стор. 182-183) і отримаємо

$$\frac{A_{n-1}^{n-3}}{C_n^{n-2}} = \frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-(n-3))!}}{\dfrac{(n)!}{(n-2)!(n-(n-2))!}} = \frac{\dfrac{(n-1)!}{2!}}{\dfrac{n!}{(n-2)!2!}} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-2)!}{n!} = \frac{(n-1)!(n-2)!}{(n-1)!\cdot n} = \frac{(n-2)!}{n}.$$

Завдання до контрольних робіт

Варіант № 1

1. Розв'язати рівняння $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$.
2. Обчислити $\dfrac{9!-8!}{10!}$.
3. Спростити вираз $\dfrac{C_{n+1}^{n-1}}{P_n}$.

Варіант № 2

1. Розв’язати рівняння $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1)$.
2. Обчислити $\dfrac{4!+3!}{2!}$.
3. Спростити вираз $\dfrac{A_{n-2}^{n-4}}{A_{n+1}^{n-1}}$.

Варіант № 3

1. Розв’язати рівняння $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$.
2. Обчислити $\dfrac{5!+4!}{7!}$.
3. Спростити вираз $\dfrac{A_{n+1}^{n}}{P_{n-1}}$.

Варіант № 4

1. Розв’язати рівняння $\dfrac{C_x^{x-3} \cdot A_{x-3}^{x-4}}{P_{x-1}} = 5$.
2. Обчислити $\dfrac{7!-6!}{8!}$.
3. Спростити вираз $\dfrac{A_{n-2}^{n-3}}{C_{n+2}^{n-1}}$.

Варіант № 5

1. Розв’язати рівняння $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3} = 210$.
2. Обчислити $\dfrac{8!-6!}{7!}$.

3. Спростити вираз $\frac{C_{n-1}^{n-3}}{P_{n-2}}$.

Варіант № 6

1. Розв'язати рівняння $3C_x^{x-2} - 4C_{x-2}^{x-3} + 2C_{x-1}^{x-2} = 56$.
2. Обчислити $\frac{6!+4!}{5!}$.
3. Спростити вираз $\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_n^{n-1}}$.

Варіант № 7

1. Розв'язати рівняння $P_{x+3} = 720 A_x^5 \cdot P_{x-5}$.
2. Обчислити $\frac{7!+5!}{5!}$.
3. Спростити вираз $\frac{P_{n-1}}{C_n^{n-2}}$.

Варіант № 8

1. Розв'язати рівняння $A_x^2 + 3C_{x-1}^{x-3} = 27 - 13x$.
2. Обчислити $\frac{8!-5!}{9!}$.
3. Спростити вираз $\frac{A_{n+2}^n}{P_{n+1}}$.

Варіант № 9

1. Розв'язати рівняння $\frac{P_{x+2}}{A_x^2 \cdot P_{x-2}} = 132$.
2. Обчислити $\frac{2!+3!}{5!}$.

3. Спростити вираз $\dfrac{A_{n+1}^{n-1}}{C_{n-1}^{n-2}}$.

Варіант № 10

1. Розв’язати рівняння $C_{x+4}^{x+1} - C_{x+3}^{x} = 15(x+2)$.
2. Обчислити $\dfrac{5!-3!}{6!}$.
3. Спростити вираз $\dfrac{P_{n+1}}{C_{n+2}^{n-2}}$.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ ТА КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів 1, 2 курсів всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030601 "Менеджмент")

Укладачі: **Коваленко** Людмила Борисівна,
Ситникова Юлія Валеріївна

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко,*
Ю. В. Ситникова

План 2011, поз. 155М

Підп. до друку 20.09.2011 Формат 60х84/16
Друк на різографі. Ум. друк. арк. 5
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.