

В И Щ А
МАТЕМАТИКА
для електротехніків
у трьох модулях

М **В. В. Бізюк**
О **А. В. Якунін**

Д **Числові та функціональні**
У **ряди**

Л **Функції декількох змінних**

Ь **Елементи теорії поля.**

З **Криволінійні та поверхневі**
інтеграли. Рівняння
математичної фізики

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

для електротехніків

у трьох модулях

Модуль 3

В. В. Бізюк, А. В. Якунін

**Числові та функціональні ряди. Функції
декількох змінних. Елементи теорії поля.
Криволінійні та поверхневі інтеграли.
Рівняння математичної фізики**

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України*

**Харків
ХНАМГ
2011**

УДК [514.1+517.2+517.3+517.5+517.9](075)

ББК 22.11я7

В 55

Рецензенти:

Ю. Л. Геворкян, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики (Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”);

В. К. Дубовий, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);

О. М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);

М. А. Мартиненко, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики (Національний університет харчових технологій)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-6050 від 14.07.2011 р.)*

Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях:
B55 навч. посіб. / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. – ISBN 978-966-695-165-9

Модуль 3: Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – 2011. – 383 с.

ISBN 978-966-695-219-9

За модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають третьому семестру за діючою програмою для електротехнічних спеціальностей. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.

Модуль 1 і модуль 2 вийшли з друку відповідно в 2009 р. і в 2010 р.

УДК [514.1+517.2+517.3+517.5+517.9](075)

ББК 22.11я7

ISBN 978-966-695-165-9

ISBN 978-966-695-219-9 (Модуль 3)

© Бізюк В. В., Якунін А. В., 2011

© ХНАМГ, 2011

Передмова

У навчальному посібнику за модульною технологією викладено розділи, що відповідають третьому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до електротехнічних задач. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Основою даного посібника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті електропостачання і освітлення міст Харківської національної академії міського господарства.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей, а також може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Автори щиро вдячні своєму колезі Станішевському С.О. за сприяння у підготовці посібника.

Критичні зауваження і пропозиції щодо посібника надсилайте на кафедру вищої математики за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. ВМ;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

Змістовий модуль 1.

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

1.1. Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Нехай $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – нескінченна числова послідовність. Нескінченна сума $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **числовим рядом**, а її доданки $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – відповідними (за номером) **членами ряду**, причому n -й член u_n також має назву **загального члена**.

Скінченна сума $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$ всіх перших членів ряду до u_n включно називається **n -ю частковою сумою ряду** ($n = 1, 2, \dots$).

Ряд називається **збіжним**, якщо існує скінченна границя при $n \rightarrow \infty$ послідовності $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ його часткових сум:

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. При цьому число S називають **сумою ряду** і пишуть

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається **розбіжним**.

Зауваження 1. Розбіжний ряд суми не має. Проте інколи у випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ відповідно покладають

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$ або $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$.

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} + \dots$, який утворюється з початкового ряду $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ відкиданням перших n членів називається **n -м залишком ряду** ($n = 1, 2, \dots$).

Розглянемо **геометричний ряд (ряд геометричної прогресії)**

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

з *першим членом* $a \neq 0$ і *знаменником* q . Знайдемо границю при $n \rightarrow \infty$ послідовності його часткових сум:

$$S_n = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \begin{cases} (a - aq^n)/(1 - q) & \text{при } q \neq 1, \\ na & \text{при } q = 1; \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (a/(1 - q)) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = a/(1 - q).$$

Ряд збігається і його сума $\boxed{S = a/(1 - q)}$.

Якщо $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ і тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Таким чином, ряд розбігається.

Якщо $q = 1$, то ряд має вигляд $a + a + a + \dots + a + \dots$ і тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Отже, ряд розбігається.

Якщо $q = -1$, то ряд має вигляд $a - a + \dots + (-1)^{n-1} a + \dots$. У цьому разі

$$S_n = a(1 - (-1)^n)/2 = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ a & \text{при } n = 2k - 1; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Отже, S_n при $n \rightarrow \infty$ границі не має – ряд є розбіжним.

Таким чином, *ряд геометричної прогресії збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.*

При розгляді числових рядів розв'язують дві основні задачі:

- 1) дослідити ряд на збіжність;
- 2) знайти суму збіжного ряду.

Приклад 1. Користуючись означенням, дослідити ряд на збіжність. Для збіжного ряду вказати його суму:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 1/n); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n - 2)(5n + 3)}.$$

□ а) Перетворимо загальний член ряду

$$u_n = \ln(1 + 1/n) = \ln((n + 1)/n) = \ln(n + 1) - \ln n.$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі

$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$,
 вигляд якої не залежить від числа n . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Отже, ряд розбігається.

б) Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дробки:

$$u_n = \frac{1}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{A}{5n-2} + \frac{B}{5n+3} =$$

$$= \left| A(5n+3) + B(5n-2) = 1; \quad \begin{array}{l} n = 2/5: \{ 5A = 1; \quad A = 1/5; \\ n = -3/5: \{ -5B = 1; \quad B = -1/5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1/5}{5n-2} + \frac{-1/5}{5n+3} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right).$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі, де кількість доданків не залежить від числа n :

$$S_n = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{5n-7} - \frac{1}{5n-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right).$$

Знайдемо границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

Отже, ряд збігається і його сума $S = 1/15$. ■

Властивості числових рядів:

1) *Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи додати скінченне число членів.* (Для збіжного ряду значення суми при цьому, в загальному випадку, змінюється).

Зокрема, *ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно.*

2) Для збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ його n -й залишок

$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = R_n$ служить похибкою наближення $S \approx S_n$ суми ряду S його n -ю частковою сумою S_n . При цьому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Зауваження 2. Якщо враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених в S_n членів ряду, то задана точність ε наближення $S \approx S_n$ служить граничною загальною абсолютною похибкою $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, яка складається з граничної абсолютної похибки обчислення ε_1 модуля залишку ряду R_n та граничної абсолютної похибки округлення ε_2 при обчисленні суми залишених в S_n членів. Звичайно беруть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$. Кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність ε_2 обчислення їх суми, визначається з умови: $0,5 \cdot 10^{-k} \cdot n \leq \varepsilon_2$, де n – кількість залишених членів.

3) Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник $C = \text{const} \neq 0$, то його збіжність не порушиться. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на C :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C u_n = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n ;$$

4) Два збіжні ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

можна почленно додавати і віднімати. Одержані ряди також збігаються і при цьому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + \dots + (u_n - v_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

5) Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом.

б) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму.

Зауваження 3. Про суму (різницю) розбіжних рядів нічого певного стверджувати не можна: результуючий ряд може як збігатися, так і розбігатися.

На практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються **ознаки збіжності**, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Теорема (необхідна ознака збіжності). Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

□ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, де S – сума ряду (стала величина). Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$, бо при $n \rightarrow \infty$ і $n-1 \rightarrow \infty$. Віднімаючи з першої рівності другу, дістанемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Але $S_n - S_{n-1} = u_n$. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. ■

Зауваження 4. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член u_n при $n \rightarrow \infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається. Наприклад, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+1/n)$ з прикладу 1.а) необхідна ознака виконується

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+1/n) = \ln 1 = 0$, але ряд розбігається.

Наслідок (достатня ознака розбіжності). Якщо границя загального члена u_n при $n \rightarrow \infty$ відмінна від нуля, тобто

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$ на збіжність.

□ а) Знайдемо границю n -го члена u_n при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається. ■

1.2. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **знакододатним**, якщо всі його члени – невід’ємні числа:

$$u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Послідовність часткових сум знакододатного ряду є зростаючою. Згадуючи, що обмежена монотонна змінна має границю, дістаємо **необхідну і достатню умову збіжності знакододатного ряду**:

знакододатний ряд збігається, якщо послідовність його часткових сум обмежена зверху, і розбігається в протилежному разі.

Далі розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності таких рядів.

Зауваження. При вивченні знакосталих рядів можна обмежитися розглядом тільки знакододатних, оскільки з них множенням на -1 одержуються ряди з недодатними членами.

1.2.1. Інтегральна ознака Коші

Ця ознака заснована на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Теорема (інтегральна ознака Коші). *Якщо члени знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$ утворюють спадну послідовність ($u_{n+1} \leq u_n$, $n = 1, 2, \dots$) і на проміжку $[1; +\infty]$ існує спадна неперервна невід’ємна функція $f(x)$ така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду ($f(n) = u_n$, $n = 1, 2, \dots$), тоді вказаний ряд і невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно.*

□ Зобразимо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ геометрично точками на координатній площині Oxy , відкладаючи на осі Ox номери 1, 2, ..., n , ..., а на осі Oy – відповідні значення його членів $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, ..., $u_n = f(n)$, ... (рис. 1).

Побудуємо на цьому рисунку також графік указаної функції $f(x)$. Площа відповідної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[1; n]$, дорівнює визначеному інтегралу $I_n = \int_1^n f(x)dx$.

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1; 2]$, $[2; 3]$, ..., а висоти дорівнюють u_1, u_2, \dots, u_n .

Порівнюючи площі цих об'єктів, дістанемо:

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n < I_n < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

$$\text{або } S_n - u_1 < I_n < S(n) - u_n,$$

де $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ – часткова сума ряду. Звідси

$$S_n < u_1 + I_n \quad \text{і} \quad S_n > u_n + I_n.$$

Нехай інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним. Його значення $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

$$\text{Тоді } S_n < u_1 + I.$$

Отже, зростаюча послідовність часткових сум S_n обмежена зверху і тому має границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним. У даному випадку це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = +\infty$. Тоді, переходячи у нерівності $S_n > u_n + I_n$ до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$.

Отже, послідовність часткових сум S_n необмежена і має не-

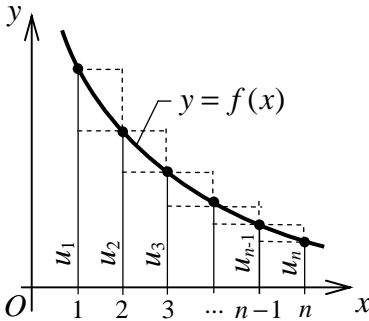


Рис. 1

скінченну границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається. ■

Зауваження 1. Інтегральна ознака справджується, коли послідовність членів ряду задовольняє відповідним умовам, починаючи хоча б з деякого номера.

Зауваження 2. На практиці функцію $f(x)$ одержують, замінюючи у виразі загального члена u_n ряду дискретну змінну n на неперервну x .

З наведеного доведення випливає

наслідок. Для суми S і n -го залишку R_n збіжного знакочередного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ справедливі оцінки:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < S < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx ; R_n < \int_n^{+\infty} f(x)dx ,$$

остання з яких дозволяє судити, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати задану похибку.

Приклад 1. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$.

□ Покладемо $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} (1/x^p) dx$.

При $p = 1$ маємо *гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Для нього

$$\int_1^{+\infty} (1/x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^N = +\infty . \text{ Інтеграл і ряд розбіжні.}$$

Нехай $p \neq 1$. Тоді

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) .$$

Коли $p > 1$, то $\int_1^{+\infty} (1/x^p) dx = 1/(p-1)$. Інтеграл і ряд збіж-

ні. Коли $p < 1$, то $\int_1^{+\infty} (1/x^p) dx = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно маємо:

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$. ■

Приклад 2. Знайти наближено суму S збіжного узагальненого гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ з даною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,01$.

□ Заданий узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ збігається, оскільки $p = 4 > 1$. Оцінимо його n -й залишок R_n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/k^4 < \int_n^{+\infty} (1/x^4) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left. \frac{x^3}{-3} \right|_n^N = \frac{1}{3n^3}.$$

Для заданої точності $\varepsilon = 0,01$ наближення $S \approx S_n$ маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0,01/2 = 0,005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0,005$ залишку:

$$R_n < \frac{1}{3n^3} \leq \varepsilon_1 = 0,005; \quad n^3 \geq \frac{200}{3}; \quad n \geq \sqrt[3]{200/3}; \quad n = 5.$$

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon_2 = 0,005$ обчислення їх суми:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 5 \leq \varepsilon_2 = 0,005; \quad 10^{-k} \leq 0,002; \quad k \geq \lg 500; \quad k = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Таким чином } S &= \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 \approx S_5 = 1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + \\ &+ 1/4^4 + 1/5^4 \approx 1,000 + 0,063 + 0,012 + 0,004 + 0,002 = 1,081 \end{aligned}$$

Остаточно $S \approx 1,08$. ■

Приклад 3. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2) \sqrt[3]{\ln(5n-2)}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}.$$

□ а) Розглянемо функцію $f(x) = 1/(x \ln^3 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[4; +\infty)$, причому $f(n) = u_n$. Дослідимо невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} f(x) dx &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^N \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^N \frac{d \ln x}{\ln^3 x} = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_2^N \ln^{-3} x d(\ln x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left. \frac{\ln^{-2} x}{-2} \right|_x^N = -\frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\ln^2 x} \right|_2^N = \\ &= -(1/2) \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1/\ln^2 N - 1/\ln^2 2 \right) = 1/(2 \ln^2 2) \neq \infty. \end{aligned}$$

Отже, цей невластний інтеграл збігається, а тому даний ряд теж збігається.

б) Введемо функцію $f(x) = \frac{1}{(5x-2)x \sqrt[3]{\ln(5x-2)}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1; +\infty)$, причому $f(n) = u_n$. Розглянемо невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(5x-2)x \sqrt[3]{\ln(5x-2)}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{dx}{(5x-2)x \sqrt[3]{\ln(5x-2)}} = \\ &= \left. \begin{aligned} u &= \ln(5x-2); \quad du = 5dx/(5x-2) \\ u_1 &= \ln 3; \quad u_2 = \ln(5N-2) \end{aligned} \right| = \frac{1}{5} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} u^{-1/3} du = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left. \frac{u^{2/3}}{2/3} \right|_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} = \frac{3}{10} \lim_{N \rightarrow +\infty} (\ln^{2/3}(5N-2) - \ln^{2/3} 3) = +\infty. \end{aligned}$$

Оскільки цей невластний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

в) Введемо функцію $f(x) = x \cdot e^{-x}$, що на інтервалі $[1; +\infty)$ задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо відповідний невласний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N x e^{-x} dx = \left. \begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^{-x} dx \\ du = dx; \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-x e^{-x} \Big|_1^N - \int_1^N e^{-x} dx \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-N e^{-N} + e^{-1} - e^{-x} \Big|_1^N \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-N e^{-N} + e^{-1} - e^{-N} + e^{-1} \right) = - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{e^N} + 2e^{-1} = \left. \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)'}{(e^x)'} + 2e^{-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + 2e^{-1} = 0 + 2e^{-1} = 2e^{-1} \neq \infty. \end{aligned}$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і даний ряд теж збігається. ■

1.2.2. Ознаки порівняння

При застосуванні ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з **еталонним рядом** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди часто приймають:

а) **узагальнений гармонічний ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, що збігається, коли $p > 1$, і розбігається при $p \leq 1$;

б) **геометричний ряд** (ряд геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, що збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Теорема 1 (перша (основна) ознака порівняння).

а) Нехай маємо збіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $u_n \leq v_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збігається.

(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) Нехай маємо розбіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $u_n \geq v_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж розбігається.

(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо “у бік більше”; а зі збіжним рядом – “у бік менше”.

□ Нехай S_n і σ_n відповідні n -і часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

а) З нерівності $u_n \leq v_n$ випливає, що $S_n \leq \sigma_n$. Оскільки “більший” знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то існує границя його часткових сум $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$, причому $\sigma_n \leq \sigma$. Тоді $S_n \leq \sigma$. Тобто, часткові суми S_n обмежені.

З того, що послідовність S_n зростаюча і обмежена, випливає існування скінченної границі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, причому $S \leq \sigma$. Отже, “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збіжний.

б) З нерівності $u_n \geq v_n$ випливає, що $S_n \geq \sigma_n$. Оскільки “менший” знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$. Отже, “більший” ряд теж розбіжний. ■

Зауваження 1. Основна ознака порівняння справджується, коли члени рядів задовольняють відповідні нерівності, починаючи хоча б з деякого номера.

Наслідок. Якщо всі члени збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не перевищують відповідних членів іншого знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, тобто $u_n \leq v_n$, $n = 1, 2, \dots$, тоді n -й залишок першого ряду $R_n^{(u)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ не перевищує n -го залишку

$$R_n^{(v)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k \quad \text{другого:} \quad R_n^{(u)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = R_n^{(v)}.$$

Приклад 1. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln(3n)}; \quad \text{б) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

□ а) Застосуємо основну ознаку порівняння з “більшим” збіжним рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/5)^n$ зі знаменником $q = 1/5 < 1$:

$$u_n = 1/(5^n \ln(3n)) < 1/5^n = (1/5)^n = v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Оскільки $u_n \leq v_n$, то “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln(3n)}$ також збігається.

б) Оскільки $u_n = \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1} \geq \frac{\sqrt{n^3}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n$ при всіх $n \geq 3$ і “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 1/2 \leq 1$, то за основною ознакою порівняння “більший” ряд $\sum_{n=3}^{\infty} u_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1}$ також розбігається.

в) Оскільки при $n \geq 2$ справджується нерівність $u_n = 1/n^n \leq 1/2^n = v_n$ і “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ є збіжним геометричним рядом з $q = 1/2 < 1$, то за основною ознакою порівняння “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ теж збігається. ■

Приклад 2. Довести, що знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(6^n \sqrt{n})$ збігається, і знайти наближено його суму S з точністю до $\varepsilon = 0,01$.

□ Оскільки при всіх $n \geq 1$ виконується нерівність

$$u_n = 1/(\epsilon^n \sqrt{n}) \leq 1/6^n = (1/6)^n = v_n$$

і “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/6)^n$ є збіжним геометричним рядом зі знаменником $q = 1/6 < 1$, то за основною ознакою порівняння “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(\epsilon^n \sqrt{n})$ теж збігається.

Для заданої точності $\epsilon = 0,01$ наближення $S \approx S_n$ маємо

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2 = 0,01/2 = 0,005.$$

За наслідком з основної ознаки порівняння $R_n \leq R_n^{(v)}$, де $R_n^{(v)}$ – залишок $R_n^{(v)}$ збіжного ряду геометричної прогресії

$$R_n^{(v)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1/6)^k = (1/6)^{n+1} + (1/6)^{n+2} + \dots,$$

що також є збіжним геометричним рядом з тим же знаменником $q = 1/6$ і першим членом $a = (1/6)^{n+1}$. Знайдемо його суму:

$$R_n^{(v)} = a/(1-q) = (1/6)^{n+1}/(1-1/6) = 5/6^{n+2}.$$

Тоді для залишку R_n маємо оцінку: $R_n \leq R_n^{(v)} = 5/6^{n+2}$.

Знайдемо, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ частковою сумою S_n отримати граничну абсолютну похибку $\epsilon_1 = 0,005$ залишку R_n :

$$R_n \leq 5/6^{n+2} \leq \epsilon_1 = 0,005; 6^{n+2} \geq 1000; n \geq 3/\lg 6 - 2; n = 2.$$

Визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність $\epsilon_2 = 0,005$ обчислення їх суми:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \leq \epsilon_2 = 0,005; 10^{-k} \leq 0,005; k \geq \lg 200; k = 3.$$

Таким чином

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n \sqrt{n}} \approx S_2 = \frac{1}{6^1 \sqrt{1}} + \frac{1}{6^2 \sqrt{2}} \approx 0,167 + 0,020 = 0,187.$$

Остаточно $S \approx 0,19$. ■

Теорема 2 (друга (гранична) ознака порівняння). Якщо існує

скінченна, відмінна від нуля границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = c$, ($0 < c < +\infty$) від-

ношення загальних членів двох знакододатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.

□ Оскільки існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = c$, то для довільного

$\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N , що для всіх $n \geq N$ буде виконуватися нерівність $|u_n/v_n - c| < \varepsilon$. Звідки $c - \varepsilon < u_n/v_n < c + \varepsilon$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається. З нерівності $u_n/v_n < c + \varepsilon$ маємо $u_n < (c + \varepsilon)v_n$, $n \geq N$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (c + \varepsilon)v_n$ також збігається. Звідси за основною ознакою порівняння впливає збіжність “меншого” ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається. З нерівності $u_n/v_n > c - \varepsilon$ маємо $u_n > (c - \varepsilon)v_n$, $n \geq N$. З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ впливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (c - \varepsilon)v_n$. Тоді згідно з основною ознакою порівняння “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається. ■

Зауваження 2. Існування вказаної границі говорить про те, що загальні члени u_n і v_n цих рядів при $n \rightarrow \infty$ є нескінченно малими одного порядку $u_n = O^*(v_n)$ (зокрема, можуть бути еквівалентними $u_n \sim v_n$). Таким чином, для порівняння треба підбирати еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, загальний член якого v_n є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член u_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, який до-

сліджується.

Приклад 3. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+4/n); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5} + 4}{6n^4 - n^2 + 3}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{5n}{n^3 + 8}.$$

□ а) Відомо, що $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. Звідси при $n \rightarrow \infty$ маємо: $4/n \rightarrow 0$; $\ln(1+4/n) \sim 4/n = O^*(1/n)$. Тому для даного ряду застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$u_n = \ln(1+4/n), \quad v_n = 1/n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+4/n)}{1/n} =$$

$$= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+4/n)}{1/n} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \alpha = 4/n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right| =$$

$$= 4 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 4 \quad (\neq 0, \neq \infty). \quad \text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+4/n) \text{ розбігається.}$$

$$\text{б) Оскільки } u_n = \frac{\sqrt[3]{n^5} + 4}{6n^4 - n^2 + 3} \sim \frac{\sqrt[3]{n^5}}{6n^4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^{7/3}} = O^*(1/n^{7/3}),$$

то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{7/3}$, $p = 7/3 > 1$, що збігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{7/3}(n^{5/3} + 4)}{6n^4 - n^2 + 3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/n^{5/3}}{6 - 1/n^2 + 3/n^4} =$$

$$= 1/6 \quad (\neq 0, \neq \infty). \quad \text{Даний ряд теж збігається.}$$

в) Відомо, що $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. Звідси при $n \rightarrow \infty$ маємо:

$$\frac{5n}{n^3 + 8} \rightarrow 0; \quad \operatorname{arctg} \frac{5n}{n^3 + 8} \sim \frac{5n}{n^3 + 8}.$$

Тоді

$$u_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{5n}{n^3 + 8} \sim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{5n}{n^3 + 8} \sim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{5n}{n^3} = \frac{5}{n^4} = O^*(1/n^4).$$

Порівняємо цей ряд зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$, $p = 4 > 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{5n}{n^3 + 8} : \frac{1}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{5n}{n^3 + 8} : \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n}{n^3 + 8} : \frac{1}{n^2} \right) = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 8} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 8/n^3} = \\ &= 5 \quad (\neq 0, \neq \infty). \quad \text{Даний ряд збігається.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Зауваження 3. Застосування ознак порівняння часто викликає труднощі, пов'язані з необхідністю підбирати еталонний ряд. Загальних способів для цього не існує. Далі наведені більш зручні для користування ознаки, де фігурує тільки ряд, що досліджується.

1.2.3. Ознака Даламбера

Теорема (ознака Даламбера). Якщо для знакододатного ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ відношення наступного члена

до попереднього, то

- а) при $l < 1$ ряд збігається; б) при $l > 1$ ряд розбігається;
- в) при $l = 1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

□ а) Нехай $l < 1$. Візьмемо число q , що задовольняє нерівності $l < q < 1$. Для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися умова $u_{n+1}/u_n < q$. Таким чином, для $n \geq N$ маємо:

$$\begin{aligned} u_{N+1} &< qu_N, & u_{N+2} &< qu_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} &< qu_{N+2} < q^2 u_{N+1} < q^3 u_N, \dots \end{aligned}$$

Розглянемо два ряди $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$

і $u_N + qu_N + q^2u_N + q^3u_N + \dots$, де другий збігається як геометричний ряд зі знаменником $q < 1$.

Члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду. Тому за основною ознакою порівняння перший ряд теж збігається.

б) Нехай $l > 1$. Тоді для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися нерівність $u_{n+1}/u_n > 1$. Звідси $u_{n+1} > u_n$ для всіх $n \geq N$. Це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N + 1$. Тому загальний член ряду не прямує до нуля $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. За достатньою ознакою розбіжності даний ряд розбігається. ■

Якщо $l = +\infty$, то ряд також розбігається, оскільки існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися нерівність $u_{n+1}/u_n > 1$. Звідки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. ■

Зауваження 1. З наведеного доведення випливає: якщо за ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то його загальний член u_n не прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Зауваження 2. Ця достатня ознака в своїй основі має порівняння даного ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Приклад 1. Довести, що

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^n / n!) \neq 0; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^n / (2n)!) = 0.$$

□ а) Побудуємо знакододатний ряд із загальним членом $u_n = n^n / n!$ і дослідимо його на збіжність за допомогою ознаки Даламбера:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e > 1. \quad \text{Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

З розбіжності ряду за ознакою Даламбера випливає

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. Тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^n / n!) \neq 0$.

б) Побудуємо знакододатний ряд із загальним членом $u_n = n^n / (2n)!$ і дослідимо його на збіжність за допомогою ознаки Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{(n+1)^n}{2(2n)!(2n+1)};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (2n)!}{2(2n)!(2n+1)n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n \times \\ \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1/(2n+1)) = (1/2) \cdot e \cdot 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збіжний.}$$

Оскільки ряд збігається, то за необхідною ознакою $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^n / (2n)!) = 0$. ■

Зауваження 3. На практиці при дослідженні на збіжність найчастіше використовується саме ознака Даламбера. Щоб не натрапити на випадок невизначеності $l = 1$, її застосовують до таких рядів, загальний член яких містить у своєму складі факторіал і/або показникову функцію від n , наприклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^{2n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{(3n+2)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n} \sqrt{n}}{(2n-1)!}.$$

Приклад 2. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-4}{\sqrt[3]{n^2 \cdot 10^{2n}}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^2 + 2n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 5^{n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \arcsin \frac{n^2}{3^n}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 11^n}{2^{3n-2}}.$$

□ а) Загальний член цього ряду можна записати у вигляді $u_n = \frac{7n-4}{10^{(2/3)n} \sqrt[3]{n^2}}$. До його складу входить показникова функція

$10^{(2/3)^n}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{7(n+1) - 4}{10^{(2/3)(n+1)} \sqrt[3]{(n+1)^2}} = \frac{7n+3}{10^{(2/3)n+2/3} \sqrt[3]{(n+1)^2}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7n+3)10^{(2/3)n} \sqrt[3]{n^2}}{10^{(2/3)n+2/3} \sqrt[3]{(n+1)^2} (7n-4)} = \frac{1}{10^{2/3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+3}{7n-4} \times$$

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{(n+1)^2}} = 10^{-2/3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+3/n}{7-4/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{(1+1/n)^2}} =$$

$$= 10^{-2/3} \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{1} = 10^{-2/3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

б) У загальний член цього ряду $u_n = (n-1)! / (n^2 + 2n)$ входить факторіал $(n+3)!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2 + 2(n+1)} = \frac{n!}{n^2 + 4n + 3} = \frac{(n-1)!n}{n^2 + 4n + 3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n(n^2 + 2n)}{(n^2 + 4n + 3)(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2}{n^2 + 4n + 3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/n}{1/n + 4/n^2 + 3/n^3} = \left| \frac{1}{0} \right| = +\infty > 1. \quad \text{Ряд розбігається.}$$

в) У загальному члені ряду $u_n = \frac{n^2 \cdot 5^{n-1}}{(2n-1)!}$ є показникова функція 5^{n-1} і факторіал $(2n-1)!$. Отже, застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{n^2 \cdot 5^{n-1}}{(2n-1)!}; \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 \cdot 5^n}{(2(n+1)-1)!} = \frac{(n+1)^2 \cdot 5^n}{(2n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 5^n (2n-1)!}{(2n+1)! n^2 5^{n-1}} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 (2n-1)!}{n^2 (2n+1)! 2n(2n+1)} = \frac{5}{2} \times$$

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

г) У складі загального члена ряду $u_n = n^3 \arcsin(n^2/3^n)$ є показникова функція 3^n . Отже, можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = (n+1)^3 \arcsin((n+1)^2/3^{n+1});$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \arcsin((n+1)^2/3^{n+1})}{n^3 \arcsin(n^2/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \times$$

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin((n+1)^2/3^{n+1})}{\arcsin(n^2/3^n)} = \left| \frac{0}{0} \right|.$$

За правилом Лопітала знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(3^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3^x \ln 3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \frac{2}{\ln 3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(3^x)'} = \frac{2}{\ln 3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0.$$

Оскільки $\arcsin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$, то $\arcsin \frac{n^2}{3^n} \sim \frac{n^2}{3^n}$ при $\alpha = \frac{n^2}{3^n} \rightarrow 0$ і $\arcsin \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \sim \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$ при $\alpha = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \rightarrow 0$. За-мінюючи еквівалентні нескінченно малі у відношенні, одержимо:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2/3^{n+1}}{n^2/3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^2 = \frac{1}{3} < 1. \text{ Ряд збігається.}$$

д) У загальному члені ряду $u_n = \frac{n 11^n}{2^{3n-2}}$ є показникові функції 11^n і 2^{3n-2} , тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1) 11^{n+1}}{2^{3(n+1)-2}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 11^{n+1} 2^{3n-2}}{2^{3n+1} n 11^n} =$$

$$= \frac{11}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{11}{8} > 1. \text{ Ряд розбігається. } \blacksquare$$

1.2.4. Радикальна ознака Коші

Теорема (радикальна ознака Коші). Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

- а) при $l < 1$ ряд збігається; б) при $l > 1$ ряд розбігається;
в) при $l = 1$ не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду.

Ця ознака базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом. Доведення аналогічне.

Зауваження 1. Подібно ознаці Даламбера, якщо за радикальною ознакою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Зауваження 2. Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n , з яких досить просто добувається корінь n -го степеня. Наприклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg^{n+3} \frac{n^2 - 1}{n^4 + 1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{5n} \frac{4n + 1}{2n + 3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} ((4n - 3)/(9n + 2))^{n^2}.$$

Приклад 1. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(n^2 / (n^3 + 1) \right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} ((4n - 1) / (4n + 7))^{2n^2 - 5}$;
в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n / \arctg^{n-4} \left(n^2 / (n + 3) \right)$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n} \left(n^4 / (n + 1) \right)$.

□ а) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin \left(n^2 / (n^3 + 1) \right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n \left(n^2 / (n^3 + 1) \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(n^2 / (n^3 + 1) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left((1/n) / (1 + 1/n^3) \right) = \sin 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

б) Загальний член ряду є степенем з показником $2n^2 - 5$ виразу $(4n - 1) / (4n + 7)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{((4n - 1) / (4n + 7))^{2n^2 - 5}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-1}{4n+7} \right)^{\frac{2n^2-5}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{4n+7} \right)^{\frac{4n+7}{-8} \cdot \left(-\frac{8}{4n+7} \cdot \frac{2n^2-5}{n} \right)} = \\
&= e^{-8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-5}{4n^2+7n}} = e^{-8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5/n^2}{4+7/n}} = e^{-4} < 1. \text{ Ряд збігається.}
\end{aligned}$$

в) Загальний член ряду $u_n = 2^n : \arctg^{n-4} \left(n^2 / (n+3) \right)$ містить степені з показниками n та $n-4$, що залежать від n , тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n : \arctg^{n-4} \left(n^2 / (n+3) \right)} = \\
&= 2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg^{(n-4)/n} \frac{n^2}{n+3} = 2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg^{1-4/n} \frac{1}{1/n+3/n^2} = \\
&= 2 : \arctg(+\infty) = 4/\pi > 1. \text{ Ряд розбігається.}
\end{aligned}$$

г) Загальний член ряду є степенем з показником $2n$ виразу $\ln \left(n^4 / (n+1) \right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln^{2n} \frac{n^4}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2 \frac{n^4}{n+1} = \ln^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/n^3 + 1/n^4} = \\
&= \left| \ln(1/0) = \ln(+\infty) = +\infty \right| = +\infty > 1. \text{ Ряд розбігається. } \blacksquare
\end{aligned}$$

Зауваження 3. У випадку невизначеності $l = 1$, радикальна ознака, як і “рівносільна” їй ознака Даламбера, відповіді не дає. Потрібні додаткові дослідження на основі інших більш “сильних” ознак, до яких відносяться всі наведені вище.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(e+1/n)$.

□ а) Загальний член цього знакододатного ряду є степенем з показником n виразу $\ln(e+1/n)$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln^n(e+1/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(e+1/n) = \ln e = 1.$$

У даному випадку ця ознака відповіді не дає. Застосування оз-

наки Даламбера приводить до того самого результату (переконайтеся в цьому самостійно). Треба звернутися до більш “сильної” ознаки.

Перевіримо виконання необхідної ознаки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^n(e + 1/n) = \left| 1^\infty \right| = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln^n(e + 1/n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \ln(e + 1/n)}.$$

Скористаємося правилом Лопітала:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \ln(e + 1/n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \ln(e + 1/x) = \left| y = 1/x; y \rightarrow +0 \right.$$

$$\left. \text{при } x \rightarrow +\infty \right| = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\ln \ln(e + y)}{y} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{(\ln \ln(e + y))'}{y'} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +0} \left(\frac{1}{(e + y) \ln(e + y)} \right) = 1/(e \ln e) = 1/e.$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{1/e} \neq 0$. Необхідна ознака не справджується.

Отже, ряд розбігається. ■

1.3. Знакозмінні ряди

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків $+$ і $-$, називається **знакозмінним**.

1.3.1. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається **знакопочерговим** або **рядом Лейбниця**. Його вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, \text{ де } a_n = |u_n| \geq 0.$$

Теорема (достатня ознака Лейбниця). Якщо для знакопочергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ виконуються дві умови: 1) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і пря-

мує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, причому його сума S додатна і не перевищує модуля першого члена: $0 < S \leq a_1$.

□ Розглянемо часткову суму з парним числом членів:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned}$$

Кожна різниця в дужках додатна, оскільки $a_n > a_{n+1}$. Тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ – зростаюча.

Крім того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

оскільки кожна дужка знову-таки додатна. Тобто послідовність $\{S_{2n}\}$ обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, тоді $0 < S \leq a_1$.

Обчислимо границю сум з непарними номерами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

Таким чином, часткові суми як з парними, так і з непарними номерами мають спільну границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$.

Звідси випливає, що вся послідовність часткових сум $\{S_n\}$ також має, причому ту ж саму границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, Тобто ряд збігається. При цьому $0 < S \leq a_1$. ■

Наслідок. Абсолютна похибка Δ_n від заміни суми S збіжного знакопчергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ будь-якою його частковою сумою S_n не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Іншими словами, модуль залишку R_n збіжного знакопчергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Тобто $\Delta_n = |S - S_n| = |R_n| \leq a_{n+1}$.

Дійсно, даний залишок $R_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + \dots$ – це також збіжний ряд Лейбниця. Модуль суми цього ряду не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Зауваження 1. Ознака Лейбниця справджується, якщо послідовність членів ряду є спадною хоча б з деякого номера N .

Зауваження 2. Друга умова ознаки Лейбниця $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Приклад 1. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність дані знакопочергові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n^2}.$$

□ а) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{4 - 1/n^3} = 0;$$

$$1) |u_n| = \frac{n}{4n^3 - 1} > \frac{n+1}{4(n+1)^3 - 1} = |u_{n+1}|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{доведіть}$$

самостійно, безпосередньо переконавшись, що $|u_n| - |u_{n+1}| > 0$).

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

б) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопітала:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln 5}{2x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \frac{\ln 5}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5^x)'}{x'} = \frac{\ln 5}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln 5}{1} = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty \neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейб-ниця не виконується, то даний ряд розбігається. ■

Приклад 2. Довести, що даний знакопочерговий ряд збігається, і знайти наближено його суму S з точністю до $\varepsilon = 0,001$:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / (3n)^3; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / (2n)!$$

□ а) Очевидно, обидві умови ознаки Лейбниця виконуються:

- 1) модулі його членів монотонно спадають;
- 2) n -й член ряду прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$.

Отже, ряд збіжний і має певну суму S .

Для заданої точності $\varepsilon = 0,001$ наближення $S \approx S_n$ маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon / 2 = 0,001 / 2 = 0,0005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0,0005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниця $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. Тоді:

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| = 1 / (3(n+1))^3 \leq \varepsilon_1 = 0,0005; \quad (n+1)^3 \geq 2000 / 27; \\ n \geq 10\sqrt[3]{2} / 3 - 1; \quad n = 4.$$

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot n \leq \varepsilon_2; \quad 0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 4 \leq \varepsilon_2 = 0,0005;$$

$$10^{-k} \leq 0,00025; \quad k \geq \lg 4000; \quad k = 4.$$

Таким чином

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / (3n)^3 \approx S_4 = 1 / (3 \cdot 1)^3 - 1 / (3 \cdot 2)^3 + 1 / (3 \cdot 3)^3 - \\ - 1 / (3 \cdot 4)^3 \approx 0,0370 - 0,0046 + 0,0014 - 0,0006 = 0,0332.$$

Остаточно $S \approx 0,033$.

б) (Розв'язати самостійно. Відповідь: $S \approx 0,460$). ■

1.3.2. Абсолютна й умовна збіжність знакозмінних рядів

Теорема (достатня ознака збіжності знакозмінного ряду).

Якщо для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.

□ Нехай $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ і $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^n |u_k|$ – часткові суми відповідно даного ряду і ряду з абсолютних величин його членів.

Позначимо через $S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ суми модулів відповідно всіх невід’ємних і всіх від’ємних членів серед перших n членів даного ряду. Тоді $S_n = S_n^{(+)} - S_n^{(-)}$ і $S_n^{(m)} = S_n^{(+)} + S_n^{(-)}$.

За умовою ряд з модулів збігається, тобто існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(m)} = S^{(m)}$, $S^{(m)} > 0$.

$S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ – додатні зростаючі величини, що менші $S^{(m)}$.

Значить, вони мають границі: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(+)} = S^{(+)}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(-)} = S^{(-)}$.

Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(+)} - S_n^{(-)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(+)} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(-)} = S^{(+)} - S^{(-)}.$$

Отже, даний знакозмінний ряд збігається. ■

Зауваження 1. Наведена ознака є лише достатньою, але не необхідною: існують збіжні знакозмінні ряди, яким відповідають розбіжні ряди, утворені з модулів їх членів. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / n$ збіжний за ознакою Лейбниція, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ з модулів його членів, розбіжний як гармонічний ряд.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та **умовно збіжним**, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно*

збіжний ряд є збіжним.

Зауваження 2. В абсолютно збіжному ряді, подібно до скінченної суми, члени можна переставляти як завгодно. При цьому він залишається абсолютно збіжним і його сума не змінюється. Навпаки, в умовно збіжному ряді перестановка членів може привести до зміни його суми і навіть до розбіжності.

Зауваження 3. Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність доцільно розпочинати з виявлення абсолютної збіжності як більш “сильної”, застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний і дослідження завершено. Якщо ж ряд з модулів розбігається, то інколи можна відразу зробити висновок про розбіжність і самого знакозмінного ряду (наприклад, при невиконанні необхідної ознаки збіжності). Але частіше далі треба провести більш “тонке” дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

Приклад. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакозмінні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + 1/n)^{3n^2}.$$

□ а) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо основну ознаку порівняння:

$$|u_n| = \left| \frac{\sin n}{n^4} \right| = \frac{|\sin n|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4} = v_n.$$

Оскільки більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 4 > 1$, то менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ теж збіжний. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

б) Ряд з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 1/2 \leq 1$.

Сам даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^{1/2}$ є знакопochерго-

вим. Він задовольняє обидві умови ознаки Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \quad |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = |u_{n+1}|, \quad n = 1, 2, \dots$$

і тому є збіжним. Отже, даний ряд умовно збіжний.

в) Модуль загального члена даного ряду $|u_n| = (1 + 1/n)^{3n^2}$ є степенем з показником $3n^2$ виразу $(1 + 1/n)$, тому до ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1 + 1/n)^{3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{3n} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \right)^3 = e^3 > 1. \end{aligned}$$

Ряд з модулів розбігається.

З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ за радикальною ознакою випливає $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0$. Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Таким чином, для даного ряду не виконується необхідна ознака збіжності, тому він розбігається. ■

1.4. Функціональні ряди

1.4.1. Збіжність функціональних рядів

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, визначені на деякій непорожній множині D зміни аргументу x .

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з **області визначення** D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається **точкою збіжності** чи **точкою розбіжності** функціонального ряду.

Множина D_s всіх точок збіжності називається **областю збіж-**

ності функціонального ряду. Очевидно, що D_s є деякою підмножиною області визначення D : $D_s \subseteq D$.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x : $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що **функція $S(x)$ розвивається (розкладається) в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$** .

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **абсолютно збіжним** в деякій області D_a , якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a; b]$.

Рівномірною нормою функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається невід'ємне число $\|f\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Рівномірною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається рівномірна норма їх різниці:

$$\rho_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Нехай відрізок $[a; b]$ міститься в області визначення D функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Цей ряд називається **рівномірно збіжним** на відрізку $[a; b]$ до суми $S(x)$, якщо виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(S, S_n) = 0.$$

Теорема Вейерштрасса (достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду). Якщо для всіх значень x з деякого відрізка $[a; b]$ члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного зна-

кододатного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на цьому відрізку $[a; b]$.

□ а) За умовою $|u_n(x)| \leq a_n, \forall x \in [a; b], n = 1, 2, \dots$ і “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тому за основною ознакою порівняння “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ також збігається. Тобто функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно збіжний на $[a; b]$.

Оцінимо рівномірну відстань між сумою $S(x)$ і частковою сумою $S_n(x)$ цього ряду на відрізку $[a; b]$:

$$\begin{aligned} \rho_1(S, S_n) &= \max_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| = \\ &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n^{(a)}. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(a)} = 0$ як залишок збіжного ряду, то, переходячи в нерівності $0 \leq \rho_1(S, S_n) \leq R_n^{(a)}$ до границі при $n \rightarrow \infty$, дістанемо $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(S, S_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{(a)} = 0$.

Звідси $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(S, S_n) = 0$. ■

Приклад. Знайти область збіжності D_s даного функціонального ряду:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{5^n} \arcsin \frac{x}{2n+1}; \\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{4n-3}. \end{array}$$

□ а) Очевидно, що областю визначення D даного ряду є вся множина дійсних чисел: $D = R$.

Для ряду з модулів членів даного ряду знайдемо “більший” числовий ряд:

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{2^n} \right| = \frac{|\cos nx|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} = (1/2)^n = v_n, \quad x \in R.$$

При $x \in R$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$ є збіжним геометричним рядом зі знаменником $q = 1/2 < 1$. Тоді з нерівності $|u_n(x)| \leq v_n$, $x \in R$ за достатньою ознакою рівномірної збіжності випливає, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при $x \in R$ збігається абсолютно і рівномірно.

Отже, область збіжності $D_s = (-\infty; +\infty)$.

б) Знайдемо область визначення D даного ряду з умови, що аргумент арксинуса належить відрізку $[-1; 1]$:

$$\begin{aligned} -1 \leq x/(2n+1) \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots; \quad -(2n+1) \leq x \leq (2n+1), \\ n = 1, 2, \dots; \quad -3 \leq x \leq 3; \quad D = [-3; 3]. \end{aligned}$$

За ознакою Даламбера ряд абсолютно збігається для всіх таких x з області визначення D , що справджується нерівність $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}(x)/u_n(x)| < 1$. При $x \in D$, для яких виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}(x)/u_n(x)| > 1$, ряд розбігається. Кожне сумнівне значення $x \in D$, для якого $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}(x)/u_n(x)| = 1$, потребує додаткового дослідження.

При $x = 0$ всі члени даного ряду дорівнюють нулю і, очевидно, він збігається до нуля. При $x \neq 0$ знайдемо границю і розв'яжемо першу нерівність:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{(x-4)^{n+1}}{5^{n+1}} \arcsin \frac{x}{2n+3} \right) \right| : \\ &= \left| \frac{(x-4)^n}{5^n} \arcsin \frac{x}{2n+1} \right| = \frac{|x-4|}{5} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\arcsin(x/(2n+3))}{\arcsin(x/(2n+1))} \right| = \\ &= |0/0| = \left| \arcsin(x/(2n+3)) \sim x/(2n+3) \text{ при } n \rightarrow \infty; \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \arcsin(x/(2n+1)) \sim x/(2n+1) \text{ при } n \rightarrow \infty \Big| = \\
& = \frac{|x-4|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x/(2n+3)}{x/(2n+1)} \right| = \frac{|x-4|}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \frac{|x-4|}{5} \times \\
& \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{2+3/n} = \frac{|x-4|}{5}; \quad \frac{|x-4|}{5} < 1; \quad |x-4| < 5; \\
& \quad -5 < x-4 < 5; \quad -1 < x < 9.
\end{aligned}$$

Враховуючи область визначення $-3 \leq x \leq 3$, одержимо, що при $-1 < x \leq 3$ ряд збігається абсолютно.

У сумнівній точці $x = -1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-4)^n}{5^n} \arcsin \frac{-1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{2n+1},$$

що є знакопечерговим.

Спочатку дослідимо його на абсолютну збіжність, користуючись граничною ознакою порівняння:

$$\begin{aligned}
|u_n(-1)| &= \arcsin \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n+1} = O^*(1/n) = v_n; \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n(-1)|}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin \frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n} \right) = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1/(2+1/n)) = 1/2.
\end{aligned}$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ розбігається, то ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(-1)|$ також розбігається.

Далі дослідимо знакопечерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1)$ на умовну збіжність за допомогою ознаки Лейбница:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(-1)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin (1/(2n+1)) = \arcsin 0 = 0; \\
|u_n(-1)| &= \arcsin \frac{1}{2n+1} > \arcsin \frac{1}{2n+3} = |u_{n+1}(-1)|, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Умови виконуються. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1)$ збігається умовно.

Отже, область збіжності $D_s = [-1; 3]$.

в) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Відповідь: $D_s = (-\infty; +\infty)$ – область збіжності).

г) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Сумнівні точки дослідити за допомогою граничної ознаки порівняння й ознаки Лейбниці. Відповідь: $D_s = [e^{-1}; e)$ – область збіжності). ■

1.4.2. Властивості рівномірно збіжних рядів

Наведемо без доведення основні властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

1) (**Неперервність**). Якщо члени рівномірно збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервні на деякому відрізку $[a; b]$, то його сума $S(x)$ також неперервна на цьому відрізку.

2) (**Граничний перехід**). Рівномірно збіжний на деякому відрізку $[a; b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ допускає всередині цього відрізка почленний граничний перехід:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x), \quad x_0 \in (a; b).$$

3) (**Інтегрування**). Якщо на деякому відрізку $[a; b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збіжний, а його члени неперервні на $[a; b]$, то на цьому відрізку ряд можна почленно інтегрувати:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

4) (**Диференціювання**). Збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ з диференційовних на деякому відрізку $[a; b]$ функцій можна почленно диференціювати на цьому відрізку за умови, що продиференційований

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ рівномірно збіжний:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a; b].$$

5) (**Множення на обмежену функцію**). Якщо рівномірно збіжний на деякому відрізку $[a; b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ почленно помножити на обмежену на цьому проміжку функцію $\varphi(x)$, то одержаний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x)u_n(x)$ також рівномірно збіжний на відрізку $[a; b]$.

1.5. Степеневі ряди

1.5.1. Збіжність степеневих рядів

Найбільш важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

де x – дійсна змінна (**аргумент**); x_0 – дійсне фіксоване число (**центр розвинення** або **опорна точка**); $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – дійсні сталі (**коефіцієнти**).

При $x_0 = 0$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ за степенями x . До цього спрощеного вигляду довільний степеневий ряд зводиться лінійною заміною $x - x_0 = t$.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$ – центр розвинення. Детальніші відомості про збіжність дає наступна

теорема Абеля. а) Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при деякому $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x , для яких $|x| < |x_1|$. б) Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається при деякому $x = x_2$, то він розбігається при всіх значеннях x , для яких $|x| > |x_2|$.

□ а) Оскільки за умовою ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний в точці $x = x_1 \neq 0$, то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$. За необхідною ознакою $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_1^n = 0$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_n x_1^n\}$ обмежена, тобто існує таке додатне число M , що

$$|a_n x_1^n| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_1|$ величина $q = |x/x_1| < 1$, маємо:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot |x/x_1| \leq M q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тобто модуль кожного члена степеневого ряду не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ зі знаменником $|q| < 1$. Тоді за основною ознакою порівняння при $|x| < |x_1|$ цей ряд абсолютно збіжний.

б) Нехай тепер існує таке значення $x = x_2$, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний. Доведемо методом від супротивного, що тоді цей ряд буде розбіжним і для всіх x , що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$. Справді, припускаючи, що ряд збіжний в якій-небудь точці x_* , яка задовольняє цю нерівність, за доведенням в пункті а) дістанемо, що він повинен бути збіжним і в точці x_2 , бо $|x_2| < |x_*|$. Але це суперечить умові, що в точці x_2 ряд розбігається. ■

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності

та розбіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо x_1 – точка збіжності ряду, то весь інтервал $(-|x_1|; |x_1|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 2). Якщо x_2 – точка розбіжності ряду, то півпрямка $(-\infty; -|x_2|)$ зліва від точки $-|x_2|$ і півпрямка $(|x_1|; +\infty)$ справа від точки $|x_2|$ (рис. 2) складаються з точок розбіжності цього ряду. Зближуючи $|x_1|$ і $|x_2|$ простим перебором значень x між ними, звужуватимемо зону невизначеності $(-|x_2|; -|x_1|) \cup (|x_1|; |x_2|)$ і дістанемо:

існує таке невід’ємне число R , яке називається **радіусом збіжності** степеневому ряду, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 3). Симетричний інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності** степеневому ряду. Його довжина дорівнює подвоєному радіусу.

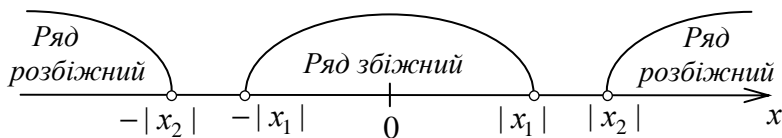


Рис. 2

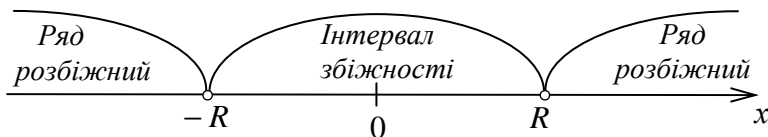


Рис. 3

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, область збіжності степеневому ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 2. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R = 0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма ($-\infty; +\infty$) ($R = +\infty$).

Зауваження 3. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ за степенями двочлена $x-x_0$ знаходять з нерівності $|x-x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0 .

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневому ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш “сильні” ознаки.

Приклад. Знайти інтервал і область збіжності даного степеневому ряду:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^{6n}}; \\ \text{в) } \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n n! (x-2)^{n+5}}{3^n}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n\sqrt{\ln(4n)}}. \end{array}$$

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}} = \frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}} : \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} \right| = \frac{|x-1|^3}{8} \times \\ \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+9} &= \frac{|x-1|^3}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+5/n}{4+9/n} = \frac{|x-1|^3}{8}; \quad \frac{|x-1|^3}{8} < 1; \\ |x-1|^3 &< 8; \quad |x-1| < 2; \quad -2 < x-1 < 2; \quad -1 < x < 3. \end{aligned}$$

Таким чином, $(-1; 3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R = (3 - (-1))/2 = 2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x = -1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбниція. (Переконайтеся в цьому самостійно).

При $x = 3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. (Переконайтеся в цьому самостійно).

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-1; 3)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(x+4)^n/n^{6n}|} = |x+4| \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^6 = 0$$

Оскільки $0 < 1$ при всіх дійсних значеннях x , то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ і його радіус збіжності $R = +\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = (-1)^n n! (x-2)^{n+5} / 3^n; \quad u_{n+1} = (-1)^{n+1} (n+1)! \times \\ \times (x-2)^{n+1+5} / 3^{n+1} = (-1)^{n+1} n! (n+1)(x-2)^{n+6} / 3^{n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} n! (n+1)(x-2)^{n+6} / 3^{n+1}}{(-1)^n n! (x-2)^{n+5} / 3^n} \right| = \\ = \frac{|x-2|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 2; \\ +\infty & \text{при } x \neq 2. \end{cases}$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка $x = 2$ і його радіус збіжності $R = 0$.

г) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати озна-

ку Даламбера. Кінці інтервалу збіжності дослідити за інтегральною ознакою. Відповідь: $(-1;1)$ – інтервал і область збіжності). ■

Зауваження 5. У випадку степеневого ряду стандартного вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ чи $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ для радіуса збіжності одержуються формули:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ – за ознакою Даламбера;}$$

$$R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ – за радикальною ознакою.}$$

1.5.2. Властивості степеневих рядів

Враховуючи властивості рівномірно збіжних рядів і теорему Абеля, сформулюємо основні властивості степеневих рядів.

1) *Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[a; b]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R; R)$.*

2) *Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ неперервна на інтервалі збіжності $(-R; R)$.*

3) *Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[a; b]$, який належить інтервалу збіжності $(-R; R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

$$[a; b] \subset (-R; R).$$

4) *Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності $(-R; R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R; R).$$

Зауваження 1. При диференціюванні чи інтегруванні степеневого ряду інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

Зауваження 2. Збіжні степеневі ряди можна перемножувати за звичайними правилами:

$$\text{якщо } S_a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \text{ для } |x| < R_a$$

$$\text{і } S_b(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots \text{ для } |x| < R_b, \text{ тоді}$$

$$S_a(x) \cdot S_b(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n + \dots$$

$$\text{для } |x| < \min\{R_a, R_b\}.$$

Аналогічно виконується ділення збіжних степеневих рядів.

Зазначені властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад 1. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, інтервал збіжності якого $(-1;1)$.

□ Нехай $S(x)$ – сума даного ряду. Тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n / (2n+1) \right) (x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Одержаний ряд геометричної прогресії з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$ при $x \in (-1;1)$ є збіжним, оскільки $|q| < 1$. Знайдемо його суму: $S'(x) = 1/(1+x^2)$.

Інтегруючи цю рівність на відрізьку $[0; x] \subset (-1;1)$, дістанемо:

$$S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \int_0^x dx / (1+x^2) = \text{arctg } x, \quad |x| < 1. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти область збіжності та суму степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

(Розв'язати самостійно, використовуючи почленне інтегрування). Відповідь: $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = (2x-x^2)/(1-x)^2, \quad |x| < 1$.

1.5.3. Ряди Тейлора і Маклорена

В області збіжності сумою степеневого ряду є деяка функція. Вище висвітлені основні властивості та на прикладах розглянуті деякі способи знаходження цієї функції в скінченному вигляді.

Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти його коефіцієнти.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

У цьому разі кажуть, що **функція $f(x)$ розвинена (розкладена) в степеневий ряд** в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Знайдемо коефіцієнти цього ряду через значення самої функції $f(x)$ та її похідних у центрі розвинення x_0 . Для цього послідовно диференціюватимемо ряд і підставлятимемо в ліву та праву частини одержаних розкладів значення $x = x_0$, а потім розв'язуватимемо знайдені вирази відносно шуканих коефіцієнтів:

$$f(x_0) = a_0 = 1 \cdot a_0 = 0! a_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0)/0!;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + n a_n(x - x_0)^{n-1} + \dots;$$

$$f'(x_0) = a_1 = 1 \cdot a_1 = 1! a_1 \Rightarrow a_1 = f'(x_0)/1!;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 1 \cdot 2a_2 = 2! a_2 \Rightarrow a_2 = f''(x_0)/2!;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \dots;$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3! a_3 \Rightarrow a_3 = f'''(x_0)/3!;$$

... ..

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2a_n + (n+1)n\dots 2a_{n+1}(x - x_0) + \dots;$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\dots 2a_n = n!a_n \Rightarrow a_n = f^{(n)}(x_0)/n!;$$

... ..

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів, дістанемо **ряд Тейлора** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо **ряд Маклорена** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Зауваження. Після побудови для даної функції $f(x)$ її ряду Тейлора треба знайти його область збіжності та встановити, чи збігається він саме до цієї функції $f(x)$.

Наведемо без доведення декілька важливих теорем про єдиність, збіжність і умови існування ряду Тейлора.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ можна подати у вигляді ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ за степенями двочлена $x-x_0$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 2. Для того, щоб ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ збігався до самої функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ і формули Тейлора}$$

прямував до нуля при $n \rightarrow \infty$ для всіх x з цього інтервалу, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $n = 0, 1, 2, \dots$ для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, то цю функцію можна розкласти в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

1.5.4. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена

Розвинення функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена.

За **способом безпосередньої побудови** для даної функції $f(x)$ здійснюють наступне:

- а) знаходять похідні $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, ...;
- б) обчислюють значення похідних у заданій точці $x = x_0$;
- в) записують шуканий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right) (x - x_0)^n$;
- г) знаходять інтервал і область його збіжності;

д) визначають проміжок, в якому виконуються умови теореми 2 чи теореми 3 з попереднього пункту 1.5.3. Якщо такий проміжок існує, то в ньому дана функція $f(x)$ і сума її ряду Тейлора співпадають, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right) (x - x_0)^n$.

Згідно теореми 1 про єдиність розвинення (попередній пункт 1.5.3), ряд Тейлора чи ряд Маклорена для даної функції $f(x)$ не залежить від способу його побудови. Тому на практиці частіше застосовують **спосіб формальних перетворень** – без знаходження виразів для похідних довільного n -го порядку, а за допомогою формальних перетворень уже відомих (стандартних) розвинень. Тоді

залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку. Зокрема, корисно використовувати почленне диференціювання чи інтегрування відомих рядів, оскільки в інтервалах збіжності одержані ряди збігаються до відповідних функцій.

У таблиці 1 подані ряди Маклорена і області їх збіжності для деяких елементарних функцій. Вони використовуються як **стандартні розвинення** при знаходженні степеневих рядів для інших функцій. (Виведення цих співвідношень здійсніть самостійно).

Таблиця 1

№ п/п	Функція та її розвинення в ряд Маклорена
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$
4	$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots =$ $= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, \quad x \in [-1; 1], \text{ де } \begin{cases} (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \\ (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \end{cases}$
5	$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1; 1]$
6	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1]$
7	$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1; 1)$
8	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$ $= 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1; 1)$

8a	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1)$
9	$sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$
10	$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$

Приклад 1. Розкласти в ряд Маклорена дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

$$\text{а) } f(x) = \cos^2 x; \quad \text{б) } f(x) = \frac{12}{x^2 - 2x - 3}.$$

□ а) Спосіб I – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що входять у ряд Маклорена $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, безпосередньо повторним диференціюванням:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x; & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= -2 \sin x \cos x = -\sin 2x = \sin(2x + (\pi/2) \cdot 2); & f'(0) &= 0; \\ f''(x) &= -2 \cos 2x = 2 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 3); & f''(0) &= -2; \\ f'''(x) &= 2^2 \sin 2x = 2^2 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 4); & f'''(0) &= 0; \\ f^{(4)}(x) &= 2^3 \cos 2x = 2^3 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 5); & f^{(4)}(0) &= 2^3; \\ & \dots \dots \dots & & \\ f^{(n)}(x) &= 2^{n-1} \sin(2x + \frac{\pi}{2}(n+1)); & f^{(n)}(0) &= 2^{n-1} \sin(\frac{\pi}{2}(n+1)); \\ & \dots \dots \dots & & \end{aligned}$$

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і дістанемо

$$\cos^2 x = \underbrace{1}_{u_0} + \underbrace{0}_{u_1} - \underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2} + \underbrace{0}_{u_3} + \underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4} + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\frac{2^{n-1} \sin((\pi/2) \cdot (n+1))}{n!}}_{u_n} x^n + \dots = \left| \begin{array}{l} u_n = \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m}, \quad n = 2m; \\ u_n = 0, \quad n = 2m+1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right| = \\
& = 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots + \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m} + \dots = \\
& = |n = m| = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n 2^{2n-1} / (2n)! \right) x^{2n}.
\end{aligned}$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \right| = 4x^2 \times \\
& \times \lim_{n \rightarrow \infty} (1 / ((2n+1)(2n+2))) = 0 < 1, \quad x \in R.
\end{aligned}$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Skorистаємося відомими тотожностями для перетворення даної функції, основними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x) = \cos^2 x$ у вигляді:

$$f(x) = \cos^2 x = (1 + \cos 2x) / 2 = 1/2 + (1/2) \cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Дістанемо:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = 1 - \\
& - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.
\end{aligned}$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty; +\infty)$ знайдена вище.

б) Спосіб I – безпосередня побудова. (Розв'яжіть самостійно).

Спосіб 2 – формальні перетворення. Подамо дану раціональну

функцію $f(x) = \frac{12}{x^2 - 2x - 3}$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\begin{aligned} \frac{12}{x^2 - 2x - 3} &= \frac{12}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \\ &= \left| \begin{array}{l} A(x-3) + B(x+1) = 12; \\ x = -1: \begin{cases} -4A = 12, & A = -3 \end{cases} \\ x = 3: \begin{cases} 4B = 12; & B = 3 \end{cases} \end{array} \right| = \\ &= \frac{-3}{x+1} + \frac{3}{x-3} = -3 \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(-x/3)}. \end{aligned}$$

Застосуємо відоме розвинення

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1),$$

де для другого дроби замінимо x на $-x/3$ і отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+(-x/3)} &= 1 - (-x/3) + (-x/3)^2 - (-x/3)^3 + \dots + (-1)^n (-x/3)^n + \dots = \\ &= 1 + (1/3)x + (1/3^2)x^2 + (1/3^3)x^3 + \dots + (1/3^n)x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (1/3^n)x^n; \\ &(-x/3) \in (-1; 1); \quad x \in (-3; 3). \end{aligned}$$

Враховуючи, що ряд для першого дроби збігається при $x \in (-1; 1)$ а ряд для другого дроби – при $x \in (-3; 3)$, маємо, що обидва ряди одночасно збігаються при $x \in (-1; 1)$. Тоді в інтервалі $(-1; 1)$ їх можна почленно додавати зі сталими множниками:

$$\frac{12}{x^2 - 2x - 3} = -3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1}{3^n} x^n.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{((-1)^{n+2} 3^{n+2} - 1)x^{n+1}}{3^{n+1}} : \frac{((-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1)x^n}{3^n} \right| =$$

$$= \frac{|x|}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} 3^{n+2} - 1}{(-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1} \right| = \frac{|x|}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} - 1/3^{n+2}}{(-1)^{n+1}/3 - 1/3^{n+2}} \right| =$$

$$= (|x|/3) \cdot 3 = |x|; \quad |x| < 1; \quad x \in (-1; 1).$$

Дослідимо кінці інтервалу збіжності. При $x = -1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1}{3^n} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 3^{n+1}}{3^n},$$

що розбігається, бо для нього не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} - 3^{n+1}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^{n+1}/3^n - 3 \right) = -3 \neq 0.$$

При $x = 1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1}{3^n} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1}{3^n},$$

що також розбігається, оскільки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1} - 1}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3(-1)^{n+1} - 1/3^n \right) \text{ не існує.}$$

Отже, $(-1; 1)$ – область збіжності одержаного ряду. ■

Приклад 2. Розкласти в ряд Тейлора дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x) = 1/(4x - 5)$ за степенями двочлена $x - 3$;

б) $f(x) = \cos(\pi x/4)$ за степенями двочлена $x + 2$.

□ а) Спосіб I – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x-3)^n = f(3) + \frac{f'(3)}{1!} (x-3) +$$

$$+ \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + \dots$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = 1/(4x-5); \quad f(3) = 1/7;$$

$$f'(x) = -1 \cdot 4/(4x-5)^2; \quad f'(3) = -1 \cdot 4/7^2;$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 4^2/(4x-5)^3; \quad f''(3) = 1 \cdot 2 \cdot 4^2/7^3;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! 4^n / (4x-5)^{n+1}; \quad f^{(n)}(3) = (-1)^n n! 4^n / 7^{n+1};$$

.....

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-5} &= \frac{1}{7} - \frac{1 \cdot 4/7^2}{1!}(x-3) + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4^2/7^3}{2!}(x-3)^2 + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^n n! \cdot 4^n / 7^{n+1}}{n!}(x-3)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}. \end{aligned}$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1} (x-3)^{n+1}}{7^{n+2}} : \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}} \right| = \\ &= (4/7) |x-3| < 1; \quad -7/4 < x-3 < 7/4; \quad 5/4 < x < 19/4. \end{aligned}$$

На кінцях інтервалу збіжності (5/4;19/4) маємо ряди $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(5/4) = (1/7) \sum_{n=0}^{\infty} 1$ і $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(19/4) = (1/7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, (5/4;19/4) – область збіжності одержаного ряду.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Спочатку подамо функцію $f(x) = 1/(4x-5)$ через нову змінну $z = x-3$ – відхилення від центру розвинення $x = x_0 = 3$:

$$x = z + 3; \quad f(x) = \frac{1}{4(z+3) - 5} = \frac{1}{4z + 7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 + 4z/7}.$$

Скористаємося рядом

$$1/(1+x) = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1),$$

в який замість x підставимо $4z/7$. Отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1 + 4z/7} = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4z/7)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n z^n}{7^{n+1}}.$$

Поклавши $z = x - 3$, повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}$.

Його область збіжності $(5/4; 19/4)$ знайдена вище.

б) Спосіб 1 – безпосередня побудова. (Розв'яжіть самостійно).

Спосіб 2 – формальні перетворення. Введемо нову змінну $z = x + 2$ – відхилення від центру розвинення $x = x_0 = -2$. Дістанемо:

$$x = z - 2; \quad f(x) = \cos \frac{\pi x}{4} = \cos \frac{\pi(z-2)}{4} = \cos \left(\frac{\pi z}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi z}{4}.$$

Потім скористаємося відомим розвиненням

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

в яке замість x підставимо $\pi z/4$. Отримаємо:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi z/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)! 4^{2n+1}}.$$

Далі повернемося до початкової змінної x і дістанемо шуканий розклад $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} (x+2)^{2n+1}}{(2n+1)! 4^{2n+1}}$.

Область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$. (Переконайтеся в цьому самостійно, застосовуючи ознаку Даламбера). ■

1.5.5. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

У наближених обчисленнях степеневі ряди застосовують, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв'язування диференціальних рівнянь.

Наближене обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд в деякому інтервалі $(a; b)$, що містить точку x_0 , то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене – частковій сумі $S_n(x_0)$: $f(x_0) \approx S_n(x_0)$. Абсолютна похибка $\Delta = |f(x_0) - S_n(x_0)|$ характеризує точність наближення. Вона дорівнює модулю залишку ряду $\Delta = |R_n(x_0)|$.

Треба також враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених в $S_n(x_0)$ членів ряду (дивись пункт 1.1).

Приклад 1. Обчислити наближено значення $\sin 12^\circ$ з точністю до $\varepsilon = 0,0001$.

□ Скористаємося розвиненням функції $\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R,$$

де покладемо $x = 12^\circ = \pi/15 = 0,2094393$ і дістанемо знакопчерговий ряд

$$\sin 12^\circ = \sin \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\pi^3}{15^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{15^5 \cdot 5!} + \dots + \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{15^{2n+1} \cdot (2n+1)!} + \dots$$

Для заданої точності $\varepsilon = 0,0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0,0001/2 = 0,00005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми $f(x_0)$ ряду частковою сумою $S_n(x_0)$ отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0,00005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниця $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. Тоді

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| = \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \varepsilon_1 = 0,00005; \quad \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 0,00005.$$

Розв'яжемо цю нерівність методом підбору:

$$n = 0: |u_1| = (\pi/15)^3 / 3! = 0,0015312 > \varepsilon_1 = 0,00005;$$

$$n = 1: |u_2| = (\pi/15)^5 / 5! = 0,000003 \leq \varepsilon_1 = 0,00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду u_0 і u_1 .

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \leq \varepsilon_2 = 0,00005; \quad 10^{-k} \leq 0,00005; \quad k \geq \lg 20000; \quad k = 5.$$

Таким чином

$$\sin 12^\circ \approx S_1 = \pi/15 - (\pi/15)^3 / 3! = 0,20944 - 0,00153 = 0,20791.$$

Остаточо $\sin 12^\circ \approx 0,2079$. ■

Наближене обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, який не береться в елементарних функціях або складний і незручний для безпосередніх обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, інтервал збіжності якого охоплює відрізок інтегрування $[a; b]$. Тоді на цьому відрізку ряд можна почленно проінтегрувати, використавши відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибка обчислень визначається так само, як і при знаходженні значень функцій.

Приклад 2. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4 (e^{x^2} - 1) dx$ з точністю до $\varepsilon = 0,0001$.

□ Формула Ньютона – Лейбниція тут не застосовна, тому що первісна від $f(x) = x^4 (e^{x^2} - 1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x , де замість

x підставимо x^2 , потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4 :

$$\begin{aligned} x^4(e^{x^2} - 1) &= x^4\left(1 + x^2/1! + x^4/2! + \dots + x^{2n}/n! + \dots\right) - 1 = \\ &= x^6/1! + x^8/2! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Оскільки $[0; 1/2] \subseteq (-\infty; +\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0; 1/2]$. Дістанемо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} \left(x^6/1! + x^8/2! + x^{10}/3! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots\right) dx = \\ &= \left(\frac{x^7}{1! \cdot 7} + \frac{x^9}{2! \cdot 9} + \frac{x^{11}}{3! \cdot 11} + \dots + \frac{x^{2n+5}}{n! \cdot (2n+5)} + \dots\right) \Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{1! \cdot 7 \cdot 2^7} + \\ &+ 1/(2! \cdot 9 \cdot 2^9) + 1/(3! \cdot 11 \cdot 2^{11}) + \dots + 1/(n! \cdot (2n+5) \cdot 2^{2n+5}) + \dots \end{aligned}$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0,0001$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0,0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0,0001/2 = 0,00005.$$

Спочатку оцінимо n -й залишок:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!(2n+7) \cdot 2^{2n+7}} + \frac{1}{(n+2)!(2n+9) \cdot 2^{2n+9}} + \\ &+ \frac{1}{(n+3)!(2n+11) \cdot 2^{2n+11}} + \dots = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{2n+7}} \left(\frac{1}{2n+7} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2(n+2)(2n+9)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)} + \dots \right) < \\ &< \frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!(2n+7)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, ..., що стоять у знаменниках другого, третього, ... дробів, замінено на

менший вираз $2n + 7$), від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q = 1/2$. Її сума $S = 1/(1 - 1/2) = 2$. Тоді

$$R_n < 1/\left(2^{2n+7}(n+1)!(2n+7)\right) \cdot 2 < 1/\left(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)\right).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n < 1/\left(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)\right) \leq \varepsilon_1 = 0,00005 :$$

$$n = 1: \quad R_1 < 1/\left(2^8 \cdot 2! \cdot 9\right) = 0,000217 > \varepsilon_1 = 0,00005 ;$$

$$n = 2: \quad R_2 < 1/\left(2^{10} \cdot 3! \cdot 11\right) = 0,000015 < \varepsilon_1 = 0,00005 .$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \leq \varepsilon_2 = 0,00005 ; \quad 10^{-k} \leq 0,00005 ; \quad k \geq \lg 20000 ; \quad k = 5 .$$

Таким чином

$$I \approx S_2 = \frac{1}{1! \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{1}{2! \cdot 9 \cdot 2^9} = 0,00112 + 0,00011 = 0,00123 .$$

Остаточо $I \approx 0,0012$. ■

Наближене розв'язування диференціальних рівнянь. Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається або досить складно, його розв'язок $y = y(x)$ можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв'язуванні задачі Коші:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0 :

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)$, $n = 2, 3, \dots$ знаходиться **методом послідовного диференціювання** чи **методом невизначених коефіцієнтів**. Суть цих методів розгля-

немо на прикладах.

Зауваження 1. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду, а також яка похибка цього розв'язку, тут не розглядаються.

Приклад 3. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших чотирьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^2 - x^3$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

□ Застосовуємо метод послідовного диференціювання.

Шукаємо розв'язок $y = y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші чотири члени.

За умовою $y(1) = 2$. Підставляючи $x = 1$ і $y = y(1) = 2$ у диференціальне рівняння $y' = y^2 - x^3$, знаходимо $y'(1) = 2^2 - 1^3 = 3$.

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по x і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$ і $y'''(1)$:

$$y'' = 2y y' - 3x^2; \quad y''(1) = 2 \cdot y(1) \cdot y'(1) - 3 \cdot 1^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 = 9;$$

$$y''' = 2(y' y'' + y y''') - 6x = 2(y')^2 + 2y y'' - 6x;$$

$$y'''(1) = 2(y'(1))^2 + 2y(1) \cdot y''(1) - 6 \cdot 1 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 9 - 6 = 42.$$

$$\text{Отже, } y(x) = 2 + (3/1!)(x-1) + (9/2!)(x-1)^2 + (42/3!) \times \\ \times (x-1)^3 + \dots = 2 + 3(x-1) + (9/2)(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + \dots \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших трьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^2 - 64 \ln(1 + x/2)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 4$.

□ Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

Шукаємо розв'язок $y = y(x)$ у вигляді степеневого ряду $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ з центром розвинення у початковій точ-

ці $x = 0$. Тут згідно умови задачі явно виписані перші три члени з невідомими коефіцієнтами a_n , $n = 0, 1, 2$.

З початкової умови $y(0) = 4$ дістаємо $a_0 = y(0) = 4$. Тоді розв'язок $y = y(x)$ набуває вигляду: $y(x) = 4 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

Далі диференціюємо цей розв'язок: $y'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots$

Використовуючи стандартне розвинення для $\ln(1+x)$, в якому замінюємо x на $x/2$, дістаємо степеневий ряд з центром в тій же початковій точці $x = 0$ для функції $\ln(1+x/2)$ в правій частині:

$$\ln(1+x/2) = x/2 - x^2/(2^2 \cdot 2) + \dots = x/2 - x^2/8 + \dots,$$

де відповідно до умови задачі явно виписані тільки перші члени до степеня x^2 включно.

Отримані вирази підставляємо в диференціальне рівняння:

$$a_1 + 2a_2x + \dots = (4 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^2 - 64 \cdot ((1/2)x - (1/8)x^2 + \dots);$$

$$a_1 + 2a_2x + \dots = 16 + a_1^2x^2 + a_2^2x^4 + 8a_1x + 8a_2x^2 + \\ + 2a_1a_2x^3 + \dots - 32x + 8x^2 - \dots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & a_1 = 16; \\ x & 2a_2 = 8a_1 - 32; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

Звідси знаходимо: $a_1 = 16$; $a_2 = 4a_1 - 16 = 4 \cdot 16 - 16 = 48$.

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістаємо: $y(x) = 4 + 16x + 48x^2 + \dots$ ■

Зауваження 2. Цими ж методами можна наближено розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків.

Приклад 5. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд в околі початкової точки частинного розв'язку диференціального рівняння $y'' = xy' - 3e^y$, що задовольняє

початковим умовам $y(3) = 0$, $y'(3) = 1$.

□ Скористаємося методом послідовного диференціювання.
Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду:

$$y(x) = y(3) + \frac{y'(3)}{1!}(x-3) + \dots + \frac{y^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + \dots$$

Тут

$$y(3) = 0; \quad y'(3) = 1 \neq 0; \quad y''(3) = 3y'(3) - 3e^{y(3)} = 3 \cdot 1 - 3e^0 = 0.$$

Послідовно диференціюючи дане рівняння, отримаємо:

$$y''' = y' + xy'' - 3e^y y'; \quad y'''(3) = y'(3) + 3y''(3) - 3e^{y(3)} y'(3) =$$

$$= 1 + 3 \cdot 0 - 3e^0 \cdot 1 = -2 \neq 0; \quad y^{(4)} = y'' + y'' + xy''' -$$

$$- 3(e^y y' y' + e^y y'') = 2y'' + xy''' - 3e^y (y')^2 - 3e^y y'';$$

$$y^{(4)}(3) = 2y''(3) + 3y'''(3) - 3e^{y(3)} (y'(3))^2 - 3e^{y(3)} y''(3) =$$

$$= 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) - 3e^0 \cdot 1^2 - 3e^0 \cdot 0 = -9 \neq 0.$$

Підставляючи знайдені похідні в шуканий ряд, дістанемо:

$$y(x) = 0 + (1/1!)(x-3) + (0/2!)(x-3)^2 + (-2/3!)(x-3)^3 + \\ + (-9/4!)(x-3)^4 + \dots = (x-3) - (1/3)(x-3)^3 - (3/8)(x-3)^4 + \dots \blacksquare$$

1.5.6. Степеневі ряди на комплексній площині

Комплексним числовим рядом називається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots,$$

члени якого є комплексними числами: $c_n = a_n + ib_n$, $n=1, 2, \dots$

Відокремлюючи дійсну й уявну частини ряду, отримуємо два дійсних ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо одночасно збіжні обидва

цих ряди, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, то комплексний ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ теж **збіжний**, причому $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A + iB$. Якщо хоч один

з рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбіжний, то комплексний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ теж **розбіжний**.

Таким чином, дослідження комплексного ряду на збіжність зводиться до дослідження двох дійсних рядів за допомогою розглянутих вище ознак збіжності.

Якщо збігається ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, то комплексний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається **абсолютно збіжним**.

Комплексним степеневим рядом називається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots,$$

де аргумент z , центр розвинення z_0 і сталі коефіцієнти c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ є комплексними числами: $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $c_n = a_n + ib_n$.

Не зменшуючи загальності, можна розглядати ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ з центром розвинення $z_0 = 0$.

Зауваження. Комплексний степеневий ряд є узагальненням дійсного степеневого ряду. Зокрема, у ряді $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ з комплексним аргументом z центр розвинення z_0 і сталі коефіцієнти c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ можуть бути дійсними числами.

Комплексний степеневий ряд має властивості, аналогічні відповідним властивостям дійсного степеневого ряду. Зокрема, залишається справедливою теорема Абеля.

Круг радіуса R з центром у початку координат $z = 0$, усередині якого степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ абсолютно збігається, а ззовні розбігається, називається **кругом збіжності** цього ряду. Число R називається **радіусом збіжності**.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ збіжний в усій комплексній площині, то $R = +\infty$. Якщо цей ряд збіжний лише в одній точці $z = 0$, то

$R = 0$.

Питання про збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в точках межі круга збіжності, тобто на колі $|z| = R$, розв'язується окремо для кожного конкретного ряду.

У середині круга збіжності комплексний степеневий ряд можна почленно диференціювати й інтегрувати.

Приклад. Знайти область збіжності даного комплексного степеневого ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+2)^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5} 27^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8n+3)^n}{n^n 2^{3n}} (z-i)^n.$$

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (z+2)^{3n+4}}{(2n+3)^{1/5} 27^{n+1}} : \frac{(-1)^n (z+2)^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5} 27^n} \right| = \frac{|z+2|^3}{27} \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{1/5} = \frac{|z+2|^3}{27} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+1/n}{2+3/n} \right)^{1/5} = \frac{|z+2|^3}{27} < 1; \\ &|z+2|^3 < 27; \quad |z+2| < 3. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд абсолютно збіжний всередині круга $|z+2| < 3$, а $R = 3$ – його радіус збіжності.

На колі $|z+2| = 3$ маємо дійсний знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |z+2|^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5} 27^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5} 27^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{1/5}}.$$

Ряд з його модулів $3 \sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^{1/5}$ розбігається за граничною ознакою порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/5}$ ($p = 1/5 \leq 1$).

Оскільки виконуються умови ознаки Лейбниці

$$|u_n| = 3/(2n+1)^{1/5} > 3/(2n+3)^{1/5} = |u_{n+1}|;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/(2n+1)^{1/5}) = 0,$$

то знакочерговий ряд $3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n+1)^{1/5}$ збігається умовно.

Отже, областю збіжності є замкнений круг $|z+2| \leq 3$.

б) До даного ряду застосуємо радикальну ознаку:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(8n+3)^n (z-i)^n / (n^n 2^{3n})|} = \frac{|z-i|}{8} \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} ((8n+3)/n) = (|z-i|/8) \lim_{n \rightarrow \infty} (8+3/n) = |z-i| < 1. \end{aligned}$$

Таким чином, ряд абсолютно збіжний всередині круга $|z-i| < 1$, а $R=1$ – його радіус збіжності.

На колі $|z-i|=1$ маємо дійсний знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (8n+3)^n |z-i|^n / (n^n 2^{3n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (8n+3)^n / (n^n 2^{3n}),$$

який розбігається, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8n+3)^n}{n^n 2^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n+3}{8n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{8n} \right)^{\frac{8n}{3} \frac{3}{8n} n} = \\ &= e^{3/8} \neq 0. \end{aligned}$$

Отже, областю збіжності є відкритий круг $|z-i| < 1$. ■

Сума $S(z)$ комплексного степеневого ряду всередині круга збіжності є деякою функцією комплексної змінної. Користуючись стандартними розвиненнями функцій дійсної змінної в степеневі ряди (ряди Маклорена) і поширюючи їх на комплексну площину, можна узагальнити поняття цих функцій, розглядаючи їх як суми відповідних комплексних степеневих рядів. Наприклад:

1) **показникова (експоненціальна) функція** комплексної змінної

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < +\infty;$$

2) **косинус** комплексної змінної

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < +\infty;$$

3) **синус** комплексної змінної

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < +\infty.$$

Теорема. Для довільного комплексного числа z справджується рівність: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ – основна формула Ейлера.

□ Підставляючи в наведений вище ряд для комплексної експоненти e^z замість z величину iz , дістанемо:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \dots = \\ &= 1 + i \frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i \frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \end{aligned}$$

де скористалися співвідношеннями

$$i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i; \quad i^{4n+4} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Оскільки отриманий ряд абсолютно збіжний, то його члени можна довільним способом групувати і переставляти. Зберемо окремо члени з множником i (уявна одиниця) та без нього і цей множник винесемо за дужки. Одержимо:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right).$$

У дужках маємо розвинення в степеневі ряди відповідно функцій $\cos z$ і $\sin z$. Отже, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. ■

1.6. Ряди Фур'є

Функціональні ряди використовуються для подання довільної функції $f(x)$ у вигляді:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x),$$

де $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$ – система відомих (**базисних**) функцій; a_n ($n = 0, 1, \dots$) – сталі коефіцієнти.

Розглянуті вище степеневі ряди (ряди Тейлора чи Маклорена) дозволяють подавати функції, що безліч разів диференційовні, тобто дуже гладкі. Крім того, у загальному випадку а) швидкість збіж-

ності (кількість членів, які треба залишити для досягнення заданої точності наближення) значно зростає при віддаленні від центру розвинення; б) n -а часткова сума S_n ряду Тейлора чи Маклорена не є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед поліномів n -го степеня.

Для розвинення розривних функцій чи функцій з розривами похідних потрібні інші функціональні ряди. Необхідність усунення зазначених та інших недоліків обумовлює переважне використання рядів з ортогональними базисними функціями.

Як і при розгляді степеневих рядів, виникають питання: а) за яких умов на задану функцію $f(x)$ можливе відповідне розвинення? б) як обчислити його коефіцієнти? в) який характер збіжності?

Далі дано відповіді для найбільш поширеної тригонометричної системи ортогональних базисних функцій.

1.6.1. Ортогональність функцій

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a; b]$. Їх можна розглядати як нескінченновимірні вектори і ввести відповідні означення.

Скалярним добутком функцій $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається невід'ємне число

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Евклідовою нормою функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається квадратний корінь зі скалярного квадрату (f, f) , тобто

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Функція $f(x)$ **нормована** на $[a; b]$, якщо $\|f\|_2 = 1$.

Середньо квадратичною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається евклідова норма їх різниці:

$$\rho_2(f, g) = \|f - g\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються **ортогональними** на від-

відрізка $[a; b]$, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Скінченна або нескінченна система функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., які неперервні на відріжку $[a; b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називається **ортogonalною** на цьому відрізку, якщо всі ці функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ A_n \neq 0, & m = n \end{cases} \quad (m = 0, 1, \dots; n = 0, 1, \dots).$$

Якщо при цьому $A_n = 1$ ($n = 0, 1, \dots$), то система називається **ортонормованою**. (Кожна функція є нормованою: $\|\varphi_n(x)\|_2 = \sqrt{A_n} = 1$).

Теорема. Система тригонометричних функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

ортogonalна на відріжку $[-\pi; \pi]$, довжина якого дорівнює їх спільному періоду $T = 2\pi$.

□ Враховуючи співвідношення $\sin nx = 0$ і $\cos nx = (-1)^n$ ($n \in Z$), безпосереднім обчисленням можна показати (зробіть це самостійно), що

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx &= 2\pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi; \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx &= 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= 0 \quad (m \neq n); \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n). \blacksquare \end{aligned}$$

Зауваження 1. Розглянута тригонометрична система ортогональна, але не нормована. Діленням кожної функції на відповідну норму її можна звести до ортонормованого вигляду.

Зауваження 2. Тригонометрична система має значне практичне застосування, оскільки описує поширені у різних сферах коливальні процеси. Однак існує багато інших ортогональних систем функцій. Зокрема, часто використовуються системи ортогональних многочленів Лежандра, Чебишова, Ерміта, Лагерра.

1.6.2. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є

За наведеною вище ортогональною тригонометричною системою складемо відповідний **тригонометричний ряд**:

$$a_0/2 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

де a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$) – сталі коефіцієнти.

Примітка. Для скорочення запису, за знаком підсумовування \sum зовнішні дужки часто опускають.

Оскільки базисні тригонометричні функції мають спільний період $T = 2\pi$, то сума ряду теж періодична з періодом $T = 2\pi$.

Нехай $f(x)$ – задана 2π -періодична функція. Знайдемо такі конкретні значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$), щоб справджувалося розвинення:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

Будемо припускати, що цей розклад і одержані з нього далі ряди можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi; \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. При обчисленнях використаємо значення інтегралів, записаних при доведенні теореми з попереднього пункту 1.6.1.

Інтегруючи ряд для $f(x)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (a_0/2) \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx.$$

Звідси

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (a_0/2) \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi; \quad a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (2)$$

Помноживши обидві частини (1) на $\cos mx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi; \pi]$, отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = (a_0/2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx.$$

Звідси при $m = n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = a_n \pi;$$

$$a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Аналогічно, помноживши ряд (1) на $\sin mx$ і проінтегрувавши в межах від $-\pi$ до π , знайдемо

$$b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Числа a_0 , a_n , b_n ($n = 1, 2, \dots$), які обчислюються за формулами (2) – (4), називаються **коефіцієнтами Фур'є** функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (1), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають **рядом Фур'є** цієї функції.

Зауваження 1. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку $[a; a + 2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$.

Знайдено декілька достатніх ознак збіжності ряду Фур'є до функції $f(x)$. Зазначимо без доведення одну з них.

Теорема Діріхле (достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є). Якщо функція $f(x)$ має період $T = 2\pi$ і на відрізку $[-\pi; \pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок $[-\pi; \pi]$ можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду $S(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює їй самій $S(x) = f(x)$, а у кожній точці розриву x_0 функції $f(x)$ – середньому арифметичному односторонніх границь при $x \rightarrow x_0$ зліва та справа

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right).$$

При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Функція $f(x)$, що задовольняє умови теореми Діріхле, називається **кусково-монотонною** на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Отже, у ряд Фур'є можна розвивати функції достатньо загального вигляду. Графік суми ряду $S(x)$ є сукупністю дуг кривих та ізольованих точок. Він майже всюди співпадає з графіком самої функції $f(x)$, за винятком її точок розриву першого роду, де сума ряду приймає згладжене значення, що дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь. Як приклад, на рис. 4 зображено графік деякої кусково-монотонної 2π -періодичної функції $f(x)$, а на рис. 5 – графік суми $S(x)$ її ряду Фур'є.

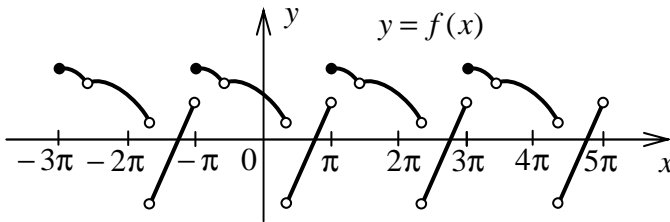


Рис. 4

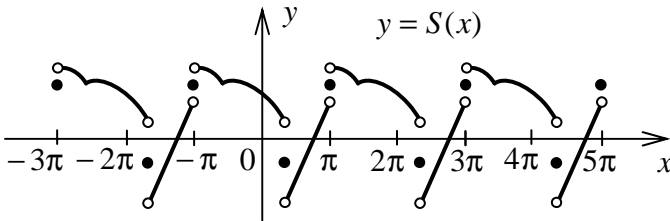


Рис. 5

Зауваження 2. Швидкість збіжності ряду Фур'є тим більша, чим гладкіша функція $f(x)$.

Зауваження 3. Часткова сума S_n ряду Фур'є є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед тригонометричних функцій.

тричних многочленів відповідного вигляду.

Зауваження 4. Ряди Фур'є можна використовувати для знаходження сум числових рядів. Якщо x_0 – точка неперервності функції $f(x)$, то за теоремою Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = f(x_0) - a_0/2.$$

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичні функції:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x^2/\pi, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0; \\ -\pi, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

У випадку а), користуючись одержаним розвиненням, обчислити суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n^2$.

□ а) Задана функція кусково-монотонна на проміжку $[-\pi; \pi]$ (рис. 6), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$\begin{aligned} a_0 &= (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (1/\pi) \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (x^2/\pi) dx \right) = \\ &= (1/\pi^2) (x^3/3) \Big|_0^{\pi} = \pi/3; \quad a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= (1/\pi) \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \int_0^{\pi} (x^2/\pi) \cos nx dx \right) = (1/\pi^2) \times \\ &\times \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \quad du = 2x dx; \\ dv = \cos nx dx; \quad v = (1/n) \sin nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi^2} \times \end{aligned}$$

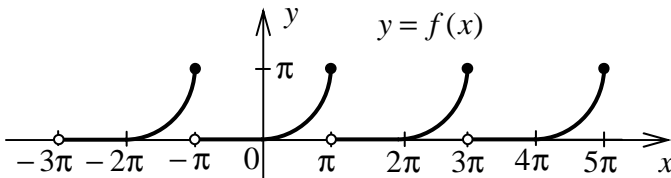


Рис. 6

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{x^2}{n} \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin nx dx \right) = -\frac{2}{\pi^2 n} \int_0^\pi x \sin nx dx = \\
& = \left| u = x; \quad du = dx; \quad dv = \sin nx dx; \quad v = -(1/n) \cos nx \right| = \\
& = -\frac{2}{\pi^2 n} \left(-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx dx \right) = -\frac{2}{\pi^2 n} \left(-\pi(-1)^n / n + \right. \\
& + (1/n^2) \sin nx \Big|_0^\pi \Big) = 2(-1)^n / (\pi n^2); \quad b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx = \\
& = (1/\pi) \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx dx + \int_0^\pi (x^2/\pi) \sin nx dx \right) = (1/\pi^2) \times \\
& \times \int_0^\pi x^2 \sin nx dx = \left| u = x^2; \quad du = 2x dx; \right. \\
& \left. dv = \sin nx dx; \quad v = -(1/n) \cos nx \right| = \frac{1}{\pi^2} \times \\
& \times \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x \cos nx dx \right) = -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi^2 n} \int_0^\pi x \cos nx dx = \\
& = \left| u = x; \quad du = dx; \quad dv = \cos nx dx; \quad v = (1/n) \sin nx \right| = (-1)^{n+1} / n + \\
& + \frac{2}{\pi^2 n} \left(x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx dx \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^\pi = \\
& = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{\pi^2 n^3} ((-1)^n - 1) = \frac{(-1)^{n+1} \pi^2 n^2 + 2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^3}.
\end{aligned}$$

Розвинення заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} \pi^2 n^2 + 2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^3} \sin nx \right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x \neq (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. У точках $x = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ функція $f(x)$ терпить розриви першого роду (скінченні стрибки висотою π). У цих точках сума ряду

$$S((2n+1)\pi) = \frac{1}{2} (f((2n+1)\pi - 0) + f((2n+1)\pi + 0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Значимо, що сума $S(x)$ є розривною функцією, хоча всі члени ряду неперервні (у точках розриву $x = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ порушена рівномірна збіжність ряду).

При $x = 0$ функція $f(x)$ неперервна. У цій точці одержимо:

$$f(0) = \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2} \cos 0 + \frac{(-1)^{n+1} \pi^2 n^2 + 2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^3} \sin 0 \right);$$

$$0 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}. \quad \text{Звідси} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n - \pi - 1}{\pi n} \sin nx \right). \quad \blacksquare$$

1.6.3. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

Для парних і непарних функцій справедливі наступні твердження (доведіть їх самостійно):

1) Добуток двох парних чи двох непарних функцій є парною функцією.

2) Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.

3) Інтеграл по симетричному відрізку $[-a; a]$, $a > 0$ від парної функції $f(x)$ дорівнює подвоєному інтегралу по правій половині цього проміжку $[0; a]$: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

4) Інтеграл по симетричному відрізку $[-a; a]$, $a > 0$ від непарної функції $f(x)$ дорівнює нулю: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичну парну функцію $f(x)$. Оскільки $\cos nx$ і $\sin nx$ – відповідно парна ч непарна функції, то добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ також відповідно є

парною і непарною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi; \pi]$, дістанемо:

$$a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = (2/\pi) \int_0^{\pi} f(x) dx ; \quad (1)$$

$$a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = (2/\pi) \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx ; \quad (2)$$

$$b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 .$$

Тоді ряд Фур'є для парної функції набуває вигляду

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx . \quad (3)$$

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичну непарну функцію $f(x)$. Тоді добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ відповідно є непарною і парною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi; \pi]$, дістанемо:

$$a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0 ; \quad a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 ;$$

$$b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = (2/\pi) \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx . \quad (4)$$

Ряд Фур'є для непарної функції набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx . \quad (5)$$

Зазначимо, що ряди (1) – (3) і (4), (5) відображають характер функції $f(x)$. Ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси (парні функції), а ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси (непарні функції).

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π -періодичні функції:

$$а) f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi; \quad б) f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0; \\ -1, & 0 \leq x < \pi; \end{cases}$$

$$в) f(x) = x^3, \quad -\pi < x < \pi .$$

Користуючись одержаними розвиненнями, обчислити суми числових рядів відповідно

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2 \quad \text{і} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/(2n-1).$$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Оскільки функція $f(x)$ парна (рис. 7), то, користуючись формулами (1) – (3), дістанемо:

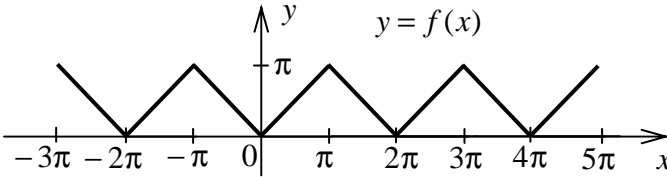


Рис. 7

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m, m = 1, 2, \dots; \\ -\frac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n = 2m-1, m = 1, 2, \dots; \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Ця рівність виконується на всій числовій осі, тому що задана функція неперервна для всіх дійсних значень x .

У точці неперервності $x = 0$ отримаємо:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 0}{(2m-1)^2}; \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Звідси
$$\sum_{m=1}^{\infty} 1/(2m-1)^2 = \pi^2/8.$$

б) Функція $f(x)$ непарна (рис. 8). Згідно з формулами (4) і (5) маємо:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (-1) \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi n} \cos nx \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m, m = 1, 2, \dots; \\ -\frac{4}{\pi(2m-1)}, & n = 2m-1, m = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

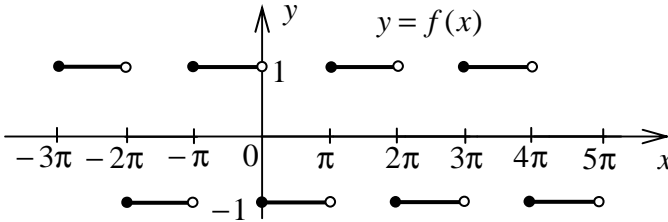


Рис. 8

Ця рівність справедлива на всій числовій осі $x \in (-\infty; +\infty)$, крім точок розриву $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. У точках розриву $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ сума знайденого ряду синусів, очевидно, дорівнює нулю.

У точці неперервності $x = \pi/2$ дістанемо:

$$f(\pi/2) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)(\pi/2)}{2m-1}; \quad -1 = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}.$$

Звідси $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} / (2m-1) = \pi/4$.

в) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6 - \pi^2 n^2)}{n^3} \sin nx. \quad \blacksquare$$

1.6.4. Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом. Гармонічний аналіз

Нехай $2l$ -періодична функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$ довжиною в період $T = 2l$, $l > 0$ і на цьому відрізку є кусково-монотонною.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x = lt/\pi$ і розглянемо функцію $\varphi(t) = f(lt/\pi)$.

Ця 2π -періодична функція $\varphi(t)$ визначена на відрізку $[-\pi; \pi]$ і кусково-монотонна на ньому. Розвинемо її в ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt); \quad a_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt;$$

$$a_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt; \quad b_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt.$$

Повернемося до змінної x і дістанемо шукане розвинення:

$$t = \frac{\pi x}{l}; \quad dt = \frac{\pi}{l} dx; \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right);$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Зауваження 1. Розвинення парних та непарних періодичних функцій з періодом $T = 2l$, $l > 0$ відповідно у ряди косинусів і синусів набувають наступного вигляду.

а) Для парної $2l$ -періодичної функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l};$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

б) Для непарної $2l$ -періодичної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є періодичні функції, що задані на відповідному відрізку $[-l; l]$ довжиною в період $T = 2l$, $l > 0$. Знайти значення суми ряду $S(0)$ і $S(l/2)$:

а) $f(x) = |\sin x|$, $-\pi/2 < x < \pi/2$; б) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0; \\ x-1, & 0 < x < 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x < \pi/2. \end{cases}$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Функція $f(x)$ парна і має півперіод $l = \pi/2$ (рис. 9). Її можна подати у вигляді ряду косинусів. Дістанемо:

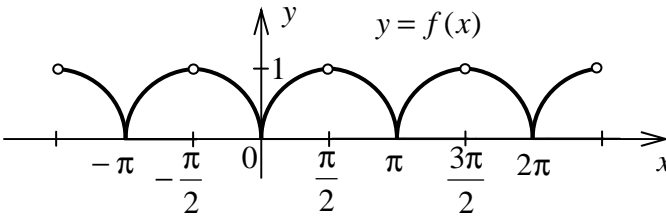


Рис. 9

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{4}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos \frac{n\pi x}{\pi/2} dx =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x) dx = -\frac{2}{\pi(1+2n)} \times$$

$$\times \cos(1+2n)x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi(1-2n)} \times \cos(1-2n)x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi(1+2n)} +$$

$$+ \frac{2}{\pi(1-2n)} = \frac{2(1-2n+1+2n)}{\pi(1+2n)(1-2n)} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)};$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \right) \cos \frac{n\pi x}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

У точках $x=0$ і $x=l/2=\pi/4$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(0) = f(0) = 0; \quad S(\pi/4) = f(\pi/4) = |\sin(\pi/4)| = \sqrt{2}/2.$$

б) Функція $f(x)$ непарна і має півперіод $l=1$ (рис. 10). Її можна розкласти в ряд синусів. Одержимо:

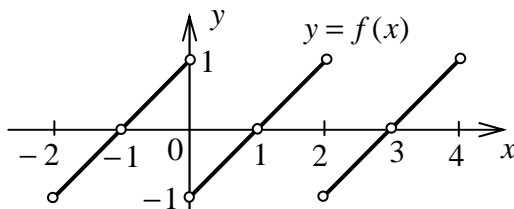


Рис. 10

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{1} \int_0^1 (x-1) \sin \frac{n\pi x}{1} dx =$$

$$= \left| u = x-1; du = dx; dv = \sin n\pi x dx; v = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right| =$$

$$= 2 \left(-\frac{x-1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx \right) = -\frac{2}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin n\pi x \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi x}{1} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

При $x=0$ дана функція $f(x)$ має скінченний стрибок, тому

$$S(0) = (1/2) \left(\lim_{x \rightarrow -0} (x+1) + \lim_{x \rightarrow +0} (x-1) \right) = (1/2)(1-1) = 0.$$

У точці $x = l/2 = 1/2$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(1/2) = f(1/2) = 1/2 - 1 = -1/2.$$

в) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $f(x) = (\pi + 2)/(2\pi) +$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx + \frac{(4n^2 - 1)(-1)^n + 1}{n(4n^2 - 1)} \sin 2nx \right);$$

$$S(0) = f(0) = 1; \quad S(\pi/4) = f(\pi/4) = \sqrt{2}/2. \quad \blacksquare$$

Широке практичне застосування розвинення в ряд Фур'є за тригонометричними функціями зумовлене перш за все тим, що воно відображає структуру фізичних процесів як суперпозиції коливань.

Користуючись відомим з тригонометрії методом введення допоміжного аргументу, **ряд Фур'є** можна подати **в амплітудно-фазовій формі**

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n x + \varphi_n),$$

де $A_0 = a_0/2$ – **середнє значення функції $f(x)$ за період**; $\cos(\omega_n x + \varphi_n)$ – **n -а гармоніка** ($n = 1, 2, \dots$), що має **кругову частоту** (**хвильове число**) $\omega_n = n\pi/l$, **амплітуду** A_n і **початкову фазу** φ_n , які визначаються зі співвідношень:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad a_n = A_n \cos \varphi_n; \quad b_n = -A_n \sin \varphi_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Хвильові числа утворюють послідовність $\{\omega_n\} = \{n\pi/l\}$ – **спектр**. Спектр має дискретний характер зі сталим кроком $\Delta\omega = \pi/l$ між сусідніми числами. Відповідна послідовність амплітуд $\{A_n\}$ називається **амплітудним спектром**.

Процес і результат розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є називається **гармонічним аналізом**.

На ньому, зокрема, ґрунтується більшість видів неруйнівного контролю технічних систем.

В електротехніці при дослідженні лінійних ланцюгів частотним методом спочатку вхідний сигнал розкладається на елементарні гармонічні складові (аналіз), які потім перетворюються у відповідні

гармонічні складові на виході ланцюга. Одержані гармоніки підсумовуються, що визначає вихідний сигнал (синтез).

Зауваження 2. При практичній реалізації гармонічного аналізу звичайно оперують з емпіричними функціями, що задаються графічно, таблично чи алгоритмічно. Тому для обчислення інтегралів у формулах для коефіцієнтів Фур'є, як правило, використовують числові методи.

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є періодичні функції, що задані на відповідному відрізку $[-l; l]$ довжиною в період $T = 2l$. Зобразити діаграму амплітудного спектра $A_n = A_n(\omega_n)$, $n = \overline{1, 4}$:

$$\text{а) } f(x) = |x| + x, -3 < x \leq 3; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0; \\ 3, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Дана функція має півперіод $l = 3$. Її можна задати співвідношенням

$$f(x) = |x| + x = \begin{cases} -x + x = 0, & -3 < x < 0; \\ x + x = 2x, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = (1/l) \int_{-l}^l f(x) dx = (2/3) \int_0^3 x dx = (1/3) x^2 \Big|_0^3 = 3;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \Big| u = x; du = dx;$$

$$dv = \cos \frac{n\pi x}{3} dx; \quad v = \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big| = \frac{2}{3} \left(x \cdot \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 -$$

$$- \frac{3}{n\pi} \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \Big) = \frac{6}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{6((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2};$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \Big| u = x; du = dx;$$

$$dv = \sin \frac{n\pi x}{3} dx; \quad v = -\frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{2}{3} \left(-x \cdot \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 + \frac{3}{n\pi} \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right) = -\frac{6(-1)^n}{n\pi} + \frac{6}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Дістанемо ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} + \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right).$$

Знайдемо амплітуди гармонік і відповідні хвильові числа:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{6((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \right)^2 + \left(\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi} \right)^2} = 6\sqrt{2 + (-1)^{n+1} + n^2\pi^2} / (n^2\pi^2);$$

$$A_1 \approx 2,18; \quad A_2 \approx 0,97; \quad A_3 \approx 0,65; \quad A_4 \approx 0,46;$$

$$\omega_n = n\pi/l = n\pi/3; \quad \omega_1 = \pi/3; \quad \omega_2 = 2\pi/3; \quad \omega_3 = \pi; \quad \omega_4 = 4\pi/3.$$

Діаграма амплітудного спектра зображена на рис. 11.

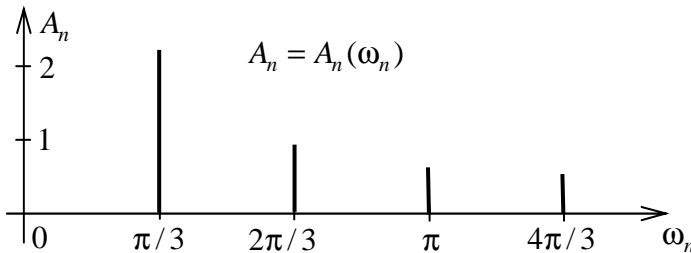


Рис. 11

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = 1 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi x; \quad A_n = \frac{8}{\pi(2n-1)}. \quad \blacksquare$$

1.6.5. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

На практиці часто виникає необхідність розвинути в ряд Фур'є неперіодичну функцію $f(x)$, задану на скінченному проміжку $[a; b]$. Нехай ця функція кусково-монотонна на відрізку $[a; b]$.

Побудуємо довільним способом періодичну кусково-монотонну функцію $f_*(x)$ з періодом $T \geq b - a$, що збігається з $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Наприклад, введемо допоміжну функцію

$$f_*(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & -l \leq x < a; \\ f(x), & a \leq x \leq b; \\ \varphi_2(x), & b < x \leq l, \end{cases}$$

де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – довільні кусково-монотонні функції (поза відрізком $[a; b]$ поведіння функції $f_*(x)$ не має значення), та продовжимо її періодичним способом з періодом $T = 2l \geq b - a$ на всю числову вісь. (Геометрично для цього потрібно виконати перенесення графіка функції $f_*(x)$ паралельно осі Ox праворуч і ліворуч на відстані $T, 2T, \dots, nT, \dots$).

Отриману $2l$ -періодичну функцію можна подати рядом Фур'є. На відрізку $[a; b]$ його сума співпадає з даною функцією $f(x)$ у всіх її точках неперервності, а в точках розриву всередині проміжку $[a; b]$ і на його кінцях вона дорівнює півсумі односторонніх границь. Тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є на відрізку $[a; b]$.

Зауваження. При різному виборі періоду $T = 2l \geq b - a$ і різних функціях $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ одержуємо різні розвинення однієї й тієї ж заданої функції $f(x)$, $x \in [a; b]$ в ряд Фур'є. Відкривається можливість вибирати краще за тими чи іншими критеріями розвинення. Наприклад, використовувати розклад, у якому коефіцієнти за модулем спадають швидше або обчислюються простіше.

Розглянемо детальніше поширений випадок, коли неперіодична функція $f(x)$ задана на відрізку $[0; l]$, $l > 0$. Випадки довільного проміжку $[a; b]$ зводяться до нього лінійною заміною аргументу

$$t = x - a .$$

Можна безпосередньо проміжок $[0;l]$ взяти за період $T = l$ і побудувати для $f(x)$ повний ряд Фур'є, проте при цьому доведеться обчислювати всі коефіцієнти a_0 , a_n і b_n .

Можна вчинити інакше: вибрати довільну кусково-монотонну функцію $\varphi(x)$ на відрізку $[-l;0]$ і визначити на всьому симетричному проміжку $[-l;l]$ допоміжну функцію

$$f_*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а потім поширити її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Далі знову для $f(x)$ побудувати ряд Фур'є, але тепер з іншим періодом $T = 2l$.

На практиці найчастіше перевага надається парному чи непарному продовженню функції $f(x)$, $x \in [0;l]$ на проміжок $[-l;0]$, що приводить до неповного ряду Фур'є.

а) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0;l]$ парним способом на проміжок $[-l;0]$ (геометрично для цього потрібно симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно осі Oy) (рис. 12), прийнявши

$$f_*(x) = \begin{cases} f(-x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Дістанемо розвинення в ряд косинусів:

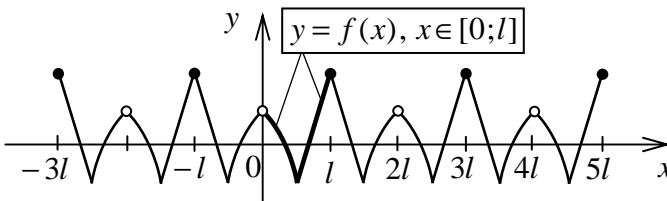


Рис. 12

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0; l]; \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f_*(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_*(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

При $x = 0$ і $x = l$ даний ряд збігається відповідно до $f(0+0)$ і $f(l-0)$.

б) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0; l]$ непарним способом на відрізок $[-l; 0]$ (геометрично для цього потрібно центрально симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно початку координат O) (рис. 13), вважаючи

$$f_*(x) = \begin{cases} -f(-x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову пряму. Одержимо розвинення в ряд синусів:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad x \in [0; l];$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_*(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

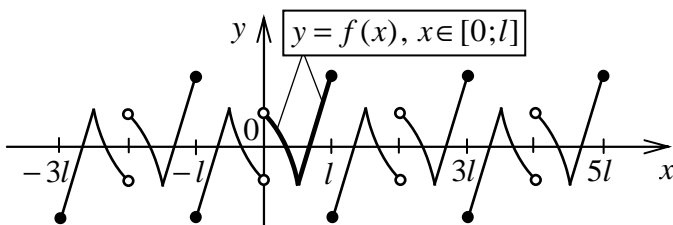


Рис. 13

У точках $x = 0$ і $x = l$ сума даного ряду дорівнює 0.

Приклад. Кожну з даних функцій, визначених на відповідному відрізку $[0; l]$, розвинути в ряд косинусів і ряд синусів:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1; \\ 2, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4-x, & 0 < x < 2; \\ x, & 2 < x < 3. \end{cases}$$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Маємо $l = 2$. При парному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд косинусів:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2x dx + \int_1^2 2 dx \right) = x^2 \Big|_0^1 + 2x \Big|_1^2 = 3; \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\ &= 2 \cdot x \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + 2 \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{8}{n^2 \pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right); \\ f(x) &= \frac{3}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \cos \frac{n\pi x}{2}. \end{aligned}$$

При непарному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд синусів:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \left(\int_0^1 2x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\ &= 2 \cdot x \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{-2}{n\pi} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{2} dx + 2 \cdot \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} (-1)^n + \frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2m, m = 1, 2, \dots; \\ \frac{8(-1)^{m+1}}{\pi^2 (2m-1)^2}, & n = 2m-1, m = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \frac{17}{6} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + (-1)^n - 2 \cos \frac{2n\pi}{3} \right) \cos \frac{n\pi x}{3};$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(4n\pi - 3n\pi(-1)^n - 6 \sin \frac{2n\pi}{3} \right) \sin \frac{n\pi x}{3}. \blacksquare$$

1.6.6. Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай $2l$ -періодична функція $f(x)$ розвинена в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

З основної формули Ейлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ випливає, що

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = -\frac{i}{2} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Тоді

$$\cos \frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2} (e^{i(n\pi/l)x} + e^{-i(n\pi/l)x}); \quad \sin \frac{\pi n x}{l} = -\frac{i}{2} (e^{i(n\pi/l)x} - e^{-i(n\pi/l)x}).$$

Підставимо ці вирази в записаний ряд і окремо згрупуємо доданки, що містять $e^{i(n\pi/l)x}$ і $e^{-i(n\pi/l)x}$, дістанемо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} (e^{i(n\pi/l)x} + e^{-i(n\pi/l)x}) - \frac{ib_n}{2} (e^{i(n\pi/l)x} - e^{-i(n\pi/l)x}) \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{i(n\pi/l)x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-i(n\pi/l)x}. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$c_0 = a_0/2; \quad c_n = (a_n - ib_n)/2; \quad c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$$

і одержимо **ряд Фур'є в комплексній формі**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n\pi/l)x},$$

де **комплексні коефіцієнти Фур'є** c_n обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i(n\pi/l)x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(перевірте самостійно окремо для c_0 , c_{-n} і c_n , $n = 1, 2, \dots$).

Зауваження 1. Комплексна форма ряду Фур'є має більш простий вигляд. До того ж у деяких випадках її застосування полегшує обчислення. При необхідності можна від комплексної форми перейти до дійсного вигляду, використовуючи співвідношення

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n}),$$

що дають дійсні значення, оскільки c_0 – дійсне число (середнє значення функції за період), а коефіцієнти c_{-n} і c_n – комплексно спряжені.

Приклад. Кожну з даних $2l$ -періодичних функцій, визначених на відповідному відрізку $[-l; l]$, розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0; \\ 2e^{-x}, & 0 \leq x < \pi; \end{cases} & \text{б) } f(x) &= \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0; \\ e^x, & 0 < x < 1; \end{cases} \\ \text{в) } f(x) &= \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0; \\ -1, & 0 < x < \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Маємо $l = \pi$. Знаходимо комплексні коефіцієнти Фур'є:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^x \cdot e^{-inx} dx + \int_0^{\pi} 2e^{-x} \cdot e^{-inx} dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{x(1-in)} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-x(1+in)} dx = \frac{1}{2\pi(1-in)} e^{x(1-in)} \Big|_{-\pi}^0 + \\
&\quad + \frac{-1}{\pi(1+in)} e^{-x(1+in)} \Big|_0^{\pi} = \frac{1-e^{-\pi(1-in)}}{2\pi(1-in)} - \frac{e^{-\pi(1+in)}-1}{\pi(1+in)} = \\
&= \frac{(1-e^{-\pi} \cdot e^{in\pi})(1+in) - 2(e^{-\pi} \cdot e^{-in\pi} - 1)(1-in)}{2\pi(1+in)(1-in)} = \left| \begin{array}{l} e^{in\pi} = (-1)^n \\ e^{-in\pi} = (-1)^n \end{array} \right| = \\
&= \frac{(1-e^{-\pi}(-1)^n)(1+in) - 2(e^{-\pi}(-1)^n - 1)(1-in)}{2\pi(1+n^2)} = \\
&= \frac{3(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{2\pi(1+n^2)} + i \frac{n(e^{-\pi}(-1)^n - 1)}{2\pi(1+n^2)}.
\end{aligned}$$

Дістанемо комплексну форму ряду Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{1+n^2} + i \frac{n(e^{-\pi}(-1)^n - 1)}{1+n^2} \right) e^{inx}.$$

б) і в) Розв'язати самостійно. Відповідь:

$$\begin{aligned}
\text{б) } f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2e \cos(n\pi/2) + en\pi \sin(n\pi/2) - 2}{4 + n^2\pi^2} + \right. \\
&\quad \left. + i \frac{en\pi \cos(n\pi/2) + 2e \sin(n\pi/2) - n\pi}{4 + n^2\pi^2} \right) e^{i(n\pi/2)x}.
\end{aligned}$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2i}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(2m-1)x}}{2m-1}. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. У гармонічному аналізі величина $e^{i(n\pi/l)x}$ називається **комплексною гармонікою**, якій відповідає **комплексна амплітуда** c_n . Амплітуда A_n і початкова фаза φ_n n -ї гармоніки $\cos(\omega_n x + \varphi_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) визначаються за формулами:

$$A_n = 2|c_n|; \quad \varphi_n = -\arg c_n.$$

1.6.7. Інтеграл Фур'є

Нехай функція $f(x)$, що задана на всій числовій осі, є кусково-монотонною на кожному скінченному інтервалі й абсолютно інтегрованою на всій області визначення $(-\infty; +\infty)$, тобто симетричний невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ збігається. На довільному проміжку $[-l; l]$ вона допускає розвинення в ряд Фур'є (в комплексній формі) $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x}$, де $\omega_n = n\pi/l$ – відповідні хвильові числа, що утворюють дискретний спектр з кроком $\Delta\omega = \pi/l$. Цей ряд можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((1/(2l)) \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx \right) e^{i\omega_n x} = \\ &= (1/(2\pi)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx \right) e^{i\omega_n x} \Delta\omega = \\ &= (1/(2\pi)) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega, \text{ де } \tilde{S}(\omega_n) = \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_n t} dt. \end{aligned}$$

Функцію $f(x)$, що задана на всій множині дійсних чисел R , можна розглядати як періодичну з нескінченним періодом $T = 2l = +\infty$. При $l \rightarrow +\infty$ крок $\Delta\omega$ між сусідніми хвильовими числами прямує до нуля, тобто спектр стає суцільним. Якщо зафіксувати x , то останній запис ряду Фур'є має вигляд інтегральної суми. При $l \rightarrow +\infty$ ($\Delta\omega \rightarrow 0$) ця сума замінюється інтегралом:

$$f(x) = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \text{ де } S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Одержаний інтеграл для функції $f(x)$ називається **інтегралом Фур'є в комплексній формі**. Він служить розвиненням функції $f(x)$ за неперервним спектром. Функція $S(\omega)$ називається **спектральною щільністю**. Вона є аналогом коефіцієнта c_n в комплексній формі ряду Фур'є. Проте, якщо c_n характеризує комплексну амплітуду, що відповідає круговій частоті (хвильовому числу) ω_n , то $S(\omega)$ – щільність розподілу комплексних амплітуд залежно від

кругової частоти ω . Її модуль $|S(\omega)|$ називають **амплітудою спектральної щільності** чи **амплітудним спектром**.

Зауваження 1. На відміну від класичної інтегральної суми, вираз $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega$ складається з доданків, які залежать від l . Необхідне теоретичне обґрунтування граничного переходу при $l \rightarrow +\infty$ виходить за рамки даного посібника.

Зауваження 2. У точках розриву першого роду функції $f(x)$ інтеграл Фур'є (як і сума ряду Фур'є) дорівнює півсумі односторонніх границь зліва та справа.

Зауваження 3. Збіжність невластних інтегралів по симетричному нескінченному проміжку $(-\infty; +\infty)$ розуміється в смислі головного значення.

Інтеграл Фур'є можна подати у дійсному вигляді

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega,$$

де

$$a(\omega) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad b(\omega) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Приклад 1. Знайти спектральну щільність і амплітудний спектр даної функції та зобразити її інтегралом Фур'є в комплексній формі:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{де } \alpha = \text{const} > 0;$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} h, & |x| \leq \tau; \\ 0, & |x| > \tau, \end{cases} \quad \text{де } h, \tau = \text{const} > 0.$$

□ а) Задана функція є кусково-монотонною. Крім того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = -(1/\alpha) e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = 1/\alpha.$$

Отже, $f(x)$ допускає подання інтегралом Фур'є.

Знайдемо спектральну щільність:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - i \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Тоді амплітудний спектр:

$$|S(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2} = 1/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}.$$

Інтеграл Фур'є в комплексній формі має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega.$$

б) Задана функція є кусково-монотонною й абсолютно інтегровною на всій числовій осі $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\tau}^{\tau} h dx = 2h\tau.$$

Отже, $f(x)$ допускає подання інтегралом Фур'є.

Знайдемо спектральну щільність:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} h e^{-i\omega t} dt = -\frac{h}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\tau}^{\tau} =$$

$$= -\frac{h}{i\omega} (e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}) = \frac{2h}{\omega} \cdot \frac{e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}}{2i} = \frac{2h}{\omega} \sin \omega\tau.$$

Оскільки одержано дійсну величину, то амплітудний спектр

$$|S(\omega)| = 2h|(1/\omega)\sin \omega\tau|.$$

Інтеграл Фур'є в комплексній формі має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega\tau}{\omega} e^{i\omega x} d\omega. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Зобразити інтегралом Фур'є в дійсній формі дану функцію:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in (0;1); \\ 0, & x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty); \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 2; \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

□ а) Задана функція є кусково-монотонною. Крім того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = 2 \int_0^1 (1-x) dx = -(1-x)^2 \Big|_0^1 = 1.$$

Отже, $f(x)$ допускає подання інтегралом Фур'є.

Знайдемо коефіцієнти $a(\omega)$ і $b(\omega)$:

$$\begin{aligned} a(\omega) &= (1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = (2/\pi) \int_0^1 (1-t) \cos \omega t dt = \\ &= \left| u = 1-t; dv = \cos \omega t dt; du = -dt; v = (1/\omega) \sin \omega t \right| = (2/\pi) \times \\ &\times \left((1-t) \cdot (1/\omega) \sin \omega t \Big|_0^1 + (1/\omega) \int_0^1 \sin \omega t dt \right) = -\frac{2}{\pi \omega^2} \cos \omega t \Big|_0^1 = \\ &= 2(1 - \cos \omega) / (\pi \omega^2); \quad b(\omega) = (1/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \\ &= (2/\pi) \int_0^1 (1-t) \sin \omega t dt = \left| u = 1-t; dv = \sin \omega t dt; du = -dt; \right. \\ &v = -(1/\omega) \cos \omega t \Big| = \frac{2}{\pi} \left(-(1-t) \cdot (1/\omega) \cos \omega t \Big|_0^1 - \frac{1}{\omega} \int_0^1 \cos \omega t dt \right) = \\ &= -\frac{2}{\pi \omega} - \frac{2}{\pi \omega^2} \sin \omega t \Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi \omega} - \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega^2} = -\frac{2(\omega + \sin \omega)}{\pi \omega^2}. \end{aligned}$$

Інтеграл Фур'є в дійсній формі має вигляд:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \cos \omega x - \frac{\omega + \sin \omega}{\omega^2} \sin \omega x \right) d\omega.$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\omega - 2\omega \cos 2\omega}{\omega^2} \sin \omega x d\omega. \quad \blacksquare$$

1.7. Контрольні запитання

1. Що називається числовим рядом, частковою сумою, загальним членом, сумою, залишком ряду?
2. У чому полягає необхідна ознака збіжності та відповідна достатня ознака розбіжності ряду?
3. Сформулюйте властивості дій з рядами.
4. Який числовий ряд називається знакододатним?
5. У чому полягає інтегральна ознака Коші? Як оцінюються сума і залишок збіжного знакододатного ряду, спираючись на інтегральну ознаку?
6. При яких умовах збігаються і розбігаються найпоширеніші еталонні ряди – узагальнений гармонічний ряд і ряд геометричної прогресії?
7. Сформулюйте основну ознаку порівняння.
8. У чому полягає гранична ознака порівняння? Як треба підбирати відповідний еталонний ряд?
9. Сформулюйте ознаку Даламбера.
10. Коли краще застосовувати ознаку Даламбера, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
11. У чому полягає радикальна ознака Коші?
12. Коли краще застосовувати радикальну ознаку, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
13. Який числовий ряд називається знакозмінним?
14. Що таке знакопочерговий ряд (ряд Лейбниця)?
15. У чому полягає ознака Лейбниця збіжності знакопочергового ряду?
16. Як оцінюються сума і залишок збіжного знакопочергового ряду, спираючись на ознаку Лейбниця?
17. Який знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним? Умовно збіжним?
18. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
19. В якому порядку краще досліджувати знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжність?
20. Що називається функціональним рядом? Що таке його точка збіжності і точка розбіжності? Область збіжності?
21. Який функціональний ряд називається абсолютно збіжним?
22. Що називається рівномірною нормою функції, яка неперервна на відріжку?

23. Що називається рівномірною відстанню між функціями, які неперервні на відрізку?
24. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним?
25. У чому полягає ознака Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду?
26. Сформулюйте властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
27. Який функціональний ряд називається степеневим?
28. У чому полягає теорема Абеля про збіжність степеневого ряду?
29. Що таке інтервал збіжності степеневого ряду? Чим область збіжності може відрізнятись від інтервалу збіжності?
30. Яким може бути радіус збіжності степеневого ряду?
31. Як досліджується збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності?
32. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
33. Який вигляд мають ряди Тейлора і Маклорена?
34. У чому полягає теорема про єдиність розвинення функції в ряд Тейлора?
35. Сформулюйте теореми про умови існування й збіжності ряду Тейлора.
36. Які основні способи побудови розкладу функцій у ряди Тейлора і Маклорена?
37. Наведіть приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень значень функцій, визначених інтегралів і розв'язування диференціальних рівнянь.
38. Що називається комплексним степеневим рядом? Який вигляд має його область збіжності?
39. Як за допомогою рядів задаються експонента, синус і косинус комплексної змінної? Запишіть основну формулу Ейлера, що зв'язує ці функції.
40. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?
41. Що називається скалярним добутком функцій, які неперервні на відрізку?
42. Що називається евклідовою нормою функції, що неперервна на відрізку?
43. Що називається середньо квадратичною відстанню між функціями, які неперервні на відрізку?
44. Яка пара функцій називається ортогональною на відрізку?

45. Яка система функцій називається ортогональною на відрізку? Ортонормованою на ньому?
46. Що називається рядом Фур'є за тригонометричною системою функцій?
47. Як обчислюються коефіцієнти Фур'є для 2π -періодичної функції?
48. Сформулюйте теорему Діріхле, що виражає достатню ознаку розвинення функції в ряд Фур'є.
49. Яка функція називається кусково-монотонною на відрізку?
50. Як записується неповний ряд Фур'є для 2π -періодичної парної функції? Для 2π -періодичної непарної функції? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цих випадках?
51. Як записується ряд Фур'є для періодичної функції з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цьому випадку?
52. Як будується періодичне продовження функції, що задана на скінченному проміжку?
53. Як будується парне (непарне) періодичне продовження функції, що задана на відрізку $[0; l]$? Як записується відповідний ряд косинусів (ряд синусів)? За якими формулами обчислюються коефіцієнти отриманого розвинення?
54. Як записується ряд Фур'є в амплітудно-фазовій формі?
55. Що називається гармонічним аналізом?
56. Що таке гармоніка, хвильове число, амплітуда, початкова фаза? Як ці величини виражаються через коефіцієнти Фур'є?
57. Як записується ряд Фур'є в комплексній формі? За якими формулами обчислюються коефіцієнти цього розвинення?
58. Що таке комплексна амплітуда? Як виражаються амплітуда і початкова фаза гармоніки через комплексну амплітуду?
59. Як записується інтеграл Фур'є в комплексній формі?
60. При яких умовах на функцію, що задана на всій числовій осі, можливе її подання інтегралом Фур'є?
61. Яка функція називається спектральною щільністю? Амплітудним спектром?

1.8. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди. Для ряду з пункту а) знайти третю часткову суму S_3 .

Вказівка. Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

№ в-та	Ряд а)	Ряд б)	Ряд в)
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{5^n(n^4+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1} \right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 3n}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n^3}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{\sqrt{3^n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 6n}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{9^n(n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n^3 \frac{2}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-1/n}}{n^2}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{\sqrt{2n^2+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{3n} \frac{1}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n/3)}{n\sqrt{4n+1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n}}{2n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n)}{n^4+3n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\sqrt{\ln(n+4)}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}\sqrt{n}}{4n^2-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{2n}(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n+4^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^2+4n+1}}{2n^3-n+8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 2n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{4n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln(3n+7)}}{3n+7}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(2n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{n} \right)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{n}$

11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{e^n n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{2n^3 + 2n}}{3n^2 - n + 6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{3n}}{(2n-1)^n}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sqrt[3]{3n-1}}{(n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6n^3 + n}}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{4n} \frac{1}{2n}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n}{\sqrt[4]{n^2 + 4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{3n}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{(2n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(6n-1)}{6n-1}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6(n+7)}{n+7}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n-1} \right)^{n^2}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n-1}}{\sqrt[3]{n^5 + 4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 7n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (1+1/n)^{n^3}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{3^{2n+5}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt[4]{(6n-5)^5}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{1/n} - 1)$
18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n}{\sqrt[5]{2n^2 + 1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(2n+3)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{3n}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{5^n + 2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(5n-3)}{5n-3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 3}{3n^2 - 2} \right)^n$
20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n/2}}{\sqrt[3]{n^2 + 4n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{(3n-1)^5}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{n^4 \sqrt{3^n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{2n^3} \frac{\pi}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2 + 2n)^3}}{(2n-1)^4}$
22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n-1}}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 6n}}{\sqrt[7]{(5n-3)^{10}}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+5} \right)^{n^2}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 2}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{2n} \frac{\pi}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2/n}}{n^3}$

24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (2n^2 - 1)}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{2n} (n+3)}{(n+3)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^3 + n + 1}}{n^3 - n + 4}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^3 - 1}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 (n+8)}{n+8}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{n^4}$
26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(3n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^5}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n}}{3^n + 4^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^{3n} \frac{n+1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n + 2}{8n^2 + 3n + 4}\right)^n$
28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+4}}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsin}^{3n} \frac{\pi}{4n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n^2}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} n}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{n^2 + 1}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{3^{n+1} 4\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{3n} \frac{\pi}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln 9n}}$

Завдання 2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність знакопочергові числові ряди. Для ряду з пункту а) знайти третій його член (з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми).

№ в-та	Ряд а)	Ряд б)
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[3]{4n}}{\sqrt{2n^2 + n + 2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{5n^4 + 3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n+2}}{2n^3 + 1}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[4]{n}}{5^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n}{(2n)!}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^2 + 9)}{(2n+1)!}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[5]{n^3}}{3n^4 + n + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{n + 6}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln 3n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin^{2n} \frac{1}{\sqrt{n}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[4]{n^4 - 1}}{(3n + 1)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 + 4)}{\sqrt{6^n}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n (2n + 1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n^5}}{n^2 - 2n + 5}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{8n^4 + 2n + 1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \arcsin \frac{\pi}{6n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}}{(3n - 1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n^9}}{2n^3 + 5}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n n}{(n + 3)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln (7n + 2)}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 3)^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n + 1)!}{(2n + 5)^2}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (3n + 5)}{3^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(5n + 2) \ln (5n + 2)}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1)}{(4n + 2)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{4n-1}}{(2n + 1)!}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{2n}}{(2n + 1)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^3 + 8)}{n (n^2 + 4)}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^{2n} + n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n^2 - 1}{5n^2 + 1}$

18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (5n+1)}{\sqrt{n^2+n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5\sqrt{n}}{3n-2}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+5)}{n^2+4}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln 2n}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{3n}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^3 \frac{\pi}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+7)}{\sqrt{n} (3n-1)}$
22	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+3)}{\sqrt[3]{4n^2+7}}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n+3}}{(2n+1)n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n+2)}{\sqrt[4]{n^5+1}}$
24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{3n}}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{2n^2+1}}{3n-1}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{\sqrt{2n^6+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{2n^4+3}}{6n-1}$
26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^2+9}}{2n^2-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n} (2n-1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \ln^7 (n+1)}$
28	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n^2+4}}{(2n-1)!}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n^3-1}}{\sqrt{4n^4+9}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin^4 \frac{\pi}{n}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt{\ln 7n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n-1} n!}$

Завдання 3. Знайти радіус, інтервал і область збіжності степеневого ряду.

№ в-та	Ряд	№ в-та	Ряд
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n} x^{2n-1}}{n(n+1)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n} (x-3)^n}{\sqrt{n+2}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{8^n (n+4)}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{n 25^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{5n}}{(3n+4)^n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n+3}}{4^n n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{2^n + 7^n}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 3n)^n x^n$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+4)^{2n}}{n^3 + 2}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n-1}}{2^{3n} \sqrt{n}}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-4)^{3n}}{27^n}$
7	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n-1}}{n \ln^2 n}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{4n}}{n^2 + 1}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(3n)!}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{3^n (n+1)}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{9^n n^2}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n \sqrt{n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (x+5)^{3n}}{n!}$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n (n^2 + 1) x^{2n}}{n+1}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x+3)^n}{n+1}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} (x+1)^{2n-1}}{n!}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-5)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-7)^{2n}}{\sqrt[3]{n+1}}$

13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-3)^{2n}}{(2n)!}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{3n}}{n^2 + 3n}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^{3n}}{n \sqrt{\ln 3n}}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{3n-2}}{(n+1) \ln(n+1)}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16^n (x+2)^{2n}}{\sqrt{4n-1}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^{5n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Завдання 4. Розвинути дану функцію в ряд Маклорена. Знайти область збіжності отриманого ряду.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\frac{x^4}{\sqrt[3]{8-x}}$	16	$\frac{3}{1+x-2x^2}$
2	$x^3 \sqrt{9-16x}$	17	$\ln(1+2x-3x^2)$
3	$\frac{x^3}{4+x^2}$	18	$\frac{6x}{12+x-x^2}$
4	$(1+x)e^{-x}$	19	$\sqrt{x} \ln(1+x-2x^2)$
5	$\frac{x^5}{\sqrt{9+x^2}}$	20	$\frac{6}{8+2x-x^2}$
6	$\frac{x^4}{\sqrt{4-5x}}$	21	$\frac{e^{x^2}-1}{x^3}$
7	$x^2 \operatorname{arctg}(x/2)$	22	$x^2 \ln(1+x-2x^2)$
8	$\frac{\cos 2x - 1}{x}$	23	$\frac{\sin^2 x}{x^2}$
9	$\frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$	24	$\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$
10	$x^2 \sqrt{16-3x}$	25	$\ln(1-x-6x^2)$

11	$\frac{\arctg x}{x} - 1$	26	$\frac{3x}{2-x-x^2}$
12	$x^3 \cos 2x$	27	$\sin x - x \cos x$
13	$\frac{\sin \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$	28	$\frac{x^5}{\sqrt[4]{16-3x}}$
14	$\frac{x^6}{\sqrt{4+x^2}}$	29	$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1$
15	$(1+x^2)e^{-2x}$	30	$x^3 \ln(x^2 + 3x + 2)$

Завдання 5. Наближено обчислити даний визначений інтеграл з граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0,001$, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд і потім інтегруючи його почленно.

№ в-та	Інтеграл	№ в-та	Інтеграл
1	$\int_0^1 \frac{e^{-x^2/4} - 1}{x^2} dx$	16	$\int_0^{0,5} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1}{x} dx$
2	$\int_0^{1/2} \frac{x - \arctg x}{x^2} dx$	17	$\int_0^{0,2} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} dx$
3	$\int_0^{0,4} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$	18	$\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x} dx$
4	$\int_0^{0,5} \frac{\sin x^3}{x^2} dx$	19	$\int_0^{1/2} \frac{\arctg x^2}{x^2} dx$
5	$\int_0^{1/4} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} dx$	20	$\int_0^1 \frac{e^{-x^3} - 1}{x^2} dx$
6	$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$	21	$\int_0^{1/4} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

7	$\int_0^1 x(e^{-x^2/2} - 1) dx$	22	$\int_0^{1/4} \sqrt{x} \cos x^2 dx$
8	$\int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x^3}{x^5} dx$	23	$\int_0^{1/4} \frac{e^{-2x^2} - 1}{x\sqrt{x}} dx$
9	$\int_0^{1/4} \sqrt{x} \operatorname{arctg} x^2 dx$	24	$\int_0^{1/8} \sqrt[3]{x^2} \ln(1 + x^2) dx$
10	$\int_0^{1/4} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1 + x^2}}$	25	$\int_0^{1/8} \sqrt[3]{x^2} (\cos 2x - 1) dx$
11	$\int_0^1 \sqrt{x} \sin x^2 dx$	26	$\int_0^{1/4} \sqrt{x} (\cos x - 1) dx$
12	$\int_0^{1/4} x e^{-\sqrt{x}} dx$	27	$\int_0^{1/4} \sqrt{x} e^{-2x} dx$
13	$\int_0^{3/4} \frac{1 - \cos x^3}{x^4} dx$	28	$\int_0^{1/4} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}} dx$
14	$\int_0^{1/4} \sqrt{x^3} \sin x dx$	29	$\int_0^1 x \sqrt[3]{1 + x^2/4} dx$
15	$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^2} dx$	30	$\int_0^{0.4} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$

Завдання 6. Знайти k перших членів розвинення в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}
 y = & y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \\
 & + \frac{y^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1} + \dots
 \end{aligned}$$

в околі початкової точки x_0 частинного розв'язку $y = y(x)$ даного диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y'' = xy, y(1) = -1, y'(1) = 2, k = 4$	16	$y' = y \sin x + y^2, y(0) = -1, k = 3$
2	$y' = x^2 - y^4, y(2) = -1, k = 3$	17	$y' = ye^x - e^y, y(0) = 0, k = 3$
3	$y' = (3 - 2x)/y, y(2) = 1, k = 3$	18	$y' = x^4 - y^2, y(-1) = 1, k = 3$
4	$y' = e^y + x^2y, y(-1) = 0, k = 4$	19	$y' = y^3 - 2xy, y(2) = -1, k = 3$
5	$y' = 2 \cos x - y^2, y(0) = 1, k = 3$	20	$y'' = y^2 + e^x, y(0) = -1, y'(0) = 2, k = 4$
6	$y'' = x/y', y(1) = 2, y'(1) = -1, k = 4$	21	$y' = x^2 + y^3, y(2) = -1, k = 3$
7	$y' = e^x - y^3, y(0) = -1, k = 3$	22	$y' = (1 + y)/(2 - x^2), y(-1) = 1, k = 3$
8	$y' = y^2 + 3xy, y(-2) = 1, k = 3$	23	$y'' = xy - (y')^2, y(2) = 1, y'(2) = -1, k = 4$
9	$y' = e^y + xy, y(-1) = 0, k = 3$	24	$y'' = 2x - (y')^2, y(1) = 2, y'(1) = -1, k = 4$
10	$y' = x^2y, y(2) = -1, k = 3$	25	$y'' = xy' + y^2, y(3) = -1, y'(3) = 1, k = 4$
11	$y' = x^2y - y^3, y(-1) = -1, k = 3$	26	$y'' = xy + 4\sqrt{y'}, y(-1) = 2, y'(-1) = 1, k = 4$
12	$y' = 2\sqrt{x+y} - y^3, y(0) = 1, k = 3$	27	$y'' = y^2 - 2\sqrt{y'}, y(1) = 2, y'(1) = 1, k = 4$
13	$y' = xy - \ln y, y(3) = 1, k = 3$	28	$y'' = y'/\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 1, k = 4$

14	$y' = \sin x - y^3,$ $y(0) = 1, k = 3$	29	$y'' = (y')^3 - y \cos x,$ $y(0) = 2, y'(0) = 1, k = 4$
15	$y' = x^3 - y^3,$ $y(-1) = 1, k = 3$	30	$y'' = yy' - x^2, y(1) = 2,$ $y'(1) = 1, k = 4$

Завдання 7. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi; \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік даної функції $y = f(x)$ і графік суми $y = S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3\pi; 3\pi]$.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0; \\ 2x - \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$	16	$\begin{cases} \sin(x/2), & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$
2	$x \sin x, x \in (-\pi; \pi)$	17	$ x - 2x, -\pi < x < \pi$
3	$ \pi - 2x , x \in (-\pi; \pi)$	18	$(\pi - x)/2, x \in (-\pi; \pi)$
4	$\begin{cases} x + \pi, & -\pi < x < 0; \\ x - 2\pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$	19	$\begin{cases} -2\pi, & -\pi < x \leq 0; \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$
5	$x \cos x, x \in (-\pi; \pi)$	20	$x^2 - \pi^2/2, x \in (-\pi; \pi)$
6	$\begin{cases} x + 2\pi, & -\pi < x \leq 0; \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$	21	$\begin{cases} x - \pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$
7	$\begin{cases} x + 3\pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$	22	$\begin{cases} x, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$
8	$\begin{cases} \pi/2, & -\pi < x < 0; \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$	23	$\begin{cases} -\pi/2, & -\pi < x < 0; \\ \pi/2 - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2\pi, & -\pi < x < 0; \\ 3x, & 0 < x < \pi \end{cases}$	24	$\begin{cases} \pi/2 + x, & -\pi \leq x < 0; \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
10	$\begin{cases} x/\pi, & -\pi \leq x < 0; \\ -1, & 0 < x < \pi \end{cases}$	25	$\begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0; \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

11	$\begin{cases} -x, & x \in (-\pi; 0); \\ -\pi, & x \in (0; \pi) \end{cases}$	26	$\begin{cases} -x, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$
12	$\begin{cases} 1, & -\pi < x < 0; \\ e^{-x/\pi}, & 0 < x < \pi \end{cases}$	27	$\begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; \\ \sin(x/2), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
13	$\begin{cases} e^{x/\pi}, & -\pi < x < 0; \\ -1, & 0 < x < \pi \end{cases}$	28	$\begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; \\ \cos(x/2), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
14	$\begin{cases} \pi \cos(x/2), & -\pi < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$	29	$\begin{cases} -x/\pi, & -\pi < x \leq 0; \\ x/\pi - 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$
15	$\begin{cases} x^2/\pi^2, & -\pi < x \leq 0; \\ -1, & 0 < x < \pi \end{cases}$	30	$\begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi/2 - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

Завдання 8.

Варіанти 1 – 15. Розвинути в ряд Фур'є за синусами неперіодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[0; l]$, спочатку продовживши її непарним способом на симетричний відрізок $[-l; l]$, а потім до визначивши до періодичної функції з періодом $T = 2l$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік продовженої періодичної непарної функції $y = f_*(x)$ і графік суми $y = S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3l; 3l]$. Знайти значення $S(0)$ і $S(l/2)$. Зобразити діаграму амплітудного спектра $A_n = A_n(\omega_n)$, $n = \overline{1, 4}$.

Варіанти 16 – 30. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами неперіодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[0; l]$, спочатку продовживши її парним способом на симетричний відрізок $[-l; l]$, а потім до визначивши до періодичної функції з періодом $T = 2l$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік продовженої періодичної парної функції $y = f_*(x)$ і графік суми $y = S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3l; 3l]$. Знайти значення $S(0)$ і $S(l/2)$. Зобразити діаграму амплітудного спектра $A_n = A_n(\omega_n)$, $n = \overline{1, 4}$.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\begin{cases} x, & 0 < x < 3; \\ 6-x, & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x, & 0 < x < 3; \\ 6-x, & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$
2	$(e^x + e^{-x})/2, x \in (0; 2)$	17	$(e^x - e^{-x})/2, x \in (0; 2)$
3	$\begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1; \\ 3-x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x, & 0 \leq x < 1; \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$
4	$(\pi - 2x)/4, 0 < x < \pi$	19	$x \sin x, x \in (0; \pi)$
5	$x \sin x, x \in (0; \pi)$	20	$e^x/2, x \in (0; 2)$
6	$\begin{cases} x, & 0 < x < 2; \\ 4-x, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x, & 0 < x < 2; \\ 6-x, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$
7	$\cos(x/2), x \in (0; \pi)$	22	$x/2, x \in (0; 2)$
8	$2e^{-x}, x \in (0; 1)$	23	$\sin(x/2), x \in (0; \pi)$
9	$x^2/\pi^2, x \in (0; \pi)$	24	$x^2/\pi^2, x \in (0; \pi)$
10	$x \cos x, x \in (0; \pi)$	25	$x \cos x, x \in (0; \pi)$
11	$\cos 2x, x \in (0; \pi/2)$	26	$\pi \sin x, x \in (0; \pi/2)$
12	$\pi \cos x, x \in (0; \pi/2)$	27	$e^x + e^{-x}, x \in (0; 1)$
13	$e^x - e^{-x}, x \in (0; 1)$	28	$\sin 2x, x \in (0; \pi/2)$
14	$\begin{cases} x^2, & 0 < x < 1; \\ 2x - x^2, & 1 < x < 2 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x^2, & 0 < x < 1; \\ 2x - x^2, & 1 < x < 2 \end{cases}$
15	$1 - \cos x, 0 < x < \pi/2$	30	$1 - \sin x, 0 < x < \pi/2$

Завдання 9. Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-l; l]$ довжиною в період $T = 2l, l > 0$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік функції $y = f(x)$ і графік суми $y = S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3l; 3l]$.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\cos(x/2), -\pi \leq x \leq \pi$	16	$3e^{-2x}, -\pi \leq x < \pi$
2	$\begin{cases} 2, & -4 < x < 0; \\ 3e^{-x/4}, & 0 < x < 4 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0; \\ e^x, & 0 < x < 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2e^x, & -1 \leq x < 0; \\ 2e^{-x}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2, & -\pi/2 \leq x \leq 0; \\ \cos x, & 0 < x < \pi/2. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3\pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi - 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2\pi - x, & -\pi \leq x < 0; \\ 2x + \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x, & -3 < x < 0; \\ 4, & 0 < x < 3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 4, & -1 \leq x < 0; \\ 4e^{-x}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x^2, & -1 < x \leq 0; \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x, & -2 < x < 0; \\ 3, & 0 < x < 2 \end{cases}$
7	$3\sin(x/2), -\pi < x \leq \pi$	22	$e^{2x} + e^{-2x}, -\pi \leq x < \pi$
8	$xe^{-2x}, -1 < x \leq 1$	23	$4x^2, -1 \leq x \leq 1$
9	$\begin{cases} \pi - 2x, & -\pi/2 \leq x < 0; \\ 2x + \pi, & 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2 + x, & -3 < x < 0; \\ 3 - x, & 0 < x < 3 \end{cases}$
10	$e^{3x} - e^{-3x}, -1 < x < 1$	25	$(x+2)e^{-x}, -2 < x < 2$
11	$\begin{cases} \sin x, & -\pi/2 \leq x < 0; \\ 2, & 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}$	26	$\begin{cases} -2, & -\pi/2 < x \leq 0; \\ \pi \cos x, & 0 < x < \pi/2 \end{cases}$
12	$e^{-2x} \cos x, -\pi < x < \pi$	27	$2e^{-x} \sin x, -\pi \leq x \leq \pi$
13	$\begin{cases} x^2 - 1, & -1 < x \leq 0; \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 3 - x, & -2 < x < 0; \\ 3e^{-x}, & 0 < x < 2 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 1 + x, & -2 < x < 0; \\ e^{-3x}, & 0 < x < 2 \end{cases}$	29	$\begin{cases} xe^x, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$
15	$\begin{cases} \sin 2x, & -\pi/2 \leq x < 0; \\ 2, & 0 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \cos 2x, & -\pi/2 \leq x < 0; \\ e^{-2x}, & 0 \leq x < \pi/2 \end{cases}$

Змістовий модуль 2.

ФУНКЦІЇ ДЕ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1. Поверхні другого порядку та інші поверхні

Поверхні розглядаються в декартовій прямокутній системі координат $Oxuz$.

Форма і властивості поверхні встановлюються за допомогою *методу паралельних перерізів*: побудови і дослідження просторових ліній перетину поверхні координатними площинами (*головні перерізи*) і площинами, що їм паралельні.

2.1.1. Сфера як поверхня другого порядку

Сферичною поверхнею (сферою) називається множина всіх точок $M(x, y, z)$ простору, кожна з яких віддалена від заданої точки $C(x_0, y_0, z_0)$ (*центра* сфери) на задану відстань R (*радіус* сфери) (рис. 14).

Зауваження 1. Сфера є обмеженою замкненою поверхнею, яка симетрична відносно центра. Довільна пряма, що проходить через її центр, служить віссю симетрії сфери. Довільна площина, що проходить через центр сфери, служить її площиною симетрії.

Для довільної точки $M(x, y, z)$ сфери виконується рівність $CM = R$. Але $CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Тому

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R.$$

Підносячи до квадрата, отримуємо

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}.$$

– *рівняння сфери зі зміщеним центром*. Це рівняння другого степеня. Отже, сфера – одна з поверхонь другого порядку.

Якщо центр сфери співпадає з початком координат $O(0, 0, 0)$, то маємо *канонічне рівняння сфери*

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}.$$

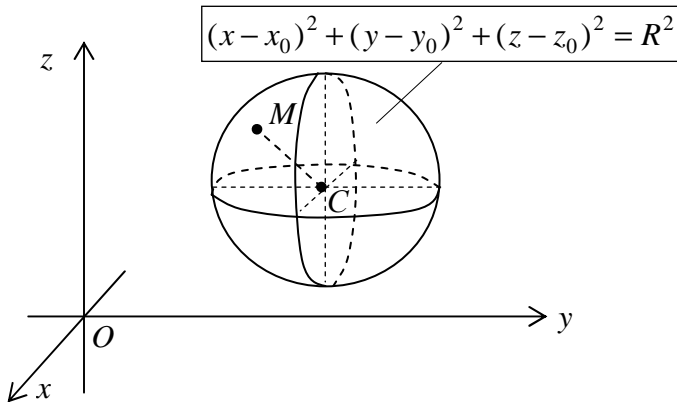


Рис. 14

2.1.2. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких задовольняють її *загальне рівняння*

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0},$$

де $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – *сталі коефіцієнти*, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля, тобто

$$\boxed{A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0}.$$

Існує дев'ять типів дійсних не вироджених поверхонь другого порядку: три циліндра – еліптичний, гіперболічний і параболічний; конус другого порядку; еліпсоїд (зокрема, сфера); однопорожнинний гіперболоїд; двопорожнинний гіперболоїд; еліптичний параболоїд; гіперболічний параболоїд.

Тип поверхні визначається зведенням її рівняння до відповідного стандартного вигляду. Завжди можна вибрати таку систему координат, в якій указане стандартне подання набуває *канонічної (найпростішої) форми*.

Зауваження. Крім зазначених поверхонь, загальному рівнянню другого порядку може відповідати один з вироджених випадків: сукупність двох площин чи прямих, площина, пряма, точка чи порожня множина. Загальне рівняння другого порядку також може визна-

чати уявну поверхню, тобто не мати геометричного смислу. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних невідроджених поверхонь.

Приклад. Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

$$a) 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x + 24y + 12z + 25 = 0;$$

$$б) 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6y + 5z + 3 = 0.$$

□ а) Згрупуємо окремо члени з x , y і z , а потім виділимо повні квадрати двочленів відповідного вигляду $x \pm a$, $y \pm b$ і $z \pm c$:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x + 24y + 12z + 25 = 0;$$

$$4(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 6y) + 4(z^2 + 3z) + 25 = 0;$$

$$(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2) + (y^2 + 2 \cdot 3y + 3^2 - 3^2) +$$

$$+ \left(z^2 + 2 \cdot (3/2)z + (3/2)^2 - (3/2)^2 \right) + 25/4 = 0;$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + (z + 3/2)^2 - 9/4 + 25/4 = 0;$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3/2)^2 = 9.$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C(2, -3, -3/2)$ і радіусом $R = 3$.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$x^2 + (y - 1)^2 + (z + 5/6)^2 = 25/36; C(0, 1, -5/6); R = 5/6. \blacksquare$$

2.1.3. Довільна циліндрична поверхня

Циліндричною поверхнею (циліндром) називається поверхня, утворена рухом прямої (*твірної*) l , яка перетинає задану лінію (*напрямну*) l_0 , залишаючись паралельною заданій прямій a_0 , причому вказані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині.

Поверхні, твірні яких є прямими лініями, називаються **лінійчатими**. Оскільки лінійчаті поверхні конструюються з прямолінійних рейок, то такі поверхні широко використовують у будівництві

(опори, башти, перекриття, покрівлі і т.п.).

Зауваження 1. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як “огорожу” з прямих, виставлену вздовж лінії a_0 .

Теорема. У просторі *Охуз* кожне рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$, що не містить координати z , визначає циліндричну поверхню S , твірні якої паралельні осі Oz , а напрямною служить лінія

$$l_0: \begin{cases} F(x, y) = 0; \\ z = 0, \end{cases}$$

що лежить у площині Oxy (рис. 15).

□ Для довільної точки $M(x, y, z)$ вертикальної циліндричної поверхні S з напрямною

$$l_0: \begin{cases} F(x, y) = 0; \\ z = 0 \end{cases}$$

її проекція $N(x, y, 0)$ на площину Oxy лежить на цій лінії l_0 , а значить, задовольняє її рівняння: $F(x, y) = 0$; $0 = 0$.

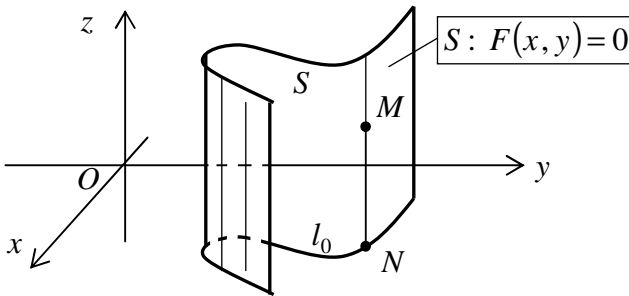


Рис. 15

Отже, координати точки $M(x, y, z)$ задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$, оскільки воно не містить змінної z .

Очевидно, що координати точок, які не лежать на поверхні S , це рівняння не задовольняють, оскільки вони проєктуються на площину Oxy поза лінією l_0 . ■

Зауваження 2. Рівняння $F(y, z) = 0$, що не містить змінну x , у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, які паралельні осі Ox . Рівняння $F(x, z) = 0$, що не містить змінну y , у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, які паралельні осі Oy .

2.1.4. Циліндричні поверхні другого порядку

Розглянемо *циліндричні поверхні другого порядку*:

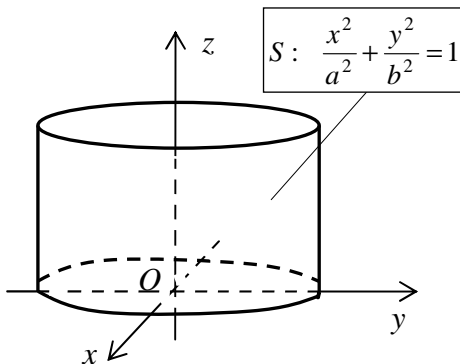


Рис. 16

Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії еліптичного циліндра. Вісь Oz називається *прямою центрів* еліптичного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

2) *Гіперболічний циліндр* (рис. 17) має канонічне рівняння

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії гіперболічного циліндра. Вісь Oz називається *прямою центрів* гіперболічного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

1) *Еліптичний циліндр* (рис. 16) має канонічне рівняння

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Зокрема, якщо $a = b = R$, то рівняння

$$x^2 + y^2 = R^2$$

визначає *круговий циліндр*.

Координатні площини служать площинами симетрії,

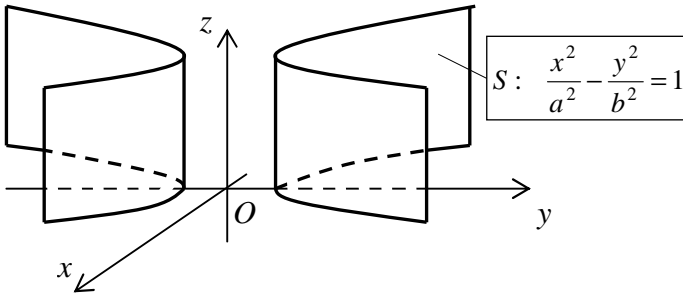


Рис. 17

3) **Параболічний циліндр** (рис. 18) має канонічне рівняння

$$y^2 = 2px.$$

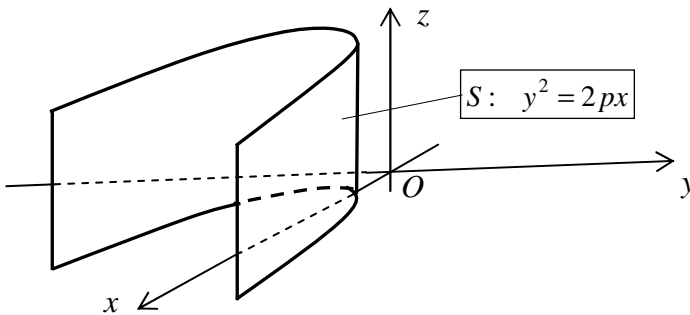


Рис. 18

Дві координатні площини Oxy і Oxz служать площинами симетрії, а координатна вісь Ox – віссю симетрії параболічного циліндра.

Приклад. Звести рівняння заданої циліндричної поверхні до канонічного вигляду і побудувати зображення її відповідної частини:

а) $9x^2 + 16y^2 = 144$, $|z| \leq 4$; б) $16x^2 - 25y^2 = 400$,

$|z| \leq 4$; в) $y^2 - 8x = 0$, $|z| \leq 4$. (Виконати самостійно).

2.1.5. Довільна конічна поверхня. Конус другого порядку

Конічною поверхнею (конусом) називається поверхня, утворена рухом прямої (*твірної*) l , яка проходить через задану точку $C(x_0, y_0, z_0)$ (*вершину*) і перетинає задану лінію (*напряму*) l_0 , причому задана точка C не лежить на заданій лінії l_0 .

Нехай пряма l_0 задана як перетин двох поверхонь

$$l_0: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Конус є лінійчатою поверхнею. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка конічної поверхні. Тоді рівняння твірної, на якій лежить ця точка, можна подати у вигляді рівняння прямої, що проходить через дві точки – вершину $C(x_0, y_0, z_0)$ і точку $N(X, Y, Z)$ перетину твірної та прямої:

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{Y - y_0} = \frac{z - z_0}{Z - z_0}.$$

Якщо вилучити з наведених рівнянь для довільної точки твірної $M(x, y, z)$ (ця точка одночасно належить конічній поверхні) координати точки перетину $N(X, Y, Z)$, використовуючи співвідношення

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z) = 0; \\ F_2(X, Y, Z) = 0. \end{cases}$$

то отримаємо рівняння конічної поверхні

$$F(x, y, z) = 0.$$

Складемо рівняння конуса з вершиною в початку координат $O(0, 0, 0)$, прямою якого служить еліпс

$$\begin{cases} x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1; \\ z = c \end{cases}$$

з півосями a і b , що лежить у площині $z = c$, яка перпенди-

кулярна до осі Oz .

Канонічні рівняння твірної, що проходить через точку $N(X, Y, Z)$ напрямної, мають вигляд

$$x/X = y/Y = z/Z, \text{ де } X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1, Z = c.$$

Враховуючи $Z = c$, з рівнянь твірної маємо:

$$X = xZ/z = xc/z; Y = yZ/z = yc/z.$$

Підставимо ці вирази у перше співвідношення для координат точки N і дістанемо:

$$(xc/z)^2/a^2 + (yc/z)^2/b^2 = 1; \quad \boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0}$$

– канонічне рівняння конуса другого порядку (еліптичного конуса) (рис. 19).

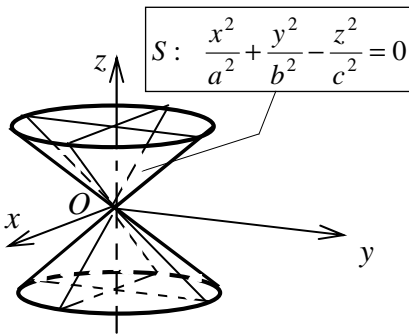


Рис. 19

Вершина $O(0,0,0)$ є центром симетрії, вісь Oz – віссю симетрії, а координатні площини – площинами симетрії даного конуса.

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\boxed{x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = 0}$$

визначає **круговий конус**.

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

Приклад 1. Звести рівняння заданого конуса другого порядку до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36z^2, |z| \leq 2;$ б) $x^2 + y^2 = z^2, |z| \leq 1.$

(Виконати самостійно).

Приклад 2. Побудувати лінію перетину кругового конуса $x^2/9 + y^2/9 - z^2/4 = 0$ заданою площиною і вказати її тип:

а) $z = 2$; б) $x = 3$; в) $z = (2/3)x + 4$.

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь: а) коло $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ z = 2; \end{cases}$

б) гіпербола $\begin{cases} z^2/4 - y^2/9 = 1; \\ x = 3; \end{cases}$ в) парабола $\begin{cases} y^2 = 12(x + 3); \\ z = (2/3)x + 4. \end{cases}$ ■

2.1.6. Поверхні обертання

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (*твірної, меридіана*) l навколо заданої прямої a_0 (*осі обертання*), що лежить у площині лінії l , називається *поверхнею обертання*.

Коло, яке описує довільна точка твірної l при обертанні, називається *паралеллю*. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання a_0 .

Теорема. Нехай лінія l лежить у площині Ouz і задається рівняннями

$$\begin{cases} F(y, z) = 0; \\ x = 0. \end{cases}$$

Якщо ця лінія обертається навколо осі Oz , то утворюється поверхня обертання, рівняння якої

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

□ Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка поверхні обертання (рис. 20). Проведемо через цю точку паралель, яка перетинає твірну l у точці $N(0, Y, z)$. Таким чином, точці $M(x, y, z)$ при обертанні відповідає єдина точка $N(0, Y, z)$ твірної.

Нехай $K(0, 0, z)$. – центр кола паралелі. Оскільки MK і NK – радіуси одного і того ж кола, то $NK = MK$. Але $NK = |Y|$; $MK = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тоді $|Y| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $Y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Оскільки точка $N(0, \pm\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ належить твірній, то її координати задовольняють рівняння цієї лінії:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Одержане рівняння є рівнянням поверхні обертання, оскільки його задовольняють координати x, y, z довільної точки цієї поверхні, а координати інших точок простору це рівняння не задовольняють (їм при обертанні відповідають точки, що лежать поза твірною). ■

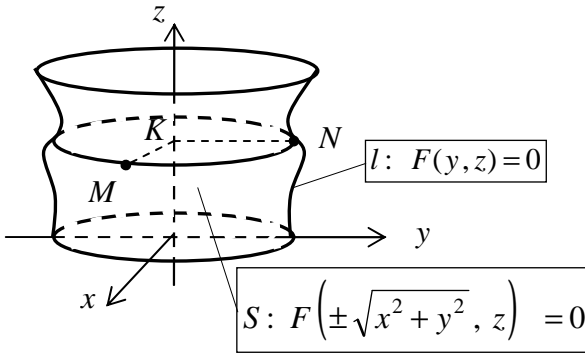


Рис. 20

Правило: Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання, залишити тією самою, а іншу змінну замінити на “плюс / мінус” квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.

Наприклад

$$F(y, z) = 0 \quad \begin{matrix} \swarrow Oz \\ \Rightarrow \end{matrix} \left(\begin{matrix} z \rightarrow z \\ y \rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{matrix} \right) \Rightarrow F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Приклад. Знайти рівняння поверхні, отриманої обертанням прямої $y = z$, що лежить у площині Oyz , навколо осі Oz .

□ Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$y = z \Rightarrow \left(\begin{array}{l} z \rightarrow z \\ y \rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right) \Rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} = z.$$

Підносячи до квадрата ліву та праву частини останнього рівняння, отримаємо $x^2 + y^2 = z^2$. Звідси маємо

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

– канонічне рівняння кругового конуса. ■

2.1.7. Еліпсоїд обертання. Еліпсоїд загального вигляду

Якщо еліпс $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, що лежить у площині Oyz , обертати навколо осі Oz , то дістанемо *еліпсоїд обертання* навколо осі Oz (*сфероїд*) (рис. 21).

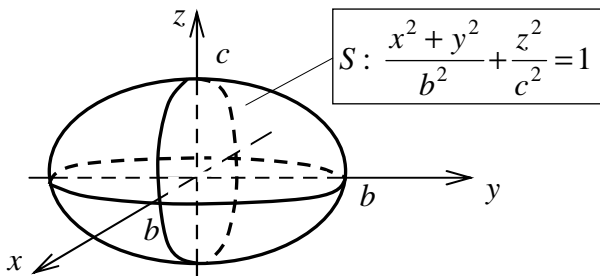


Рис. 21

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} z \rightarrow z \\ y \rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 / b^2 + z^2 / c^2 = 1.$$

Звідси одержуємо

$$\boxed{(x^2 + y^2) / b^2 + z^2 / c^2 = 1}$$

– **канонічне рівняння** еліпсоїда обертання.

Зокрема, якщо $b = c = R$, то маємо канонічне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Піддаючи еліпсоїд обертання $(x^2 + y^2)/b^2 + z^2/c^2 = 1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \rightarrow kx$; $y \rightarrow y$; $z \rightarrow z$.

У результаті дістанемо

$$\left((b/a)x \right)^2 + y^2 / b^2 + z^2 / c^2 = 1; \quad \boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1}$$

– **канонічне рівняння еліпсоїда загального вигляду (еліпсоїда)** (рис. 22).

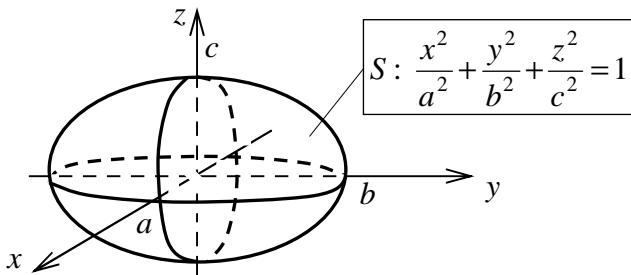


Рис. 22

Еліпсоїд має форму обмеженої замкненої овальної поверхні. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається **центром** еліпсоїда.

Величини a , b і c називаються **півосями** еліпсоїда. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то маємо еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, то – сферу.

Зауваження. Лінією перетину еліпсоїда довільною площиною є еліпс.

Приклад. Звести рівняння заданого еліпсоїда до канонічного вигляду і побудувати його зображення:

а) $16x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 144$; б) $9x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.
(Виконати самостійно).

2.1.8. Однопорожнинний гіперболоїд обертання. Однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду

Якщо гіперболу $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$, що лежить у площині Oyz , обертати навколо уявної осі Oz , то отримаємо **однопорожнинний гіперболоїд обертання** навколо осі Oz .

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{aligned} y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1 \quad \Downarrow Oz &\Rightarrow \left(\begin{array}{l} z \rightarrow z \\ y \rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow &\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2/b^2 - z^2/c^2 = 1. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\boxed{(x^2 + y^2)/b^2 - z^2/c^2 = 1}$$

– **канонічне рівняння** однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Підаючи однопорожнинний гіперболоїд обертання

$$(x^2 + y^2)/b^2 - z^2/c^2 = 1$$

рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \rightarrow kx$; $y \rightarrow y$; $z \rightarrow z$.

У результаті одержимо

$$\left((b/a)x \right)^2/b^2 - z^2/c^2 = 1; \quad \boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1}$$

– **канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда загального вигляду (однопорожнинного гіперболоїда)** (рис. 23).

Величини a , b і c називаються **півосями** однопорожнинного гіперболоїда.

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, що розширюється в обидва боки від площини симетрії $z = 0$ вздовж осі симетрії Oz . Поперечним перерізом є еліпс. Найвужчий

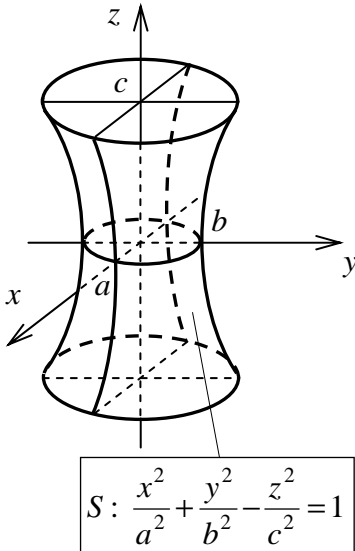


Рис. 23

з перерізів – при $z = 0$. Він називається *горловим*. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається *центром* однопорожнинного гіперboloїда.

Зауваження. Однопорожнинний гіперboloїд є лінійчатою поверхнею.

Приклад. Звести рівняння заданого однопорожнинного гіперboloїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $36x^2 + 9y^2 - 16z^2 = 144,$

$$|z| \leq 3\sqrt{3};$$

б) $4x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36, |z| \leq 2.$

(Виконати самостійно).

2.1.9. Двопорожнинний гіперboloїд обертання.

Двопорожнинний гіперboloїд загального вигляду

Якщо гіперболу $y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$, що лежить у площині Oyz , обертати навколо дійсної осі Oz , то дістанемо **двопорожнинний гіперboloїд обертання** навколо осі Oz .

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{aligned} y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1 &\Rightarrow \left(\begin{array}{l} z \rightarrow z \\ y \rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right) \Rightarrow \\ \downarrow Oz & \\ \Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2/b^2 - z^2/c^2 = -1. & \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\boxed{(x^2 + y^2)/b^2 - z^2/c^2 = -1}$$

– **канонічне рівняння** двопорожнинного гіперboloїда обертання.

Піддаючи двопорожнинний гіперboloїд обертання

$$(x^2 + y^2)/b^2 - z^2/c^2 = -1$$

рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \rightarrow kx$; $y \rightarrow y$; $z \rightarrow z$.

У результаті одержимо

$$\left(((b/a)x)^2 + y^2 \right) / b^2 - z^2/c^2 = -1; \quad \boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1}$$

– **канонічне рівняння двопорожнинного гіперboloїда загального вигляду (двopopожнинного гіперboloїда)** (рис. 24).

Величини a , b і c називаються **півосями** двопорожнинного гіперboloїда.

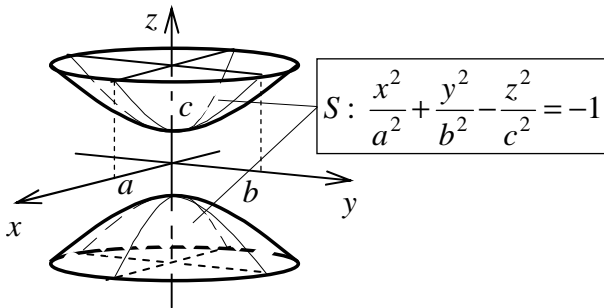


Рис. 24

Двopopожнинний гіперboloїд складається з двох симетричних порожнин, кожна з яких має форму нескінченної опуклої чаші. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається **центром** двопорожнинного гіперboloїда.

Приклад. Звести рівняння заданого двопорожнинного гіперboloїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

$$\text{а) } 144x^2 + 225y^2 - 400z^2 = -3600, \quad |z| \leq 3\sqrt{5};$$

$$\text{б) } 4x^2 + 4y^2 = z^2 - 16, \quad |z| \leq 4\sqrt{2}.$$

(Виконати самостійно).

2.1.10. Параболоїд обертання. Параболоїд загального вигляду

Якщо параболу $y^2 = 2pz$, $p > 0$, що лежить у площині Oyz , обернути навколо її осі Oz , то дістанемо **параболоїд обертання** навколо осі Oz .

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{aligned} y^2 = 2pz \quad \downarrow O_z &\Rightarrow \left(\begin{array}{l} z \rightarrow z \\ y \rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 = 2pz. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\boxed{\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z}$$

– **канонічне рівняння** параболоїда обертання.

Підаючи параболоїд обертання $x^2/(2p) + y^2/(2q) = z$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Oy з коефіцієнтом деформації $k = \sqrt{p/q}$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \rightarrow x; \quad y \rightarrow ky; \quad z \rightarrow z.$$

У результаті одержимо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{(\sqrt{p/q} y)^2}{2p} = z; \quad \boxed{\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z}$$

– **канонічне рівняння параболоїда загального вигляду (еліптичного параболоїда)** (рис. 25).

Величини p і q називаються **параметрами** еліптичного

параболоїда, $p > 0$, $q > 0$.

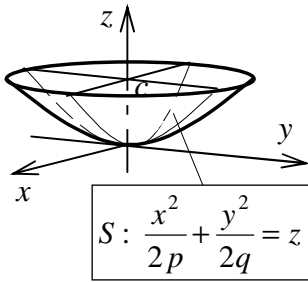


Рис. 25

Еліптичний параболоїд має форму нескінченної опуклої чаші. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії. Початок координат називається **вершиною** еліптичного параболоїда.

Зауваження. Еліптичний параболоїд можна утворити рухом однієї параболу $y^2 = 2qz$, $q > 0$ вздовж іншої параболу $x^2 = 2pz$, $p > 0$ так, що

площина першої параболу залишається паралельною координатній площині Oyz , а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих параболу перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболу повернуті опуклостями в один бік – вершиною вниз.

Приклад. Звести рівняння заданого еліптичного параболоїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36z$, $0 \leq z \leq 4$; б) $x^2 + y^2 - 16z = 0$, $0 \leq z \leq 1$.

(Виконати самостійно).

2.1.11. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня (рис. 26), що задається **канонічним рівнянням**

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$

Величини p і q називаються **параметрами** гіперболічного параболоїда, $p > 0$, $q > 0$.

Ця поверхня утворюється рухом однієї параболу $y^2 = -2qz$, $q > 0$ вздовж іншої параболу $x^2 = 2pz$, $p > 0$ так, що площина першої параболу залишається паралельною координатній площині

Oy_z , а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболі повернуті опуклостями у протилежні боки: перша напрямлена вершиною вверх, а друга – вершиною вниз.

Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0,0,0)$ (*вершина* гіперболічного параболоїда) є *сідловою точкою* (*точкою перевалу*) цієї поверхні. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії.

Зауваження. Гіперболічний параболоїд є лінійчатою поверхнею.

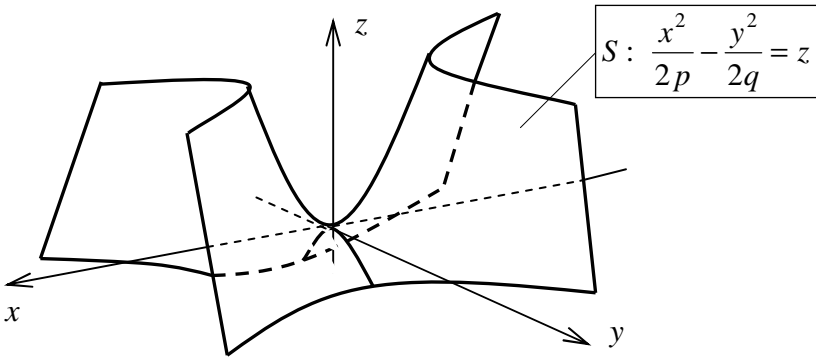


Рис. 26

Приклад 1. Звести рівняння заданого гіперболічного параболоїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $9x^2 - 16y^2 = 144z$, $|z| \leq 4$; б) $x^2 - y^2 - 4z = 0$, $|z| \leq 1$.

(Виконати самостійно).

Приклад 2. Визначити тип заданої поверхні другого порядку, звівши її рівняння до відповідного канонічного вигляду:

а) $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$; б) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$;

в) $16x^2 + 9y^2 - z^2 - 144 = 0$; г) $9x^2 - 4y^2 - 16z^2 - 144 = 0$;

д) $4x^2 + 25y^2 - 100z = 0$; е) $9x^2 - 25y^2 - 225z = 0$;

є) $4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$; ж) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$; з) $x^2 - 4y = 0$.

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь:

а) еліпсоїд; б) конус другого порядку; в) однопорожнинний гіперboloїд; г) двопорожнинний гіперboloїд; д) еліптичний параболоїд; е) гіперболічний параболоїд; є) гіперболічний циліндр; ж) еліптичний циліндр; з) параболічний циліндр. ■

2.2. Диференціальне числення функцій декількох змінних

Поняття і методи диференціального числення узагальнюються на випадок функцій двох чи більшого числа змінних.

2.2.1. Поняття функції багатьох змінних. Область визначення

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина n довільних дійсних чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) називаються n -*вимірною точкою* і позначається однією буквою, наприклад, M . Числа x_1, x_2, \dots, x_n називаються *координатами* точки M . Позначається $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Множина всіх n -вимірних точок називається n -*вимірним точковим простором* R^n .

Нехай задано деяку n -вимірну непорожню множину D . Якщо за вказаним правилом (*законом відповідності*) f кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної u , то кажуть, що задано *функцію n змінних* $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При цьому множину D називають *областю визначення* функції $u = f(M)$. Незалежні змінні x_1, x_2, \dots, x_n називають *аргументами*, а залежну змінну u – *функцією*.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z = f(M) = f(x, y)$ є *функцією двох змінних* x, y .

Якщо D – область у тривимірному координатному просторі

Охуз, то функція $u = f(M) = f(x, y, z)$ є **функцією трьох змінних** x, y, z .

Нехай $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ – деяка точка n -вимірного простору. Множина всіх точок цього простору, для кожної з яких $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відстань $\rho = M_0M$ від точки M_0 менша ε , тобто виконується умова

$$\rho = M_0M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \dots + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке додатне число, називається ε -околом точки M_0 і позначається $U(M_0, \varepsilon)$.

У випадку двовимірного простору (площини) ε -околом точки M_0 є внутрішня частина круга радіуса ε з центром M_0 .

Зауваження 1. Надалі обмежимося, в основному, розглядом функцій лише двох і, рідше, трьох змінних. На випадок функцій більшого числа змінних відповідні результати поширюються за аналогією.

Зауваження 2. Якщо функція задана аналітично (формулами) без будь-яких додаткових умов, то розглядають її **природну область визначення (область допустимих значень)** D – множину всіх тих точок, у яких дані аналітичні вирази мають смисл.

Приклад 1. Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині Oxy природну область визначення D заданої функції:

а) $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$; б) $z = \sqrt{y^2 - 1} - x$;

в) $z = \arcsin((x - 3y)/6) + 1/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

□ а) Природна область визначення D даної функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y) , для яких $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$9 - x^2 - 9y^2 = 0; \quad x^2 + 9y^2 = 9; \quad x^2/9 + y^2/1 = 1.$$

Це рівняння еліпса з півосями $a=3$ та $b=1$. Даний еліпс у залежності від знака виразу $9-x^2-9y^2$ ділить всю координатну площину Oxy на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 27).

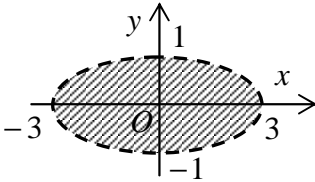


Рис. 27

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову $9-x^2-9y^2 > 0$, треба взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю умову. Наприклад, для точки $O(0,0)$ умова виконується

$$9-0^2-9\cdot 0^2=9>0, \text{ тому внутрішня}$$

область, обмежена еліпсом, входить в D . Для точки $B(0,2)$ ця умова не виконується $9-0^2-9\cdot 2^2=-27<0$, тому область, що лежить поза еліпсом, не входить в D .

Отже, внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D , тому що для його точок $9-x^2-9y^2=0$. Область D – відкрита, її межа позначена пунктиром (рис. 27).

б) Квадратний корінь добувається тільки з невід'ємних чисел, тому $y^2-1-x \geq 0$. Жодних інших обмежень на аргументи x , y немає.

Щоб зобразити область визначення D геометрично, знайдемо її межу: $y^2-1-x=0$; $y^2=x+1$.

Це рівняння визначає параболу, яка в залежності від знака виразу y^2-1-x поділяє координатну площину на дві частини – внутрішню і зовнішню.

Точка $O(0,0)$ лежить усередині параболи і не задовольняє належній умові. Точка $A(-2,0)$ лежить зовні параболи і задовольняє цій умові. Отже, область визначення D складається з точок, що лежать ззовні параболи. Область D – замкнена, її межа позначена суцільною лінією (рис. 28).

в) Природна область визначення D даної функції

$$z = \arcsin((x-3y)/6) + 1/\sqrt{9-x^2-y^2}$$

– множина всіх тих точок (x, y) , які задовольняють системі

$$\begin{cases} -1 \leq (x-3y)/6 \leq 1; \\ 9-x^2-y^2 > 0. \end{cases}$$

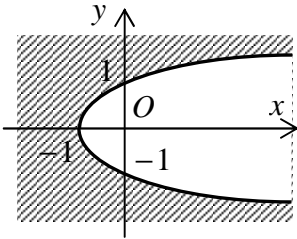


Рис. 28

Межа області D визначається рівняннями

$$(x-3y)/6 = -1; \quad (x-3y)/6 = 1;$$

$$9-x^2-y^2 = 0$$

або $x-3y+1=0;$

$$x-3y-1=0; \quad x^2+y^2=9.$$

Перші два рівняння визначають пару паралельних прямих, а третє рівняння – коло з центром у початку координат і радіусом $R=3$. Кожна пряма ділить координатну площину на дві півплощини. Коло ділить координатну площину на внутрішню і зовнішню частини (всередині круга і поза кругом).

Використовуючи пробні точки, знаходимо область визначення D (рис. 29). ■

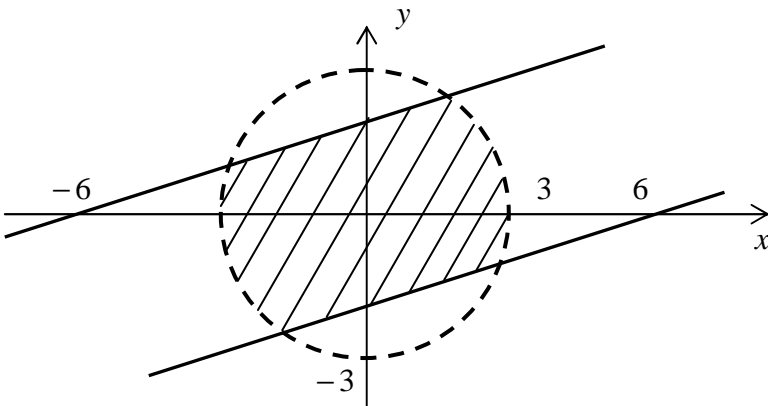


Рис. 29

2.2.2. Геометричне зображення функції двох змінних

Множина всіх точок $P(x, y, z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, називається **графіком** функції двох змінних $z = f(x, y)$.

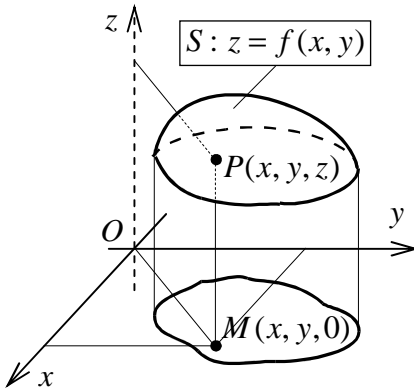


Рис. 30

Звичайно графіком є деяка поверхня S , що проектується на площину Oxy на область визначення D (рис. 30). (Поверхня $z = f(x, y)$ – це “дах”, що “нависає” над плоскою областю D).

Приклад. Побудувати поверхню, яка є графіком функції $z = x^2 + y^2/4$ (еліптичний параболоїд).

□ Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знаходимо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

Oyz : $x = 0$; $z = y^2/4$; $y^2 = 4z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz .

Oxz : $y = 0$; $z = x^2$; $x^2 = z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz .

Oxy : $z = 0$; $x^2 + y^2/4 = 0$; $O(0,0)$ – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині Oxy : $z = 0$.

$z = 9$; $x^2 + y^2/4 = 9$; $x^2/9 + y^2/36 = 1$ – еліпс з великою піввіссю $a = 6$, що паралельна осі Oy , і з малою піввіссю $b = 3$, що паралельна осі Ox .

Еліптичний параболоїд $z = x^2 + y^2/4$ зображений на рис. 31.

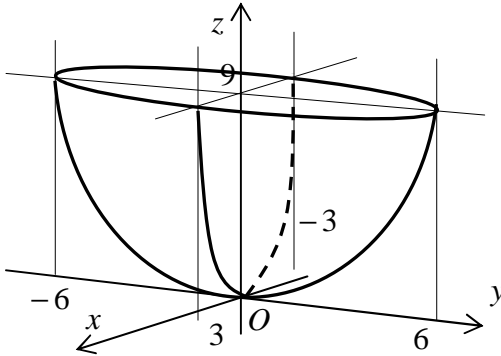


Рис. 31

Зауваження 1. Функцію трьох чи більше змінних зобразити за допомогою графіка неможливо.

Зауваження 2. Для функції двох чи більше змінних не можна ввести поняття монотонності (зростання чи спадання). Наприклад, для функції $z = f(x, y)$, що зображена на рис. 32, у точці $M(x, y)$ у напрямку променя l_1 ця функція спадає $f(M_1) < f(M)$, а у напрямку променя l_2 ця функція зростає $f(M_2) > f(M)$.

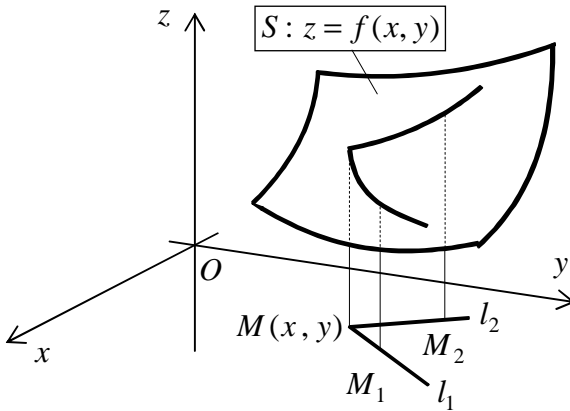


Рис. 32

2.2.3. Лінії та поверхні рівня

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy , в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C$, $C = const$. Рівняння лінії рівня

$$f(x, y) = C.$$

Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$.

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x, y)$, кожна з яких служить проекцією лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = C$ (рис. 33).

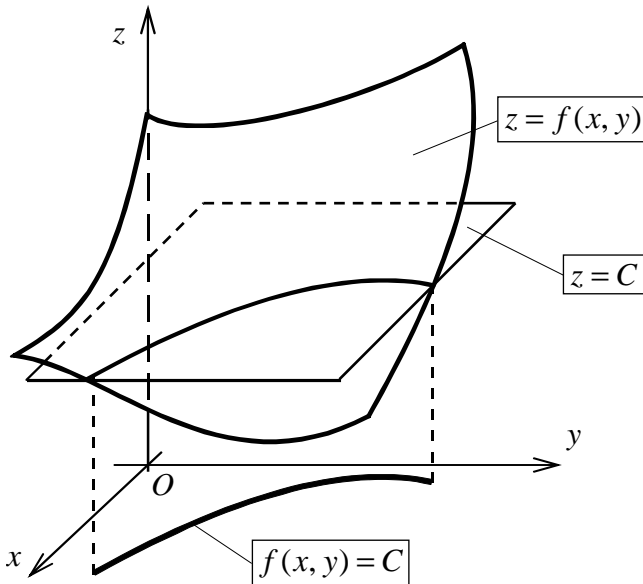


Рис. 33

Якщо вибрати числа C_1, C_2, \dots, C_n так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d $C_{n+1} = C_n + d$, то отримаємо топографічну карту рельєфу поверхні $z = f(x, y)$. По взаємному розміщенню ліній рівня можна судити про характер рельєфу: там, де лінії розміщуються густіше, функція $z = f(x, y)$ змінюється швидше (поверхня крутіша); там, де лінії розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (поверхня більш полого).

Приклади ліній рівня: ізотерми, ізобари на географічних картах; екіпотенціальні лінії плоского електростатичного поля в електротехніці; криві байдужості функції загальної корисності $TU(Q_1, Q_2)$ споживання товарів двох видів Q_1, Q_2 у мікроекономіці.

Приклад 1. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = x^2 + y^2 + 2$ при $C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = 4, C_4 = 5$.

$$\square x^2 + y^2 + 2 = C; \quad x^2 + y^2 = C - 2.$$

$$C_1 = 2: \quad x^2 + y^2 = 0 \text{ – точка } O(0;0) \text{ (вироджене коло).}$$

$$C_2 = 3: \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ – коло радіуса } R = 1 \text{ з центром } O(0;0).$$

$$C_3 = 4: \quad x^2 + y^2 = 2 \text{ – коло радіуса } R = \sqrt{2} \text{ з центром } O(0;0).$$

$$C_4 = 5: \quad x^2 + y^2 = 3 \text{ – коло радіуса } R = \sqrt{3} \text{ з центром } O(0;0).$$

Сім'я ліній рівня $x^2 + y^2 = C - 2$ – це сім'я концентричних кіл з центром у початку координат $O(0;0)$ (рис. 34).

Функція $z = f(x, y)$ зростає вздовж кожного радіального напрямку. Поверхня $z = f(x, y)$ – це симетрична “чаша” з круто зростаючими краями (параболоїд обертання). ■

Приклад 2. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = 4x + 2y$ при $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = 4$.

□ Лінії рівня $4x + 2y = C$ – це сім'я паралельних прямих. На рис. 35 зображено лінії рівня при $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = 4$. ■

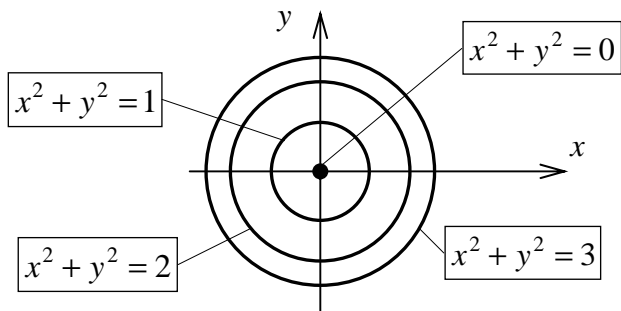


Рис. 34

Поверхнею рівня функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u = C$, $C = const$. Рівняння поверхні рівня

$$f(x, y, z) = C.$$

Прикладом поверхонь рівня служать екіпотенціальні поверхні просторового електростатичного поля.

Приклад 3. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 4$.

□ Поверхні рівня $x^2 + y^2 + z^2 = C$ – це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат $O(0;0;0)$. На рис. 36 зображено поверхні рівня при $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 4$. ■

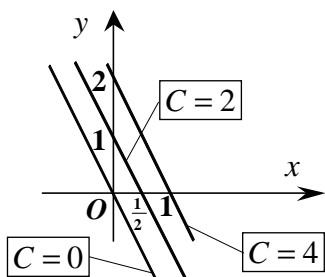


Рис. 35

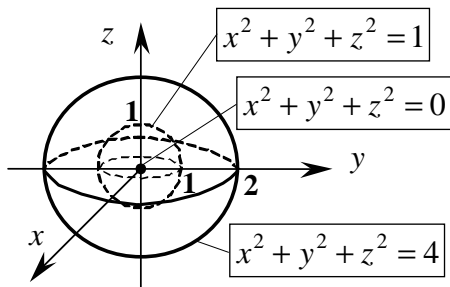


Рис. 36

2.2.4. Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність. Точки розриву

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx , залишаючи змінну y фіксованою (рис. 37).

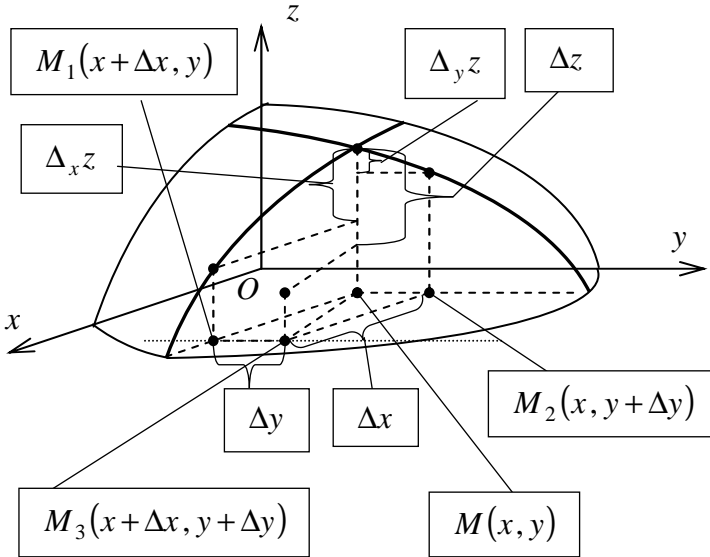


Рис. 37

Різниця $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається **частинним приростом по x** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x .

Аналогічно $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – **частинний приріст по y** .

Якщо одночасно надати змінній x приросту Δx , а змінній y приросту Δy , то різниця $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називається **повним приростом** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$.

Зауваження 1. Із рис. 37 зрозуміло, що повний приріст Δz , у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних прирістів:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0 . Число A називається **границею функції $z = f(x, y)$ в точці M_0** , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якої точки M із δ -околу точки M_0 , крім, можливо, самої точки M_0 , виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Позначається

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f(x, y) = A.$$

Іншими словами, число A називається **границею функції $z = f(x, y)$ в точці M_0** , якщо їх різниця $\alpha = f(x, y) - A$ є нескінченно малою величиною при $M \rightarrow M_0$:

$$\alpha = f(x, y) - A \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow M_0.$$

Зауваження 2. Точка M необмежено наближається до точки M_0 довільним способом. Важливо лише, що відстань $\rho = M_0 M$ від точки M_0 прямує до нуля.

Функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною в точці M_0** , якщо виконуються умови:

1) функція $z = f(x, y)$ визначена в самій точці M_0 і в деякому її околі;

2) існує скінченна границя $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$;

3) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$.

Оскільки для неперервної функції $z = f(x, y)$ її приріст прямує до нуля при $M \rightarrow M_0$: $\Delta z = f(M) - f(M_0) \rightarrow 0$ і при цьому прирости всіх аргументів прямують до нуля:

$$\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0; \quad \Delta y = y - y_0 \rightarrow 0,$$

то означення неперервної в точці функції можна подати так.

Функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною в точці M_0** , якщо в цій точці нескінченно малим приростам Δx і Δy її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції Δz :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta z = 0.$$

Функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною в області D** , якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Властивості функції багатьох змінних, що неперервна в обмеженій замкненій області, аналогічні відповідним властивостям функції однієї змінної, що неперервна на відрізку.

Властивість 1. Функція $z = f(x, y)$, що неперервна в обмеженій замкненій області D , є обмеженою і досягає в ній свого найменшого m і найбільшого M значення.

Властивість 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D , а m і M – відповідно її найменше і найбільше значення у цій області, то для будь-якого числа μ , що задовольняє нерівність $m \leq \mu \leq M$, у області D знайдеться хоча б одна точка $N \in D$, в якій значення функції дорівнює числу μ .

Якщо в точці M_0 порушується хоча б одна з умов неперервності, то ця точка називається **точкою розриву** функції $z = f(x, y)$, а сама функція $z = f(x, y)$ називається **розривною** в точці M_0 .

Зауваження 3. Точка M_0 є точкою розриву функції $z = f(x, y)$, зокрема, в таких випадках: 1) функція визначена в деякому околі точки M_0 , крім самої точки M_0 ; 2) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0 , але не існує скінченної границі $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$; 3) функція визначена в усіх

точках деякого околу точки $M_0(x_0, y_0)$ та існує скінченна границя

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M), \text{ але } \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \neq f(M_0).$$

Зауваження 4. У випадку функції двох змінних точки розриву можуть бути *ізолюваними* чи утворювати *лінії розриву*. Для функції трьох змінних точки розриву, крім цього, можуть утворювати *поверхні розриву*.

Наприклад, функція $z = 1/(x^2 + y^2)$ має ізолювану точку розриву $O(0,0)$, для функції $z = 1/(2x + y + 2)$ пряма $2x + y + 2 = 0$ служить лінією розриву, а функція $u = 1/(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ має поверхню розриву – сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Зауваження 5. Розглянута вище неперервність функції “за сукупністю всіх аргументів одночасно” є дещо більше, ніж неперервність цієї функції “за всіма аргументами нарізно”.

Наприклад, функція

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

є розривною в точці $M_0(0,0)$ “за сукупністю змінних x, y одночасно”, хоча функції $\varphi_1(x) = f(x, 0)$ і $\varphi_2(y) = f(0, y)$ неперервні відповідно при $x = 0$ і $y = 0$.

Дійсно, з одного боку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_1(x) = 0 = \varphi_1(0); \quad \lim_{y \rightarrow 0} \varphi_2(y) = 0 = \varphi_2(0).$$

З іншого боку, на довільній прямій $y = kx$, $k = \text{const} \neq 0$ маємо

$$f(x, y) = f(x, kx) = \begin{cases} xkx/(x^2 + k^2x^2) = k/(1 + k^2), & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2} = \text{const} \neq 0 = f(0, 0).$$

Приклад. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$.

$$\begin{aligned}
\square \quad & \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = \left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \left| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 4} - 2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \\
& = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 4} + 2)}{\rho^2 + 4 - 4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{\rho^2 + 4} + 2) = 4. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.2.5. Частинні похідні та їх обчислення

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx , залишаючи змінну y фіксованою (рис. 37).

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx , коли останній прямує до нуля:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}$$

Застосовуються також позначення:

$$z'_x; f'_x; f'_x(x, y); f'_x(M); \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \frac{\partial f(M)}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_M.$$

Аналогічно

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [dz/dx]_{y=const}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = [dz/dy]_{x=const}.$$

Зауваження. Якщо у функції багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ всі аргументи, крім вибраного x_j , зафіксувати, то

отримаємо функцію $u = \Phi_j(x_j) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j . До цієї функції можна застосувати весь апарат математичного аналізу функцій однієї змінної. Зокрема, частинна похідна за вибраною змінною обчислюється за правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі інші аргументи сталими (фіксованими, “замороженими”):

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \left[\frac{du}{dx_j} \right]_{x_i = \text{const}, i = \overline{1, n}; i \neq j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Приклад. Знайти всі частинні похідні заданої функції:

а) $z = x^2/y - \sin y + \pi$; б) $z = x^y$; в) $u = e^{xy^2z}/z$;

г) $u = x \cos(xy^3 - z)$; д) $u = \text{tg}(xy^4/z^2)$.

□ а) $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2/y - \sin y + \pi)'_x = (x^2/y)'_x - (\sin y)'_x + \pi'_x =$

$$= (1/y) (x^2)'_x - 0 + 0 = (1/y) \cdot 2x = 2x/y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2/y - \sin y + \pi)'_y = (x^2/y)'_y - (\sin y)'_y + \pi'_y = x^2 (1/y)'_x -$$

$$- \cos y + 0 = x^2 \cdot (-1/y^2) - \cos y = -x^2/y^2 - \cos y;$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = y x^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x$;

в) $\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{xy^2z}/z)'_x = \frac{1}{z} (e^{xy^2z})'_x = \frac{1}{z} \cdot e^{xy^2z} (xy^2z)'_x =$

$$= (1/z) \cdot e^{xy^2z} \cdot y^2 z = y^2 e^{xy^2z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (e^{xy^2z}/z)'_y = \frac{1}{z} (e^{xy^2z})'_y =$$

$$= (1/z) \cdot e^{xy^2z} (xy^2z)'_y = (1/z) \cdot e^{xy^2z} \cdot xz \cdot 2y = 2xye^{xy^2z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (e^{xy^2z}/z)'_z = \frac{(e^{xy^2z})'_z \cdot z - e^{xy^2z} z'_z}{z^2} = \frac{e^{xy^2z} (xy^2z)'_z \cdot z - e^{xy^2z}}{z^2} =$$

$$= (e^{xy^2z} xy^2z - e^{xy^2z})/z^2. \quad (\text{Завдання г) і д) виконати самостійно}). \blacksquare$$

2.2.6. Геометричний зміст частинних похідних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 38). Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня. Рівняння $y = y_0$ визначає січну площину, яка перпендикулярна до осі Oy . Ця площина перетинає поверхню $z = f(x, y)$ по деякій плоскій лінії l . Оскільки $\partial z / \partial x = [dz/dx]_{y=y_0}$, то виходячи з геометричного змісту звичайної похідної, маємо $\partial z / \partial x|_{M_0} = \operatorname{tg} \alpha$.

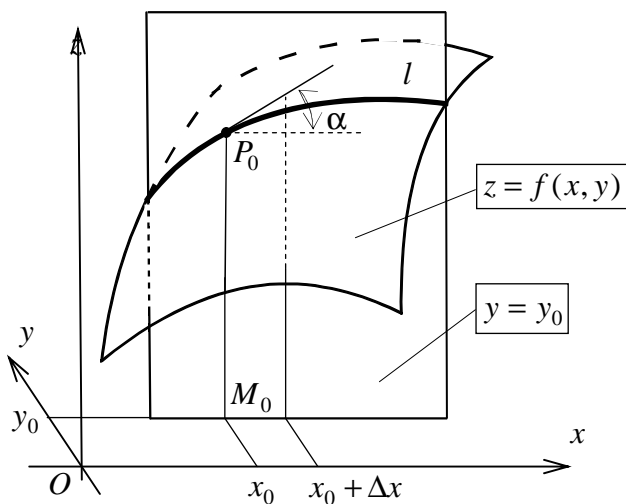


Рис. 38

Частинна похідна $\partial z / \partial x|_{M_0}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу α дотичної до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$ у відповідній точці $P_0(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$. (Геометричний зміст частинної похідної).

Загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$:

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0. \end{cases}$$

$$\text{Аналогічно } \begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0 \end{cases}$$

– загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$.

2.2.7. Частинні та повний диференціали

Нехай задано функцію багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Якщо всі аргументи, крім вибраного x_j , зафіксувати, то одержимо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j , диференціал якої називається **частинним диференціалом функції $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за змінною x_j** і позначається $d_{x_j} u$.

Частинний диференціал зв'язаний з відповідною частинною похідною співвідношенням

$$d_{x_j} u = \frac{\partial z}{\partial x_j} dx_j,$$

де dx_j – диференціал незалежної змінної x_j . Диференціал незалежної змінної збігається з її приростом $dx_j = \Delta x_j$.

Приклад 1. Знайти частинні диференціали функції:

$$\text{а) } z = \arctg(y/x); \quad \text{б) } u = 3x^2yz - x \ln y.$$

$$\square \text{ а) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$d_x z = -\frac{y dx}{x^2 + y^2}; \quad d_y z = \frac{x dx}{x^2 + y^2};$$

$$б) \frac{\partial u}{\partial x} = 3yz \cdot 2x - \ln y \cdot 1 = 6xyz - \ln x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2z \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{y} = 3x^2z - x/y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2y \cdot 1 - 0 = 3x^2y;$$

$$d_x u = (6xyz - \ln x) dx; \quad d_y u = (3x^2z - x/y) dy; \quad d_z u = 3x^2y dz. \quad \blacksquare$$

Функція $z = f(M) = f(x, y)$ називається **диференційовною** в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y,$$

де A, B – незалежні від Δx і Δy величини; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів Δx і Δy аргументів:

$$dz = A \Delta x + B \Delta y.$$

Теорема 1 (необхідна умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в деякій точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці.

$$\begin{aligned} \square \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta z &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} (A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \\ &+ \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y) = A \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta x + B \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \Delta y + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Оскільки диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами $dx = \Delta x$ і $dy = \Delta y$, то $\boxed{dz = A dx + B dy}$.

Теорема 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, тобто $dz = A dx + B dy$, то ця функція має в точці $M(x, y)$ частинні похідні $\partial z / \partial x$ і $\partial z / \partial y$, причому

$$\partial z / \partial x = A; \quad \partial z / \partial y = B.$$

Іншими словами, повний диференціал функції $z = f(x, y)$ дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

$$\square \quad \Delta z = A \Delta x + B \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \Delta y;$$

$$y = const \Rightarrow \Delta y = 0: \quad \Delta_x z = A \Delta x + \alpha(\Delta x, 0) \Delta x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \Delta x + \alpha(\Delta x, 0) \Delta x}{\Delta x} = A;$$

$$x = const \Rightarrow \Delta x = 0: \quad \Delta_y z = B \Delta y + \beta(0, \Delta y) \Delta y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{B \Delta y + \beta(0, \Delta y) \Delta y}{\Delta y} = B. \quad \blacksquare$$

Теорема 3 (Достатня умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в деякій точці $M(x, y)$ неперервні частинні похідні $\partial z / \partial x$ і $\partial z / \partial y$, то ця функція диференційовна в точці M .

$$\square \quad \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)).$$

Використовуємо формулу скінченних приростів Лагранжа

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\bar{x})(b - a), \quad \bar{x} \in (a; b)$$

для функції однієї змінної та отримуємо

$$\Delta z = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x, \bar{y}) \cdot \Delta y.$$

Із неперервності частинних похідних f'_x і f'_y випливає

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha(\Delta x, \Delta y);$$

$$f'_y(x, \bar{y}) = f'_y(x, y) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$

Тоді

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y;$$

$$dz = A dx + B dy, \text{ де } A = f'_x(x, y); \quad B = f'_y(x, y). \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції:

$$\text{а) } u = \ln(x + \sqrt{y + z^2}); \quad \text{б) } u = e^{z^2} \sin^2(x + y^3).$$

$$\begin{aligned} \square \text{ а) } \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{x + \sqrt{y + z^2}}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{x + \sqrt{y + z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y + z^2}} \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y + z^2}(x + \sqrt{y + z^2})}; & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{x + \sqrt{y + z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y + z^2}} \cdot 2z = \\ &= \frac{z}{\sqrt{y + z^2}(x + \sqrt{y + z^2})}; & du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ & & &= \frac{2\sqrt{y + z^2} dx + dy + 2z dz}{2\sqrt{y + z^2}(x + \sqrt{y + z^2})}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{\partial u}{\partial x} = e^{z^2} \cdot 2 \sin(x + y^3) \cdot \cos(x + y^3) = e^{z^2} \sin 2(x + y^3);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{z^2} 2 \sin(x + y^3) \cos(x + y^3) \cdot 3y^2 = 3y^2 e^{z^2} \sin 2(x + y^3);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sin^2(x + y^3) \cdot e^{z^2} \cdot 2z = 2ze^{z^2} \sin^2(x + y^3);$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = e^{z^2} \sin 2(x + y^3) dx +$$

$$+ 3y^2 e^{z^2} \sin 2(x + y^3) dy + 2z e^{z^2} \sin^2(x + y^3) dz. \quad \blacksquare$$

Зауваження. При достатньо малих приростах аргументів Δx і Δy повний приріст Δz функції $z = f(x, y)$ можна наближено замінити повним диференціалом $\boxed{\Delta z \approx dz}$. Звідси маємо формулу

для наближеного обчислення значення функції

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Приклад 3. Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z = x/y$ в точці $M(9, 3)$ при $\Delta x = 0,1$ і $\Delta y = -0,2$.

$$\begin{aligned} \square \quad \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{(x + \Delta x)y - x(y + \Delta y)}{y(y + \Delta y)} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y + \Delta y)}; \\ \Delta z &= \frac{3 \cdot 0,1 - 9 \cdot (-0,2)}{3 \cdot (3 - 0,2)} = \frac{2,1}{3 \cdot 2,8} = 0,25; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}; \end{aligned}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{y} \Delta x - \frac{x}{y^2} \Delta y;$$

$$dz = (1/3) \cdot 0,1 - (9/3^2) \cdot (-0,2) \approx 0,233. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти наближене значення

$$\text{а) } A = 1,98 \cos 1; \quad \text{б) } A = \sqrt{17} \ln 3.$$

\square а) Розглянемо функцію $z = z(x, y) = x \cos y$. Нехай $x = 2$; $y = \pi/3$. Тоді $\Delta x = 1,98 - 2 = -0,02$; $\Delta y = 1 - \pi/3 \approx -0,047$.

Дістанемо:

$$\begin{aligned} A = 1,98 \cos 1 &= z(2 + \Delta x, \pi/3 + \Delta y) \approx z(2, \pi/3) + \\ &+ \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial y} \Delta y; \quad z(2, \pi/3) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y; \quad \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial x} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin y;$$

$$\frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial y} = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \approx -1,73;$$

$$\begin{aligned} A = 1,98 \cos 1 &\approx 1 + (1/2) \cdot (-0,02) + (-1,73) \cdot (-0,047) \approx \\ &\approx 1 - 0,01 + 0,081 \approx 1,07. \end{aligned}$$

б) Розв'язати самостійно. \blacksquare

2.2.8. Похідні складених функцій

Обмежимося розглядом трьох важливих випадків у припущенні, що всі частинні похідні неперервні.

1) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, аргументи якої самі є функціями незалежної змінної t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної t $z = f(x(t), y(t))$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

$$\square \quad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

де $\alpha \rightarrow 0$ і $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$;

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ із неперервності функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ випливає, що $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ і, значить, $\alpha \rightarrow 0$ і $\beta \rightarrow 0$.

Оскільки $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$; $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$; $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$, то

при $\Delta t \rightarrow 0$ маємо $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. ■

2) Якщо аргументи функції двох змінних $z = f(x, y)$ самі є функціями інших двох незалежних змінних $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$. Тоді частинні похідні складеної функції двох змінних $z = f(x(u, v), y(u, v))$ обчислюються за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}}; \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}}$$

□ При $v = \text{const}$ маємо:

$$\Delta_u z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta_u x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta_u y + \alpha_u \Delta_u x + \beta_u \Delta_u y,$$

де $\alpha_u \rightarrow 0$ і $\beta_u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

$$\frac{\Delta_u z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \alpha_u \cdot \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \beta_u \cdot \frac{\Delta_u y}{\Delta u}.$$

Перейдемо до границі при $\Delta u \rightarrow 0$ і дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u z}{\Delta u}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u x}{\Delta u}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u y}{\Delta u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Аналогічно, при $u = const$ маємо:

$$\Delta_v z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta_v x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta_v y + \alpha_v \Delta_v x + \beta_v \Delta_v y,$$

де $\alpha_v \rightarrow 0$ і $\beta_v \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$;

$$\frac{\Delta_v z}{\Delta v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta_v x}{\Delta v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta_v y}{\Delta v} + \alpha_v \frac{\Delta_v x}{\Delta v} + \beta_v \frac{\Delta_v y}{\Delta v}.$$

Перейдемо до границі при $\Delta v \rightarrow 0$ і отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad \blacksquare$$

3) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, де другий аргумент y сам є функцією першого аргументу x : $y = y(x)$. Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної $z = f(x, y(x))$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}.$$

Зауваження 1. Праворуч у цій формулі перший доданок $\partial z / \partial x$ – це частинна похідна за x , обчислена в припущенні, що $y = const$. У лівій частині маємо dz/dx – повну похідну за x , обчислену при умові, що y є функцією від x : $y = y(x)$.

Третій випадок безпосередньо впливає з першого, якщо при-

йняти $t = x$.

Приклад 1. Знайти значення вказаних похідних складеної функції у відповідній точці:

а) dz/dt , якщо $z = x e^{xy}$, де $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $t_0 = \pi$;

б) $\partial z/\partial u$ і $\partial z/\partial v$, якщо $z = \arctg(x^2 + y)$, де $x = u \ln v$, $y = v \cos u$, $u_0 = \pi$, $v_0 = 1$;

в) dz/dx , якщо $z = \arcsin(xy)$, де $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

□ а) $x_0 = x(t_0) = \pi \cos \pi = -\pi$; $y_0 = y(t_0) = \pi \sin \pi = 0$;

$$dx/dt = \cos t - t \sin t; \quad dx/dt \Big|_{t=\pi} = \cos \pi - \pi \sin \pi = -1;$$

$$dy/dt = \sin t + t \cos t; \quad dy/dt \Big|_{t=\pi} = \sin \pi + \pi \cos \pi = -\pi;$$

$$\partial z/\partial x = e^{xy} + xy e^{xy}; \quad \partial z/\partial x \Big|_{t=\pi} = e^{-\pi \cdot 0} - \pi \cdot 0 \cdot e^{-\pi \cdot 0} = 1;$$

$$\partial z/\partial y = x^2 e^{xy}; \quad \partial z/\partial y \Big|_{t=\pi} = (-\pi)^2 e^{-\pi \cdot 0} = \pi^2;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} \Big|_{t=\pi} = 1 \cdot (-1) + \pi^2 \cdot (-\pi) = -(\pi^3 + 1).$$

б) $x_0 = x(u_0, v_0) = \pi \cdot \ln 1 = 0$; $y_0 = y(u_0, v_0) = 1 \cdot \cos \pi = -1$;

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \ln v; \quad \frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{u=\pi, v=1} = \ln 1 = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{u=\pi, v=1} = \frac{\pi}{1} = \pi;$$

$$\partial y/\partial u = -v \sin u; \quad \partial y/\partial u \Big|_{u=\pi, v=1} = -1 \cdot \sin \pi = 0; \quad \partial y/\partial v = \cos u;$$

$$\partial y/\partial v \Big|_{u=\pi, v=1} = \cos \pi = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial x \Big|_{u=\pi, v=1} = \frac{2 \cdot 0}{1 + (0^2 - 1)^2} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial y \Big|_{u=\pi, v=1} = \frac{1}{1 + (0^2 - 1)^2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{u=\pi, v=1} = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} \Big|_{u=\pi, v=1} = 0 \cdot \pi + (1/2) \cdot (-1) = -1/2;$$

в) $y_0 = y(x_0) = \ln 1 = 0; \quad dy/dx = 1/x; \quad dy/dx \Big|_{x=1} = 1/1 = 1;$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{0}{\sqrt{1-(1 \cdot 0)^2}} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{1-(1 \cdot 0)^2}} = 1; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dz}{dx} \Big|_{x=1} = 0 + 1 \cdot 1 = 1. \blacksquare$$

Зауваження 2. Очевидно, значення похідних будуть ті самі, якщо у вираз для зовнішньої функції $z = f(x, y)$ попередньо підставити замість x та y відповідні внутрішні функції, а потім знайти шукані похідні за внутрішніми аргументами звичайним способом.

2.2.9. Інваріантність форми повного диференціала

Теорема (Інваріантність форми повного диференціала).

Повний диференціал складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, можна подати у вигляді

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

який збігається з виглядом повного диференціала звичайної функції.

Іншими словами, вигляд повного диференціала функції не залежить від того, чи є її аргументи незалежними змінними чи функціями інших змінних.

$$\square \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \frac{\partial z}{\partial x} \underbrace{\left((\partial x / \partial u) du + (\partial x / \partial v) dv \right)}_{dx} +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y} \underbrace{((\partial y / \partial u) du + (\partial y / \partial v) dv)}_{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad \blacksquare$$

2.2.10. Диференціювання неявно заданих функцій

Теорема 1. (умови існування неявної функції). Якщо функція $F(x, y)$ та її частинні похідні $F'_y(x, y)$, $F'_x(x, y)$ визначені та неперервні в деякому околі точки $M(x_0, y_0)$, причому $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то рівняння $F(x, y) = 0$ в деякому околі точки $M(x_0, y_0)$ визначає єдину неявну неперервну і диференційовну функцію $y = y(x)$, причому $y_0 = y(x_0)$.

(Без доведення).

Теорема 2. Нехай функція $y = y(x)$ задається неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, де функція $F(x, y)$ та її частинні похідні $F'_y(x, y)$ і $F'_x(x, y)$ неперервні в околі деякої точки $M(x, y)$, координати якої задовольняють це рівняння, причому $F'_y(x, y) \neq 0$. Тоді в цій точці

$$\boxed{y'_x = -F'_x(x, y) / F'_y(x, y)}.$$

$$\square \quad z = F(x, y); \quad y = y(x); \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = F'_x + F'_y \cdot y'_x;$$

$$F(x, y) = 0; \quad dz/dx = 0; \quad F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0; \quad y'_x = -F'_x / F'_y. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Написати рівняння дотичної до кривої

$$l: \quad x^3 y^4 - 3y^2 = 4 \quad \text{у точці } M_0(1;2).$$

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;2)$ рівняння лінії

$$l: \quad F(x, y) = x^3 y^4 - 3y^2 - 4 = 0;$$

$$M_0(1;2): \quad F(x_0, y_0) = 1^3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 0; \quad 0 = 0; \quad M_0 \in l.$$

Рівняння дотичної прямої $y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0)$.

Знайдемо шукану похідну $y'_0 = y'_x \Big|_{M_0}$:

$$y'_x = -F'_x / F'_y; \quad F'_x = 3x^2 y^4; \quad F'_y = 4x^3 y^3 - 6y;$$

$$y'_x = -\frac{3x^2 y^4}{4x^3 y^3 - 6y} = -\frac{3x^2 y^3}{4x^3 y^2 - 6};$$

$$y'_0 = y'_x \Big|_{M_0} = -3 \cdot 1^2 \cdot 2^3 / (4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 6) = -12/5.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y - 2 = -\frac{12}{5}(x - 1); \quad y = -\frac{12}{5}x + \frac{22}{5}. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Нехай рівняння $F(x, y, z) = 0$ задає неявно функцію двох змінних $z = z(x, y)$. Тоді, фіксуючи y , за теоремою 2 дістаємо $\partial z / \partial x = -F'_x(x, y) / F'_z(x, y)$. Фіксуючи x , аналогічно маємо $\partial z / \partial y = -F'_y(x, y) / F'_z(x, y)$.

Приклад 2. Знайти значення частинних похідних функції $z = z(x, y)$, яка задана неявно рівнянням $x^2 + 2e^y + xz = 5$, у точці $M_0(1;0;2)$.

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;0;2)$ задане рівняння, що визначає деяку поверхню

$$S: F(x, y, z) = x^2 + 2e^y + xz - 5 = 0; \quad M_0(1;0;2): F(x_0, y_0, z_0) = \\ = 1^2 + 2 \cdot e^0 + 1 \cdot 2 - 5 = 0; \quad 0 = 0; \quad M_0 \in S.$$

Знайдемо шукані похідні:

$$F'_x = 2x + z; \quad F'_y = 2e^y; \quad F'_z = x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x + z}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} = -(2 \cdot 1 + 2) / 1 = -4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -F'_y / F'_z; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2e^y / x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} = -2e^0 / 1 = -2. \quad \blacksquare$$

2.2.11. Границя та похідна вектор-функції

Нехай у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ деяка просторова лінія l (рис. 39) задана в параметричній формі

$$l: x = x(t); y = y(t); z = z(t), \quad t \in (\alpha; \beta).$$

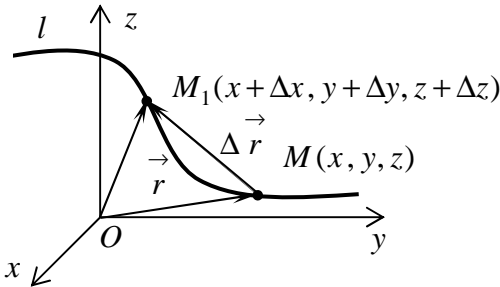


Рис. 39

Тоді радіус-вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ довільної точки $M(x, y, z)$ кривої l визначається рівністю

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \\ &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \end{aligned}$$

Таким чином, радіус-вектор довільної точки просторової кривої може розглядатися як деяка функція аргументу t . При зміні параметра t змінюються довжина і напрям вектора \vec{r} .

Якщо кожному значенню змінної t з деякого проміжку $(\alpha; \beta)$ поставлено у відповідність один і тільки один радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то кажуть, що на проміжку $(\alpha; \beta)$ визначено **вектор-функцію** $\vec{r} = \vec{r}(t)$ **скалярного аргументу** t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Просторову криву l , утворену рухом кінця радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при зміні t на проміжку $(\alpha; \beta)$, називають **графіком вектор-функції** або **годографом**.

Сталий вектор $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ називається **границею** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці t_0 , якщо

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0.$$

Позначається $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$. Ясно, що $\lim_{t \rightarrow t_0} \left| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \right| = 0$.

Вектор $\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ називається **приростом** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці t , що відповідає приросту аргументу Δt .

Вектор-функцію $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називають **неперервною** в точці t , якщо $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r}(t) = 0$.

Границя відношення $\Delta \vec{r}(t) / \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$ називається **похідною** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці t і позначається $\vec{r}'(t)$

або $d \vec{r} / dt$:
$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

При цьому
$$\vec{r}'(t) = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k}.$$

Властивості похідної вектор-функції:

- 1) $\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3) = d \vec{r}_1 / dt + d \vec{r}_2 / dt - d \vec{r}_3 / dt$;
- 2) $\frac{d}{dt} (\lambda \vec{r}) = \lambda d \vec{r} / dt$, де λ – довільне число;
- 3) $\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = d \vec{r}_1 / dt \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot d \vec{r}_2 / dt$;
- 4) $\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = d \vec{r}_1 / dt \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times d \vec{r}_2 / dt$.

2.2.12. Дотична пряма і нормальна площина до просторової лінії

Вектор $\Delta \vec{r}(t_0)/\Delta t$ паралельний вектору $\Delta \vec{r}(t_0)$ і напрямлений вздовж січної M_0M_1 до годографа (рис. 40). Коли $\Delta t \rightarrow 0$, точка M_1 необмежено наближається до точки M_0 , а січна M_0M_1 переходить у **дотичну** l_k до кривої у точці M_0 . Звідси випливає, що **напрямок похідної $\vec{r}'(t_0)$ вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ збігається з напрямком дотичної до годографа у відповідній точці M_0 .** (Геометричний зміст похідної вектор-функції).

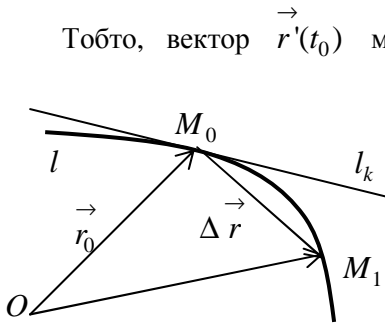


Рис. 40

Тобто, вектор $\vec{r}'(t_0)$ можна взяти за напрямний вектор дотичної l_k . Тоді **канонічні рівняння дотичної** прямої l_k до просторової кривої мають вигляд

$$l_k : \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

де $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$,
 $z_0 = z(t_0)$.

Площина α_n , що перпендикулярна до дотичної l_k і проходить через точку дотику M_0 , називається **нормальною площиною** до просторової лінії.

Вектор $\vec{r}'(t_0)$ можна взяти за вектор нормалі цієї площини α_n . Записуючи рівняння площини, яка проходить через дану точку M_0 і перпендикулярна до даного вектора нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

отримуємо **рівняння нормальної площини α_n**

$$\alpha_n : x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної прямої l_k та нормальної площини α_n до заданої просторової лінії l у відповідній точці $t = t_0$:

а) l – циліндрична гвинтова лінія (рис. 41) з радіусом $R = 4$ і кроком $h = 4$:

$$l: x = 4 \cos t; y = 4 \sin t; z = (8/\pi)t, \quad t_0 = \pi/4;$$

б) l – конічна гвинтова лінія:

$$l: x = 2t \cos t; y = 2t \sin t; z = 4t,$$

$$t_0 = \pi.$$

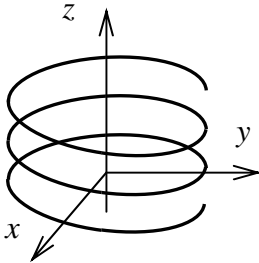


Рис. 41

$$\square \text{ а) } x_0 = x(t_0) = 4 \cos(\pi/4) = 2\sqrt{2};$$

$$y_0 = y(t_0) = 4 \sin(\pi/4) = 2\sqrt{2};$$

$$z_0 = z(t_0) = (8/\pi) \cdot (\pi/4) = 2;$$

$$x'(t) = -4 \sin t; \quad y'(t) = 4 \cos t;$$

$$z'(t) = 8/\pi; \quad x'(t_0) = -4 \sin(\pi/4) = -2\sqrt{2};$$

$$y'(t_0) = 4 \cos(\pi/4) = 2\sqrt{2}; \quad z'(t_0) = 8/\pi;$$

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}; \quad \frac{x - 2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{z - 2}{8/\pi};$$

$$l_k: \frac{x - 2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - 2}{4/\pi};$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0;$$

$$-2\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(y - 2\sqrt{2}) + (8/\pi)(z - 2) = 0;$$

$$\pi\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2}) - \pi\sqrt{2}(y - 2\sqrt{2}) - 4(z - 2) = 0;$$

$$\alpha_n: \pi\sqrt{2}x - \pi\sqrt{2}y - 4z + 8 = 0.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

2.2.13. Фізичний зміст вектор-функції та її похідних

Якщо під t розуміти час, а кінець M радіус-вектора $\vec{OM} = \vec{r}(t)$ розглядати як матеріальну точку, то годограф вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ служить траєкторією руху цієї точки. (Фізичний зміст вектор-функції скалярного аргументу).

Тоді перша похідна $\vec{r}'(t)$ вектор функції – швидкість руху матеріальної точки $\vec{v}(t)$, а друга похідна $\vec{r}''(t)$ – її прискорення $\vec{a}(t)$. (Фізичний зміст першої та другої похідних вектор-функції скалярного аргументу).

Приклад 1. Матеріальна точка $M(x, y)$ рухається з постійною кутовою швидкістю ω по колу радіуса R (рис. 42):

$$x = R \cos \omega t; \quad y = R \sin \omega t.$$

Знайти її швидкість $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}(t)$, а також їх абсолютні величини.

$$\begin{aligned} \square \quad \vec{r}(t) &= x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} = R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j}; \quad |\vec{r}(t)| = \\ &= \sqrt{(R \cos \omega t)^2 + (R \sin \omega t)^2} = R; \quad \vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} = \\ &= (R \cos \omega t)' \vec{i} + (R \sin \omega t)' \vec{j} = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j}; \\ |\vec{v}(t)| &= \sqrt{(-R\omega \sin \omega t)^2 + (R\omega \cos \omega t)^2} = \omega R; \\ \vec{a}(t) &= \vec{r}''(t) = \vec{v}'(t) = (-R\omega \sin \omega t)' \vec{i} + (R\omega \cos \omega t)' \vec{j} = \\ &= -R\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 (R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j}) = \\ &= -\omega^2 \vec{r}(t); \quad |\vec{a}(t)| = |-\omega^2 \vec{r}(t)| = \omega^2 |\vec{r}(t)| = \omega^2 R. \end{aligned}$$

Таким чином, швидкість напрямлена по дотичній до кола, а прискорення – вздовж радіус-вектора до центра кола, при цьому

вони залишаються сталими за величиною. ■

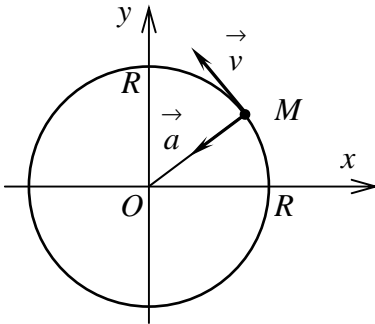


Рис. 42

Приклад 2. Знайти модулі швидкості $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}(t)$ матеріальної точки $M(x, y, z)$ у момент часу $t_0 = \pi/3$, що рухається по циліндричній гвинтовій лінії (рис. 41) за законом:

$$x = 2 \cos 3t; \quad y = 2 \sin 3t; \quad z = 8t.$$

(Розв'язати самостійно).

2.2.14. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала

Нехай поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка цієї поверхні (рис. 43). Рівняння дотичної площини α_d у точці P_0 будемо шукати у вигляді

$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$, де A, B – невизначені коефіцієнти.

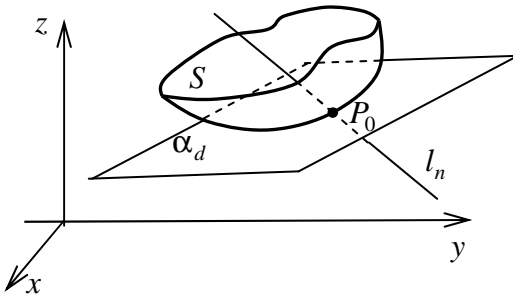


Рис. 43

З геометричного змісту частинних похідних $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$ випливає, що рівняння дотичних у точці P_0 до ліній перетину поверхні $S: z = f(x, y)$ площинами $y = y_0$ і $x = x_0$ мають

відповідно вигляд:

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Ці дві прямі лежать у дотичній площині α_d при перетині її відповідно з площинами $y = y_0$ і $x = x_0$. Тому рівняння дотичних прямих можна подати відповідно у вигляді:

$$\begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ y = y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Порівнюючи ці рівняння з попередніми рівняннями дотичних прямих, знаходимо $A = f'_x(x_0, y_0)$; $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Отже, **рівняння дотичної площини α_d** має вигляд:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вектор нормалі дотичної площини

$$\vec{n} = (A, B, C) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$$

називається також **вектором нормалі до поверхні S** : $z = f(x, y)$ у точці дотику $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пряма l_n , яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до дотичної площини α_d у цій точці, називається **нормальною прямою (нормаллю)** до поверхні S : $z = f(x, y)$ у цій точці P_0 .

Взявши вектор нормалі дотичної площини за напрямний вектор, можна записати **канонічні рівняння нормальної прямої**

$$l_n : \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Зауваження 1. Якщо поверхня S задана неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то: 1) рівняння дотичної площини

$$\alpha_d : F'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

і вектор нормалі $\vec{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$;

2) канонічні рівняння нормальної прямої

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}}.$$

Приклад. Написати рівняння дотичної площини α_d та нормальної прямої l_n до заданої поверхні S в указаній точці $P_0(x_0; y_0; z_0)$:

а) $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, а поверхня S задана явно рівнянням $z = x^2 - y \cos x + y^3 - 2x$;

б) $P_0(1; -2; -1)$, а поверхня S задана неявно рівнянням $x^2 + y^2/x - z^3 + 4yz = 14$.

$$\square \text{ а) } z = f(x, y) = x^2 - y \cos x + y^3 - 2x;$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 0^2 - 2 \cos 0 + 2 - 0^3 = 6; \quad P_0(0; 2; 6);$$

$$f'_x = 2x + y \sin x - 2; \quad f'_x|_{P_0} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \sin 0 - 2 = -2;$$

$$f'_y = -\cos x + 3y^2; \quad f'_y|_{P_0} = -\cos 0 + 3 \cdot 2^2 = 11;$$

$$\alpha_d: z - z_0 = f'_x|_{P_0} (x - x_0) + f'_y|_{P_0} (y - y_0);$$

$$z - 6 = -2(x - 0) + 11(y - 2); \quad -2x + 11y - 22 - z + 6 = 0;$$

$$-2x + 11y - z - 16 = 0; \quad 2x - 11y + z + 16 = 0 \text{ - дотична площина;}$$

$$l_n: \frac{x - x_0}{f'_x|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{f'_y|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{-1}; \quad \frac{x - 0}{-2} = \frac{y - 2}{11} = \frac{z - 6}{-1}$$

- нормальна пряма;

б) Перевіримо спочатку, чи лежить вказана точка $P_0(1; -2; -1)$ на даній поверхні S :

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2/x - z^3 + 4yz - 14 = 0; \quad 1^2 + (-2)^2/1 - (-1)^3 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 14 = 0; \quad 0 = 0 \text{ вірно; } P_0(1; -2; -1) \in S.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці дотику P_0 :

$$F'_x = 2x - y^2/x^2; \quad F'_x|_{P_0} = 2 \cdot 1 - (-2)^2/1^2 = -2; \quad F'_y = 2y/x + 4z;$$

$$F'_y|_{P_0} = 2 \cdot (-2)/1 + 4 \cdot (-1) = -8; \quad F'_z = -3z^2 + 4y; \quad F'_z|_{P_0} = -3 \times \\ \times (-1)^2 + 4 \cdot (-2) = -11.$$

Складаємо рівняння дотичної площини і нормальної прямої:

$$\alpha_d: \quad F'_x|_{P_0} (x - x_0) + F'_y|_{P_0} (y - y_0) + F'_z|_{P_0} (z - z_0) = 0;$$

$$-2 \cdot (x - 1) - 8 \cdot (y + 2) - 11 \cdot (z + 1) = 0; \quad 2x - 2 + 8y + 16 + \\ + 11z + 11 = 0; \quad 2x + 8y + 11z + 25 = 0 \text{ — дотична площина};$$

$$l_n: \quad \frac{x - x_0}{F'_x|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{P_0}}; \quad \frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 2}{-8} = \frac{z + 1}{-11};$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{8} = \frac{z + 1}{11} \text{ — нормальна пряма.} \quad \blacksquare$$

Порівнюючи рівняння дотичної площини

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

з формулою повного диференціала

$$dz = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y,$$

яку можна подати у вигляді

$$dz = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

бачимо, що праві частини цих виразів збігаються. Отже, й ліві частини є рівними. Тобто,

повний диференціал функції dz дорівнює приросту $\Delta z = z - z_0$ аплікати дотичної площини α_d , проведеної до поверхні $S: z = f(x, y)$ у точці $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 44). (Геометричний зміст повного диференціала).

Зауваження 2. З геометричної точки зору наближеній формулі обчислення повного приросту функції через її повний диференціал

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz$$

відповідає заміна поверхні дотичною площиною в достатньо малому околі точки дотику.

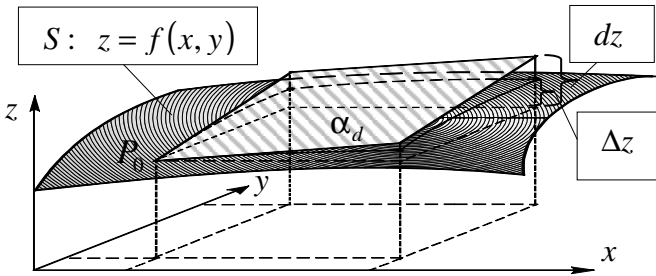


Рис. 44

Нехай поверхня S задється рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними z'_x і z'_y в області визначення D . Тоді у кожній точці поверхні S можна побудувати дотичну площину. Ця площина неперервно змінює своє положення при переході від однієї точки до іншої.

Поверхня S , у кожній точці якої існує дотична площина, що неперервно змінює своє положення при переході від точки до точки, називається *гладкою*.

Поверхня S називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається зі скінченного числа гладких поверхонь зі спільною кусково-неперервною межею.

2.2.15. Частинні похідні вищих порядків.

Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Частинні похідні $\partial z / \partial x$ і $\partial z / \partial y$ функції двох змінних $z = f(x, y)$ також є функціями двох змінних x і y , а тому самі можуть мати частинні похідні.

Частинна похідна по x від частинної похідної по x називається *другою чистою частинною похідною по x* і позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{ або } z''_{xx}. \text{ Таким чином, } \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}.$$

Аналогічно частинна похідна по y від частинної похідної по u називається **другою чистою частинною похідною по y** і позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \text{ або } z''_{yy}. \text{ Отже, } \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}.$$

Якщо від частинної похідної по x взяти частинну похідну по y , то отримуємо **другу мішану частинну похідну по x і y** , яка

$$\text{позначається } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \text{ або } z''_{xy}. \text{ Отже, } \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}.$$

Якщо від частинної похідної по y взяти частинну похідну по x , то одержимо **другу мішану частинну похідну по y і x** (з іншим порядком диференціювання), яка позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \text{ або } z''_{yx}. \text{ Отже, } \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}.$$

У загальному випадку $\partial^2 z / \partial y \partial x \neq \partial^2 z / \partial x \partial y$.

Зауваження 1. Аналогічно частинним похідним другого порядку вводяться частинні похідні третього, четвертого і т.д., порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right); \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right).$$

Теорема. Для неперервних мішаних частинних похідних порядку диференціювання значення не має

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}.$$

□ Розглянемо вираз

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Фіксуємо y , введемо допоміжну функцію однієї змінної x :

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \text{ Тоді } A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Застосуємо формулу скінченних приростів Лагранжа й одержимо

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(\bar{x})\Delta x; \quad \bar{x} \in (x, x + \Delta x).$$

$$\text{Але } \phi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

Застосуємо формулу Лагранжа до функції $f'_x(\bar{x}, y)$ однієї змінної y і дістанемо

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y; \quad \bar{y} \in (y, y + \Delta y).$$

$$\text{Тоді } A = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y.$$

З іншого боку, переставляючи середні доданки, вираз A можна подати у вигляді

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Фіксуємо x , введемо допоміжну функцію однієї змінної y

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

$$\text{Тоді } A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \psi'(\bar{y})\Delta y =$$

$$= [f'_y(x + \Delta x, \bar{y}) - f'_y(x, \bar{y})]\Delta y = f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y,$$

де $\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$, $\bar{y} \in (y, y + \Delta y)$.

Порівнюючи одержані зображення виразу A , маємо

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y \Delta x = f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y; \quad f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, маємо $\bar{x} \rightarrow x$, $\bar{y} \rightarrow y$, $\bar{x} \rightarrow x$, $\bar{y} \rightarrow y$. Отже, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. ■

Приклад 1. Для заданої функції $z = f(x, y)$ перевірити рівність указаних мішаних частинних похідних:

$$\text{а) } z = \sin(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad \text{б) } z = y \ln x; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

$$\square \text{ а) } \frac{\partial z}{\partial x} = (\sin(xy))'_x = y \cos(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y \cos(xy))'_y =$$

$$= \cos(xy) - xy \sin(xy); \quad \partial z / \partial y = (\sin(xy))'_y = x \cos(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x \cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy \sin(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2};$$

$$\partial^3 z / \partial x \partial y \partial x = \partial^3 z / \partial x^2 \partial y. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Перевірити, що задана функція $z = f(x, y)$ задовольняє вказаній умові:

$$\text{а) } z = \arctg \frac{x}{y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\text{б) } z = x \sin(x - y); \quad x \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2z = 0.$$

$$\square \text{ а) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \times$$

$$\times \left(-x / (x^2 + y^2) \right) = 0; \quad (-2xy - 2xy + 4xy) / (x^2 + y^2)^2 = 0; \quad 0 = 0.$$

Таким чином, задана функція задовольняє вказаній умові.

$$\text{б) } \partial z / \partial x = \sin(x - y) + x \cos(x - y); \quad \partial z / \partial y = -x \cos(x - y);$$

$$\partial^2 z / \partial y^2 = -x \sin(x - y); \quad x (\sin(x - y) + x \cos(x - y) -$$

$$- x \cos(x - y)) - (-x \sin(x - y)) - 2x \sin(x - y) = 0; \quad 0 = 0.$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. \blacksquare

Приклад 3. Для заданої функції $u = f(x, y, z)$ знайти значення вказаної частинної похідної в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u = x^2 y z^4 + x^3 y^2 z + y z^2; \quad M_0(-1; 2; 1); \quad \partial^4 u / \partial x^2 \partial y \partial z.$$

$$\square \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy z^4 + 3x^2 y^2 z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y z^4 + 6xy^2 z; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} =$$

$$= 2z^4 + 12xyz; \quad \partial^4 u / \partial x^2 \partial y \partial z = 8z^3 + 12xy; \quad \partial^4 u / \partial x^2 \partial y \partial z \Big|_{M_0} =$$

$$= 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot (-1) \cdot 2 = 8 - 24 = -16. \quad \blacksquare$$

Диференціалом другого порядку (другим диференціалом) функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається диференціал від її повного диференціала, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Зауваження 2. Аналогічно визначаються диференціали більш високого порядку: $d^3 z = d(d^2 z)$; $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Зауваження 3. Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Зауваження 4. Диференціали вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Зауваження 5. Нехай функція n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($m+1$) раз диференційовна в деякому околі $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Тоді для довільної точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з цього околу справджується **формула Тейлора**, яку компактно можна подати в диференціальній формі

$$u(M) = u \Big|_{M_0} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} d^k u \Big|_{M_0} + o(\rho^m),$$

де $\rho = M_0 M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \dots + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon$.

Цю формулу до членів другого порядку включно для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна записати в розгорнутому вигляді:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right) + o(\rho^2).$$

Приклад 4. Розкласти функцію $z = x \ln(x + 2y)$ за формулою Тейлора до членів другого порядку включно в околі точки $M_0(1, 0)$

□ Обчислимо значення заданої функції, її перших та других частинних похідних у вказаній точці $M_0(1, 0)$:

$$\begin{aligned} z &= x \ln(x + 2y); & z(M_0) &= 0; \\ \partial z / \partial x &= \ln(x + 2y) + x / (x + 2y); & \partial z(M_0) / \partial x &= 1; \\ \partial z / \partial y &= 2x / (x + 2y); & \partial z(M_0) / \partial y &= 2; \\ \partial^2 z / \partial x^2 &= (x + 4y) / (x + 2y)^2; & \partial^2 z(M_0) / \partial x^2 &= 1; \\ \partial^2 z / \partial x \partial y &= 4y / (x + 2y)^2; & \partial^2 z(M_0) / \partial x \partial y &= 0; \\ \partial^2 z / \partial y^2 &= -4x / (x + 2y)^2; & \partial^2 z(M_0) / \partial y^2 &= -4. \end{aligned}$$

Запишемо розвинення заданої функції за формулою Тейлора:

$$\begin{aligned} x \ln(x + 2y) &= 0 + (1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 0)) + (1/2) \left(1 \cdot (x - 1)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 0 \cdot (x - 1)(y - 0) + (-4) \cdot (y - 0)^2 \right) + o(\rho^2); \\ x \ln(x + 2y) &= (x - 1) + 2y + (1/2)(x - 1)^2 - 4y^2 + o(\rho^2), \end{aligned}$$

де $\rho = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$. ■

2.2.16. Скалярне поле та його зображення. Похідна за напрямом

Нехай у деякій області D простору задано скалярну функцію трьох змінних $u = f(M) = f(x, y, z)$. Тоді кажуть, що в області D задане **просторове скалярне поле** $u = f(M)$.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$, яка визначена у плоскій області D , задає **плоске скалярне поле** $z = f(x, y)$.

Поле – це функція $u = f(M)$, що розглядається разом з її областю визначення D . (Фізичний зміст функції багатьох змінних).

Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, ат-

мосферного тиску, електричного потенціалу.

Для геометричного зображення скалярного поля використовуються лінії рівня $f(x, y) = C$ (на площині) та поверхні рівня $f(x, y, z) = C$ (у просторі), де $C = const$.

Поверхні рівня (у просторі) та лінії рівня (на площині) є основними **геометричними характеристиками** скалярного поля.

Нехай у деякому околі фіксованої точки $M(x, y, z)$ задано просторове скалярне поле $u = u(M) = u(x, y, z)$. Проведемо з цієї точки M довільний ненульовий вектор \vec{l} , напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$. У напрямі цього вектора на деякій відстані Δl від початку M візьмемо іншу точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ (рис. 45). Тоді

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2};$$

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha; \quad \Delta y = \Delta l \cos\beta; \quad \Delta z = \Delta l \cos\gamma.$$

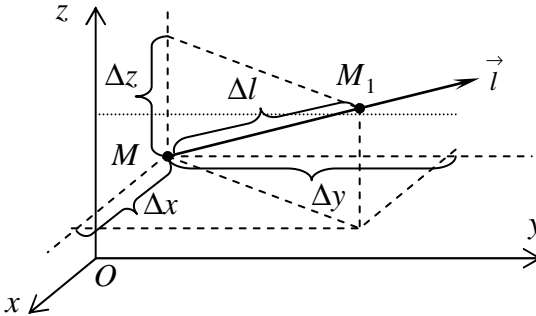


Рис. 45

Різниця $\Delta_l u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$ значень функції в точках M_1 і M називається **приростом функції $u = u(x, y, z)$ у напрямі вектора \vec{l}** .

Якщо функція $u = u(x, y, z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ при $\Delta l \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \Delta_l u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta l \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta l \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta l \cos \gamma + \\ &+ \varepsilon_1 \Delta l \cos \alpha + \varepsilon_2 \Delta l \cos \beta + \varepsilon_3 \Delta l \cos \gamma . \end{aligned}$$

Похідною функції $u = u(x, y, z)$ **у точці** $M(x, y, z)$ **за напрямом вектора** \vec{l} **називається границя** $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

і визначає швидкість змінювання функції (скалярного поля) за напрямом вектора \vec{l} у точці $M(x, y, z)$.

Якщо похідна $\partial u / \partial l$ додатна, то поле у цьому напрямі зростає. Якщо ж $\partial u / \partial l < 0$, то поле – спадає.

Зауваження 1. Нехай $z = f(x, y)$ – задане плоске скалярне поле. Функції $z = f(x, y)$ відповідає деяка поверхня S . Якщо через точку $M_0(x_0, y_0)$ і відкладений від неї вектор \vec{l} провести вертикальну площину α ($\alpha \parallel Oz$), то ця площина перетне поверхню S вздовж деякої просторової лінії l . Тангенс кута α_d між дотичною до лінії перерізу l у точці $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ і горизонтальною координатною площиною Oxy дорівнює значенню похідної за напрямом $\partial z / \partial l$ у відповідній точці $M_0(x_0, y_0)$ (**геометричний зміст похідної за напрямом**) (рис. 46): $tg \alpha_d = \partial z / \partial l_{M_0}$.

Зауваження 2. Якщо напрям вектора \vec{l} співпадає з напрямом одного з координатних ортів \vec{i} , \vec{j} чи \vec{k} , то похідна за напрямом $\partial u / \partial l$ співпадає з відповідною частинною похідною:

$$\frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

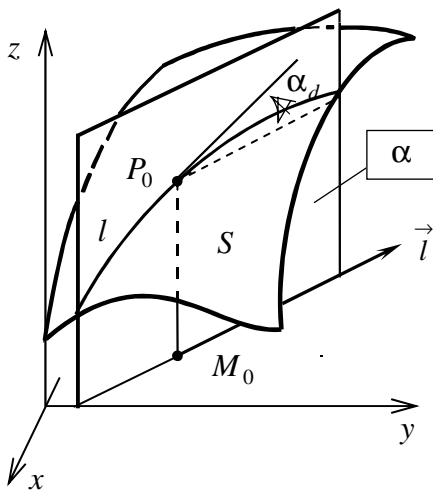


Рис. 46

Приклад. Для заданої функції $u = u(x, y, z)$ і вказаного вектора \vec{l} знайти похідну за напрямом $\partial u / \partial l$ у зазначеній точці M :

а) $u = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} z$;

$\vec{l}(-1; 2; -2)$; $M(1; -2; \pi/4)$;

б) $u = \sqrt{x^2 + 2y} \ln(x + y + z)$;

$\vec{l}(-6; 2; -3)$; $M(3; -4; 2)$.

□ а) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \operatorname{tg} z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \operatorname{tg} z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 z}$;

$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 2 \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 2$; $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 2 \cdot (-2) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -4$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2}{\cos^2 z}$; $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = \frac{1^2 + (-2)^2}{\cos^2(\pi/4)} = 10$; $|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$;

$|\vec{l}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$;

$\cos \alpha = l_x / |\vec{l}|$; $\cos \beta = l_y / |\vec{l}|$; $\cos \gamma = l_z / |\vec{l}|$; $\cos \alpha = -1/3$;

$\cos \beta = \frac{2}{3}$; $\cos \gamma = \frac{-2}{3}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$;

$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = 2 \cdot (-1/3) + (-4) \cdot (2/3) + 10 \cdot (-2/3) = -10$.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = -1$. ■

2.2.17. Градієнт. Зв'язок між градієнтом, похідною за напрямом і нормаллю до поверхні рівня

Градієнтом функції (скалярного поля) $u = u(x, y, z)$ називається вектор, проєкціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Основні правила обчислення градієнта:

- 1) $\text{grad}(u + v - w) = \text{grad } u + \text{grad } v - \text{grad } w$;
- 2) $\text{grad}(uv) = v \text{grad } u + u \text{grad } v$;
- 2а) $\text{grad}(Cu) = C \text{grad } u$; $C = \text{const}$;
- 3) $\text{grad}(u/v) = (v \text{grad } u - u \text{grad } v)/v^2$.

Теорема (Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом).
 Похідна $\partial u / \partial l$ за напрямом вектора \vec{l} дорівнює проєкції градієнта $\text{grad } u$ на цей вектор (рис. 47):

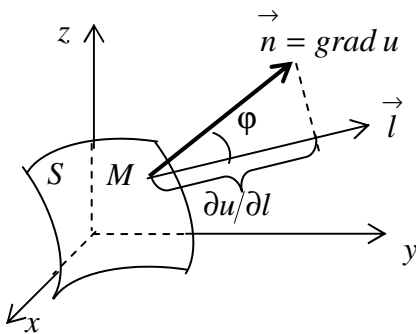


Рис. 47

$$\frac{\partial u}{\partial l} = n \vec{p}_{\vec{l}} \text{grad } u.$$

□ Розглянемо одиничний вектор $\vec{l}_0 = \vec{l} / |\vec{l}|$, $|\vec{l}_0| = 1$, що відповідний вектору \vec{l} :

$$\vec{l}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}.$$

Знайдемо у координатній формі скалярний добуток градієнта $\text{grad } u$ на одиничний

вектор \vec{l}_0 $\text{grad } u \cdot \vec{l}_0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$.

Вираз у правій частині одержаної рівності є похідною за напрямом $\partial u / \partial l$. Отже, $\text{grad } u \cdot \vec{l}_0 = \partial u / \partial l$.

Нехай φ – кут між векторами $\text{grad } u$ і \vec{l} . Тоді за означенням скалярного добутку, враховуючи, що $|\vec{l}_0| = 1$, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l}_0 = |\text{grad } u| \cdot |\vec{l}_0| \cdot \cos \varphi = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi.$$

Вираз у правій частині цієї рівності є проекцією градієнта на вектор \vec{l} . Отже, $\frac{\partial u}{\partial l} = \text{pr}_{\vec{l}} \text{grad } u$. ■

Основні властивості градієнта:

1) Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у даній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{l} має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта $\text{grad } u$. Це найбільше значення похідної $\frac{\partial u}{\partial l}$ дорівнює модулю градієнта:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\text{grad } u| \quad \text{при} \quad \vec{l}_{\max} = \text{grad } u.$$

(Фізичний зміст градієнта).

Іншими словами, градієнт указує напрям найшвидшого зростання скалярного поля в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості:

$$\text{grad } u = \vec{l}_{\max}; \quad |\text{grad } u| = \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max}.$$

$$\square \quad \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\text{grad } u| \quad \text{при} \quad \cos \varphi_{\max} = 1.$$

Тоді $\varphi_{\max} = 0 \Rightarrow \vec{l}_{\max} \uparrow \uparrow \text{grad } u$. ■

Зауваження. Згідно з цією властивістю градієнт скалярного поля визначається самим полем і не залежить від вибору системи координат.

2) Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у довільній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта $\text{grad } u$, дорівнює нулю: $\vec{l} \perp \text{grad } u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial l} = 0$.

$$\square \quad \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi; \quad \vec{l} \perp \text{grad } u; \quad \varphi = \pi/2; \quad \cos \varphi = 0;$$

$$\frac{du}{dl} = 0. \quad \blacksquare$$

3) *градієнт* $\text{grad } u$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у кожній точці $M(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня $S: u(x, y, z) = C$, яка проходить через цю точку (рис. 47). (Геометричний зміст градієнта). Іншими словами, *градієнт* $\text{grad } u$ можна прийняти за вектор нормалі \vec{n} до поверхні рівня $S: u(x, y, z) = C$ у відповідній точці $M(x, y, z)$

$$S: u(x, y, z) = C; \quad \text{grad } u \perp S \Rightarrow \boxed{\vec{n} = \text{grad } u}.$$

□ Оскільки поверхня рівня S задається неявно рівнянням $F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0$, то її вектор нормалі

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_M, \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_M, \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_M \right). \quad \text{Але } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

$$\text{Тоді } \vec{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_M, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_M, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_M \right) = \text{grad } u \Big|_M. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Для заданої функції знайти градієнт і модуль градієнта в указаній точці:

а) $z = x^2 y - 5 \sin(3x - 2y); \quad M_0(2, 3);$

б) $u = 3xyz - 2x^3 y + y^2/z; \quad M_0(-1, 2, 1).$

□ а) $\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 15 \cos(3x - 2y);$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 10 \cos(3x - 2y); \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} = 2 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$-15 \cos(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = -3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} = 2^2 + 10 \cos(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = 14;$$

$$\text{grad } z \Big|_{M_0} = -3\vec{i} + 14\vec{j}; \quad |\text{grad } z| = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2};$$

$$|\text{grad } z \Big|_{M_0} = \sqrt{(-3)^2 + 14^2} = \sqrt{205};$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}; \quad \partial u / \partial x = 3yz - 6x^2y; \\
 \partial u / \partial y &= 3xz - 2x^3 + 2y/z; \quad \partial u / \partial z = 3xy - y^2/z^2; \quad \partial u / \partial x \Big|_{M_0} = \\
 &= 3 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = -6; \quad \partial u / \partial y \Big|_{M_0} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1)^3 + \\
 &+ 2 \cdot 2 / 1 = 3; \quad \partial u / \partial z \Big|_{M_0} = 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2^2 / 1^2 = -8; \quad \operatorname{grad} u \Big|_{M_0} = \\
 &= -6\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k}; \quad |\operatorname{grad} u| = \sqrt{(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2}; \\
 |\operatorname{grad} u \Big|_{M_0} &= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-8)^2} = \sqrt{109} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля $u = \ln(2x^4 + y^2 - 2z^4)$ у точці $M_0(1, -2, -1)$.

□ Напрямок найбільшої швидкості зростання скалярного поля співпадає з напрямком градієнта, а її величина дорівнює модулю градієнта:

$$(\partial u / \partial l)_{\max} \Big|_{M_0} = |\operatorname{grad} u \Big|_{M_0} \quad \text{при} \quad \vec{l}_{\max} = \operatorname{grad} u \Big|_{M_0}.$$

Знайдемо градієнт і його модуль у заданій точці M_0 :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 8x^3 / (2x^4 + y^2 - 2z^4); \\
 \partial u / \partial y &= 2y / (2x^4 + y^2 - 2z^4); \quad \partial u / \partial z = -8z^3 / (2x^4 + y^2 - 2z^4); \\
 \partial u / \partial x \Big|_{M_0} &= (8 \cdot 1^3) / (2 \cdot 1^4 + (-2)^2 - 2 \cdot (-1)^4) = 2; \quad \partial u / \partial y \Big|_{M_0} = \\
 &= 2 \cdot (-2) / (2 \cdot 1^4 + (-2)^2 - 2 \cdot (-1)^4) = -1; \quad \partial u / \partial z \Big|_{M_0} = -8 \cdot (-1)^3 : \\
 &: (2 \cdot 1^4 + (-2)^2 - 2 \cdot (-1)^4) = 2; \quad \operatorname{grad} u \Big|_{M_0} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}; \\
 |\operatorname{grad} u| &= \sqrt{(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2}; \quad |\operatorname{grad} u \Big|_{M_0} = \\
 &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.
 \end{aligned}$$

Тоді $(\partial u / \partial l)_{\max} |_{M_0} = 3$ при $\vec{l}_{\max} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. ■

Приклад 3. Задано функцію $u = u(x, y, z)$ і дві точки M_0 та M_1 . Для даної функції в указаній точці M_0 знайти:

- 1) градієнт $grad u |_{M_0}$ і модуль градієнта $|grad u|_{M_0}$;
- 2) $\partial u / \partial l |_{M_0}$ – похідну за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 M_1}$;
- 3) кут φ між градієнтом $grad u |_{M_0}$ і вектором $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 M_1}$;
- 4) загальне рівняння дотичної площини α_d у точці M_0 до відповідної поверхні рівня $S : u(x, y, z) = u |_{M_0}$;
- 5) канонічні рівняння нормальної прямої l_n до відповідної поверхні рівня $S : u(x, y, z) = u |_{M_0}$ у точці M_0 , а також параметричні рівняння цієї прямої.

а) $u = z e^{x^3 - 2x^2 yz}$; $M_0(2; -1; -1)$; $M_1(5; -7; 1)$;

б) $u = x^3 + z^2 + \sin xyz$; $M_0(-1; 0; 2)$; $M_1(-3; 2; 3)$.

□ а) $\partial u / \partial x = z e^{x^3 - 2x^2 yz} (3x^2 - 4xyz)$; $\partial u / \partial y = -2x^2 z^2 e^{x^3 - 2x^2 yz}$;

$\partial u / \partial z = e^{x^3 - 2x^2 yz} + z e^{x^3 - 2x^2 yz} \cdot (-2x^2 y) = (1 - 2x^2 yz) e^{x^3 - 2x^2 yz}$;

$\partial u / \partial x |_{M_0} = -4$; $\partial u / \partial y |_{M_0} = -8$; $\partial u / \partial z |_{M_0} = -7$;

$grad u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$; $grad u |_{M_0} = -4\vec{i} - 8\vec{j} - 7\vec{k}$;

$|grad u| = \sqrt{(\partial u / \partial x)^2 + (\partial u / \partial y)^2 + (\partial u / \partial z)^2}$; $|grad u|_{M_0} =$
 $= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-7)^2} = \sqrt{129}$; $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0;$
 $z_1 - z_0)$; $\vec{l} = (5 - 2; -7 + 1; -1 - (-1)) = (3; -6; -2)$;

$$|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}; \quad |\vec{l}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = 7;$$

$$\cos \alpha = l_x / |\vec{l}|; \quad \cos \beta = l_y / |\vec{l}|; \quad \cos \gamma = l_z / |\vec{l}|; \quad \cos \alpha = 3/7;$$

$$\cos \beta = -\frac{6}{7}; \quad \cos \gamma = -\frac{2}{7}; \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = -4 \cdot 3/7 + (-8) \cdot (-6/7) - 7 \cdot (-2/7) = 50/7;$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi; \quad \cos \varphi = \frac{\partial u / \partial l}{|\text{grad } u|}; \quad \cos \varphi = \frac{50/7}{\sqrt{129}} = \frac{50\sqrt{129}}{903};$$

$$S: u(x, y, z) = u \Big|_{M_0}; \quad u(x, y, z) = 1; \quad \vec{n} = (A, B, C) = \text{grad } u \Big|_{M_0} =$$

$$= -4\vec{i} - 8\vec{j} - 7\vec{k}; \quad \alpha_d: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

$$-4(x - 2) - 8(y + 1) - 7(z + 1) = 0; \quad 4x + 8y + 7z + 7 = 0;$$

$$l_n: \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}; \quad \frac{x - 2}{-4} = \frac{y + 1}{-8} = \frac{z + 1}{-7};$$

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 1}{8} = \frac{z + 1}{7}; \quad l_n: \frac{x - 2}{4} = t; \quad \frac{y + 1}{8} = t; \quad \frac{z + 1}{7} = t;$$

$$x = 4t + 2; \quad y = 8t - 1; \quad z = 7t - 1.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

2.2.18. Екстремум функції двох змінних.

Необхідні умови екстремуму

Нехай функція двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ визначена в деякій області D і $M_0(x_0, y_0)$ – внутрішня точка цієї області. Точка M_0 називається **точкою максимуму** функції $z = f(M)$, якщо значення функції в цій точці M_0 більше, ніж значення функції у всіх близьких сусідніх точках:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon), M \neq M_0, f(M_0) > f(M) \Leftrightarrow M_0 - \max,$$

де $U(M_0, \varepsilon)$ – деякий ε -окіл точки M_0 , $\varepsilon > 0$.

Аналогічно вводиться поняття **точки мінімуму**:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon), M \neq M_0, f(M_0) < f(M) \Leftrightarrow M_0 - \min .$$

Точки максимуму та мінімуму називаються **точками екстремуму**. Значення функції $z = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ у точці екстремуму M_0 називається її **екстремальним значенням (екстремумом)**.

Зауваження 1. Розглянутий екстремум є **строгим внутрішнім локальним екстремумом**. Його не треба плутати з **глобальним екстремумом** у деякій заданій області D (найбільше $M = \max_{(x,y) \in D} f(x,y)$ та найменше $m = \min_{(x,y) \in D} f(x,y)$ значення функції в області D).

Зауваження 2. Розрізняють **гладкий екстремум** (рис. 48), в якому функція диференційовна, і **гострий екстремум**, в якому хоча б одна частинна похідна першого порядку не існує (рис. 49).

Теорема (необхідні умови гладкого екстремуму). Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 0; \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = 0. \end{cases}$$

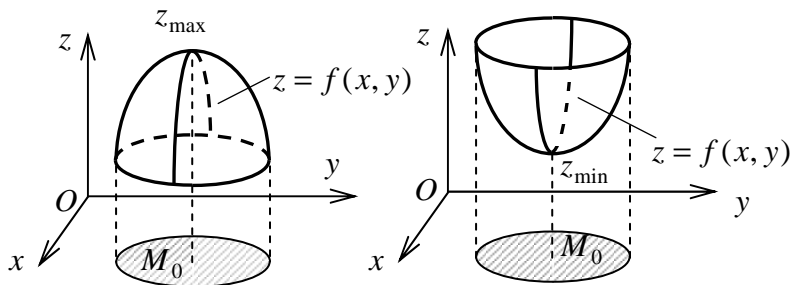


Рис. 48

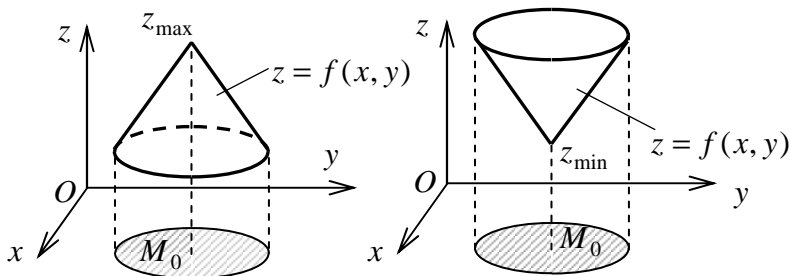


Рис. 50

□ Зафіксуємо змінну y , поклавши $y = y_0 = const$. Тоді точка x_0 є точкою екстремуму диференційовної функції однієї змінної $z = \varphi(x) = f(x, y_0)$. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної $d\varphi/dx|_{x=x_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по x функції $z = f(x, y)$:

$$d\varphi/dx|_{x=x_0} = \partial f/\partial x|_{M_0}. \text{ Отже, } \partial f/\partial x|_{M_0} = 0.$$

Аналогічно, якщо зафіксувати аргумент x , поклавши $x = x_0 = const$, то отримаємо диференційовну функцію однієї змінної $z = \psi(y) = f(x_0, y)$. Ця функція має екстремум при $y = y_0$. У точці екстремуму y_0 похідна одержаної функції теж дорівнює нулю: $d\psi/dy|_{y=y_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по y функції $z = f(x, y)$: $d\psi/dy|_{y=y_0} = \partial f/\partial y|_{M_0}$.

Отже, $\partial f/\partial y|_{M_0} = 0$. У точці екстремуму $M_0(x_0, y_0)$ обидві знайдені умови повинні виконуватись одночасно. ■

Зауваження 3. У точці гострого екстремуму хоча б одна з частинних похідних першого порядку не існує, а всі інші дорівнюють нулю (*необхідні умови гострого екстремуму*).

Точки, в яких виконуються необхідні умови екстремуму, тобто всі частинні похідні або дорівнюють нулю або не існують, нази-

ваються **критичними точками** функції $z = z(M)$.

Критичні точки, в яких всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються **стаціонарними точками** функції $z = z(M)$.

Зауваження 4. Стаціонарна точка – це точка, що “підозріла” на гладкий екстремум. Тобто у цій точці екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $z = (x^2 - y^2)/2$ (гіперболічний параболоїд на рис. 50) початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки

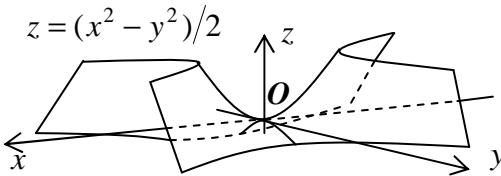


Рис. 50

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_O = x\Big|_O = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_O = -y\Big|_O = 0,$$

але екстремум у ній відсутній ($O(0,0)$ – **сідлова точка** функції $z = (x^2 - y^2)/2$).

Зауваження 5. Надалі обмежимося розглядом тільки гладкого екстремуму.

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції:

а) $u = x^3 + xy + 2yz - x + 5y + 4z - 3$; б) $z = (x - y - 2)e^{x^2 + y^2}$.

□ а) Для знаходження стаціонарних точок складаємо і розв’язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y - 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2z + 5 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2y + 4 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 & x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad z = -(5 + x)/2; \\ 3x^2 - 2 - 1 = 0 & z_1 = -(5 + 1)/2 = -3; \quad z_2 = -(5 - 1)/2 = -2; \\ x + 2z + 5 = 0 & M_1(1, -2, -3), \quad M_2(-1, -2, -2) \end{cases}$$

– стаціонарні точки.

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $M_0(1/2, -1/2)$ ■

2.2.19. Достатні умови екстремуму

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці:

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0}; \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0}; \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0}$$

і обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Теорема (достатні умови гладкого екстремуму). 1) Якщо визначник Δ додатний, то M_0 – точка екстремуму, причому

а) M_0 – точка мінімуму, якщо $A > 0$;

б) M_0 – точка максимуму, якщо $A < 0$.

2) Якщо визначник Δ від'ємний, то у точці M_0 екстремум відсутній (M_0 – сідлова точка функції $z = f(x, y)$).

3) Якщо визначник Δ дорівнює нулю, то у точці M_0 екстремум може бути, а може і не бути. (Сумнівний випадок. Потрібні додаткові дослідження.) (Без доведення).

Приклад 1. Дослідити функцію на екстремум:

а) $z = x^3 + y^3 - 6xy - 2$; б) $z = x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 28y + 1$.

□ а) Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\partial z / \partial x = 3x^2 - 6y; \quad \partial z / \partial y = 3y^2 - 6x.$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму, знаходимо ста-

ціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \partial z / \partial x = 0 \\ \partial z / \partial y = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = x^2/2; \\ (x^2/2)^2 - 2x = 0; \end{cases}$$

$$\frac{x^4}{4} - 2x = 0; \quad x^4 - 8x = 0; \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \begin{cases} y_1 = 0; \\ y_2 = 2^2/2 = 2. \end{cases}$$

Отже, стаціонарні точки $M_1(0,0)$; $M_2(2,2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\partial^2 z / \partial x^2 = 6x; \quad \partial^2 z / \partial y^2 = 6y; \quad \partial^2 z / \partial x \partial y = -6.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(0,0)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_1(0,0)$ і значення визначника Δ :

$$A = \partial^2 z / \partial x^2 \Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0; \quad C = \partial^2 z / \partial y^2 \Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0;$$

$$B = \partial^2 z / \partial x \partial y \Big|_{M_1} = -6; \quad \Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці M_1 екстремуму немає.

Дослідимо на екстремум точку $M_2(2,2)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_2(2,2)$ і значення визначника Δ :

$$A = \partial^2 z / \partial x^2 \Big|_{M_2} = 6 \cdot 2 = 12; \quad C = \partial^2 z / \partial y^2 \Big|_{M_2} = 6 \cdot 2 = 12;$$

$$B = \partial^2 z / \partial x \partial y \Big|_{M_2} = -6; \quad \Delta = AC - B^2 = 12 \cdot 12 - (-6)^2 = 108 > 0.$$

З нерівності $\Delta > 0$ випливає, що M_2 – точка екстремуму.

Оскільки $A = 12 > 0$, то M_2 – точка мінімуму. Знайдемо мінімальне значення функції у цій точці:

$$z_{\min} = z(M_2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = -10.$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $z_{\min} = z(-3,1) = -28$. ■

Приклад 2. Дослідити функцію на екстремум

а) $z = (x + 2y)^3/3 - x^2/2 - 3y^2 - 2xy - 2y + 2$; б) $z = xe^{-x-y^2}$.

□ а) Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\partial z/\partial x = (x + 2y)^2 - x - 2y; \quad \partial z/\partial y = 2(x + 2y)^2 - 6y - 2x - 2.$$

Для визначення стаціонарних точок прирівнюємо нулю ці похідні. Дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x + 2y)^2 - x - 2y = 0 \\ 2(x + 2y)^2 - 6y - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + 2y)((x + 2y) - 1) = 0 \\ (x + 2y)^2 - 3y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Ця система розпадається на сукупність двох систем:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ (x + 2y)^2 - 3y - x - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (x + 2y) - 1 = 0 \\ (x + 2y)^2 - 3y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Для першої системи:

$$\begin{aligned} x = -2y; \quad (-2y + 2y)^2 - 3y - (-2y) - 1 &= 0; \\ -y - 1 &= 0; \quad y = -1; \quad x = -2 \cdot (-1) = 2. \end{aligned}$$

Для другої системи:

$$\begin{aligned} x = -2y + 1; \quad (-2y + 1 + 2y)^2 - 3y - (-2y + 1) - 1 &= 0; \\ -y - 1 &= 0; \quad y = -1; \quad x = -2 \cdot (-1) + 1 = 3. \end{aligned}$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1(2, -1)$; $M_2(3, -1)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} \partial^2 z/\partial x^2 &= 2(x + 2y) - 1; \quad \partial^2 z/\partial y^2 = 4(x + 2y) - 6; \\ \partial^2 z/\partial x \partial y &= 4(x + 2y) - 2. \end{aligned}$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(2, -1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_1 і значення визначника Δ :

$$A = \partial^2 z/\partial x^2 \Big|_{M_1} = -1; \quad C = \partial^2 z/\partial y^2 \Big|_{M_1} = -6;$$

$$B = \partial^2 z / \partial x \partial y \Big|_{M_1} = -2; \quad \Delta = AC - B^2 = (-1) \cdot (-6) - (-2)^2 = 2 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$, то M_1 – точка екстремуму.

З нерівності $A = -1 < 0$ випливає, що M_1 – точка максимуму. Знайдемо максимальне значення функції у цій точці:

$$\begin{aligned} z_{\max} = z(M_1) &= (2 + 2 \cdot (-1))^3 / 3 - 2^2 / 2 - 3 \cdot (-1)^2 - \\ &\quad - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 2 = 3. \end{aligned}$$

Дослідимо на екстремум точку $M_2(3, -1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_2 і значення визначника Δ :

$$A = \partial^2 z / \partial x^2 \Big|_{M_2} = 1; \quad C = \partial^2 z / \partial y^2 \Big|_{M_2} = -2; \quad B = \partial^2 z / \partial x \partial y \Big|_{M_2} = 2;$$

$$\Delta = AC - B^2 = 1 \cdot (-2) - 2^2 = -2 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці M_2 екстремуму немає.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $z_{\max} = z(1, 0) = e^{-1}$. ■

2.2.20. Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна і диференційовна в замкненій області D . Тоді вона досягає найменшого (найбільшого) значення на множині D або в одній із стаціонарних точок, що належать цій області D , або в одній із точок межі області D .

Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z = f(x, y)$ у замкненій області D :

1) Побудувати область D в прямокутній системі координат Oxy . Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області D ;

2) Знайти стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$. Виділити з них ті, що лежать в області D . Обчислити значення функції у виділених точках;

3) Знайти значення функції в усіх кутових точках межі об-

ласті D ;

4) На кожній ділянці межі області D перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції $z = f(x, y)$ врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;

5) Порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед них найменше – глобальний мінімум $\min_{(x, y) \in D} z$ – і найбільше – глобальний максимум $\max_{(x, y) \in D} z$.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції в замкненій області D , що обмежена вказаними лініями:

а) $z = 3x^2 + y^2 - 4xy - x$; $D: x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$;

б) $z = x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 10y$; $D: x = 0$; $y = -2$; $y = -x$.

□ а) У декартовій системі координат Oxy побудуємо вказані лінії межі області $D: x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$ і позначимо штриховкою саму область D (рис. 51). Кутові точки визначаються як точки попарного перетину цих ліній:

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 2; \\ x + y + 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 1; \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

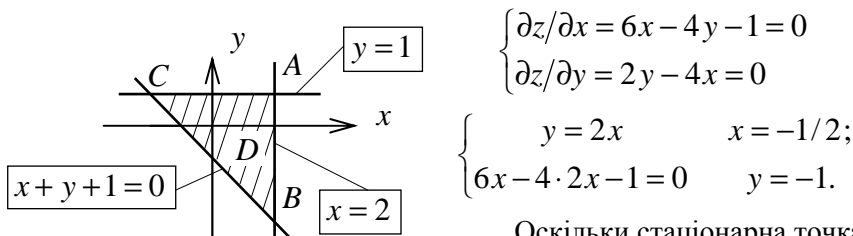


Рис. 51

$$\begin{cases} \partial z / \partial x = 6x - 4y - 1 = 0 \\ \partial z / \partial y = 2y - 4x = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2x & x = -1/2; \\ 6x - 4 \cdot 2x - 1 = 0 & y = -1. \end{cases}$$

Оскільки стаціонарна точка $M(-1/2; -1) \in D$, то обчислимо відповідне значення функції:

$$z|_M = 3(-1/2)^2 + (-1)^2 - 4(-1/2)(-1) - (-1/2) = 1/4.$$

Досліджуємо функцію на межі області D , яка складається з ділянок AB , BC , AC , що сполучаються в кутових точках $A(2;1)$, $B(2; -3)$, $C(-2; 1)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках:

$$z|_A = 3 \cdot 2^2 + 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 2 = 3; \quad z|_B = 3 \cdot 2^2 + (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) - 2 = 43; \quad z|_C = 3 \cdot (-2)^2 + 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - (-2) = 23.$$

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці. (Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції вже обчислені).

На відрізьку AB : $x = 2$, $y \in [-3, 1]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 3 \cdot 2^2 + y^2 - 4 \cdot 2 \cdot y - 2 = y^2 - 8y + 10;$$

$$z'_1 = 2y - 8; \quad z'_1 = 0; \quad 2y - 8 = 0; \quad y = 4 \notin [-3, 1].$$

На відрізьку BC : $y = -x - 1$, $x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 3x^2 + (-x-1)^2 - 4x(-x-1) - x = 8x^2 + 5x + 1;$$

$$z'_2 = 16x + 5; \quad z'_2 = 0; \quad 16x + 5 = 0; \quad x = -5/16 \in [-2, 2];$$

$$y = -(-5/16) - 1 = -11/16; \quad N(-5/16, -11/16);$$

$$z|_N = f_2(-5/16) = 8 \cdot (-5/16)^2 + 5 \cdot (-5/16) + 1 = -7/32.$$

На відрізьку AC : $y = 1$, $x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 3x^2 + 1^2 - 4x \cdot 1 - x = 3x^2 - 5x + 1;$$

$$z'_3 = 6x - 5; \quad z'_3 = 0; \quad 6x - 5 = 0; \quad x = 5/6 \in [-2, 2]; \quad y = 1;$$

$$P(5/6, 1); \quad z|_P = f_3(5/6) = 3 \cdot (5/6)^2 - 5 \cdot (5/6) + 1 = -13/12.$$

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції:

$$z|_M = \frac{1}{4}; \quad z|_A = 3; \quad z|_B = 43; \quad z|_C = 23; \quad z|_N = -7/32; \quad z|_P = -1\frac{1}{12}.$$

Отже, найменше та найбільше значення функції відповідно

$$\min_{(x,y) \in D} z = z|_{P(5/6, 1)} = -1\frac{1}{12}; \quad \max_{(x,y) \in D} z = z|_{B(2, -3)} = 43. \quad \blacksquare$$

б) (Розв'язати самостійно). \blacksquare

2.2.21. Умовний екстремум функції двох змінних

Розглянутий раніше локальний екстремум є *безумовним*, тобто не передбачає виконання ніяких додаткових умов чи обмежень.

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ двох змінних називається екстремум цієї функції, який досягається за додаткової умови, що змінні x, y зв'язані *рівнянням зв'язку* $\boxed{\varphi(x, y) = 0}$.

Зауваження 1. З геометричної точки зору у випадку безумовного екстремуму відшукується екстремум поверхні $z = f(x, y)$ у деякій області D , а у випадку умовного екстремуму він відшукується на заданій лінії $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 52). Умовний екстремум, якщо він існує, досягається на лінії перетину L заданої поверхні $z = f(x, y)$ з вертикальним циліндром $\varphi(x, y) = 0$, твірні якого паралельні осі Oz .

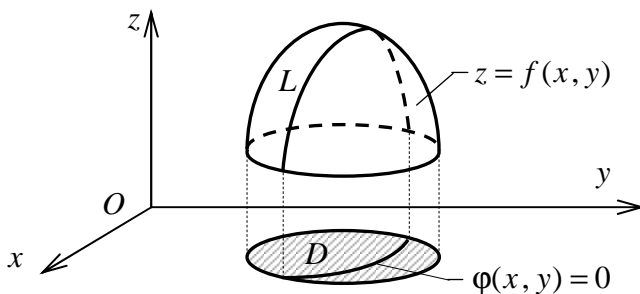


Рис. 52

Зауваження 2. Якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно однієї зі змінних, тобто подати, наприклад, у вигляді $y = \psi(x)$, тоді цю умову можна врахувати, безпосередньо зводячи функцію $z = f(x, y)$ двох змінних підстановкою $y = \psi(x)$

до функції однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$, яка далі досліджується на безумовний екстремум.

Згідно з **методом множників Лагранжа** задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний безумовний екстремум **функції Лагранжа**

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

де допоміжна змінна (параметр) λ називається **множником Лагранжа**.

Необхідні умови такого екстремуму задаються системою рівнянь

$$\begin{cases} \partial L / \partial x = \partial f / \partial x + \lambda \partial \varphi / \partial x = 0; \\ \partial L / \partial y = \partial f / \partial y + \lambda \partial \varphi / \partial y = 0; \\ \partial L / \partial \lambda = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи визначають стаціонарні точки функції Лагранжа. Якщо $P_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка, що “підозріла” на умовний екстремум функції $z = f(x, y)$.

Достатні умови умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку d^2L функції Лагранжа з урахуванням рівняння зв'язку. При визначенні знака d^2L диференціал допоміжної змінної $d\lambda$ не враховується, тобто вважається

$$d^2L(x, y, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2,$$

де диференціали dx і dy зв'язані залежністю $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$,

яка виражає рівність нулю повної похідної за x складеної функції $\varphi(x, y(x))$, що впливає з рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$.

Нехай $P_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$. Тоді: 1) якщо $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного мінімуму; 2) якщо $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, то

$M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного максимуму.

Приклад 1. Знайти екстремум функції

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \text{ за умови } 2x + y - 10 = 0.$$

□ Складаємо функцію Лагранжа:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1; \quad \varphi(x, y) = 2x + y - 10 = 0;$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = x^2 + y^2 + 1 + \lambda(2x + y - 10).$$

Згідно з необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \partial L / \partial x = 0 \\ \partial L / \partial y = 0 \\ \partial L / \partial \lambda = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 & x = -\lambda; \quad y = -\lambda/2; \\ 2y + \lambda = 0 & 2 \cdot (-\lambda) - \lambda/2 - 10 = 0; \\ 2x + y - 10 = 0 & \lambda = -4; \quad x = 4; \quad y = 2. \end{cases}$$

Отже, $P_0(4, 2, -4)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа;
 $M_0(4, 2)$ – точка можливого умовного екстремуму. При $\lambda = -4$
функція Лагранжа набуває вигляду

$$L(x, y, -4) = x^2 + y^2 + 1 - 4(2x + y - 10) = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 41.$$

Дослідимо точку $M_0(4, 2)$ на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму:

$$\partial^2 L / \partial x^2 \Big|_{M_0} = 2; \quad \partial^2 L / \partial x \partial y \Big|_{M_0} = 0; \quad \partial^2 L / \partial y^2 \Big|_{M_0} = 2.$$

З рівняння зв'язку $2x + y - 10 = 0$, розглядаючи y як функцію від x і знаходячи повну похідну по x від лівої та правої частин

$$\text{цього рівняння, дістаємо } 2 + \frac{dy}{dx} = 0; \quad dy = -2dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } d^2 L(x, y, -4) \Big|_{M_0} &= 2 \cdot dx^2 + 2 \cdot 0 \cdot dx dy + 2 \cdot dy^2 = \\ &= 2 dx^2 + 2(-2dx)^2 = 10 dx^2. \end{aligned}$$

Оскільки $d^2 L(x, y, -4) \Big|_{M_0} = 10 dx^2 > 0$, то $M_0(4, 2)$ – точка умовного мінімуму заданої функції.

Обчислимо відповідне їй мінімальне значення:

$$z_{\min} = z|_{M_0} = 4^2 + 2^2 + 1 = 21. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти екстремум функції $z = xy^2 - 2$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.

□ Складаємо функцію Лагранжа:

$$z = f(x, y) = xy^2 - 2; \quad \varphi(x, y) = x + 2y - 1 = 0;$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = xy^2 - 2 + \lambda(x + 2y - 1).$$

Стационарні точки функції Лагранжа знаходимо з необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial L / \partial x = 0 \\ \partial L / \partial y = 0 \\ \partial L / \partial \lambda = 0 \end{cases} \begin{cases} y^2 + \lambda = 0 \\ 2xy + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ xy - y^2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x - y) = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 1/3 \\ y_2 = 1/3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -0^2 = 0; \\ \lambda_2 = -(1/3)^2 = -1/9 \end{cases}.$$

Отже, $P_1(1, 0, 0)$ і $P_2(1/3, 1/3, -1/9)$ – стационарні точки функції Лагранжа. Відповідно $M_1(1, 0)$ і $M_2(1/3, 1/3)$ – точки можливого умовного екстремуму.

Знайдемо другі частинні похідні функції Лагранжа:

$$\partial^2 L / \partial x^2 = 0; \quad \partial^2 L / \partial x \partial y = 2y; \quad \partial^2 L / \partial y^2 = 2x.$$

Тоді другий диференціал функції Лагранжа

$$d^2 L(x, y, \lambda) = 0 dx^2 + 2 \cdot 2y dx dy + 2x dy^2 = 4y dx dy + 2x dy^2,$$

З рівняння зв'язку $x + 2y - 1 = 0$, розглядаючи y як функцію від x і знаходячи повну похідну по x від лівої та правої частин цього рівняння, маємо: $1 + 2 dy/dx = 0$; $dy = -dx/2$. Тоді

$$d^2L(x, y, \lambda) = 2y dx(-dx/2) + 2x(-dx/2)^2 = (1/2)(-2y + x) dx^2,$$

Дослідимо точку $M_1(1, 0)$, якій відповідає значення $\lambda = 0$ множника Лагранжа, на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму.

$$\text{Оскільки } d^2L(x, y, 0)\Big|_{M_1} = (1/2)(-2 \cdot 0 + 1) dx^2 = (1/2) dx^2 > 0,$$

то $M_1(1, 0)$ – точка умовного мінімуму заданої функції.

$$\text{Її відповідне мінімальне значення } z_{\min} = z\Big|_{M_1} = -2.$$

Дослідимо точку $M_2(1/3, 1/3)$, якій відповідає значення $\lambda = -1/9$ множника Лагранжа, на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму.

Оскільки

$$d^2L(x, y, -1/9)\Big|_{M_2} = (1/2)(-2 \cdot (1/3) + 1/3) dx^2 = -(1/6) dx^2 < 0,$$

то $M_2(1/3, 1/3)$ – точка умовного максимуму заданої функції.

$$\text{Її відповідне максимальне значення } z_{\max} = z\Big|_{M_2} = -1 \frac{26}{27}. \blacksquare$$

Зауваження 3. Часто характер умовного екстремуму зрозумілий з геометричного чи фізичного змісту задачі, тому немає потреби перевіряти досить складні достатні умови такого екстремуму.

2.2.22. Метод найменших квадратів

Нехай за результатами експериментальних досліджень треба визначити *модель* $y = F(x)$ залежності $y = f(x)$ змінної величини y (залежна змінна) від змінної величини x (незалежна змінна). Проведено n випробувань і одержано n пар відповідних значень (з

деякими похибками) цих змінних x і y :

x	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_1	y_2	\dots	y_n

З теоретичних міркувань чи за характером розташування на координатній площині Oxy експериментальних точок (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$ встановлюють вигляд функції $y = F(x)$ (вибір *структури*

моделі – *структурна ідентифікація*). Нехай розміщення експериментальних точок нагадує пряму (рис. 53). Тоді природно шукану залежність вважати лінійною функцією $y = F(x) = kx + b$.

При вибраному вигляді шуканої функції залишається знайти всі невідомі коефіцієнти (параметри) k , b так, щоб ця модель у деякому розумінні найкраще описувала розглядуваний процес (вбір значень *параметрів* моделі – *параметрична ідентифікація*).

Найпоширенішим способом оцінювання параметрів є *метод найменших квадратів (МНК)*.

Відхиленням (нев'язкою) s_i залежної змінної y , в точці x_i називають різницю $s_i = y_i - (kx_i + b)$ між експериментальним значенням y_i залежної змінної та її значенням $y_{mi} = kx_i + b$, обчисленим за вибраною моделлю. Сума квадратів всіх відхилень

$$s = \sum_{i=1}^n s_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2$$

є функцією параметрів моделі $s = s(k, b)$, оскільки x_i, y_i ($i = \overline{1, n}$) – відомі числа.

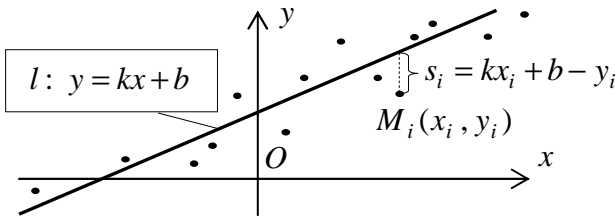


Рис. 53

Згідно з МНК значення параметрів моделі знаходяться з умови мінімуму суми квадратів невязок.

Можна показати, що квадратична функція $s = s(k, b)$ має єдиний мінімум (k_0, b_0) . Тому для його знаходження досить скористатися тільки необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \partial s / \partial k = 0; \\ \partial s / \partial b = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n x_i (kx_i + b - y_i) = 0; \\ 2 \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)k + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)k + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Остання система називається **нормальною системою** методу найменших квадратів. Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукані **оптимальні значення** (k_0, b_0) параметрів моделі.

Формула $y = k_0 x + b_0$ зі знайденими оптимальними значеннями параметрів служить **рівнянням регресії**. Лінію, що визначається цим рівнянням, називають **лінією регресії**.

Зауваження. При формуванні критерію $s = s(k, b)$ якості моделі за методом найменших квадратів припускається, що похибками значень незалежної змінної можна знехтувати.

Приклад. Користуючись методом найменших квадратів, знайти оптимальні значення параметрів k_0 і b_0 лінійної регресії $y = k_0 x + b_0$ за даними результатами n вимірювань

$n = 7.$

x	-5	-3	-2	1	2	3	6
y	-6,3	-3,5	-1,1	5,8	6,3	8,1	14,2

Вказівка. Обчислення проводити з точністю до двох десяткових знаків після коми.

□ Для складання нормальної системи методу МНК попередньо обчислимо її коефіцієнти та праві частини:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 2; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 88; \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = 172,1; \quad \sum_{i=1}^n y_i = 23,5.$$

$$\text{Нормальна система має вигляд} \quad \begin{cases} 88k + 2b = 172,1; \\ 2k + 7b = 23,5. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 88 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 612; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 172,1 & 2 \\ 23,5 & 7 \end{vmatrix} = 1157,7; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 88 & 172,1 \\ 2 & 23,5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1523,8; \quad k_0 = \Delta_1 / \Delta = 1,89; \quad b_0 = \Delta_2 / \Delta = 2,49.$$

Отже, шукане рівняння регресії $y = 1,89x + 2,49$. ■

2.3. Кратні інтеграли

2.3.1. Задача про об'єм циліндричного тіла. Подвійний інтеграл і його властивості

Нехай V – деяка замкнена обмежена просторова область (просторове тіло), а плоска область D_{xy} – її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 54). Область V називається **правильною (стандартною) в напрямі осі Oz** , якщо виконуються наступні умови: 1) межа L проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих; 2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній **поверхні входу** σ_1 і дальній **поверхні виходу** σ_2 ; 3) рівняння кожної з поверхонь σ_1 і σ_2 задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z , причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} і $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$.

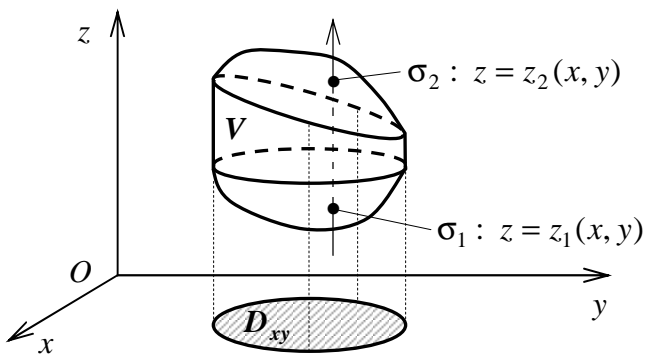


Рис. 54

Така просторова область V має вигляд вертикального циліндричного тіла, що обмежене знизу поверхнею входу $\sigma_1 : z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею виходу $\sigma_2 : z = z_2(x, y)$, а з боків – вертикаль-

ною циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz , а напрямною служить межа L області D_{xy} , в яку проектується це тіло на координатну площину Oxy . Це вертикальне циліндричне тіло V як множину точок можна подати у вигляді

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}, V \xrightarrow{Oz} D_{xy} \right\}.$$

Аналогічно вводиться означення просторової області V , що **правильна (стандартна) в напрямі осі Ox чи Oy** , відповідно

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in D_{yz}, V \xrightarrow{Ox} D_{yz} \right\}$$

і

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z), (x, z) \in D_{xz}, V \xrightarrow{Oy} D_{xz} \right\}.$$

Область V може бути одночасно правильною в напрямі різних осей координат. Якщо просторова область V правильна в напрямі кожної з координатних осей Ox , Oy і Oz , то вона називається просто **правильною (стандартною)**. Прикладами такої області служать куля і прямокутний паралелепіпед, всі ребра якого паралельні осям координат.

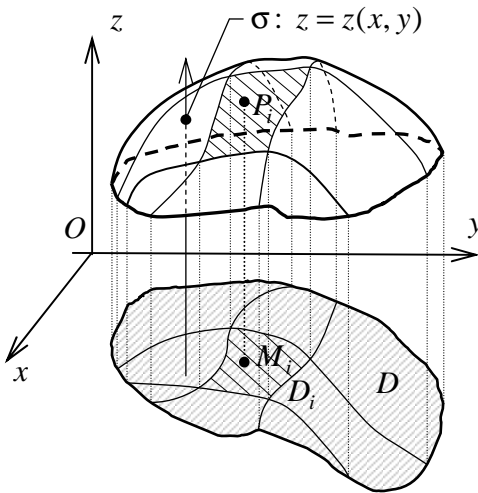


Рис. 55

V такого циліндричного тіла.

Зауваження 1. Якщо область V – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують координатні чи їм паралельні площини.

Розглянемо окремий випадок правильної в напрямі осі Oz області V , яка обмежена знизу координатною площиною Oxy (тобто, спирається на свою проекцію D), а зверху – поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$ (рис. 55). Знайдемо об'єм

Для цього розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні частини D_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо площу майданчика D_i через ΔS_i , а його діаметр (довжину найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області D_i) – через d_i , $i = \overline{1, n}$. Через межу кожної елементарної області D_i проведемо циліндричну поверхню з паралельними осі Oz твірними. Тоді тіло V розіб'ється на n циліндричних стовпчиків з основами D_i ($i = \overline{1, n}$), що обмежені зверху шматками поверхні $z = f(x, y)$ (на рис. 55 один з них виділений).

Візьмемо на кожному майданчику D_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і замінимо кожний стовпчик прямим циліндром з тією ж основою D_i і висотою $P_i M_i = z_i = f(x_i, y_i)$. Тоді для об'єму ΔV_i циліндричного стовпчика маємо $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Об'єм тіла V можна наближено подати так: $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ називається *інтегральною сумою функції $f(x, y)$ по області D* .

Одержана рівність тим точніша, чим менші розміри елементарних областей D_i і, відповідно, більша їх кількість n . Природно границю інтегральної суми при умові, що кожний майданчик D_i стягується в точку ($\max d_i \rightarrow 0$) і, відповідно, їх число n необмежено збільшується ($n \rightarrow \infty$), прийняти за об'єм V циліндричного тіла: $V = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття області D , якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні майданчики D_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i)$ на них, називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D і позначається $\iint_D f(x, y) dS$ або

$$\iint_D f(M) dS.$$

Отже, за означенням

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i},$$

де x і y – змінні інтегрування; $f(x, y)$ – підінтегральна функція; dS – елемент (диференціал) площі; $f(x, y) dS$ – підінтегральний вираз; D – область інтегрування.

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x, y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D , верхньою – частина поверхні $z = f(x, y) \geq 0$, що проектується в D , а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz , і напрямною L – межею області D : $V = \iint_D f(x, y) dS$.

Фізичний зміст: якщо матеріальна пластина лежить у координатній площині Oxy і має форму замкненої області D , в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x, y)$, то маса m пластини обчислюється за формулою $m = \iint_D \mu(x, y) dS$.

Зауваження 2. Процес побудови подвійного інтеграла по двовимірній області D аналогічний процедурі синтезу визначеного інтеграла функції однієї змінної по одновимірній області $[a; b]$. Спочатку область інтегрування довільним чином розбивається на частини, в кожній з яких береться довільна точка і в ній знаходиться значення функції. Потім знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області. У випадку однієї змінної такою мірою служить довжина Δx_i частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, а у випадку двох змінних – площа ΔS_i елементарного майданчика D_i . Наступні кроки знову однакові: утворюються інтегральні суми і знаходяться їхні границі, коли міра частин області інтегрування прямує до нуля. Тому умови існування та основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям звичайного визначеного інтеграла. Наведемо найважливіші з них.

Теорема (достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , то вона інтегровна в цій області.

Властивості подвійного інтеграла:

1) Сталій множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\boxed{\iint_D C f(x, y) dS = C \iint_D f(x, y) dS}, \text{ де } C = \text{const}.$$

2) Подвійний інтеграл від скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же сумі подвійних інтегралів від кожного доданка окремо:

$$\boxed{\iint_D (f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)) dS =}$$

$$\boxed{= \iint_D f(x, y) dS + \iint_D g(x, y) dS - \iint_D h(x, y) dS}.$$

3) Якщо функція $f(x, y) \geq 0$ в області D , то $\boxed{\iint_D f(x, y) dS \geq 0}$.

4) Якщо дві функції в області D задовольняють нерівності $f(x, y) \geq g(x, y)$, то $\boxed{\iint_D f(x, y) dS \geq \iint_D g(x, y) dS}$.

5) **(Адитивність).** Якщо область інтегрування D функції $f(x, y)$ розбити на дві частини D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то $\boxed{\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS}$.

6) **(Оцінка подвійного інтеграла).** Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D площею S , то

$$\boxed{m S \leq \iint_D f(x, y) dS \leq M S},$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D .

7) Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій облас-

ті D з площею S . Величина $\mu = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dS$ називається *середнім значенням* функції $f(x, y)$ в області D . Теорема (про середнє значення функції). В області D існує хоча б одна точка $P(\bar{x}, \bar{y})$, в якій середнє значення функції досягається:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \mu = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dS.$$

Зауваження 3. Надалі будемо розглядати лише функції, які неперервні в області інтегрування, що гарантує існування подвійного інтеграла. (Хоча подвійний інтеграл може існувати не тільки для неперервних функцій).

2.3.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній системі координат

Безпосереднє знаходження подвійного інтеграла як границі інтегральної суми пов'язане зі значними труднощами. Набагато простіше перейти до обчислення так званого двократного повторного інтеграла – послідовного знаходження двох звичайних визначених інтегралів.

Зауваження 1. Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в декартовій прямокутній системі координат Oxy зручно розбивати область D координатною сіткою, утвореною прямими, які паралельні осям Ox і Oy (рис. 56). Тоді внутрішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i , Δy_i і його площа $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $dS = dx dy$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

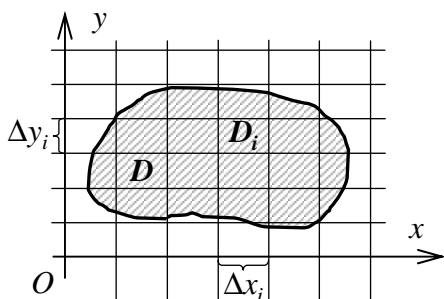


Рис. 56

решішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i , Δy_i і його площа $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $dS = dx dy$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Нехай функція $f(x, y)$ невід'ємна в обмеженій замкненій області D . Тоді подвійний інтеграл $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ виражає об'єм V вертикального циліндричного тіла (рис. 57) з нижньою основою D , що обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$.

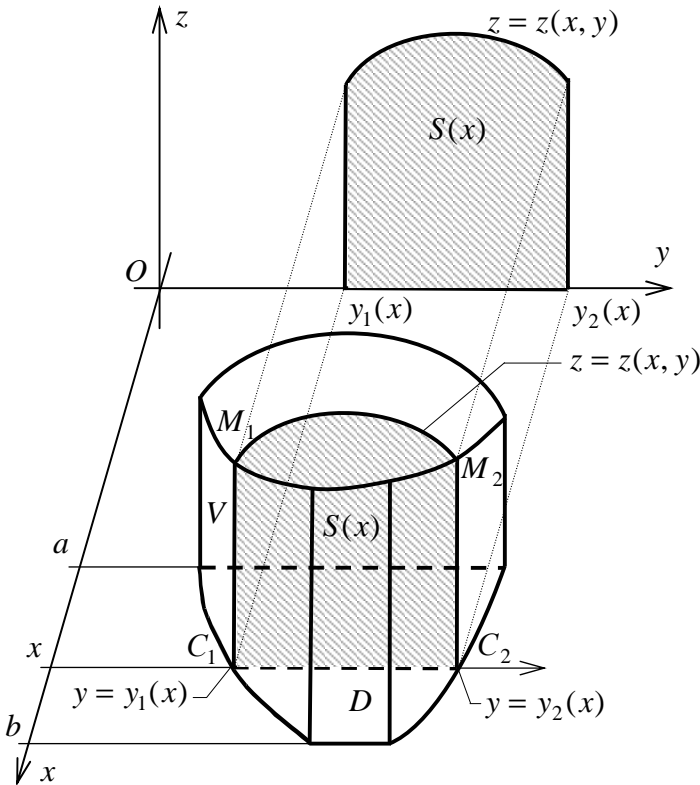


Рис. 57

Обчислимо об'єм V по-іншому – методом паралельних перерізів. Припустимо, що область D – правильна в напрямі осі Oy (рис. 58) і може бути подана у вигляді

$$D : \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), x \in [a; b], D \xrightarrow{Oy} [a; b]\}.$$

Тоді проекцією тіла на вісь Ox є відрізок $[a; b]$. Об'єм V можна знайти так: $V = \int_a^b S(x) dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною $x = C = const$, перпендикулярною до осі Ox , а $x = a$ і $x = b$ – рівняння крайніх площин, між якими лежить дане тіло.

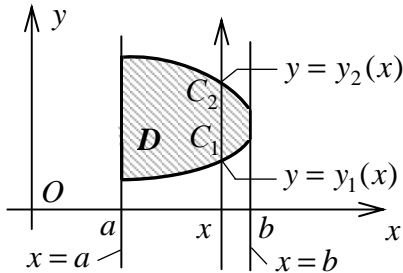


Рис. 58

При перетині циліндричного тіла площиною $x = C$, де $C = const$ утворюється криволінійна трапеція $C_1M_1M_2C_2$ (рис. 57). Апліката $z = f(x, y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише однієї змінної y , причому аргумент y змінюється в межах від $y_{ex} = y_1(x)$ до $y_{eux} = y_2(x)$.

Площа $S(x)$ фігури $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x) = \int_{y_{ex}}^{y_{eux}} z dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad \text{Тоді } V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Порівнюючи два вирази для об'єму V , одержуємо формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла – послідовного обчислення двох звичайних одновимірних інтегралів. Це співвідношення звичайно записують у спрощеній формі

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.}$$

Зауваження 2. Одержана з геометричних міркувань формула залишається справедливою в загальному випадку інтегрованої функції $f(x, y)$. (Строге доведення опускаємо).

Зауваження 3. Спочатку обчислюється **внутрішній інтеграл**

$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ за **внутрішньою змінною** y в припущенні, що **зовнішня змінна** x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x .

Зауваження 4. Зовнішні межі інтегрування a і b – завжди сталі. Обчислюючи **зовнішній інтеграл** $\int_a^b S(x) dx$, дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

Зауваження 5. Внутрішні межі інтегрування $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями зовнішньої змінної x . В окремих випадках вони також можуть бути сталими. Наприклад, коли область інтегрування D – прямокутник зі сторонами $x = a$, $x = b$, $y = c$ і $y = d$, що паралельні осям координат, то всі межі інтегрування є сталими і подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Правило знаходження меж інтегрування для правильної в напрямі осі Oy області D :

1) Область D спроектувати паралельно осі Oy на вісь Ox і одержати відрізок $[a; b]$, $a \leq x \leq b$. Числа a і b – відповідно нижня і верхня межі y зовнішньому інтегралі за x . Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D , які лежать на вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$, що обмежують цю область.

2) Провести через будь-яку внутрішню точку x відрізка $[a; b]$ пробну пряму, паралельну осі Oy і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2 . Щоб визначити внутрішні межі інтегрування за y – ординати вказаних точок, необхідно розв'язати рівняння лінії входу і лінії виходу відносно y : $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що на відрізку $[a; b]$ обмежені і зберігають аналітичний вираз, – відповідно нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за y .

Зауваження 6. Якщо область D – правильна в напрямі осі Ox

(рис. 59) і може бути подана у вигляді

$$D : \left\{ (x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), y \in [c; d], D \xrightarrow{Ox} [c; d] \right\},$$

то справедлива формула (змінні x і y міняються ролями)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

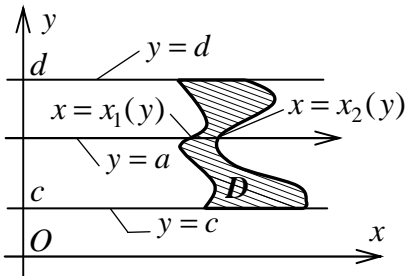


Рис. 59

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x . Обчислюючи його в межах від $x_1(y)$ до $x_2(y)$ (при цьому зовнішня змінна y вважається сталою), дістаємо деяку функцію $S(y)$ від однієї змінної y . Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d , одержуємо значення I подвійного інтеграла.

Зауваження 7. Якщо область D правильна в напрямках обох осей Ox і Oy , то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. Зрозуміло, що результати при цьому однакові, тобто *значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається **зміною порядку інтегрування**.

Зауваження 8. У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 9. Якщо область D не є правильною в напрямі жодної з осей Ox чи Oy , то її необхідно розбити на частини без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є правильною в напрямі

Ox чи Oy . Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних частинних областях і додаючи результати, знайдемо шуканий подвійний інтеграл по всій області D . Звичайно, для розбиття використовуються лінії, що належать координатній сітці. Зокрема, у випадку прямокутних координат поділ області D на правильні частини здійснюють прямими, які паралельні осям Ox і Oy .

Приклад 1. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ вказано підінтегральну функцію $f(x, y)$ і область інтегрування D , яка задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

- 1) Зобразити область інтегрування D .
- 2) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Oy , при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x і внутрішнім інтегруванням по y .
- 3) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Ox , при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по y і внутрішнім інтегруванням по x .

$$f(x, y) = xy; \quad D: 2x^2 - y - 2 = 0; 2(x+1)^2 + y - 8 = 0.$$

□ 1) Межа області D утворена двома вертикальними параболами. Перша з них $y = 2x^2 - 2$ має вершину, спрямовану вниз, у точці $(0; -2)$, а її вісь співпадає з віссю Oy . Друга парабола $y = 8 - 2(x+1)^2$ має вершину, спрямовану вверх, у точці $(-1; 8)$, а її вісь паралельна осі Oy . Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} 2x^2 - y - 2 = 0; & y = 2x^2 - 2; & x_1 = -2; x_2 = 1; \\ 2(x+1)^2 + y - 8 = 0; & 2(x+1)^2 + 2x^2 - 2 - 8 = 0; & y_1 = 6; y_2 = 0; \end{cases}$$

$$A(-2; 6); B(1; 0).$$

Область D зображена штриховкою на рис. 60.

2) Спроекуємо область D паралельно осі Oy на вісь Ox і одержимо відрізок $[-2;1]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – правильна у напрямі осі Oy . Відповідне подання відтворено на рис. 61. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_{-2}^1 dx \int_{2x^2-2}^{8-2(x+1)^2} xy \, dy = \int_{-2}^1 x \, dx \int_{2x^2-2}^{8-2(x+1)^2} xy \, dy = \\ &= \int_{-2}^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{2x^2-2}^{8-2(x+1)^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 x \left((8-2(x+1)^2)^2 - (2x^2 - \right. \\ &- 2)^2 \Big) dx = \int_{-2}^1 (8x^4 - 24x^2 + 16x) \, dx = \left(\frac{8}{5}x^5 - 8x^3 + 8x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= -216/5. \end{aligned}$$

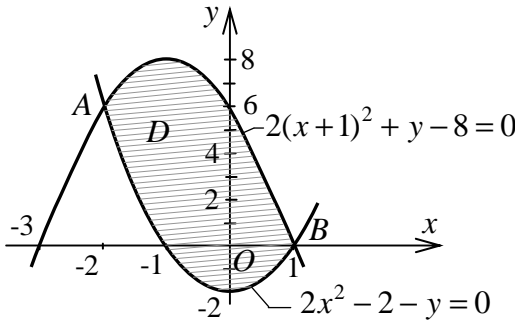


Рис. 60

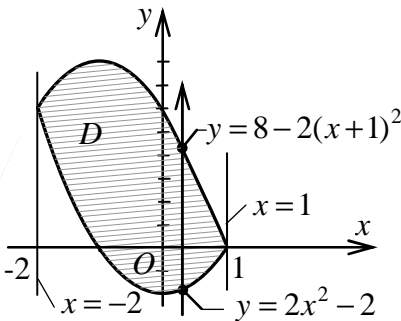


Рис. 61

3) Спроекуємо область D паралельно осі Ox на вісь Oy і одержимо відрізок $[-2;8]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – неправильна у напрямі осі Ox . Прямі $y=0$ і $y=6$ розбивають цю область на три правильні у на-

прямі осі Ox частини D_1 , D_2 і D_3 . Відповідне подання зображено на рис. 62. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

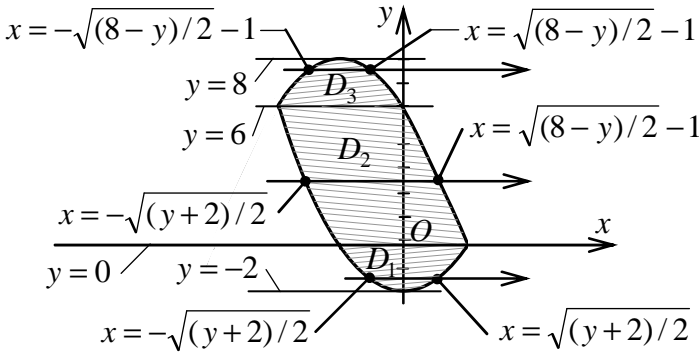


Рис. 62

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dx \, dy &= \iint_{D_1} xy \, dx \, dy + \iint_{D_2} xy \, dx \, dy + \iint_{D_3} xy \, dx \, dy = \\
 &= \int_{-2}^0 dy \int_{-\sqrt{(y+2)}/2}^{\sqrt{(y+2)}/2} xy \, dx + \int_0^6 dy \int_{-\sqrt{(y+2)}/2}^{\sqrt{(8-y)}/2-1} xy \, dx + \int_6^8 dy \int_{-\sqrt{(8-y)}/2-1}^{\sqrt{(8-y)}/2-1} xy \, dx = \\
 &= \int_{-2}^0 y \, dy \int_{-\sqrt{(y+2)}/2}^{\sqrt{(y+2)}/2} x \, dx + \int_0^6 y \, dy \int_{-\sqrt{(y+2)}/2}^{\sqrt{(8-y)}/2-1} x \, dx + \int_6^8 y \, dy \int_{-\sqrt{(8-y)}/2-1}^{\sqrt{(8-y)}/2-1} x \, dx = \\
 &= \int_{-2}^0 y \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_{-\sqrt{(y+2)}/2}^{\sqrt{(y+2)}/2} \right) dy + \int_0^6 y \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_{-\sqrt{(y+2)}/2}^{\sqrt{(8-y)}/2-1} \right) dy + \\
 &+ \int_6^8 y \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_{-\sqrt{(8-y)}/2-1}^{\sqrt{(8-y)}/2-1} \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 y \left(\frac{y+2}{2} - \frac{y+2}{2} \right) dy + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^6 y \left(\left(\sqrt{(8-y)}/2 - 1 \right)^2 - \frac{y+2}{2} \right) dy + \frac{1}{2} \int_6^8 y \left(\left(\sqrt{(8-y)}/2 - 1 \right)^2 - \right. \\
 &\left. - \left(-\sqrt{(8-y)}/2 - 1 \right)^2 \right) dy = 0 + \frac{1}{2} \int_0^6 \left(4y - y^2 - y\sqrt{2(8-y)} \right) dy -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{2} \int_6^8 y \sqrt{8-y} dy = \left| \begin{array}{l} 8-y = u^2; y = 8-u^2; dy = -2udu; \\ u = \sqrt{8-y}; u_1 = \sqrt{2}; u_2 = 0 \end{array} \right| = \\
& = 2 \int_0^6 y dy - \frac{1}{2} \int_0^6 y^2 dy - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^6 y \sqrt{8-y} dy - \sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^0 (8-u^2) u (-2u) du = \\
& = \left| \begin{array}{l} 8-y = t^2; y = 8-t^2; dy = -2tdt; \\ t = \sqrt{8-y}; t_1 = 2\sqrt{2}; t_2 = \sqrt{2} \end{array} \right| = y^2 \Big|_0^6 - \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} \Big|_0^6 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (8-t^2) t (-2t) dt + 2\sqrt{2} \int_{\sqrt{2}}^0 (8u^2 - u^4) du = 36 - 36 + \sqrt{2} \int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (8t^2 - t^4) dt + \\
& + 2\sqrt{2} (8u^3/3 - u^5/5) \Big|_{\sqrt{2}}^0 = \sqrt{2} (8t^3/3 - t^5/5) \Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} (16\sqrt{2}/3 - 4\sqrt{2}/5) = \sqrt{2} (16\sqrt{2}/3 - 4\sqrt{2}/5 - 128\sqrt{2}/3 + 128\sqrt{2}/5) - \\
& - 64/3 + 16/5 = -216/5. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Приклад 2. У заданих повторних інтегралах змінити порядок інтегрування:

$$\text{а) } I = \int_0^1 dx \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^e dx \int_{-1}^{-\ln x} f(x, y) dy;$$

$$\text{б) } I = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\arcsin(y/2)} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_{\sqrt{2}}^{\arccos(y/2)} f(x, y) dx.$$

□ а) Використовуючи зазначені межі інтегрування, для кожного з двох повторних інтегралів-доданків запишемо рівняння ліній, що обмежують відповідні області D_1 і D_2 , та зобразимо їх в одній системі координат Oxy (рис. 63):

$$D_1: x = 0; x = 1; y = -1; y = -\sqrt{1-x^2};$$

$$D_2: x = 1; x = e; y = -1; y = -\ln x.$$

З рис. 63 видно, що D_1 і D_2 можна об'єднати в одну область

$D = D_1 \cup D_2$. У зазначених повторних інтегралах області D_1 і D_2 розглядаються як правильні в напрямі осі Oy . Для зміни порядку інтегрування об'єднану область D треба подати як правильну в напрямі осі Ox , при необхідності розбиваючи на правильні у вибраному напрямі частини. У даному випадку область D – правильна в напрямі осі Ox : D : $y = -1$; $y = 1$; $y = 0$; $x = \sqrt{1 - y^2}$; $x = e^{-y}$. Відповідне зображення відтворено на рис. 64. Тоді

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{e^{-y}} f(x, y) dx.$$

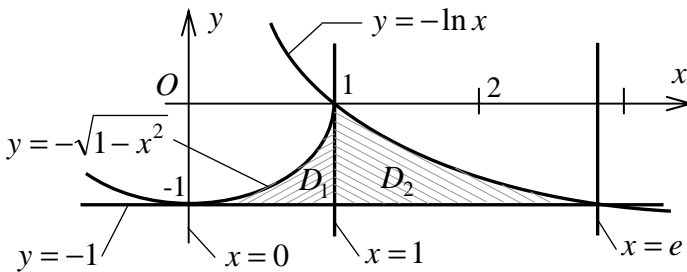


Рис. 63

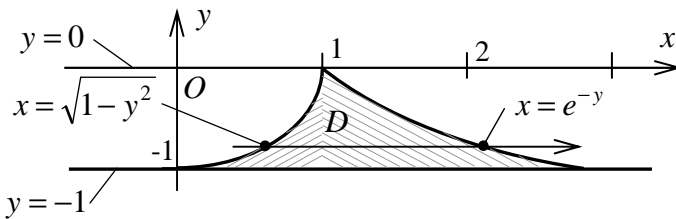


Рис. 64

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$I = \int_0^{\pi/4} dx \int_{2\sin x}^{2\cos x} f(x, y) dy. \quad \blacksquare$$

2.3.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярній системі координат

Нехай формули $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x, y)$ області D координатної площини Oxy і точками $M^*(u; v)$ деякої області D^* іншої координатної площини Ouv .

Теорема. Нехай **перетворення** $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, яке переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* , є взаємно однозначним, при цьому функції $x(u, v)$, $y(u, v)$ мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \end{vmatrix} \neq 0,$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в області D . Тоді справджується **формула заміни змінних у подвійному інтегралі**

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

(Без доведення).

Функціональний визначник $J(u, v)$ називається **визначником Якобі (якобіаном)**. Модуль якобіана визначає коефіцієнт зміни нескінченно малої площі при відповідному перетворенні координат.

Правило. Виконуючи заміну змінних у подвійному інтегралі, треба елемент площі $dS = dx dy$ в старих координатах x, y замінити елементом площі $dS^* = |J(u, v)| du dv$ у нових координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^* .

На практиці часто застосовують перехід до полярних координат. Прямокутні x, y і полярні ρ, φ координати зв'язані співвідношеннями: $x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi$ ($0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$).

У цьому випадку якобіан $J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$ і

тому елемент площі $dS^* = \rho d\rho d\varphi$. **Формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі** набуває вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

де область D задана у декартовій системі координат Oxy , а D^* – відповідна їй область у полярній системі координат $Or\varphi$.

Зауваження 1. Диференціал $dS^* = \rho d\rho d\varphi$ визначає лінійну частину площі нескінченно малого внутрішнього елементарного майданчика, на які область D розбивається координатною сіткою полярної системи, утвореною променями $\varphi = const$, що виходять з полюса, і концентричними колами $\rho = const$ з центром у полюсі.

Зауваження 2. Перехід до полярних координат доцільно застосовувати тоді, коли: 1) область інтегрування D задана у полярній системі; 2) область інтегрування D – круг або його частина (сектор, сегмент, кільце і т.п.), оскільки при цьому рівняння межі області містять суму $x^2 + y^2 = \rho^2$; 3) сама підінтегральна функція містить цей вираз $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Припустимо, що область D – правильна в напрямі координатних променів $\varphi = C$ ($C = const$) (рис. 65 і рис. 66 відображають випадок, коли полюс O не лежить у області D) і може бути подана у вигляді $D: \{(\rho, \varphi) \mid \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta], \alpha < \beta\}$.

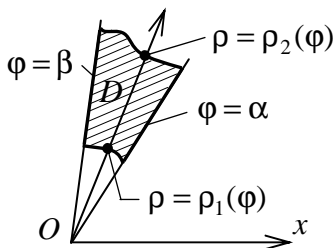


Рис. 65

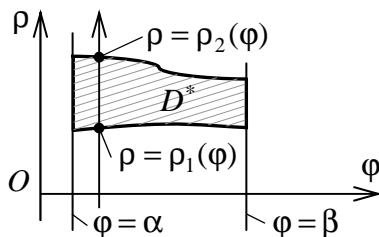


Рис. 66

Тоді справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла. Тут внутрішнім є інтеграл за змінною ρ . Обчислюючи його в межах від $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$, вважаючи зовнішню змінну φ сталою, дістаємо деяку функцію $S(\varphi)$ від однієї змінної φ . Інтегруючи потім цю функцію в межах від α до β , одержуємо значення подвійного інтеграла.

Зауваження 3. У випадку, коли полюс O лежить на межі чи всередині області D лінія входу вироджується в точку – полюс O : $\rho_1(\varphi) = 0$. Величина $\Delta\varphi = \beta - \alpha$ лежить у межах $0 \leq \Delta\varphi \leq 2\pi$. Коли $\Delta\varphi = 2\pi$, то звичайно покладають $\alpha = 0$ і $\beta = 2\pi$.

Зауваження 4. На практиці перехід до полярних координат здійснюється заміною $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ у підінтегральному виразі та відповідним перетворенням рівнянь ліній, що обмежують область інтегрування D . Перетворення області D в область D^* не виконують, а сумістивши декартову і полярну системи, знаходять межі інтегрування по ρ і φ , досліджуючи зміну ρ і φ точки $(\rho; \varphi)$ при її ототожненні з точкою $(x; y)$ області D .

Приклад 1. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$, де область D обмежена лініями

$$y = \sqrt{4 - x^2} + 2; \quad y = 2.$$

□ Перейдемо в підінтегральній функції та в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)^2 = 1/(\rho^2)^2 = 1/\rho^4; \quad y = \sqrt{4 - x^2} + 2;$$

$$\rho \sin \varphi = \sqrt{4 - \rho^2 \cos^2 \varphi} + 2; \quad \rho^2 \sin^2 \varphi - 4\rho \sin \varphi + 4 = 4 - \rho^2 \cos^2 \varphi;$$

$$\rho = 4 \sin \varphi - \text{коло з центром } (0; 2) \text{ і радіусом } r = 2;$$

$$y = 2; \quad \rho \sin \varphi = 2; \quad \rho = 2/\sin \varphi - \text{горизонтальна пряма.}$$

Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} \rho = 4 \sin \varphi; & 4 \sin \varphi = 2 / \sin \varphi; & \varphi_1 = \pi/4; & \varphi_2 = 3\pi/4; \\ \rho = 2 / \sin \varphi; & \sin \varphi = \pm \sqrt{2}/2; & \rho_1 = 2\sqrt{2}; & \rho_2 = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

На рис. 67 область D подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$. Тоді

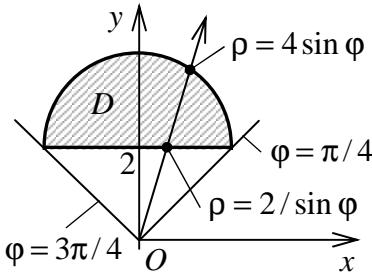


Рис. 67

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{2/\sin \varphi}^{4 \sin \varphi} \frac{\rho d\rho}{\rho^4} = \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(-(\rho^{-2}/2) \Big|_{2/\sin \varphi}^{4 \sin \varphi} \right) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{32} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{1}{8} \times \\ &\quad \times \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{32} \cdot \operatorname{ctg} \varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{16} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cdot \varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} - \frac{1}{32} \cdot \sin 2\varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \\ &= -1/16 + \pi/32 + 1/16 = \pi/32. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 2. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $I = \iint_D \frac{x^2 y^8 dx dy}{(x^2 + y^2)^5}$, де область D обмежена лінією

$$y^6 = 36(y^4 - x^4), \quad y \geq 0.$$

□ Перейдемо в підінтегральній функції та в рівнянні вказаної лінії до полярних координат:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 y^8 / (x^2 + y^2)^5 = \rho^2 \cos^2 \varphi \rho^8 \sin^8 \varphi / (\rho^2)^5 =; \\ &= \cos^2 \varphi \sin^8 \varphi; \quad y^6 = 36(y^4 - x^4); \quad \rho^6 \sin^6 \varphi = 36(\rho^4 \sin^4 \varphi - \\ &\quad - \rho^4 \cos^4 \varphi); \quad \rho^2 \sin^6 \varphi = 36(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi); \end{aligned}$$

$$\rho = 6\sqrt{-\cos 2\varphi} / |\sin^3 \varphi|; \quad y \geq 0; \quad \rho \sin \varphi \geq 0;$$

$$2\pi n \leq \varphi \leq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Знайдемо область визначення даної кривої $\rho = \rho(\varphi)$, розглядаючи тільки головні значення полярних координат $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\cos 2\varphi \geq 0; \\ 2\pi n \leq \varphi \leq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 0 \leq \varphi < 2\pi; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \pi/4 + \pi k \leq \varphi \leq 3\pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ 2\pi n \leq \varphi \leq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 0 \leq \varphi < 2\pi; \end{array} \right.$$

$$\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4.$$

Отже, полярне рівняння зазначеної лінії

$$\rho = 6\sqrt{-\cos 2\varphi}/\sin^3 \varphi, \quad \pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4.$$

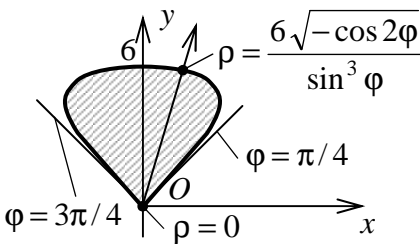


Рис. 68

На рис. 68 область D , обмежена цією кривою, подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = \text{const}$. Тоді

$$I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{6\sqrt{-\cos 2\varphi}/\sin^3 \varphi} \cos^2 \varphi \times$$

$$\times \sin^8 \varphi \rho d\rho =$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2 \varphi \sin^8 \varphi d\varphi \int_0^{6\sqrt{-\cos 2\varphi}/\sin^3 \varphi} \rho d\rho = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2 \varphi \sin^8 \varphi \times$$

$$\times \left((\rho^2/2) \Big|_0^{6\sqrt{-\cos 2\varphi}/\sin^3 \varphi} \right) d\varphi = -18 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= -(9/2) \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi d\varphi = \left| u = \sin 2\varphi; du = 2 \cos 2\varphi d\varphi; \right.$$

$$u_1 = \sin(\pi/2) = 1; u_1 = \sin(3\pi/2) = -1 \Big| = -(9/4) \int_1^{-1} u^2 du =$$

$$= -(3/4) \cdot u^3 \Big|_1^{-1} = 3/2. \quad \blacksquare$$

2.3.4. Геометричні застосування подвійного інтеграла

Площа плоскої фігури. Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x, y) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D :

$$S = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

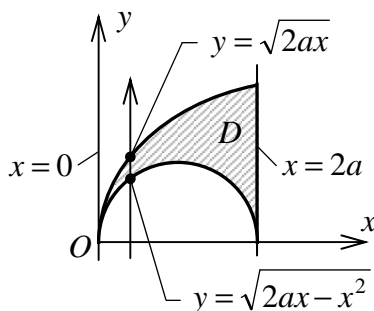


Рис. 69

Приклад 1. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D , що обмежена півколом $y = \sqrt{2ax - x^2}$, дугою параболи $y = \sqrt{2ax}$ і прямою $x = 2a$ ($a > 0$).

□ На рис. 69 область D подана як правильна в напрямі осі Oy .
Тоді

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} dy = \int_0^{2a} (\sqrt{2ax} - \sqrt{2ax-x^2}) dx = \int_0^{2a} \sqrt{2ax} dx - \\ &- \int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2} dx = \sqrt{2a} \cdot (2/3)x^{3/2} \Big|_0^{2a} - \int_0^{2a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx = \\ &= \left| x-a = a \sin t; dx = a \cos t dt; t = \arcsin(x/a-1); \right. \\ t_1 &= -\pi/2; t_2 = \pi/2; \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = a \cos t \Big| = \sqrt{2a} \cdot (2/3) \sqrt{8a^3} - \\ &- a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = (8/3)a^2 - (1/2)a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{8}{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \cdot (t + (1/2)\sin 2t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{(16-3\pi)}{6}a^2 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 2. Перейти до полярних координат і обчислити площу плоскої області D , що обмежена двома півколами $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $y = \sqrt{4ax - x^2}$ і прямою $y = x/\sqrt{3}$ ($a > 0$).

□ Перейдемо в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$y = \sqrt{2ax - x^2}; \quad \rho \sin \varphi = \sqrt{2a\rho \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi};$$

$$\rho^2 \sin^2 \varphi = 2a \cos \varphi \rho - \rho^2 \cos^2 \varphi; \quad \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 2a \cos \varphi \rho;$$

$$\rho = 2a \cos \varphi - \text{коло з центром } (a; 0) \text{ і радіусом } r = a;$$

$$y = \sqrt{4ax - x^2}; \quad \rho \sin \varphi = \sqrt{4a\rho \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi};$$

$$\rho = 4a \cos \varphi - \text{коло з центром } (2a; 0) \text{ і радіусом } r = 2a;$$

$$y = x/\sqrt{3}; \quad \rho \sin \varphi = \rho \cos \varphi / \sqrt{3}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}/3; \quad \varphi = \pi/6 -$$

промінь, що виходить з полюса.

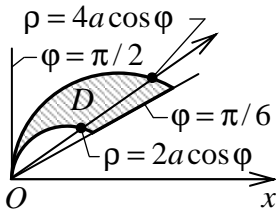


Рис. 70

На рис. 70 область D подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = \text{const}$. Тоді

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} \rho d\rho d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{2a \cos \varphi}^{4a \cos \varphi} \rho d\rho =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left((\rho^2 / 2) \Big|_{2a \cos \varphi}^{4a \cos \varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (16a^2 \times$$

$$\times \cos^2 \varphi - 4a^2 \cos^2 \varphi) d\varphi = 3a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 3a^2 (\varphi + (1/2) \sin 2\varphi) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{a^2}{4} (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ (кв. од.)}. \blacksquare$$

Об'єм тіла. Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V , яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z = z_1(x, y)$ і виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy} . Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$V = \iint_{D_{xy}} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy.$$

Зауваження 1. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy , то його об'єм обчислюється за аналогічною формулою відповідно

$$V = \iint_{D_{yz}} (x_2(x, y) - x_1(x, y)) dydz \quad \text{і} \quad V = \iint_{D_{xz}} (y_2(x, y) - y_1(x, y)) dx dz.$$

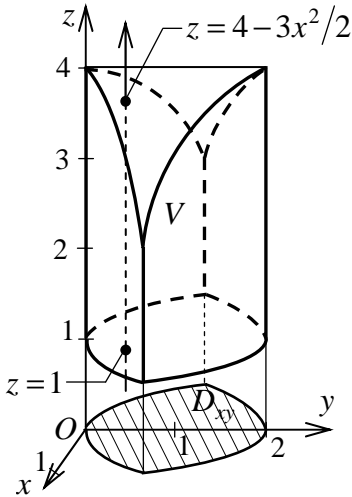


Рис. 71

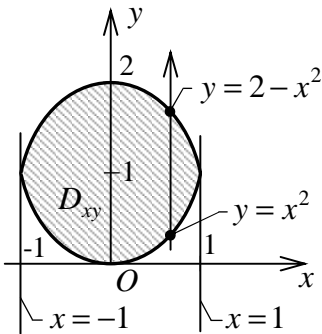


Рис. 72

Приклад 3. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла V , що обмежене параболічними циліндрами $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $z = 4 - 3x^2/2$ і площиною $z = 1$.

□ На рис. 71 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz . Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} , що зображена на рис. 72 як правильна в напрямі осі Oy . Тоді

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_{xy}} (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (4 - 3x^2/2 - 1) dx dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (2 - x^2) dx \int_{x^2}^{2-x^2} dy = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (2 - \\ &x^2) \cdot y \Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = (3/2) \int_{-1}^1 (2 - x^2)(2 - \\ &- x^2 - x^2) dx = 3 \int_{-1}^1 (x^4 - 3x^2 + 2) dx = \\ &= 3 \cdot (x^5/5 - x^3 + 2x) \Big|_{-1}^1 = 7 \frac{1}{5} \text{ (куб.} \\ &\text{од.)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 4. Перейти до полярних координат і обчислити об'єм тіла V , що обмежене півсферою $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ і параболоїдом обертання $z = 1 + (x^2 + y^2)/8$.

□ Знайдемо лінію перетину зазначених поверхонь:

$$\begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}; & \sqrt{25 - x^2 - y^2} = 1 + (x^2 + y^2)/8; \\ z = 1 + (x^2 + y^2)/8; & (x^2 + y^2)^2 + 80(x^2 + y^2) - 1536 = 0; \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ z = 3 \end{cases} & \text{— коло з центром } (0;0;3) \text{ і радіусом } r = 4. \end{cases}$$

Проекцією тіла V на площину Oxy служить область D_{xy} — круг з центром $(0;0)$ і радіусом $r = 4$. На рис. 73 це тіло подане як правильне в напрямі осі Oz . Тоді

$$V = \iint_{D_{xy}} \left(\sqrt{25 - x^2 - y^2} - 1 - (x^2 + y^2)/8 \right) dx dy.$$

Область D_{xy} — правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$ і може бути задана як $D_{xy} : 0 \leq \rho \leq 4; \varphi \in [0; 2\pi]$. Перейдемо в подвійному інтегралі до полярних координат і дістанемо:

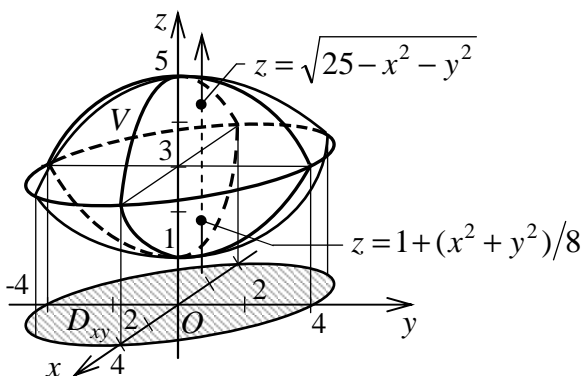


Рис. 73

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D_{xy}^*} \left(\sqrt{25 - \rho^2} - 1 - \rho^2/8 \right) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 (25 - \rho^2)^{1/2} \rho d\rho - \right. \\ &\left. - \int_0^4 \rho d\rho - (1/8) \int_0^4 \rho^3 d\rho \right) d\varphi = \left| 25 - \rho^2 = u^2; \rho d\rho = -udu; \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u = (25 - \rho^2)^{1/2}; u_1 = 5; u_2 = 3 \Big| &= \int_0^{2\pi} \left(-\int_5^3 u^2 du - (1/2) \cdot \rho^2 \Big|_0^4 - \right. \\
 &- (1/32) \cdot \rho^4 \Big|_0^4 \Big) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(-(1/3) \cdot u^3 \Big|_5^3 - 8 - 8 \right) d\varphi = \frac{50}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= (50/3) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 100\pi/3 \text{ (куб. од.)}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Площа поверхні. Нехай σ – деяка поверхня, плоска область D_{xy} – її проєкція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 74). Поверхня σ називається **правильною (стандартною) в напрямі осі Oz** , якщо виконуються наступні умови: 1) довільна пробна пряма, що проходить через область D_{xy} паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає поверхню σ лише в одній точці, тобто поверхня σ взаємно однозначно проєкується в область D_{xy} ; 2) рівняння поверхні σ задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z , причому тільки однією формулою $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна в D_{xy} .

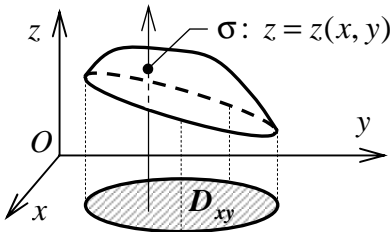


Рис. 74

Аналогічно розглядаються поверхні, що **правильні в напрямі осей Ox і Oy** .

Якщо поверхня σ правильна у всіх трьох напрямках Ox , Oy і Oz , то вона називається просто **правильною (стандартною)**.

Наприклад, параболоїд $z = x^2 + y^2$ правильний у напрямі тільки осі Oz ; циліндр $z = \sqrt{x}$ правильний у напрямі тільки осей Ox і Oz ; площина $2x + 3y - z - 6 = 0$ просто правильна; сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ неправильна в кожному напрямі Ox , Oy і Oz .

Зауваження 2. Якщо поверхня σ – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Як правило, для цього застосовують координатні чи їм паралельні площини. Наприклад, сфера

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ площиною $z = 0$ розбивається на дві правильні в напрямі осі Oz півсфери $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ і $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

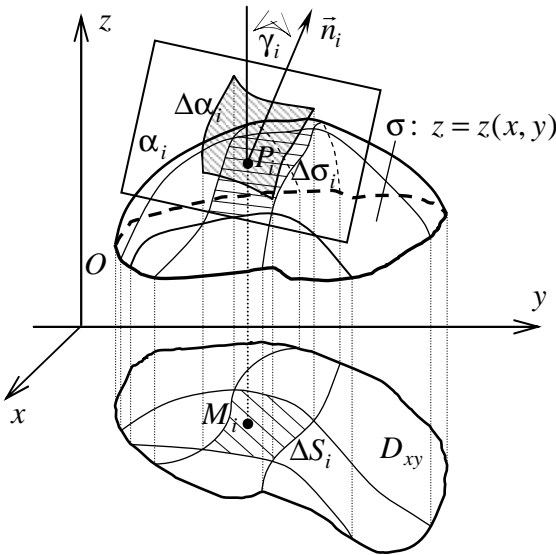


Рис. 75

поверхні σ існує дотична площина, що неперервно змінює своє положення при переході від однієї точки до іншої, тобто поверхня σ є гладкою. Знайдемо площу S_σ цієї поверхні.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$, що не мають спільних внутрішніх точок. На кожному майданчику $\Delta\sigma_i$, який проектується на координатну площину Oxy в частинну область ΔS_i з діаметром d_i , візьмемо довільну точку $P_i(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$, проведемо в ній дотичну площину α_i і одиничний вектор нормалі $\vec{n}_i = (-z'_x(x_i, y_i), -z'_y(x_i, y_i), 1)$, який утворює гострий кут γ_i з віссю Oz . При цьому

$$\cos \gamma_i = 1 / \sqrt{z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i) + 1} > 0.$$

Нехай правильна у напрямі осі Oz поверхня σ проектується на координатну площину Oxy в замкнену обмежену область D_{xy} і задається рівнянням $z = z(x, y)$ (рис. 75).

Припустимо, що функція $z(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними z'_x і z'_y в області D_{xy} . Тоді у кожній точці поверхні σ існує дотична

На площині α_i виділимо частину $\Delta\alpha_i$, проекцією якої слугуватиме елементарна область ΔS_i . Їх площі зв'язані співвідношенням

$$\Delta\alpha_i = \Delta S_i / |\cos \gamma_i| = \sqrt{z'_x{}^2(x_i, y_i) + z'_y{}^2(x_i, y_i) + 1} \Delta S_i.$$

За площу S_σ поверхні σ приймають скінченну границю

$$S_\sigma = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{z'_x{}^2(x_i, y_i) + z'_y{}^2(x_i, y_i) + 1} \Delta S_i,$$

яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок P_i . Вираз $\sum_{i=1}^n \sqrt{z'_x{}^2(x_i, y_i) + z'_y{}^2(x_i, y_i) + 1} \Delta S_i$ є інтегральною сумою неперервної функції $f(x, y) = \sqrt{z'_x{}^2(x, y) + z'_y{}^2(x, y) + 1}$ по області D_{xy} . Тому зазначена границя визначає подвійний інтеграл

$$S_\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy,$$

за яким обчислюється площа S_σ поверхні σ , що правильна у напрямі осі Oz . Відповідно *елемент (диференціал) площі* $d\sigma$ такої поверхні визначається рівністю $d\sigma = \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$.

Зауваження 3. Якщо поверхня σ правильна у напрямі осі Ox чи Oy , то її площа обчислюється відповідно за формулою

$$S_\sigma = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} dy dz \quad \text{або} \quad S_\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} dx dz.$$

При цьому диференціал площі $d\sigma$ поверхні σ визначається відповідно рівністю

$$d\sigma = \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} dy dz \quad \text{або} \quad d\sigma = \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} dx dz.$$

Приклад 5. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу частини верхньої півсфери $\sigma: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, яка вирізається вертикальним циліндром $x = \sqrt{2y - y^2}$ і площиною $x = 0$.

□ На рис. 76 зазначена частина півсфери подана як правильна

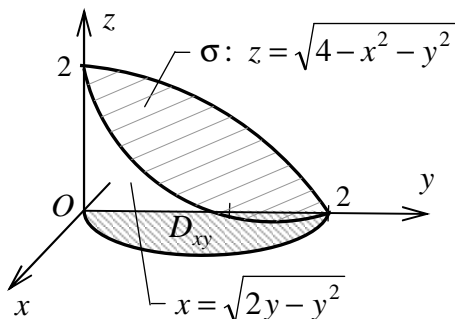


Рис. 76

в напрямі осі Oz . Її проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} – півкруг з центром $(0;1)$ і радіусом $r = 1$.

З рівняння півсфери дістаємо

$$z'_x = -x / \sqrt{4 - x^2 - y^2};$$

$$z'_y = -y / \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Тоді

$$S_\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}} dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

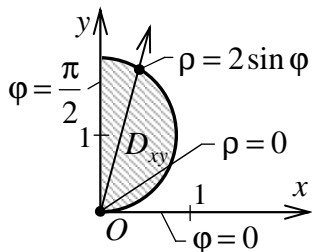


Рис. 77

Оскільки область інтегрування D_{xy} – півкруг, то зручно перейти до полярних координат:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi;$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2; \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi.$$

На рис. 77 область D_{xy} подана як правильна в напрямі координатних променів. Тоді

$$S_\sigma = 2 \iint_{D^*_{xy}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2 - \rho^2}} = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2 - \rho^2}} = -2 \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - \rho^2} \Big|_0^{2 \sin \varphi} d\varphi = -4 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi - 1) d\varphi = -4(\sin \varphi - \varphi) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -4(1 - \pi/2) = 2\pi - 4 \quad (\text{кв. од.}). \quad \blacksquare$$

2.3.5. Фізичні застосування подвійного інтеграла

Маса і середня густина пластини. Нехай на координатній площині Oxy лежить матеріальна пластинка, що має форму обмеженої замкненої області D , у кожній точці якої поверхнева густина визначається неперервною функцією $\mu = \mu(x, y)$. Тоді маса m і середня густина $\mu_{\text{сеп}}$ пластинки обчислюються за формулами

$$\boxed{m = \iint_D \mu(x, y) dx dy}; \quad \boxed{\mu_{\text{сеп}} = \frac{m}{S} = \iint_D \mu(x, y) dx dy / \iint_D dx dy}.$$

Статичні моменти і центр маси пластинки. Розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні частини D_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Виберемо на кожному майданчику D_i з площею ΔS_i і діаметром d_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і наближено вважатимемо, що його маса Δm_i дорівнює $\mu(x_i, y_i)\Delta S_i$ і зосереджена у вибраній точці $M_i(x_i, y_i)$. Тоді пластинку можна розглядати як систему всіх цих матеріальних точок. Її статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy наближено визначаються за формулами

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n y_i \Delta m_i = \sum_{i=1}^n y_i \mu(x_i, y_i) \Delta S_i;$$

$$M_y \approx \sum_{i=1}^n x_i \Delta m_i = \sum_{i=1}^n x_i \mu(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Щоб знайти точні значення вказаних величин, перейдемо в цих рівностях до границі при необмеженому здрібненні розбиття області D : $\max d_i \rightarrow 0$. Дістанемо

$$\boxed{M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy}; \quad \boxed{M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy}.$$

Відповідно координати x_c та y_c центра маси пластинки обчислюються за формулами $\boxed{x_c = M_y/m}; \quad \boxed{y_c = M_x/m}$.

Зауваження. Якщо пластинка однорідна, то $\mu = \mu_0 = \text{const}$.

Моменти інерції пластини. Замінивши пластину системою матеріальних точок $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$ з масами $\Delta m_i \approx \mu(x_i, y_i) \Delta S_i$, дістанемо наступні наближені рівності для її моментів інерції I_x , I_y і I_0 відносно осей Ox , Oy і початку координат O :

$$I_x \approx \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta m_i = \sum_{i=1}^n y_i^2 \mu(x_i, y_i) \Delta S_i;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta m_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \mu(x_i, y_i) \Delta S_i;$$

$$I_0 \approx \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \mu(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Перейшовши до границі при $\max d_i \rightarrow 0$, з цих співвідношень одержимо точні формули для обчислення моментів інерції

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy; \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy;$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy = I_x + I_y.$$

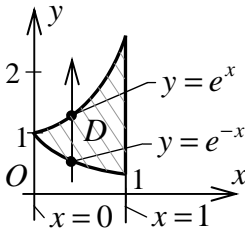


Рис. 78

Приклад 1. Знайти масу та середню густину пластини D , обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і $x = 1$, якщо поверхнева густина задається функцією $\mu(x, y) = x + 4y$.

□ На рис. 78 пластини D зображена як правильна в напрямі осі Oy . Обчислимо її масу:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_D (x + 4y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} (x + 4y) dy = \\ &= \int_0^1 (xy + 2y^2) \Big|_{e^{-x}}^{e^x} dx = \int_0^1 (xe^x - xe^{-x} + 2e^{2x} - 2e^{-2x}) dx = \int_0^1 xe^x dx - \\ &- \int_0^1 xe^{-x} dx + 2 \int_0^1 e^{2x} dx - 2 \int_0^1 e^{-2x} dx = \left| u_1 = x; du_1 = dx; dv_1 = e^x dx; \right. \\ &v_1 = e^x dx; u_2 = x; du_2 = dx; dv_2 = e^{-x} dx; v_2 = -e^{-x} \Big|_0^1 = (xe^x) \Big|_0^1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^1 e^x dx + (xe^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx + e^{2x}\Big|_0^1 + e^{-2x}\Big|_0^1 = e - e^x\Big|_0^1 + e^{-1} + \\
 & + e^{-x}\Big|_0^1 + e^2 - 1 + e^{-2} - 1 = e - e + 1 + e^{-1} + e^{-1} - 1 + e^2 + e^{-2} - 2 = \\
 & = 2e^{-1} + e^2 + e^{-2} - 2.
 \end{aligned}$$

Знайдемо площу пластини D :

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} dy = \int_0^1 y\Big|_{e^{-x}}^{e^x} dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x})\Big|_0^1 = \\
 & = e + e^{-1} - 2.
 \end{aligned}$$

Тепер обчислимо середню густину пластини $\mu_{\text{сеп}}$:

$$\mu_{\text{сеп}} = m/S = (2e^{-1} + e^2 + e^{-2} - 2)/(e + e^{-1} - 2). \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти статичні моменти M_x та M_y відносно

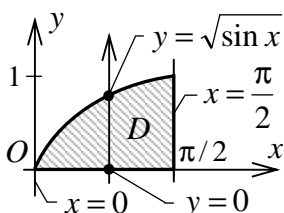


Рис. 79

осей координат та центр маси $C(x_c, y_c)$ пластини D , обмеженої дугою кривої $y = \sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \pi/2$, віссю Ox і прямою $x = \pi/2$, якщо поверхнева густина $\mu(x, y) = 60y \cos x$.

□ На рис. 79 пластинка D подана як правильна в напрямі осі Oy . Обчислимо її масу:

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_D 60y \cos x dx dy = 60 \int_0^{\pi/2} \cos x dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y dy = \\
 &= 60 \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (y^2/2)\Big|_0^{\sqrt{\sin x}} dx = 30 \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin x dx = 15 \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \\
 &= -(15/2) \cdot \cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = -(15/2)(\cos \pi - \cos 0) = 15.
 \end{aligned}$$

Знайдемо статичні моменти пластини:

$$\begin{aligned}
M_x &= \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \iint_D y \cdot 60y \cos x dx dy = \\
&= 60 \int_0^{\pi/2} \cos x dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y^2 dy = 60 \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (y^3/3) \Big|_0^{\sqrt{\sin x}} dx = \\
&= 20 \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^{3/2} x dx = \left| u = \sin x; du = \cos x dx; u_1 = 0; u_2 = 1 \right| = \\
&= 20 \int_0^1 u^{3/2} du = 20 \cdot (2/5) \cdot u^{5/2} \Big|_0^1 = 8;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \iint_D x \cdot 60y \cos x dx dy = \\
&= 60 \int_0^{\pi/2} x \cos x dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y dy = 60 \int_0^{\pi/2} x \cos x \cdot (y^2/2) \Big|_0^{\sqrt{\sin x}} dx = \\
&= 30 \int_0^{\pi/2} x \cos x \cdot \sin x dx = 15 \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx = \left| u = x; du = dx; \right. \\
&dv = \sin 2x dx; v = -(1/2) \cos 2x \Big| = -(15/2) \cdot x \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} + \\
&+ \frac{15}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = -\frac{15}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cos \pi + \frac{15}{4} \cdot \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{15\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Тепер обчислимо координати центра маси пластини:

$$x_c = M_y/m = (15\pi/4)/15 = \pi/4; \quad y_c = M_x/m = 8/15. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти момент інерції I_y відносно осі Oy пластини D , обмеженої дугою кардіоїди $(x^2 + y^2 - 2x) = 4(x^2 + y^2)$, $y \geq 0$, півколом $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$ і віссю Oy , якщо поверхнева густина $\mu(x, y) = y/(x^2 + y^2)^2$.

□ Рівняння кардіоїди і кола спрощуються при переході до полярних координат ($x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $x^2 + y^2 = \rho^2$) і набувають відповідно вигляду

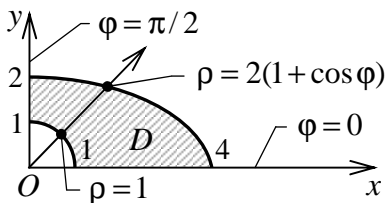


Рис. 80

$$\rho = 2(1 + \cos \varphi) \quad \text{і} \quad \rho = 1.$$

На рис. 80 область D подана як правильна в напрямі координатних променів. Знайдемо момент інерції I_y пластини D , переходячи в подвійному інтегралі до полярних координат:

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy = \iint_D x^2 \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \Big|_{x = \rho \cos \varphi;} \\ y &= \rho \sin \varphi; \quad x^2 + y^2 = \rho^2; \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi \Big| = \iint_{D^*} \rho^2 \cos^2 \varphi \frac{\rho \sin \varphi}{\rho^4} \times \\ &\times \rho d\rho d\varphi = \iint_D \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_1^{2(1+\cos \varphi)} d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \cdot \rho \Big|_1^{2(1+\cos \varphi)} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \Big| u = \cos \varphi; \quad du = -\sin \varphi d\varphi; \quad u_1 = 1; \quad u_2 = 0 \Big| = -\int_1^0 u^2 (1 + 2u) du = \\ &= -\int_1^0 u^2 du - 2 \int_1^0 u^3 du = -\frac{1}{3} u^3 \Big|_1^0 - \frac{1}{2} u^4 \Big|_1^0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.3.6. Задача про масу просторового тіла.

Потрійний інтеграл і його властивості

Нехай у тривимірному просторі задана замкнена обмежена область (просторове тіло) V , яка суцільно заповнена речовиною з об'ємною густиною $\mu = f(x, y, z)$. Знайдемо масу m цього тіла V .

Для цього розіб'ємо область V сіткою довільних кусково-гладких поверхонь на елементарні частини V_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо об'єм комірки V_i через ΔV_i , а її діаметр (довжину найбільшої хорди, що з'єднує дві точки

межі області V_i) – через d_i , $i = \overline{1, n}$. У кожній комірці V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Можна наближено вважати, що густина в межах елементарної області V_i однакова і дорівнює значенню $\mu_i = f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ у виділеній точці. Тоді для маси Δm_i комірки V_i справджується наближена рівність $\Delta m_i \approx \mu_i \Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$. Відповідно маса m всього тіла V наближено визначається за формулою $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ називається **інтегральною сумою функції $f(x, y, z)$ по області V** .

Природно границю інтегральної суми при умові, що кожна комірка V_i стягується в точку ($\max d_i \rightarrow 0$) і, відповідно, їх число n необмежено збільшується ($n \rightarrow \infty$), прийняти за масу m тіла V :

$$m = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття тривимірної області V , якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні комірки V_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$ у них, називається **потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області V** :

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i},$$

де x , y і z – змінні інтегрування; $f(x, y, z)$ – підінтегральна функція; dV – елемент (диференціал) об'єму; $f(x, y, z) dV$ – підінтегральний вираз; V – область інтегрування.

Таким чином $\boxed{m = \iiint_V \mu(x, y, z) dV}$ (фізичний зміст потрійного інтеграла).

Якщо в потрійному інтегралі підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x, y, z) \equiv 1$, то його значення чисель-

но дорівнюватиме об'єму області інтегрування V : $V = \iiint_V dV$
 (геометричний зміст потрійного інтеграла).

Зауваження. Умови існування та основні властивості потрійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям подвійного і звичайного визначеного інтеграла.

2.3.7. Обчислення потрійного інтеграла у прямокутній системі координат

Нехай у тривимірному просторі визначена декартова прямокутна система координат $Oxyz$. Оскільки потрійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в цій системі координат зручно розбивати область V координатною сіткою, утвореною площинами, які паралельні координатним площинам. Тоді внутрішня елементарна комірка V_i є прямокутним паралелепіпедом зі сторонами Δx_i , Δy_i і Δz_i . Його об'єм $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$. Відповідно диференціал об'єму набуває вигляду $dV = dx dy dz$ і подвійний інтеграл можна подати у формі $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

Нехай тривимірна область V – правильна в напрямі осі Oz (є вертикальним циліндричним тілом, зображеним на рис. 54), і може бути подана у вигляді

$$V : \left\{ (x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}, V \xrightarrow{Oz} D_{xy} \right\}.$$

Тоді справедлива формула

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

за якою спочатку обчислюється внутрішній одновимірний інтеграл по z , а потім зовнішній подвійний інтеграл по x, y .

Якщо при цьому плоска область D_{xy} , що служить проекцією тіла V на площину Oxy , є правильною в напрямі осі Oy (рис. 58) і може бути подана у вигляді

$$D_{xy} : \left\{ (x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), x \in [a; b], D \xrightarrow{Oy} [a; b] \right\},$$

то приходимо до формули

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz,$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження 1. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній z при фіксованих зовнішніх змінних x і y . Потім знаходиться проміжний інтеграл по y при фіксованому x . В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по x .

Зауваження 2. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області V відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та її форми, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x, y, z)$.

Зауваження 3. Якщо область V – неправильна, то її треба розбити на правильні частини.

Приклад. Для потрійного інтеграла $I = \iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz$ вказано підінтегральну функцію $f(x, y, z)$ й область інтегрування V , яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

- 1) Зобразити тіло V у прямокутній системі координат $Oxyz$ як правильну в напрямі осі Oz просторову область.
- 2) Подати його проекцію D_{xy} як правильну в напрямі осі Oy плоску область, при необхідності розбиваючи на частини, і зробити відповідний рисунок.
- 3) За результатами пунктів 1) і 2) перейти до повторного інтеграла і обчислити його значення.

а) $f(x, y, z) = 7(1 - x/4)(3y^2 + 4z)$;

V : $z - y^2 = 0$; $x + 4y - 4 = 0$; $x = 0$; $z = 0$;

б) $f(x, y, z) = x + y + z$;

V : $x + y + z = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

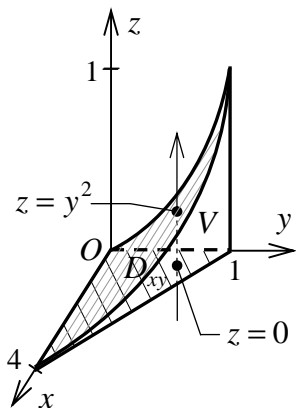


Рис. 81

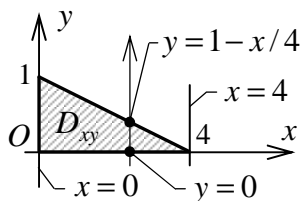


Рис. 82

□ а) Дана область інтегрування V є вертикальним циліндричним тілом, а його проекцією на координатну площину Oxy є плоска область D_{xy} . На рис. 81 це тіло V подано як правильну в напрямі осі Oz просторову область, що обмежена знизу координатною площиною $z=0$ (поверхня входу), зверху – параболічним циліндром $z=y^2$ (поверхня виходу), а з боків – координатною площиною $x=0$ і вертикальною площиною $x+4y-4=0$. Відповідно на рис. 82 проекцію D_{xy} відтворено як правильну в напрямі осі Oy плоску область, яка обмежена знизу віссю Ox (лінія входу $y=0$), зверху – похилою прямою $y=1-x/4$ (лінія виходу), а з боків – вертикальними прямими $x=0$ і $x=4$. Тоді потрійний інтеграл переходом до повторного обчислюється так:

$$\begin{aligned}
 I &= 7 \iiint_V (1-x/4)(3y^2+4z) \, dx \, dy \, dz = 7 \int_0^4 (1-x/4) \, dx \int_0^{1-x/4} dy \int_0^{y^2} (3y^2+ \\
 &+ 4z) \, dz = 7 \int_0^4 (1-x/4) \, dx \int_0^{1-x/4} (3y^2z+2z^2) \Big|_0^{y^2} dy = \\
 &= 7 \int_0^4 (1-x/4) \, dx \int_0^{1-x/4} (3y^4+2y^4) \, dy = 7 \int_0^4 (1-x/4) \, dx \int_0^{1-x/4} 5y^4 \, dy = \\
 &= 7 \int_0^4 (1-x/4) y^5 \Big|_0^{1-x/4} dx = 7 \int_0^4 (1-x/4)^6 dx = -4 \cdot (1-x/4)^7 \Big|_0^4 = 4.
 \end{aligned}$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $I = 1/8$. ■

2.3.8. Заміна змінних у потрібному інтегралі. Потрійний інтеграл у циліндричній та сферичній системах координат

У багатьох задачах обчислення потрібних інтегралів зручніше робити в циліндричній, сферичній або іншій криволінійній системі координат.

Нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V простору (x, y, z) , а функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ і $z = z(u, v, w)$ разом з частинними похідними неперервні в обмеженій замкненій області V^* простору (u, v, w) і взаємно однозначно відображають цю область на область V , причому якобіан відображення $J(u, v, w)$ відмінний від нуля:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v & \partial x / \partial w \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v & \partial y / \partial w \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v & \partial z / \partial w \end{vmatrix} \neq 0,$$

Тоді має місце *формула заміни змінних у потрібному інтегралі*

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, dudvdw. \end{aligned}$$

Змінні u , v і w служать криволінійними координатами точки, а вираз $dV^* = |J(u, v, w)| \, dudvdw$ задає *елемент об'єму* у криволінійному просторі (u, v, w) . Модуль якобіана $|J(u, v, w)|$ визначає коефіцієнт зміни нескінченно малого об'єму при відповідному перетворенні координат.

Перехід до циліндричних координат. Визначимо положення довільної точки $M(x, y, z)$ у просторі її декартовою координатою – аплікатою z і полярними координатами ρ і φ її проєкції M_1 на площину Oxy (рис. 83). Величини ρ , φ і z називаються *циліндричними координатами* точки M .

З рис. 83 видно, що прямокутні і циліндричні координати точ-

ки M зв'язані співвідношеннями:

$$\boxed{x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi; z = z} \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi),$$

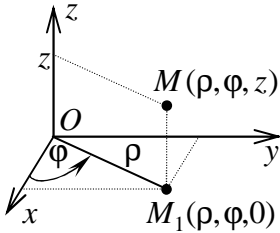


Рис. 83

які відображають область $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ криволінійного простору (ρ, φ, z) на весь простір (x, y, z) .

Координатну сітку циліндричної системи координат утворюють кругові циліндри $\rho = const$ з віссю Oz , півплощини $\varphi = const$, що виходять з осі Oz , і площини $z = const$, паралельні площині Oxy .

Якобіан у циліндричних координатах має вигляд

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді елемент об'єму $dV^* = \rho d\rho d\varphi dz$. **Формула переходу до потрійного інтеграла у циліндричних координатах**

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.}$$

Зауваження 1. Перехід до циліндричних координат доцільно застосовувати, коли: 1) область інтегрування V задана у циліндричній системі; 2) область інтегрування V проектується в круг або його частину; 3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів хоча б двох декартових координат.

Перехід до сферичних координат. Визначимо положення довільної точки $M(x, y, z)$ у просторі за допомогою трьох величин (рис. 84): відстані $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ від початку координат O до точки M (**радіус-вектор**), кута φ між додатним напрямом осі Ox та проекцією OM_1 відрізка OM на площину Oxy (**широта**), кута θ між додатним напрямом осі Oz та відрізком OM_1 (**довгота**). Величини r , φ і θ називаються **сферичними координатами** точ-

ки M . З рис. 84 видно, що прямокутні і сферичні координати точки M зв'язані співвідношеннями:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta; \quad y = r \sin \varphi \sin \theta; \quad z = r \cos \theta; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi),$$

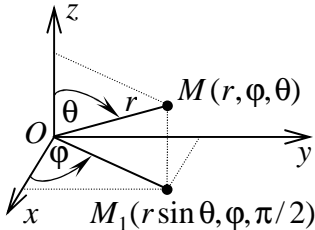


Рис. 84

які відображають область $0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$ криволінійного простору (r, φ, θ) на весь простір (x, y, z) .

Координатну сітку сферичної системи координат утворюють сфери $r = \text{const}$ з центром у початку координат O , півплощини $\varphi = \text{const}$, що ви-

ходять з осі Oz , і кругові півконуси $\theta = \text{const}$ з віссю Oz .

Якобіан у сферичних координатах має вигляд

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Тоді елемент об'єму $dV^* = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$. **Формула переходу до потрібного інтеграла у сферичних координатах**

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_{V^*} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

Зауваження 2. До сферичних координат зручно переходити, коли: 1) область інтегрування V задана у сферичній системі; 2) область інтегрування V є куля чи її частина; 3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів всіх трьох декартових координат $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Зауваження 3. При переході у потрібному інтегралі до циліндричних або сферичних координат область V^* у новому просторі, як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо

за область V у прямокутних координатах.

Приклад 1. Знайти потрійний інтеграл $I = \iiint_V \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2}$, де

область V – розміщена в першому октанті ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) частина просторового тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ і круговим півконусом $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

□ Знайдемо лінію перетину параболоїда і півконуса:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2; & z = 2 - \sqrt{z}; & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = 1 \end{cases} \\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}; & z = 1; & \begin{cases} z = 1 \end{cases} \end{cases}$$

– коло у площині $z = 1$, що має радіус $r = 1$ і центр $(0; 0; 1)$.

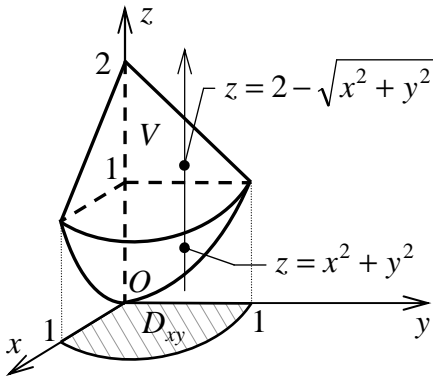


Рис. 85

На рис. 85 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz . Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} – частина круга з центром $(0; 0)$ і радіусом $r = 1$, що відповідає першій чверті ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

Крім того, підінтегральна функція містить суму квадратів двох координат. Тому раціонально перейти до циліндричних координат:

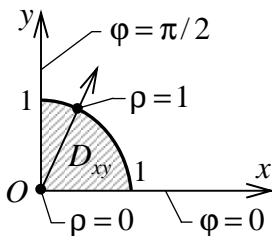


Рис. 86

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = 2 - \rho;$$

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \rho^2;$$

$$f(x, y, z) = xyz / (x^2 + y^2) =$$

$$= \rho \cos \varphi \cdot \rho \sin \varphi \cdot z / \rho^2 = z \cos \varphi \sin \varphi.$$

На рис. 86 область D_{xy} зображена як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = \text{const}$.

Обчислимо інтеграл, застосовуючи циліндричні координати:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V \frac{xyz \, dx dy dz}{x^2 + y^2} = \iiint_{V^*} z \cos \varphi \sin \varphi \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \times \\
 &\times d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho} z \, dz = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho (z^2/2) \Big|_{\rho^2}^{2-\rho} d\rho = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \times \\
 &\times \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho (z^2/2) \Big|_{\rho^2}^{2-\rho} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 (4\rho - 4\rho^2 + \rho^3 - \\
 &- \rho^5) d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi (2\rho^2 - 4\rho^3/3 + \rho^4/4 - \rho^6/6) \Big|_0^1 d\varphi = \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d(\sin \varphi) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{16}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти потрібний інтеграл $I = \iiint_V \frac{z^2 \, dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, де

область V обмежена півсферою $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ і круговим

півконусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

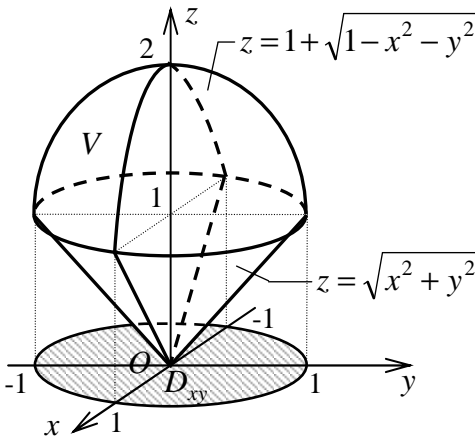


Рис. 87

□ Лінією перетину вказаних поверхонь є коло з центром $(0;0;1)$ і радіусом $r = 1$, що лежить у площині $z = 1$.

Тіло V зображене на рис. 87. Його проекцією на площину Oxy служить круг D_{xy} з центром $(0;0)$ і радіусом $r = 1$.

Перейдемо до сферичних координат:

$$z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow ((r \cos \theta)^2 - 1)^2 = 1 - (r \cos \theta \sin \theta)^2 - (r \sin \theta \sin \theta)^2; r^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta + 1 = 1 - r^2 \sin^2 \theta; r = 2 \cos \theta;$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r \cos \theta = \sqrt{(r \cos \theta \sin \theta)^2 + (r \sin \theta \sin \theta)^2}; \cos \theta = \sin \theta; \operatorname{tg} \theta = 1; \theta = \pi/4;$$

$$f(x, y, z) = z^2 / (x^2 + y^2 + z^2) = r^2 \cos^2 \theta / r^2 = \cos^2 \theta.$$

Оскільки проекцією тіла V є круг, то кут φ змінюється в межах від 0 до 2π . При фіксованому значенні φ кут θ пробігає значення від 0 до $\pi/4$. При фіксованих значеннях обох кутів φ і θ лінійна координата r змінюється в межах від 0 до $2 \cos \theta$. Тоді

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{V^*} \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \times \\ &\times \sin \theta d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \sin \theta \cdot (r^3/3) \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta = \frac{8}{3} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \cos^6 \theta \Big|_0^{\pi/4} d\varphi = -\frac{4}{9} \int_0^{2\pi} \left((\sqrt{2}/2)^6 - \right. \\ &\left. - 1^6 \right) d\varphi = \frac{7}{18} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{7\pi}{9}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти потрійний інтеграл $I = \iiint_V xyz^2 dx dy dz$, де

область V є частиною кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, що відповідає першому октанту ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Задачу розв'язати трьома способами: 1) безпосередньо в декартових прямокутних координатах; 2) за допомогою переходу до циліндричних координат; 3) за допомогою переходу до сферичних координат.

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь: $I = 64/105$. ■

2.3.9. Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об'єму. Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об'єм просторової області V обчислюється за формулою

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dx dy dz.$$

Фізичні застосування. Якщо матеріальне тіло V має густину $\mu = \mu(x, y, z)$, то за фізичним змістом потрійного інтеграла маса m

тіла обчислюється за формулою $m = \iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz$.

Середня густина $\mu_{\text{сеп}}$ тіла V є відношенням маси m тіла до його об'єму V , тобто $\mu_{\text{сеп}} = m/V$.

Статичні моменти M_{yz} , M_{xz} і M_{xy} відносно координатних площин і координати центра маси $C(x_c, y_c, z_c)$ тіла V знаходяться відповідно за співвідношеннями:

$$M_{yz} = \iiint_V x\mu(x, y, z) dx dy dz; \quad M_{xz} = \iiint_V y\mu(x, y, z) dx dy dz;$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\mu(x, y, z) dx dy dz; \quad x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменти інерції I_x , I_y , I_z і I_0 тіла V відносно осей і початку координат визначаються відповідно за формулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\mu dx dy dz; \quad I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\mu dx dy dz;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\mu dx dy dz; \quad I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\mu dx dy dz.$$

Приклад 1. Обчислити середню густину $\mu_{\text{сеп}}$ і координати центра маси $C(x_c, y_c, z_c)$ тіла V , обмеженого параболоїдом обертання $z = 1 + (x^2 + y^2)/2$ і площиною $z = 1 + y$, якщо густина задається функцією $\mu(x, y, z) = y/\sqrt{x^2 + y^2}$.

□ Враховуючи, що на лінії перетину аплікати співпадають, знайдемо рівняння проекції лінії перетину параболоїда і площини

на координатну площину Oxy :

$$\begin{cases} z = 1 + (x^2 + y^2)/2; & y = (x^2 + y^2)/2; \\ z = 1 + y; & x^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Отже, проекцією лінії перетину служить коло $x^2 + (y-1)^2 = 1$, що має радіус $r = 1$ і центр $(0;1;0)$.

Оскільки проекцією тіла V на координатну площину Oxy є

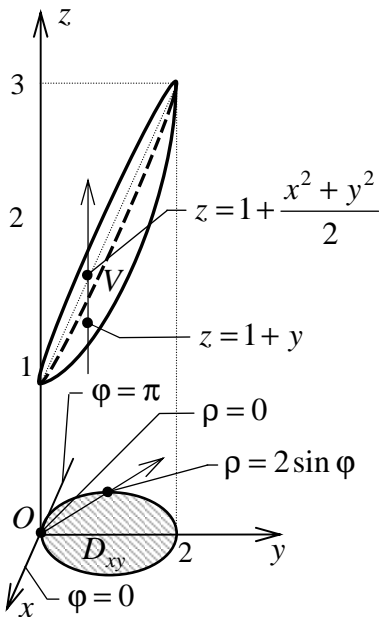


Рис. 88

круг D_{xy} , то зручно перейти до циліндричних координат:

$$z = 1 + (x^2 + y^2)/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1 + \rho^2/2;$$

$$z = 1 + y \Rightarrow z = 1 + \rho \sin \varphi;$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow \rho = 2 \sin \varphi;$$

$$\mu = y/\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \mu = \sin \varphi.$$

На рис. 88 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz , а його проекція D_{xy} зображена як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$.

Знайдемо об'єм і масу тіла V :

$$V = \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho d\rho \int_{1+\rho^2/2}^{1+\rho \sin \varphi} dz = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho \cdot z \Big|_{1+\rho^2/2}^{1+\rho \sin \varphi} d\rho = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} (\rho^2 \sin \varphi -$$

$$-\rho^3/2) d\rho = \int_0^\pi ((1/3)\rho^3 \sin \varphi - \rho^4/8) \Big|_0^{2 \sin \varphi} d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi =$$

$$= (1/6) \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi = (1/6) \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= (1/6) \int_0^\pi d\varphi - (1/3) \int_0^\pi \cos 2\varphi d\varphi + (1/12) \int_0^\pi (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \\
&= (1/6) \varphi \Big|_0^\pi - (1/6) \sin 2\varphi \Big|_0^\pi + (1/12) \varphi \Big|_0^\pi + (1/48) \sin 4\varphi \Big|_0^\pi = \pi/4 ; \\
m &= \iiint_V \frac{y \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iiint_{V^*} \sin \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} \rho \, d\rho \int_{1+\rho^2/2}^{1+\rho \sin \varphi} dz = \\
&= \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} \rho \cdot z \Big|_{1+\rho^2/2}^{1+\rho \sin \varphi} d\rho = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} (\rho^2 \sin \varphi - \rho^3/2) d\rho = \\
&= \int_0^\pi \sin \varphi \cdot ((1/3)\rho^3 \sin \varphi - \rho^4/8) \Big|_0^{2\sin \varphi} d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin^4 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = \cos \varphi; \quad du = -\sin \varphi \, d\varphi; \quad u_1 = 1; \\ u_2 = -1; \quad \sin^4 \varphi = (1 - \cos^2 \varphi)^2 = (1 - u^2)^2 \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \int_1^{-1} (1 - u^2)^2 \, du = \\
&= -\frac{2}{3} \int_1^{-1} (1 - 2u^2 + u^4) \, du = -\frac{2}{3} (u - 2u^3/3 + u^5/5) \Big|_1^{-1} = \frac{32}{45}.
\end{aligned}$$

Тоді середня густина $\mu_{\text{сеп}} = m/V = 128/(45\pi)$.

За формою і розподілом густини дане тіло V симетричне відносно координатної площини Oyz , тому $x_c = 0$. Для знаходження y_c і z_c обчислимо статичні моменти M_{xz} і M_{xy} :

$$\begin{aligned}
M_{xz} &= \iiint_V \frac{y^2 \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iiint_{V^*} \rho \sin^2 \varphi \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} \rho^2 \times \\
&\times d\rho \int_{1+\rho^2/2}^{1+\rho \sin \varphi} dz = \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} \rho^2 \cdot z \Big|_{1+\rho^2/2}^{1+\rho \sin \varphi} d\rho = \int_0^\pi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{2\sin \varphi} (\rho^3 \times \\
&\times \sin \varphi - \rho^4/2) d\rho = \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cdot ((1/4)\rho^4 \sin \varphi - \rho^5/10) \Big|_0^{2\sin \varphi} d\varphi = \frac{4}{5} \times \\
&\times \int_0^\pi \sin^6 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = \cos \varphi; \quad du = -\sin \varphi \, d\varphi; \quad u_1 = 1; \\ u_2 = -1; \quad \sin^6 \varphi = (1 - \cos^2 \varphi)^3 = (1 - u^2)^3 \end{array} \right| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -(4/5) \int_1^{-1} (1-u^2)^3 du &= (4/5) \int_1^{-1} (1-3u^2+3u^4-u^6) du = \\
 &= -(4/5) (u - u^3 + 3u^5/5 - u^7/7) \Big|_1^{-1} = 128/175;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} &= \iiint_V \frac{zy \, dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iiint_{V^*} z \sin \varphi \cdot \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho \times \\
 &\quad \times d\rho \int_{1+\rho^2/2}^{1+\rho \sin \varphi} z \, dz = \left| \begin{array}{l} \text{Необхідні розрахунки} \\ \text{проробіть самостійно} \end{array} \right| = \frac{416}{315}.
 \end{aligned}$$

Отже, $y_c = M_{xz}/m = 36/35$; $z_c = M_{xy}/m = 13/7$. ■

Приклад 2. Знайти момент інерції I_z відносно осі Oz півкулі $V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$, якщо густина задається функцією $\mu(x, y, z) = z^3/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

□ Оскільки область V є частиною кулі і вираз для густини, що входить у підінтегральну функцію відповідного інтеграла, містить суму квадратів всіх трьох декартових координат, то доцільно перейти до сферичних координат. Дістанемо:

$$\mu = \cos^3 \theta; \quad V^* : \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Далі обчислимо момент інерції I_z , застосовуючи сферичні координати:

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iiint_V \frac{(x^2 + y^2) z^3 \, dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \iiint_{V^*} r^2 \sin^2 \theta \cdot \cos^3 \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\varphi d\theta = \\
 &= \iiint_{V^*} r^4 (\sin \theta \cos \theta)^3 \, dr d\varphi d\theta = \frac{1}{8} \iiint_{V^*} r^4 \sin^3 2\theta \, dr d\varphi d\theta = \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta \cdot (r^5/5) \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{40} \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta \sin 2\theta d\theta = \left| \begin{array}{l} u = \cos 2\theta; \, du = -2 \sin 2\theta d\theta; \, u_1 = 1; \\ u_2 = -1; \, \sin^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta = 1 - u^2 \end{array} \right| =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(1/80) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{-1} (1-u^2) du = -(1/80) \int_0^{2\pi} (u - u^3/3) \Big|_1^{-1} d\varphi = \\
 &= (1/60) \int_0^{2\pi} d\varphi = (1/60) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi/30. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Приклад 3. застосовуючи перехід до циліндричної системи координат, обчислити координати центра маси $C(x_c, y_c, z_c)$ розміщеної в першому октанті ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) частини V просторового тіла, обмеженого двома

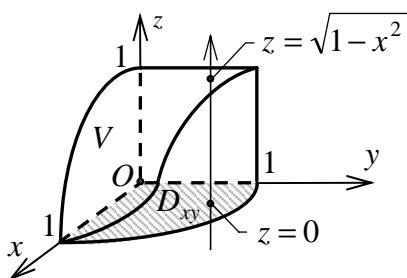


Рис. 89

круговими циліндрами $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + z^2 = 1$ (рис. 89), якщо густина

$$\mu(x, y, z) = xyz / (x^2 + y^2).$$

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$C(256/675, 256/675, 16/63). \quad \blacksquare$$

2.4. Контрольні запитання

1. Яка поверхня називається сферою? Наведіть канонічне рівняння сфери та рівняння сфери зі зміщеним центром.
2. Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
3. Яка поверхня називається циліндричною? Запишіть канонічні рівняння еліптичного, гіперболічного, параболічного циліндрів.
4. Яка поверхня називається конічною? Наведіть канонічне рівняння конуса другого порядку.
5. Як утворюється поверхня обертання? Як знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї ж площини?
6. Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів. Які з цих поверхонь є лінійчатыми?
7. Наведіть означення функції n змінних та її області визначення.
8. Як знайти природну область визначення (область допустимих

- значень) функції багатьох змінних?
9. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення. Який геометричний зміст цих понять? Наведіть приклади графіків функцій двох змінних.
 10. Що називається лінією рівня функції двох змінних? Поверхнею рівня функції трьох змінних? Наведіть приклади ліній та поверхонь рівня.
 11. Дайте означення границі та неперервності функції $u = f(M)$ в точці.
 12. Запишіть вирази для повного та частинних приростів функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0 .
 13. Наведіть означення частинних похідних функції багатьох змінних. У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?
 14. Як за правилами диференціювання функції однієї змінної знаходяться частинні похідні функції багатьох змінних?
 15. Що таке частинні та повний диференціали функції n змінних?
 16. Сформулюйте необхідні та достатні умови диференційовності функції двох змінних.
 17. У чому полягає інваріантність форми повного диференціала?
 18. Як застосовується повний диференціал у наближених обчисленнях?
 19. За якими формулами проводиться диференціювання складених функцій багатьох змінних? Запишіть формулу повної похідної.
 20. За якими формулами проводиться диференціювання неявно заданих функцій однієї і двох змінних?
 21. Дайте означення похідних і диференціалів вищих порядків.
 22. Сформулюйте умови незалежності мішаної частинної похідної від порядку диференціювання.
 23. Як обчислюється похідна вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$?
 24. Якими рівняннями задаються дотична пряма і нормальна площина до просторової лінії?
 25. Наведіть означення дотичної площини і нормальної прямої до поверхні.
 26. Запишіть загальне рівняння дотичної площини і канонічні рівняння нормальної прямої до поверхні, що задана явно. Який вигляд набувають ці рівняння у випадку неявного задання поверхні?

27. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних?
28. Що таке скалярне поле? Як його зображують геометрично?
29. Дайте означення похідної за напрямом і градієнта функції трьох змінних.
30. Запишіть формули для обчислення похідної за напрямом і градієнта у прямокутних координатах.
31. Як зв'язані похідна за напрямом і градієнт, градієнт і вектор нормалі до поверхні рівня?
32. Запишіть формулу Тейлора для функції n змінних.
33. Наведіть означення точки локального мінімуму (максимуму) функції багатьох змінних.
34. Сформулюйте необхідні умови локального екстремуму.
35. Яка точка називається стаціонарною?
36. Сформулюйте достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
37. Як ставиться задача на умовний екстремум для функції двох змінних?
38. У чому полягає метод множників Лагранжа для знаходження умовного екстремуму функції двох змінних?
39. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?
40. Як за методом найменших квадратів знаходяться коефіцієнти шуканої лінійної функції?
41. Наведіть означення подвійного інтеграла.
42. Сформулюйте достатні умови існування подвійного інтеграла.
43. Сформулюйте основні властивості подвійного інтеграла.
44. У чому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла?
45. У чому полягає фізичний зміст подвійного інтеграла?
46. Яка плоска область D називається правильною (стандартною) у напрямі осі Ox ? У напрямі осі Oy ?
47. Задати аналітично як множину точок плоску область D , що правильна у напрямі осі Ox ? У напрямі осі Oy ?
48. Як обчислюється подвійний інтеграл у прямокутних координатах? Наведіть приклад області інтегрування D , якій відповідають сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у прямокутних координатах.
49. Як знайти межі інтегрування при переході від подвійного до

- двократного повторного інтеграла?
50. Яка загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі?
 51. Запишіть якобіан $J(u, v)$ перетворення $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. У чому полягає геометричний зміст модулю якобіана $J(u, v)$?
 52. Наведіть формули, що зв'язують прямокутні та полярні координати точки на площині.
 53. Як записується формула переходу в подвійному інтегралі від прямокутних до полярних координат?
 54. При яких умовах рекомендується переходити в подвійному інтегралі від прямокутних до полярних координат?
 55. Яка плоска область D називається правильною (стандартною) у напрямі координатних променів полярної системи координат?
 56. Наведіть приклади області інтегрування D , якій відповідають сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у полярних координатах.
 57. Наведіть означення потрійного інтеграла.
 58. У чому полягає фізичний зміст потрійного інтеграла?
 59. Сформулюйте достатні умови існування потрійного інтеграла.
 60. Яка тривимірна область V називається правильною (стандартною) у напрямі осі Oz ? Осі Oy ? Осі Ox ?
 61. Як обчислюється потрійний інтеграл у прямокутних координатах?
 62. Запишіть загальну формулу заміни змінних у потрійному інтегралі.
 63. Наведіть якобіан $J(u, v, w)$ перетворення $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ і $z = z(u, v, w)$. У чому полягає геометричний зміст модулю якобіана $J(u, v, w)$?
 64. Як задається циліндрична система координат? Якими поверхнями утворюється координатна сітка цієї системи?
 65. Наведіть формули, що зв'язують прямокутні та циліндричні координати точки у просторі.
 66. Запишіть формулу переходу в потрійному інтегралі від прямокутних до циліндричних координат.
 67. При яких умовах рекомендується переходити в потрійному інтегралі від прямокутних до циліндричних координат?
 68. Наведіть приклади області інтегрування V , якій відповідають

- стали як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у циліндричних координатах.
69. Як задається сферична система координат? Якими поверхнями утворюється координатна сітка цієї системи?
 70. Наведіть формули, що зв'язують прямокутні та сферичні координати точки у просторі.
 71. Запишіть формулу переходу в потрібному інтегралі від прямокутних до сферичних координат.
 72. При яких умовах рекомендується переходити в потрібному інтегралі від прямокутних до сферичних координат?
 73. Наведіть приклади області інтегрування V , які відповідають сталим як зовнішнім, так і внутрішнім межам інтегрування у сферичних координатах.
 74. Як обчислити площу замкненої обмеженої плоскої області D за допомогою подвійного інтеграла?
 75. Як обчислити об'єм правильного в напрямі осі Oz просторового тіла V за допомогою подвійного інтеграла?
 76. Яка поверхня σ називається правильною (стандартною) у напрямі осі Oz ? Осі Oy ? Осі Ox ?
 77. Як обчислити площу правильної в напрямі осі Oz поверхні σ за допомогою подвійного інтеграла?
 78. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислити масу і середню густину плоскої пластини D з відомою поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$?
 79. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислити статичні моменти і моменти інерції відносно координатних осей, координати центра маси плоскої пластини D з відомою поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$?
 80. Як обчислити об'єм просторового тіла V за допомогою потрібного інтеграла?
 81. Як за допомогою потрібного інтеграла обчислити масу і середню густину просторового тіла V з відомою об'ємною густиною $\mu = \mu(x, y, z)$?
 82. Як за допомогою потрібного інтеграла обчислити статичні моменти відносно координатних площин і моменти інерції відносно координатних осей, координати центра маси просторового тіла V з відомою об'ємною густиною $\mu = \mu(x, y, z)$?

2.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Поверхня S задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$. У прямокутній системі координат $Oxyz$ побудувати частину цієї поверхні, що відповідає вказаним нерівностям, користуючись методом паралельних перерізів.

№ в-та	$S : F(x, y, z) = 0$	№ в-та	$S : F(x, y, z) = 0$
1	$x^2 + 4y^2 + z - 8 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $z \geq 0$	16	$9x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0$ (Конус другого порядку); $-3 \leq z \leq 3$
2	$x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 16 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$	17	$x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 16 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq y \leq 4$
3	$9x^2 + y^2 + 9z^2 - 81 = 0$ (Еліпсоїд); $z \geq 0$	18	$x^2 - 4y = 0$ (Параболічний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$
4	$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ (Еліптичний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$	19	$4x^2 + y^2 - 4z^2 + 48 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$
5	$16x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 48 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq y \leq 4$	20	$x + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $x \geq 0$
6	$x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ (Гіперболічний параболоїд); $-4 \leq x \leq 4$; $-2 \leq y \leq 2$	21	$4x^2 + 16y^2 + z^2 - 16 = 0$ (Еліпсоїд); $x \geq 0$
7	$x^2 - 4y + 4z^2 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $0 \leq y \leq 9$	22	$25x^2 - 9y^2 - 225 = 0$ (Гіперболічний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$
8	$x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 32 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$	23	$2x^2 + 3y^2 - z^2 - 36 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-2 \leq z \leq 2$

9	$x^2 + 12y^2 + 3z^2 - 48 = 0$ (Еліпсоїд); $y \geq 0$	24	$3y - 9x^2 - 4z^2 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $0 \leq y \leq 12$
10	$9x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$ (Конус другого порядку); $-6 \leq y \leq 6$	25	$2x^2 - 4y^2 - z^2 + 32 = 0$ (Однопорожнинний гіпербо- лоїд); $-4 \leq x \leq 4$
11	$x + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $x \geq 0$	26	$3x^2 + y^2 - z^2 + 16 = 0$ (Двопорожнинний гіпербо- лоїд); $-5 \leq z \leq 5$
12	$16x^2 - 2y^2 + z^2 - 32 = 0$ (Однопорожнинний гіпербо- лоїд); $-4 \leq y \leq 4$	27	$6x^2 + y^2 + 4z^2 - 36 = 0$ (Еліпсоїд); $z \geq 0$
13	$4x^2 - 8y^2 + z^2 + 16 = 0$ (Двопорожнинний гіпербо- лоїд); $-2 \leq y \leq 2$	28	$9x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ (Гіперболічний параболоїд); $-2 \leq x \leq 2$; $-3 \leq y \leq 3$
14	$x^2 + 4y^2 - 2z = 0$ (Еліптичний параболоїд); $0 \leq z \leq 8$	29	$4x^2 + y^2 - 2z^2 - 32 = 0$ (Однопорожнинний гіпербо- лоїд); $-4 \leq z \leq 4$
15	$x^2 - 9z = 0$ (Параболічний циліндр); $-4 \leq y \leq 4$	30	$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (Сфера); $z \geq 0$

Завдання 2. Знайти область визначення D функції двох змінних $z = z(x, y)$. Зробити рисунок області D у прямокутній системі координат Oxy .

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$z = \arcsin(x - y) - \ln x$	16	$z = \ln(4 - x^2 - y^2) + \sqrt{x}$
2	$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 4)$	17	$z = \ln(x^2 - y^2) + \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

3	$z = \frac{\arcsin x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$	18	$z = \frac{\ln x + \ln y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$
4	$z = \ln(x^2+y^2-1) + \sqrt{x-2}$	19	$z = \frac{\sqrt{y-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{-y+x+2}}$
5	$z = \sqrt{x-2y} / \sqrt{y^2-x}$	20	$z = \arcsin(x/y) + \ln y$
6	$z = \frac{\ln(y^2-x)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$	21	$z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(9-x^2-y^2)$
7	$z = \ln x + \sqrt{x^2-y^2}$	22	$z = \sqrt{x+y} \cdot \ln(y^2-x^2)$
8	$z = \frac{\sqrt{1+x-y^2}}{\sqrt{1-x-y^2}}$	23	$z = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$
9	$z = \ln y + \sqrt{1-x^2-y^2}$	24	$z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$
10	$z = \arccos(x/(x+y)) + \ln(x+y)$	25	$z = \sqrt{16-x^2-y^2} - \ln(y-x^2)$
11	$z = \sqrt{1-(x+y^2)^2}$	26	$z = \arcsin(x^2+y^2-1)$
12	$z = \arcsin(x/y^2) + \ln y$	27	$z = \arcsin(x/2) + \sqrt{xy}$
13	$z = \arcsin(x+y) - \ln y$	28	$z = \sqrt{1-(x^2+y)} + \ln y$
14	$z = \frac{\ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$	29	$z = \frac{\sqrt{16-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
15	$z = \frac{\ln(x-y)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$	30	$z = \frac{\ln(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2-1}}$

Завдання 3. Перевірити, що дана функція $u = u(x, y)$ задовольняє вказаній умові. Переконатися, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$u = y \ln(x^2 - y^2);$ $\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$	16	$u = \arcsin(x/(x+y));$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
2	$u = x^y;$ $\frac{x}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$	17	$u = e^{x/y} \ln y;$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{\ln y}$
3	$u = x \operatorname{arctg}(y/x);$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$	18	$u = (x^2 + y^2)/(x - y);$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(x+y)}{x-y}$
4	$u = \sqrt{x} \sin(y/x);$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{2}$	19	$u = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}(x/y);$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$
5	$u = xy + xe^{y/x};$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$	20	$u = (2x + 3y)/(x^2 + y^2);$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$
6	$u = \sqrt{2xy + y^2};$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u}$	21	$u = e^{x/y};$ $y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
7	$u = e^{-x-3y} \sin(x+3y);$ $9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	22	$u = x \ln(y/x);$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$
8	$u = \ln(x/y) + x^3 - y^3;$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u - 3 \ln \frac{x}{y}$	23	$u = y \ln(x^2 - y^2);$ $y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

9	$u = y \sin(x^2 - y);$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2u}{y} - 4x^2 u$	24	$u = y^2/(3x) + \arcsin(xy);$ $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$
10	$u = y/(x^2 - y^2);$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = -u$	25	$u = y^2 \sin(x^2 - y^2);$ $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 2xu$
11	$u = \cos y + (y - x) \sin y;$ $(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$	26	$u = xy \cos(x - y);$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2u}{y} - u$
12	$u = \arctg(2x - y);$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$	27	$u = e^{x/y^2};$ $2x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
13	$u = x \cdot \sin xy + \cos xy;$ $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = x \sin xy$	28	$u = \arcsin((x - y)/(x + y));$ $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
14	$u = x^y y^x;$ $x \frac{\partial u}{\partial x} +$ $+ y \frac{\partial u}{\partial y} = u(x + y + \ln u)$	29	$u = xe^{-y/x};$ $x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} +$ $+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
15	$u = y/(y^2 - 16x^2);$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	30	$u = 2e^{-x^2/y};$ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u}{2y}$

Завдання 4. Задано функцію $u = u(x, y, z)$ і дві точки M_0 та M_1 . Для даної функції в указаній точці M_0 знайти:

1. Градієнт $\text{grad } u|_{M_0}$ і модуль градієнта $|\text{grad } u|_{M_0}$.

2. $\frac{\partial u}{\partial l}|_{M_0}$ – похідну за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 M_1}$.

3. Кут φ між градієнтом $\text{grad } u|_{M_0}$ і вектором $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$;

4. Загальне рівняння дотичної площини α_d у точці M_0 до відповідної поверхні рівня $S : u(x, y, z) = u|_{M_0}$.

5. Канонічні рівняння нормальної прямої l_n до відповідної поверхні рівня $S : u(x, y, z) = u|_{M_0}$ у точці M_0 , а також параметричні рівняння цієї прямої.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$u = 4x^3y - y^2z + 3xyz^2$; $M_0(1; -1; 2)$; $M_1(2; 1; 4)$	16	$u = xy^4 - 4y^2z + 3yz^2$; $M_0(-3; -1; 2)$; $M_1(3; 1; 5)$
2	$u = x^3z - xy^2 - 2xyz$; $M_0(-1; 3; -2)$; $M_1(5; 5; -5)$	17	$u = 2x^3 - 4xy^2 - 3xyz$; $M_0(1; 3; -5)$; $M_1(0; 5; -3)$
3	$u = \frac{x^2}{y} - \frac{2y}{z^2} - \frac{x}{z}$; $M_0(2; 2; 2)$; $M_1(3; 0; 4)$	18	$u = \frac{9x}{y} + \frac{2y}{z^2} - \frac{x^2}{z}$; $M_0(-1; 3; 2)$; $M_1(0; 1; 4)$
4	$u = ze^{x^3 - 4xyz}$; $M_0(2; -1; -1)$; $M_1(5; -7; 1)$	19	$u = ye^{x^2 - yz}$; $M_0(2; 2; 2)$; $M_1(7; -8; 12)$
5	$u = 2x^3y - xy^2z + 20z$; $M_0(1; 5; 0)$; $M_1(5; 1; 2)$	20	$u = x^4y + 2xy^2z - 10xz$; $M_0(1; -3; 1)$; $M_1(3; -1; 2)$
6	$u = \sqrt{xy^2 + 2xyz + z^2}$; $M_0(1; -3; -1)$; $M_1(-1; -4; 1)$	21	$u = 2x^3y - xy^2 - z^2 - 3xyz$; $M_0(1; -1; 2)$; $M_1(5; -1; 5)$
7	$u = y \sin(4xy + z^2)$; $M_0(1; -1; 2)$; $M_1(5; -1; 5)$	22	$u = z \sin(xy^2z - 3z)$; $M_0(3; 1; -1)$; $M_1(6; -3; 11)$
8	$u = \ln(x^2z + y^3 - 4yz^2)$; $M_0(-1; 2; 1)$; $M_1(-3; 1; -1)$	23	$u = \ln(x^2 - y^3 - xyz^2 + 1)$; $M_0(-2; 2; 1)$; $M_1(-5; 8; 7)$

9	$u = \sqrt{y^2z + 2xz + z^4}$; $M_0(2; 2; 1)$; $M_1(5; -4; 7)$	24	$u = \sqrt{x^2 + y^4 - 2xyz^2}$; $M_0(1; -1; 1)$; $M_1(1; 2; 5)$
10	$u = xy^2z - 2xz^3 + z^4$; $M_0(-1; 2; 1)$; $M_1(-3; 1; 3)$	25	$u = x \sin(4xy + z^2 - 1)$; $M_0(1; -2; 3)$; $M_1(1; 4; -5)$
11	$u = 2y^2 - xyz^3 - z^4$; $M_0(3; 1; -1)$; $M_1(6; -3; 11)$	26	$u = y^2 - 2xz^3 + yz^2$; $M_0(5; 3; 1)$; $M_1(8; -1; 13)$
12	$u = z\sqrt{y^2 - xyz + x^3}$; $M_0(1; -3; -2)$; $M_1(3; 1; 2)$	27	$u = xe^{x-y-z^2}$; $M_0(1; -3; -2)$; $M_1(7; -1; 1)$
13	$u = \ln(x^3 - 3z - xyz^2)$; $M_0(2; 2; 1)$; $M_1(5; -4; 7)$	28	$u = \ln(x^4 - 2xz + xyz^2)$; $M_0(1; -1; -2)$; $M_1(7; 2; 0)$
14	$u = ye^{3x-y-z^2}$; $M_0(1; -1; -2)$; $M_1(4; 3; -2)$	29	$u = y \ln(x - 2y^3 + yz^2)$; $M_0(3; -1; -2)$; $M_1(4; 1; 0)$
15	$u = z \ln(x + 3y^3 - yz^2)$; $M_0(0; -1; -2)$; $M_1(3; 5; 0)$	30	$u = x \sin(x^2 + y^3) + e^{2x+z}$; $M_0(1; -1; -2)$; $M_1(5; -1; 1)$

Завдання 5. Дослідити на екстремум функцію $z = z(x, y)$.

№ в-та	$z = z(x, y)$
1	а) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 3$; б) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 2$
2	а) $z = 2 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$; б) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 9$
3	а) $z = 2x^2 + y^2 - xy - 20x - 30y - 2$; б) $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 + 2xy - 1$
4	а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 5$; б) $z = 2 - x^4 - y^4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2$

5	a) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y - 6;$ б) $z = y^3 - 3ye^{-x^2}$
6	a) $z = 5 + 6x - x^2 - xy - y^2;$ б) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy - 3$
7	a) $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 4;$ б) $z = x^2 + 2y^3 + 4y^2 - 2xy - 4$
8	a) $z = 4x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 10y - 1;$ б) $z = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 2$
9	a) $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2 - 3;$ б) $z = y^2 + 3x^2y - 30y - 18x + 2$
10	a) $z = 2x - y - x^2 + xy - y^2 + 3;$ б) $z = (5 - 2y + x)e^{y^2 - x}$
11	a) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 4;$ б) $z = x^3 + y^3 - 3xy - 5$
12	a) $z = 2x^2 - xy + y^2 - 4x - 6y + 5;$ б) $z = e^{-xy/2}(x + y)$
13	a) $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1;$ б) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2$
14	a) $z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y - 2;$ б) $z = (25 - 5x - 7y)e^{-x^2 - xy - y^2}$
15	a) $z = x^2 - 3xy - y^2 - 2x + 6y - 1;$ б) $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 3$
16	a) $z = 2x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 16y + 1;$ б) $z = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}$

17	a) $z = 6xy - 2x^2 - y^2 - 14x + 2$; б) $z = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$
18	a) $z = 2x^2 - y^2 + 3xy - 2x + 7y + 2$; б) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2 - 5$
19	a) $z = 10xy - 3x^2 - 2y^2 - 26x + 18y - 3$; б) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 6y - 1$
20	a) $z = 3x^2 + 2y^2 - 2xy + 18x + 8y - 2$; б) $z = x^3 - 3xe^{-y^2}$
21	a) $z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 6$; б) $z = (8x^2 - 6xy + 3y^2)e^{2x+3y}$
22	a) $z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 6y - 3$; б) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + 4$
23	a) $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 4$; б) $z = (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$
24	a) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 4y + 2$; б) $z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y - 5$
25	a) $z = 8x^2 - xy + 2y^2 - 16x + y - 5$; б) $z = (7x + 5y - 25)e^{-x^2-xy-y^2}$
26	a) $z = 5 - 3x^2 + 5y^2 - 8xy + 4x + 26y$; б) $z = (x - 1) / \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
27	a) $z = 2x^2 - 3y^2 - 2xy + 8x + 10y - 4$; б) $z = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}$
28	a) $z = 5x^2 - 3y^2 + 2xy - 18x - 10y - 3$; б) $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 - 4$

29	а) $z = 2 - 7x^2 - 5y^2 + 2xy - 34x + 34y$; б) $z = x^2y - 2y^2 + x^2 + 5y$
30	а) $z = 2x^2 - 3y^2 + 2xy - 10x + 16y - 1$; б) $z = x^3 + y^2 + 12xy - 2$

Завдання 6. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції $z = z(x, y)$ в указаній замкненій області D . Зробити рисунок області D у прямокутній системі координат Oxy .

№ в-га	Завдання	№ в-га	Завдання
1	$z = x^2 + 3y^2 + x - y + 3$; $D: x = 1, y = 1, x + y = 1$	16	$z = x^2 - 2xy - 4$; $D: y = 8, y = 2x^2$
2	$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$; $D: x = 0, y = 0, x + y = 3$	17	$z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4$; $D: x = 0, y = 0, x + y = 3$
3	$z = x^2 + y^2 - 2xy - x + y$; $D: y = 0, y = 4 - x^2$	18	$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 3$; $D: x = 0, y = 0, x + y = 1$
4	$z = y^2 - 4xy - 2$; $D: x = 0, x = 1 - y^2$	19	$z = x^2 + xy - 3$; $D: y = 4x^2 - 4, y = 0$
5	$z = 5 - 2x^2 - y^2 - xy$; $D: x = 1, y = 0, y = x$	20	$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 2$; $D: x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0$
6	$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 2$; $D: x = -3, y = 0, x + y = -1$	21	$z = 4x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 5$; $D: x = 0, y = 2, y = 2x$
7	$z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x + 1$; $D: x = 0, y = 0, x + y = 3$	22	$z = x^2 - 6xy + 6y - 3$; $D: x = 0, y = 0, x - y = 2$
8	$z = x^2 + 3y^2 + x - y + 6$; $D: x = 1, y = -1, x + y = 1$	23	$z = 5x^2 + y^2 - 3xy + 3$; $D: x = -1, y = -1, x + y = 1$
9	$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x - 3$; $D: x = 3, y = 0, x + y = -1$	24	$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 5$; $D: x = 0, y = 0, x + y = 3$

10	$z = -x^2 + 2xy + 8;$ $D: y = 0, y = 4 - x^2$	25	$z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x - 3;$ $D: x = 0, y = 0, x + y = -2$
11	$z = 4x^2 + 4xy - y^2 - 4x + 1;$ $D: y = 2x, y = 2, x = 0$	26	$z = -x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x;$ $D: x = 0, x = 9 - y^2$
12	$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y - 2;$ $D: y = x - 1, y = 0, x = -3$	27	$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 1;$ $D: x + y = 1, y = 0, x = 0$
13	$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 1;$ $D: y = x + 1, x = 3, y = 0$	28	$z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y;$ $D: x = 0, y = 0, x + y = 4$
14	$z = x^2 - 4xy - y^2 - 6x - 2y;$ $D: x = 0, y = 0, x - y = 4$	29	$z = -x^2 + y^2 - 2xy - 3y + 2;$ $D: y = 0, y = 4 - x^2$
15	$z = 2xy - 4x - 2y - 1;$ $D: x = 0, y = 0, x + y = 6$	30	$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6;$ $D: x = 0, y = 0, x + y = 1$

Завдання 7. Знайти екстремум функції $z = z(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$.

№ в-та	$z = z(x, y); \varphi(x, y) = 0$	№ в-та	$z = z(x, y); \varphi(x, y) = 0$
1	$z = x^2 + xy + y^2;$ $x + 2y - 1 = 0$	16	$z = 2x + y;$ $x^2 + y^2 - 5 = 0$
2	$z = 2x + y;$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$	17	$z = 3 - 4x - 8y;$ $x^2 - 8y^2 - 8 = 0$
3	$z = x^2 + y^2;$ $2x + 3y - 6 = 0$	18	$z = x^2 + y^2;$ $2x + 2y - 3 = 0$
4	$z = x + y; x^2 + y^2 - 5 = 0$	19	$z = xy^2; x + 2y - 1 = 0$
5	$z = x^2 - 2y^2;$ $2x + 3y - 6 = 0$	20	$z = x - 2y;$ $x^2 + y^2 - 3 = 0$
6	$z = xy; x + y - 1 = 0$	21	$z = xy^2; x - y - 1 = 0$

7	$z = x^2 - y^2;$ $2x - y - 3 = 0$	22	$z = 2x^2 + y^2;$ $x + y + 2 = 0$
8	$z = xy; 2x + y - 1 = 0$	23	$z = 2x + y; x + y^2 + 2 = 0$
9	$z = x^2 - y^2;$ $x + 2y - 1 = 0$	24	$z = x^2 + y^2;$ $3x + 2y - 6 = 0$
10	$z = 2 - 3x - 4y;$ $x^2 + y^2 - 25 = 0$	25	$z = x + 2y;$ $x^2 + y^2 - 4 = 0$
11	$z = x^2 + xy + y^2;$ $x^2 + y^2 - 1 = 0$	26	$z = 2x^2 + 12xy + y^2;$ $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$
12	$z = x^2 + y^2;$ $3x + y - 1 = 0$	27	$z = x + 2y;$ $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$
13	$z = x^2 + y^2;$ $2x - 3y - 6 = 0$	28	$z = x^2 - y^2;$ $2x - y - 6 = 0$
14	$z = 2x + y; x^2 - y - 4 = 0$	29	$z = x^2 + y^2; x + y - 1 = 0$
15	$z = x^2 + y^2;$ $3x - 2y - 6 = 0$	30	$z = x^2 - y^2;$ $x - 2y - 1 = 0$

Завдання 8. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ вказано підінтегральну функцію $f(x, y)$ і область інтегрування D , яка задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1. Зобразити область інтегрування D у прямокутній системі координат Oxy .

2. Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Oy , при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням за змінною x і внутрішнім інтегруванням за змінною y .

3. Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Ox , при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповід-

ний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням за змінною y і внутрішнім інтегруванням за змінною x .

№ в-га	Завдання
1	$f(x, y) = x^3 + 6xy^2$; $D: x^2/2 - y = 0; x - y = 0$
2	$f(x, y) = xy - x^3y$; $D: y - 3 = -x^2; 2x - y = 0$
3	$f(x, y) = 6xy$; $D: \sqrt{2 - x^2} + y = 0; x^2 + y = 0$
4	$f(x, y) = 6xy^3$; $D: y - x^2 + 2 = 0, y = x$
5	$f(x, y) = 2y - x^2y^3$; $D: 4x - y^2 = 0; x - 9 = 0$
6	$f(x, y) = 2x^3 + 3y^2$; $D: y = x^2; x + y - 2 = 0$
7	$f(x, y) = 2y/x^3$; $D: xy = 1, y = x, x = 3$
8	$f(x, y) = 2x - 3y$; $D: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 2x/3 + 3$
9	$f(x, y) = 6x^3y - 4xy^3$; $D: y - 3 = -x^2; y + 5 = x^2$
10	$f(x, y) = 3x^2 + xy^2$; $D: y = 1, y - 2x = 0, y + x = 6$
11	$f(x, y) = 2x^3 + xy^2$; $D: x^2 - y = 0; 2x - y = 0$
12	$f(x, y) = y \cos xy$; $D: y = \pi/2; y = \pi; x = 1; x = 2$
13	$f(x, y) = y(1 - x^2)$; $D: y = x^3, y - 4x = 0 (x \geq 0)$
14	$f(x, y) = 6xy^3$; $D: y = x^2 - 2, x - y = 0$
15	$f(x, y) = 3x^3y - 2xy^3$; $D: y = x, y + x^2 - 2 = 0$
16	$f(x, y) = (x - 2y)e^{-x}$; $D: x = 0; y = 2; x - y = 0$
17	$f(x, y) = 3x^2 - 4xy$; $D: y^2 + x - 3 = 0; y^2 = x + 1$
18	$f(x, y) = 2x + 3y$; $D: y = x^3; y = -2x^3; x = 1$
19	$f(x, y) = -2x^3y$; $D: x^2 + y^2 = 4$
20	$f(x, y) = 4x^3 - 5xy^4$; $D: y = 2, y^2 = x, x = 0$
21	$f(x, y) = 6x^2 - y$; $D: y^2 = x + 4, y = x + 2$
22	$f(x, y) = x^3y - 3xy^2$; $D: y + x = 0; y - 2 = -x^2$

23	$f(x, y) = 6y^2/x^3$; $D: y = x, xy = 4, x = 4$
24	$f(x, y) = xy - y^2$; $D: y = 0, 3x + y = 6, 3x + 2y = 12$
25	$f(x, y) = 2y/x^2$; $D: y = 1, xy = 16, y = x^3$
26	$f(x, y) = y \sin xy$; $D: y = \pi/2; y = \pi; x = 1; x = 2$
27	$f(x, y) = y \ln x$; $D: xy = 1, y = \sqrt{x}, x = 4$
28	$f(x, y) = 6x - yx^3$; $D: 2x - y - 1 = 0; x^2 + y - 2 = 0$
29	$f(x, y) = xy^2 - x^3$; $D: y = x^3, y = 8, x = 0$
30	$f(x, y) = y^2/x^2$; $D: xy = 9, x - y = 0, x = 9$

Завдання 9. Для потрійного інтеграла $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ вказано підінтегральну функцію $f(x, y, z)$ і область інтегрування V , яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1. Зобразити область інтегрування V у прямокутній системі координат $Oxyz$.

2. Спроектувати область інтегрування V на координатну площину Oxy і подати її як правильну в напрямі координатної осі Oz . Зробити відповідний рисунок правильної просторової області V та її проекції D_{xy} в просторовій системі координат $Oxyz$.

3. Подати плоску область D_{xy} як правильну в напрямі однієї з координатних осей Oy чи Ox і зробити відповідний рисунок у плоскій системі координат Oxy .

4. Обчислити даний потрійний інтеграл переходом до трикратного повторного інтеграла із самим внутрішнім інтегруванням за змінною z .

№ в-та	Завдання
1	$f(x, y, z) = 2y^2 - 2z$; $V: x = 1, y = 0, y = x, z = 0, z = x^2 + y^2$
2	$f(x, y, z) = 3y + 2xz$; $V: x + y = 1, z = x^2, y = 0, z = 0$

3	$f(x, y, z) = x^2 + y^2; \quad V: z = y^2 - x^2, z = 0, y = 1$
4	$f(x, y, z) = 2yz; \quad V: x^2 + y^2 = 9, z = x^2, z = 0$
5	$f(x, y, z) = 3y^2 - 2z; \quad V: x^2 + y^2 = 4z, z = 4$
6	$f(x, y, z) = xy^2z^3; \quad V: z = 2xy, y = x, x = 1, z = 0$
7	$f(x, y, z) = 4xz; \quad V: z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}, 2z = x^2 + y^2, y \geq 0$
8	$f(x, y, z) = y^2e^{xy}; \quad V: x = 0, y = 3, y = 3x, z = 0, z = 1$
9	$f(x, y, z) = 3xz^2; \quad V: y = 4 - x^2, z = y, z \geq 0$
10	$f(x, y, z) = 2xyz; \quad V: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, z = 0, z = y^2$
11	$f(x, y, z) = 2xy^2z; \quad V: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, z = 0, z = \sqrt{y}$
12	$f(x, y, z) = 2y^2z; \quad V: x = 1, y^2 = x, z = 1 - x, z = 2 - 2x$
13	$f(x, y, z) = 3xyz^2; \quad V: x = 0, 2x + y - 4 = 0, z = y^2, z \geq 0$
14	$f(x, y, z) = xy; \quad V: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 8 - x - 2y$
15	$f(x, y, z) = 2x^2yz; \quad V: y^2 = 4x, x = 1, z^2 = 4x, z \geq 0$
16	$f(x, y, z) = 3x^2 - 4z; \quad V: x^2 + y^2 = 1, x - 2y + z = 4, z = 0$
17	$f(x, y, z) = xyz; \quad V: y = x^2, x = y^2, z = 0, z = 2x - 3y$
18	$f(x, y, z) = 2z; \quad V: z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0$
19	$f(x, y, z) = y - 2xz; \quad V: x = 0, y = 1, y = x, z = y^2, z = 0$
20	$f(x, y, z) = y^2e^{-xy}; \quad V: x = 0, y = -2, y = 2x, z = 0, z = 1$
21	$f(x, y, z) = 3xyz^2; \quad V: y^2 = 4 - x, x - z = 0, z \geq 0$
22	$f(x, y, z) = 2yz; \quad V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0$
23	$f(x, y, z) = 6xyz; \quad V: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2 - x^2 - y^2, x \geq 0$
24	$f(x, y, z) = 2xyz; \quad V: y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, z + x = 4$
25	$f(x, y, z) = 6xyz; \quad V: x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, z = 0, z = y$
26	$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - z; \quad V: x = 1, y = 0, y = x, z = 0, z = x^2 + 3y^2$
27	$f(x, y, z) = 3x^2 - 2z; \quad V: y = 1, y = x^2, z = 0, z = 3x^2 + 2y^2$

28	$f(x, y, z) = 4 - x^2 - y^2 - 6z$; $V: x^2 + y^2 + z = 4, z = 0$
29	$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z$; $V: y = x^2, y = 1, z = 0, z = 2x^2 + y^2$
30	$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$; $V: x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = x^2 + y^2$

Завдання 10. Для матеріальної пластини вказаної форми D із заданою поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$ за допомогою подвійного інтеграла, переходячи до полярних координат, знайти:

1. Площу S , масу m і середню густину $\mu_{\text{сеп}}$ пластини.
2. Статичні моменти M_x і M_y відносно координатних осей Ox і Oy та центр маси $C(x_c, y_c)$ пластини.
3. Момент інерції I_0 пластини відносно початку координат O .

№ в-та	Завдання
1	$D: x = 1 + \sqrt{1 - y^2}; y = x; x = 2; \mu = y/x^2$
2	$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0; \mu = xy^2/(x^2 + y^2)$
3	$D: y = \sqrt{2x - x^2}; y = 0; \mu = xy/(x^2 + y^2)$
4	$D: \rho = 1 + \cos \varphi; x \geq 0; y \geq 0; \mu = xy/(x^2 + y^2)$
5	$D: y = \sqrt{9 - x^2}; y = x; x = 3; \mu = y/x^2$
6	$D: x = \sqrt{4 - y^2}; y = x; y = 2; \mu = x/y^2$
7	$D: y = 1 + \sqrt{1 - x^2}; y = x; y = -x; \mu = y/\sqrt{x^2 + y^2}$
8	$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16; x \geq 0; y \geq 0; \mu = x\sqrt{x^2 + y^2}$
9	$D: \frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2; y \geq 0; x \geq 0; \mu = \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
10	$D: y = \sqrt{1 - x^2}; y = x; x = 0; \mu = x/\sqrt{x^2 + y^2}$

11	$D: x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq x; \mu = y\sqrt{x^2 + y^2}$
12	$D: e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4; x \geq 0; y \geq 0; \mu = x \ln(x^2 + y^2)$
13	$D: x^2 + y^2 - 4y = 0; y \geq 2; \mu = x^2 / y^3$
14	$D: y = \sqrt{4x - x^2}; y = 0; \mu = y / \sqrt{x^2 + y^2}$
15	$D: x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq x\sqrt{3}; \mu = x(x^2 + y^2)$
16	$D: 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9; y \geq x; x \geq 0; \mu = x^2 y \sqrt{x^2 + y^2}$
17	$D: (x^2 + y^2)^2 = 2x^3; x \geq 0; y \geq 0; \mu = x / \sqrt{x^2 + y^2}$
18	$D: y = \sqrt{4 - x^2}; y = x; y = 2; \mu = y / (x^2 + y^2)$
19	$D: \rho = 2 + \sin \varphi; x \geq 0; y \geq 0; \mu = y / \sqrt{x^2 + y^2}$
20	$D: \rho = 2 + \cos \varphi; x \geq 0; y \geq 0; \mu = x / \sqrt{x^2 + y^2}$
21	$D: \rho = 6 \sin 2\varphi; x \geq 0; y \geq x; \mu = xy / (x^2 + y^2)$
22	$D: x = \sqrt{6y - y^2}; y = x; y = 6; \mu = x / y^2$
23	$D: (x^2 + y^2)^2 = y^3; x \geq 0; y \geq 0; \mu = xy / (x^2 + y^2)$
24	$D: y = \sqrt{4 - x^2}; y \geq x / \sqrt{3}; y \leq x; \mu = y / \sqrt{x^2 + y^2}$
25	$D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9; x \geq 0; y \geq 0; \mu = y\sqrt{x^2 + y^2}$
26	$D: \rho = 4 \cos 2\varphi; x \geq 0; y \geq 0; \mu = xy / (x^2 + y^2)$
27	$D: e \leq x^2 + y^2 \leq e^2; x \geq 0; y \geq 0; \mu = y \ln(x^2 + y^2)$
28	$D: x = \sqrt{2y - y^2}; x = 0; \mu = x / \sqrt{x^2 + y^2}$
29	$D: y = \sqrt{6x - x^2}; y = 0; \mu = y / \sqrt{x^2 + y^2}$
30	$D: \frac{\pi^2}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}; y \geq 0; x \geq 0; \mu = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Змістовий модуль 3.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

3.1. Криволінійний інтеграл за довжиною

3.1.1. Задача про масу дуги. Криволінійний інтеграл за довжиною (першого роду)

Нехай у деякій області D координатної площини Oxy задано неперервне плоске скалярне поле $\mu = f(x, y)$. Припустимо, що в цій області D лежить кусково-гладка матеріальна крива L . Нехай неперервна функція $\mu = f(x, y)$ визначає лінійну густину розподілу маси вздовж кривої L . Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} (рис. 90).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних частин Δl_i , $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Розглянемо одну з елементар-

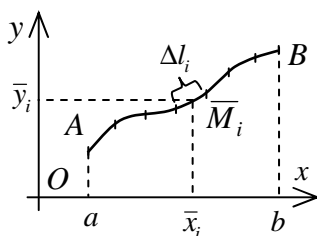


Рис. 90

них дуг Δl_i . Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$. Тоді $\Delta m_i \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i$ – маса елементарної дуги Δl_i . А маса всієї дуги L_{AB} :

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i.$$

Одержана сума називається *інтегральною* для функції $f(x, y)$ по довжині дуги L_{AB} .

$$\text{Очевидно, що } m = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i.$$

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається **криволінійним інтегралом за довжиною** (криволінійним інтегралом першого роду) і позначається:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i,$$

де dl – диференціал (елемент) довжини дуги.

Таким чином, $m = \int_{L_{AB}} \mu dl = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ (фізичний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB} : $l = \int_{L_{AB}} dl$ (геометричний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 1. При $f(x, y) \geq 0$ криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 91) з напрямною L_{AB} і паралельними

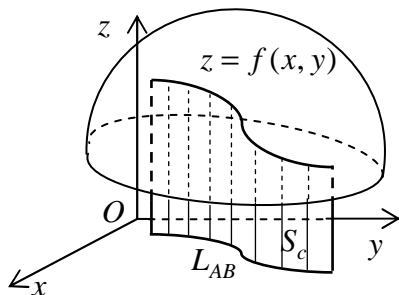


Рис. 91

осі Oz твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x, y)$:

$$S_c = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl.$$

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D , що містить в собі кусково-гладку криву L , то існує криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ (достатні

умови існування криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 3. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напрямку руху по дузі: $\int_{L_{BA}} f(x, y) dl = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl$. Інші властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла.

Зауваження 4. Поняття криволінійного інтеграла за довжиною поширюється на випадок дуги L_{AB} просторової лінії L , розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f(x, y, z)$:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta l_i.$$

3.1.2. Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірному інтегралу методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в параметричній

формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$, тобто коли параметр t змінюється на

відрізку $[\alpha; \beta]$, біжуча точка $(x(t); y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B . Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L e^y \operatorname{tg} x dl$, якщо

$$L: x = \arctg t; \quad y = \ln(1+t^2); \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

□ Обчислимо:

$$x' = \frac{1}{1+t^2}; \quad y' = \frac{2t}{1+t^2}; \quad dl = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} dt = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2} dt.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int_L e^y \operatorname{tg} x dl = \int_0^{\sqrt{2}} e^{\ln(1+t^2)} \operatorname{tg}(\arctg t) \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2} dt = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4t^2} t dt =$$

$$= \left| u = 1 + 4t^2; du = 8t dt; u_1 = 1; u_2 = 9 \right| = (1/8) \int_1^9 u^{1/2} du = \\ = (1/12) u^{3/2} \Big|_1^9 = 13/6. \blacksquare$$

Випадок 2. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Тоді

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \text{ Відповідно}$$

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.}$$

Приклад 2. Обчислити $I = \int_{AB} \frac{xy dl}{24 - 5x^2 - 8y^2}$, якщо AB є чвертю еліпса $x^2/4 + y^2 = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

$$\square AB: y = (1/2) \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2; \quad y' = -(1/2)x / \sqrt{4 - x^2};$$

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = (1/2) \left(\sqrt{16 - 3x^2} / \sqrt{4 - x^2} \right) dx;$$

$$I = \int_0^2 \frac{x(1/2)\sqrt{4 - x^2}}{24 - 5x^2 - 8 \cdot (1/4)(4 - x^2)} \cdot \frac{\sqrt{16 - 3x^2}}{2\sqrt{4 - x^2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 x dx = \\ = (1/8) x^2 \Big|_0^2 = 1/2. \blacksquare$$

Випадок 3. Нехай дуга L_{AB} задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тоді $dl = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$. Відповідно

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.}$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int_L \frac{y dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ за довжиною

дуги равлика Паскаля $L: \rho = 2 + \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

$$\square \rho' = -\sin \varphi; dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \sqrt{(2 + \cos \varphi)^2 + (-\sin \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \sqrt{5 + 4 \cos \varphi} d\varphi; f(x, y) = y / \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \varphi / \rho = \sin \varphi;$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \sqrt{5 + 4 \cos \varphi} d\varphi \mid u = 5 + 4 \cos \varphi; du = -4 \sin \varphi d\varphi;$$

$$u_1 = 9; u_2 = 5 \mid = -(1/4) \int_9^5 u^{1/2} du = -(1/6) \cdot u^{3/2} \Big|_9^5 =$$

$$= (1/6) (27 - 5\sqrt{5}). \blacksquare$$

Випадок 4. Якщо просторова дуга L_{AB} задана параметричними рівняннями $x = x(t); y = y(t); z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, то відповідний криволінійний інтеграл за довжиною обчислюється за формулою

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int_L (x^2 - y^2) z^{-3} dl$ за довжиною дуги гвинтової лінії $L: x = 2e^t \cos t; y = 2e^t \sin t; z = e^t, 0 \leq t \leq \pi/4$.

$$\square x' = 2(e^t \cos t - e^t \sin t); y' = 2(e^t \sin t + e^t \cos t); z' = e^t;$$

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = 3e^t dt;$$

$$f(x, y, z) = ((2e^t \cos t)^2 - (2e^t \sin t)^2)(e^t)^{-3} = 4e^{-t} \cos 2t;$$

$$I = 4 \int_0^{\pi/4} 4e^{-t} \cos 2t \cdot 3e^t dt = 6 \cdot \sin 2t \Big|_0^{\pi/4} = 6. \blacksquare$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл за довжиною $I = \int_{AB} (2x + y) z^{-2} dl$, де AB – відрізок прямої між точками $A(3; -5; 6)$ і $B(5; -8; 12)$.

(Розв'язати самостійно). Відповідь: $I = (7/36) \ln 2$.

3.1.3. Застосування криволінійного інтеграла за довжиною

За допомогою криволінійного інтеграла за довжиною можна обчислити довжину дуги і площу циліндричної поверхні.

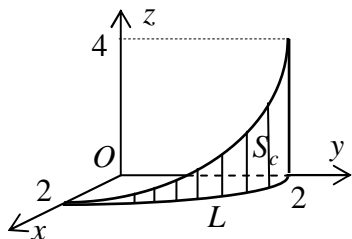


Рис. 92

Приклад 1. Обчислити площу S_c частини параболічного циліндра $y = \sqrt{4-2x}$, $0 \leq x \leq 2$, що розміщена між площиною $z = 0$ і циліндром $z = y^2/2$ (рис. 92).

$$\square L: y = \sqrt{4-2x}, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$y' = -1/\sqrt{4-2x};$$

$$dl = \sqrt{1+(y')^2} dx = \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}} dx; \quad S_c = \int_L \frac{y^3}{2} dl = \frac{1}{2} \int_0^2 (\sqrt{4-2x})^3 \times$$

$$\times \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}} dx = \int_0^2 (2-x)\sqrt{5-2x} dx = \left| 5-2x = u^2; \quad x = (5-u^2)/2; \right.$$

$$dx = -u du; \quad u = \sqrt{5-2x}; \quad u_1 = \sqrt{5}; \quad u_2 = 1 \Big| = \int_{\sqrt{5}}^1 (2 - (5-u^2)/2) u \times$$

$$\times (-u du) = (1/2) \int_{\sqrt{5}}^1 (u^2 - u^4) du = (1/2) \int_{\sqrt{5}}^1 u^2 du - (1/2) \times$$

$$\times \int_{\sqrt{5}}^1 u^4 du = (1/6) \cdot u^3 \Big|_{\sqrt{5}}^1 - (1/10) \cdot u^5 \Big|_{\sqrt{5}}^1 = (25\sqrt{5} + 1)/15. \quad \blacksquare$$

Маса плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y)$ визначається за формулою $m = \int_L \mu(x, y) dl$. Якщо густина стала $\mu_0 = const$, то $m = \mu_0 \int_L dl$.

Криволінійний інтеграл за довжиною можна застосувати для обчислення статичних моментів дуги L плоскої матеріальної кривої відносно осей Ox і Oy відповідно

$$\boxed{M_x = \int_L y \mu(x, y) dl}; \quad \boxed{M_y = \int_L x \mu(x, y) dl},$$

а також моментів інерції відносно осей Ox і Oy відповідно

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) dl; \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) dl;$$

чи відносно початку координат
$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \mu(x, y) dl.$$

Координати центра маси дуги L плоскої кривої

$$x_c = M_y/m; \quad y_c = M_x/m.$$

Приклад 2. Обчислити масу m , статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy , координати центра маси $C(x_c, y_c)$ і момент інерції I_x відносно осі Ox плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y)$:

а) $L: y = 2x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1; \quad \mu(x, y) = y/\sqrt{1+9x};$

б) $L: x = 2\cos t; y = 2\sin t, 0 \leq t \leq \pi/2; \quad \mu(x, y) = xy^2.$

□ а) $L: y = 2x^{3/2}; y' = 3x^{1/2}; dl = \sqrt{1+(y')^2} dx = \sqrt{1+9x} dx;$

$$m = \int_L \mu(x, y) dl = \int_L \left(y/\sqrt{1+9x} \right) dl = \int_0^1 \left(2x^{3/2}/\sqrt{1+9x} \right) \times \\ \times \sqrt{1+9x} dx = 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = (4/5) \cdot x^{5/2} \Big|_0^1 = 4/5;$$

$$M_x = \int_L y \mu(x, y) dl = \int_L y \left(y/\sqrt{1+9x} \right) dl = \\ = \int_0^1 \left((2x^{3/2})^2/\sqrt{1+9x} \right) \sqrt{1+9x} dx = 4 \int_0^1 x^3 dx = x^4 \Big|_0^1 = 4;$$

$$M_y = \int_L x \mu(x, y) dl = \int_L x \left(y/\sqrt{1+9x} \right) dl = \int_0^1 x \left(2x^{3/2}/\sqrt{1+9x} \right) \times \\ \times \sqrt{1+9x} dx = 2 \int_0^1 x^{5/2} dx = (4/7) \cdot x^{7/2} \Big|_0^1 = 4/7;$$

$$x_c = M_y/m = 4/(4/5) = 5; \quad y_c = M_x/m = (4/7)/(4/5) = 5/7;$$

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) dl = \int_L y^2 \left(y/\sqrt{1+9x} \right) dl = \int_0^1 \left((2x^{3/2})^3 : \right. \\ \left. : \sqrt{1+9x} \right) \sqrt{1+9x} dx = 8 \int_0^1 x^{9/2} dx = (16/11) \cdot x^{11/2} \Big|_0^1 = 16/11.$$

б) Розв'язати самостійно. ■

3.2. Векторне поле. Криволінійний інтеграл за координатами

3.2.1. Поняття векторного поля. Векторні лінії

Якщо кожній точці $M(x, y, z)$ деякої області D простору поставлений у відповідність вектор $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ - скалярні функції, то говорять, що задано **просторове векторне поле**.

У випадку плоскої області D говорять про **плоске векторне поле**. Зокрема, якщо область D лежить на координатній площині Oxy , то розглядається плоске векторне поле $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $P = P(x, y)$ і $Q = Q(x, y)$.

Надалі вважатимемо, що координатні функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Геометричними характеристиками векторного поля є векторні (силові) лінії.

Векторною (силовою) лінією поля $\vec{F} = \vec{F}(M)$ називається крива $\vec{r} = \vec{r}(t)$, дотична до якої в кожній її точці співпадає з вектором $\vec{F} = \vec{F}(M)$, що визначає поле в цій точці.

Прикладами векторних ліній в електротехніці є лінії вектора напруженості магнітного поля \vec{H} чи лінії вектора напруженості електричного поля \vec{E} .

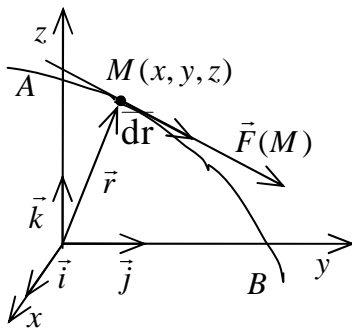


Рис. 93

З умови $d\vec{r} \parallel \vec{F}(M)$ (рис. 93) маємо диференціальні рівняння векторних ліній:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Приклад. Постійний електричний струм I тече по нескінченно довгому провіднику, співпадаючому

з віссю Oz , в напрямі цієї осі (рис. 94). Вектор напруженості магнітного поля \vec{H} , створюваного цим струмом, у довільній точці $M(x, y, z)$ дорівнює

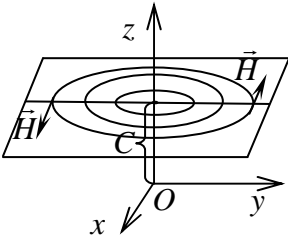


Рис. 94

$$\vec{H} = \left(I / (2\pi\rho^2) \right) (-y\vec{i} + x\vec{j}),$$

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - відстань від точки M до осі Oz . Знайти векторні лінії магнітного поля \vec{H} .

□ Запишемо векторне поле у вигляді

$$\vec{H} = -\frac{Iy}{2\pi\rho^2}\vec{i} + \frac{Ix}{2\pi\rho^2}\vec{j} + 0\cdot\vec{k},$$

$$\text{тобто } P = -\frac{Iy}{2\pi\rho^2}, \quad Q = \frac{Ix}{2\pi\rho^2}, \quad R = 0.$$

Диференціальні рівняння векторних ліній після очевидних спрощень набувають вигляду:

$$\begin{cases} dx/(-y) = dy/x; \\ z = C_1 \quad (C_1 = \text{const}) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x dx = -y dy; \\ z = C_1. \end{cases}$$

$$\text{Після інтегрування одержуємо} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = C_2^2 \quad (C_2 = \text{const}); \\ z = C_1 \end{cases}$$

- двопараметрична сім'я кіл з центрами на осі Oz . ■

3.2.2. Дивергенція та ротор векторного поля

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Дивергенцією (розбіжністю) векторного поля \vec{F} у точці $M(x, y, z)$ називається число

$$\boxed{\text{div}\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}}.$$

Дивергенція є скалярною характеристикою векторного поля.

Якщо $\text{div}\vec{F}(M) > 0$, то точка M називається **джерелом** (ви-

током), а якщо $\operatorname{div}\vec{F}(M) < 0$, то точка M називається *стоком*.

Незамкнені векторні лінії починаються в джерелах і закінчуються в стоках.

Дивергенція характеризує потужність джерел і стоків. Кожному векторному полю \vec{F} відповідає скалярне поле $\operatorname{div}\vec{F}$ розподілу джерел та стоків поля \vec{F} .

Векторне поле \vec{F} називається *соленоїдальним (трубчатим)*, якщо в кожній точці його дивергенція дорівнює нулю: $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

Соленоїдальне поле не має ані джерел, ані стоків. Його векторні лінії не можуть ні починатися, ні закінчуватися всередині поля. Вони або замкнуті, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки (у випадку необмеженого поля).

Приклад 1. Знайти дивергенцію даного векторного поля в указаних точках:

$$\vec{F} = x^2 z^3 \vec{i} + 2yz^2 \vec{j} + xy^4 \vec{k}; \quad M_1(1,0,-2); \quad M_2(-2,1,-1).$$

$$\square \quad P = x^2 z^3; \quad Q = 2yz^2; \quad R = xy^4; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2xz^3; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2z^2; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0;$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2xz^3 + 2z^2; \quad \operatorname{div}\vec{F}(M_1) = -8 < 0,$$

M_1 - точка стоку; $\operatorname{div}\vec{F}(M_2) = 6 > 0$, M_2 - точка витoku. ■

Приклад 2. Перевірити, що дане векторне поле є соленоїдальним: $\vec{F} = (y \sin(x^2 - y^2) - x^2) \vec{i} + x \sin(x^2 - y^2) \vec{j} + 2xz \vec{k}$.

$$\square \quad P = y \sin(x^2 - y^2) - x^2; \quad Q = x \sin(x^2 - y^2); \quad R = 2xz;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy \cos(x^2 - y^2) - 2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2xy \cos(x^2 - y^2); \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2x;$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2xy \cos(x^2 - y^2) - 2x -$$

$-2xy \cos(x^2 - y^2) + 2x = 0$. Отже, поле соленоїдальне. ■

Ротором (вихором) векторного поля \vec{F} у точці $M(x, y, z)$

називається вектор

$$\text{rot } \vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Big|_M = \left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Ротор є векторною характеристикою поля \vec{F} .

Кожному векторному полю \vec{F} відповідає векторне поле його роторів $\text{rot } \vec{F}$, що характеризує обертання поля \vec{F} в кожній точці.

Векторне поле \vec{F} називається **безвихровим**, якщо в кожній точці його ротор дорівнює нулю: $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$.

Зауваження 1. Для плоского векторного поля $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ ротор $\text{rot } \vec{F} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k}$ перпендикулярний до площини Oxy .

Зауваження 2. Кожне векторне поле \vec{F} може бути подане як сума безвихрового та соленоїдального полів.

Приклад 3. Знайти ротор даного векторного поля в указаній точці: $\vec{F} = y^2\vec{i} - 2xz\vec{j} - yx^2\vec{k}$; $M(1, -1, 0)$.

$$\begin{aligned} \square \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & -2xz & -yx^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(-yx^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-2xz)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial(-yx^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial z} \right) \vec{j} + \\ &- \left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = (2x - x^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - 2(z + y)\vec{k}; \end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{F}(M) = (2 \cdot 1 - 1^2) \cdot \vec{i} + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \vec{j} - 2(0 - 1)\vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}. \blacksquare$$

Приклад 4. Перевірити, що дане векторне поле є безвихровим:

$$\vec{F} = (6xz + y^3) \vec{i} + 3xy^2 \vec{j} + (3x^2 - 4z^3) \vec{k}.$$

$$\square \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 6xz + y^3 & 3xy^2 & 3x^2 - 4z^3 \end{vmatrix} = \\ = (0 - 0) \vec{i} - (6x - 6x) \vec{j} + (3y^2 - 3y^2) \vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, векторне поле безвихрове. ■

Щільністю циркуляції векторного поля \vec{F} у точці $M(x, y, z)$ у напрямі вектора \vec{n} називається число

$$C_{\vec{n}}(M) = n p_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{F}(M).$$

Щільність циркуляції $C_{\vec{n}}(M)$ в даній точці M досягає максимуму в напрямі ротора $\operatorname{rot} \vec{F}(M)$ і дорівнює його модулю:

$$C_{\max}(M) = |\operatorname{rot} \vec{F}(M)|, \quad \vec{n}_{\max} = \operatorname{rot} \vec{F}(M).$$

Приклад 5. Знайти максимальну щільність циркуляції даного векторного поля в указаній точці:

$$\vec{F} = (xz/y) \vec{i} - 2y^2 z \vec{j} + x^2 y^3 \vec{k}; \quad M(-1, 1, 2).$$

$$\square \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz/y & -2y^2 z & x^2 y^3 \end{vmatrix} = (3x^2 y^2 + 2y^2) \vec{i} -$$

$$-(2xy^3 - x/y) \vec{j} + (xz/y^2) \vec{k}; \quad \operatorname{rot} \vec{F}(M) = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k};$$

$$C_{\max}(M) = |\operatorname{rot} \vec{F}(M)| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{30};$$

$$\vec{n}_{\max} = \operatorname{rot} \vec{F}(M) = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}. \quad \blacksquare$$

Векторне поле \vec{F} називається **гармонічним**, якщо воно одночасно соленоїдальне і безвихрове.

Векторне поле \vec{F} гармонічне, якщо в кожній його точці дивергенція і ротор дорівнюють нулю: $\operatorname{div} \vec{F} = 0, \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$.

Приклад 6. Перевірити, що дане векторне поле є гармонічним:

$$\vec{F} = (yz + 5x)\vec{i} + (xz - 3y)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}.$$

$$\begin{aligned} \square \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(yz + 5x) + \frac{\partial}{\partial y}(xz - 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - \\ &- 2z) = 5 - 3 - 2 = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz + 5x & xz - 3y & xy - 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xy - 2z)}{\partial y} - \frac{\partial(xz - 3y)}{\partial z} \right) \vec{i} - \\ &- \left(\frac{\partial(xy - 2z)}{\partial x} - \frac{\partial(yz + 5x)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(xz - 3y)}{\partial x} - \frac{\partial(yz + 5x)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= (x - x)\vec{i} - (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Отже, векторне поле гармонічне. ■

3.2.3. Криволінійний інтеграл за координатами (другого роду). Циркуляція векторного поля

Задача про роботу векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Нехай під дією змінної сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ матеріальна точка M рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L . Необхідно обчислити роботу \tilde{A} , яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AB} від початкової точки A до кінцевої точки B (рис. 95).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i , $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$. Розглянемо елементарну дугу Δl_i , якій відповідає вектор переміщення $\Delta \vec{l}_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$. Не-

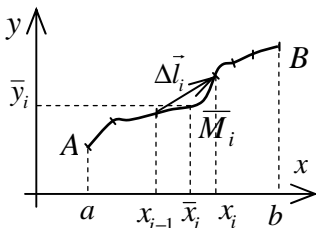


Рис. 95

хай довжина ΔL_i цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F} = \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta L_i$.

Елементарна робота $\Delta \tilde{A}_i$ на ділянці ΔL_i визначається скалярним до-

бутком

$$\Delta \tilde{A}_i \approx \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta \vec{L}_i = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i.$$

Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках ΔL_i , $i = \overline{1, n}$ і скласти суму, то $\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{A}_i \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i)$.

Одержана сума називається *інтегральною* для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ по напрямленій дузі L_{AB} .

Очевидно, що
$$\tilde{A} = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{A}_i.$$

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n (P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i)$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається **криволінійним інтегралом за координатами (криволінійним інтегралом другого роду)** і позначається

$$\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

$$= \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i),$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Криволінійний інтеграл за координатами у векторному полі також називається **циркуляцією вектора \vec{F} по дузі L_{AB}** і позна-

чається
$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta \vec{l}_i,$$

де $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ – **вектор диференціала (елемента) довжини плоскої дуги**.

Таким чином,
$$\vec{A} = \int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l}$$

(фізичний зміст криволінійного інтеграла за координатами).

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так

$$\oint_L \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

причому початкова точка вибирається довільно і вказується напрям обходу. Якщо напрям обходу замкненого контуру L явно не зазначено, то приймається додатний напрям (при цьому область, обмежена контуром, залишається зліва – рух проти годинникової стрілки (правило "правого гвинта")).

Зауваження. Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\oint_{L_{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l} = \oint_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

де $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – **вектор диференціала (елемента) довжини просторової дуги**.

3.2.4. Властивості криволінійного інтеграла за координатами

Криволінійний інтеграл за координатами визначається підінтегральним виразом, довжиною і формою кривої інтегрування та її напрямом.

Властивість 1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак

$$\int_{L_{BA}} \vec{F} d\vec{l} = - \int_{L_{AB}} \vec{F} d\vec{l}.$$

Це впливає з означення, оскільки при цьому вектор $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, а відповідно і його проєкції dx , dy і dz , змінюють знак.

Властивість 2. Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, повний криволінійний інтеграл за координатами можна розглядати як суму трьох інтегралів

$$\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L P dx + \int_L Q dy + \int_L R dz,$$

де кожен з трьох інтегралів справа також називається відповідно **криволінійним інтегралом за координатою** x , y чи z .

Властивість 3. Розглянемо циркуляцію $\oint_L \vec{F} d\vec{l}$ по замкненому контуру L . З'єднаємо дві довільні точки A і B цього контура дугою L_{AB} (рис. 96). Таким чином, одержимо два замкнені контури $L_1 = AmB$ і $L_2 = BnA$. Тоді

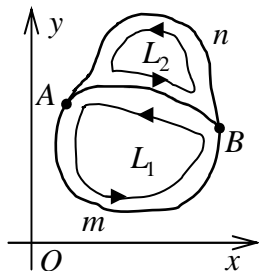


Рис. 96

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{F} d\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{F} d\vec{l},$$

оскільки $\int_{L_{AB}} \vec{F} d\vec{l} + \int_{L_{BA}} \vec{F} d\vec{l} = 0$.

Тобто, при розбитті замкненого контура на замкнені підконттури значення сумарного криволінійного інтеграла не змінюється. Ця властивість виражає закон збереження обертального руху.

Властивість 4 (зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду). Оскільки $|d\vec{l}| = dl$, то $dx = dl \cos \alpha$, $dy = dl \cos \beta$, $dz = dl \cos \gamma$, де α, β, γ – напрямні кути вектора $d\vec{l}$. Тоді криволінійний інтеграл за координатами зводиться до криволінійного інтеграла за довжиною

$$\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L P dl \cos \alpha + Q dl \cos \beta + R dl \cos \gamma = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl.$$

Зауваження. Інші властивості аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

3.2.5. Обчислення криволінійного інтеграла за координатами

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами здійснюється зведенням його до одновимірному інтегралу методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах у параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тоді $dx = x'(t)dt$; $dy = y'(t)dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Приклад 1. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = (x/y)\vec{i} + 2\vec{j}$ по дузі циклоїди $L: x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$, $\pi/3 \leq t \leq \pi/2$.

$$\square \quad dx = (1 - \cos t) dt; \quad dy = \sin t dt; \quad \int_L \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_L (x/y) dx +$$

$$+ 2 dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} [(t - \sin t)/(1 - \cos t)](1 - \cos t) + 2 \sin t dt =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} (t - \sin t + 2 \sin t) dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} t dt + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin t dt =$$

$$= (1/2)t^2 \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - \cos t \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 5\pi^2/72 + 1/2. \quad \blacksquare$$

Випадок 2. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Можна використати попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$$\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases} \quad a \leq x \leq b. \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} dy = y'(x) dx \\ dx = dx \end{cases} \quad \text{і маємо}$$

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$$

$$= \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx.$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^5/y)\vec{j}$ по дузі кубічної параболи $L: y = x^3$, $1 \leq x \leq 2$.

$$\square L: y = x^3, 1 \leq x \leq 2; y' = 3x^2; dy = 3x^2 dx;$$

$$\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_L 2xy dx + (x^5/y) dy = \int_1^2 [2x x^3 + (x^5/x^3) \times$$

$$\times 3x^2] dx = 5 \int_1^2 x^4 dx = x^5 \Big|_1^2 = 31. \quad \blacksquare$$

Випадок 3. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тоді $dx = x'(t) dt$; $dy = y'(t) dt$; $dz = z'(t) dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy +$$

$$+ R(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

Приклад 3. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = xz\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y - 2)\vec{k}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1, 0, -3)$ та $B(2, -2, 0)$.

□ Знайдемо канонічні рівняння прямої AB :

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{-2-0} = \frac{z+3}{0+3}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$x = t + 1; \quad y = -2t; \quad z = 3t - 3; \quad dx = dt; \quad dy = -2dt; \quad dz = 3dt.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо на відрізку L_{AB} $1 \leq x \leq 2$, то $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \int_{L_{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{l} &= \int_{L_{AB}} xz \, dx + 2y \, dy + (x + y - 2) \, dz = \\ &= \int_0^1 [(t+1)(3t-3) + 2(-2t) \cdot (-2) + (t+1-2t-2) \cdot 3] dt = \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 3 + 8t - 3t - 3) dt = 3 \int_0^1 t^2 dt + 5 \int_0^1 t dt - 6 \int_0^1 dt = \\ &= t^3 \Big|_0^1 + (5/2) \cdot t^2 \Big|_0^1 - 6t \Big|_0^1 = -2/5. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.2.6. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. (Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом). Нехай задано плоске векторне поле $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ де $P = P(x, y)$ та $Q = Q(x, y)$ - функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y$ і $\partial Q/\partial x$. Якщо L - замкнена лінія, що обмежує однозв'язну область D , то

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy$$

(формула Гріна).

□ Обмежимося розглядом області D , правильної в напрямі осі Oy (рис. 97). Обчислимо

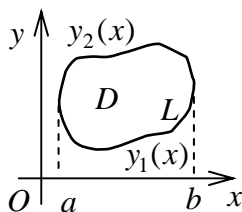


Рис. 97

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b (P(x, y_2(x)) - \end{aligned}$$

$$-P(x, y_1(x)) dx = -\int_b^a P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx =$$

$$= -\oint_L P(x, y) dx. \text{ Аналогічно } \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dx.$$

Склавши відповідні вирази, маємо

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \blacksquare$$

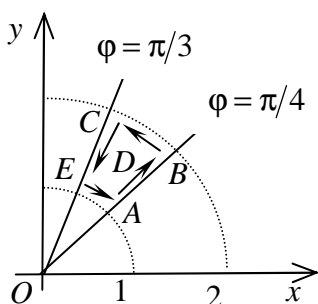


Рис. 98

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити циркуляцію $I = \oint_L \ln(x^2 + y^2) dx + 2 \operatorname{arctg}(y/x) dy$, якщо L - замкнений контур $ABCE$, утворений колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ та прямими $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, де $x > 0$, $y > 0$ (рис. 98).

□ У прийнятих позначеннях

$$P(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$$

$$Q(x, y) = 2 \operatorname{arctg}(y/x).$$

Знайдемо $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}.$

Тоді за формулою Гріна

$$I = \oint_L \ln(x^2 + y^2) dx + 2 \operatorname{arctg}(y/x) dy = -4 \iint_D \frac{y dx dy}{x^2 + y^2},$$

де область D обмежена контуром L .

Перейдемо до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, де $1 \leq \rho \leq 2$, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/3$. Отже,

$$I = -4 \iint_D \frac{y dx dy}{x^2 + y^2} = -4 \iint_D \frac{\rho \sin \varphi}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = -4 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi \int_1^2 d\rho =$$

$$= -4 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \rho_1^2 \sin \varphi \, d\varphi = 4 \cos \varphi \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 - 2\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Нехай замкнений контур L обмежує однозв'язну область D . За формулою Гріна

$$\oint_L -y \, dx + x \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy = \iint_D (1+1) dx dy =$$

$$= 2 \iint_D dx dy = 2S_D. \quad \text{Звідси } \boxed{S_D = (1/2) \oint_L -y \, dx + x \, dy},$$

де S_D – площа плоскої області D , що обмежена контуром L .

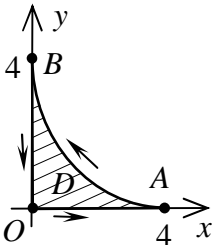


Рис. 99

Приклад 2. За допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої області D , що обмежена осями координат $x=0$, $y=0$ і дугою астроїди $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$, розміщеною в першому квадранті ($x \geq 0$, $y \geq 0$) (рис. 99).

□ Контур L_{OABO} , що обмежує область D , складається з трьох ділянок OA , AB і BO . Відповідно розіб'ємо криволінійний інтеграл:

$$S_D = (1/2) \oint_{L_{OABO}} -y \, dx + x \, dy = (1/2) \left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} \right).$$

$$\text{Тоді } OA: y=0, x_1=0, x_2=4; dy=0; \int_{OA} -y \, dx + x \, dy =$$

$$= \int_0^4 (-0 + x \cdot 0) dx = 0;$$

$$AB: x=4\cos^3 t, y=4\sin^3 t, t_1=0, t_2=\pi/2;$$

$$dx = -12\cos^2 t \sin t \, dt; dy = 12\sin^2 t \cos t \, dt; \int_{AB} -y \, dx + x \, dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-4\sin^3 t \cdot (-12)\cos^2 t \sin t + 4\cos^3 t \cdot 12\sin^2 t \cos t \right) dt =$$

$$= 48 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt =$$

$$= 6 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = 6t \Big|_0^{\pi/2} - (3/4) \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} = 3\pi;$$

$$BO: x=0, y_1=4, y_2=0; dx=0; \int_{BO} -y dx + x dy = \int_4^0 (-y \cdot 0 + 0) dy = 0. \text{ Отже, } S_D = (1/2)(0 + 3\pi + 0) = 3\pi/2. \blacksquare$$

3.2.7. Умови незалежності криволінійного інтеграла за координатами від шляху інтегрування

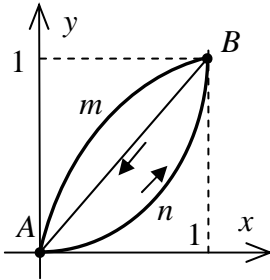


Рис. 100

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_{L_{AB}} \vec{F} d\vec{l} = \int_{L_{AB}} 2xy dx + x^2 dy$ по двом різним шляхам, що з'єднують точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$ (рис. 100):

а) дуга параболи $L_{AmB}: y = \sqrt{x}, x_1 = 0, x_2 = 1$; б) дуга кубічної параболи $L_{AnB}: y = x^3, x_1 = 0, x_2 = 1$.

$$\square \text{ а) } L_{AmB}: y = \sqrt{x}; y' = (1/2)/\sqrt{x};$$

$$\int_{L_{AmB}} \vec{F} d\vec{l} = \int_{L_{AmB}} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2x\sqrt{x} + x^2 (1/2)/\sqrt{x}) dx = (5/2) \int_0^1 x^{3/2} dx = x^{5/2} \Big|_0^1 = 1;$$

$$\text{б) } L_{AnB}: y = x^3; y' = 3x^2; \int_{L_{AnB}} \vec{F} d\vec{l} = \int_{L_{AnB}} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (2xx^3 + x^2 3x^2) dx = 5 \int_0^1 x^4 dx = x^5 \Big|_0^1 = 1. \blacksquare$$

Аналіз прикладу показує, що значення інтеграла по двом різним за формою шляхам інтегрування співпадають:

$$\int_{L_{AnB}} \vec{F} d\vec{l} = \int_{L_{AmB}} \vec{F} d\vec{l}.$$

Звідси інтеграл по замкненій лінії $L = AnBmA$, очевидно, дорівнює нулю: $\oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0$.

Виникає питання: за яких умов щодо функцій $P = P(x, y)$ і $Q = Q(x, y)$ виконується рівність

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0?$$

Теорема. Нехай у всіх точках деякої однозв'язної області D функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\partial P/\partial y$ та $\partial Q/\partial x$. Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду по довільному замкненому контуру L , який цілком лежить в області D , дорівнював нулю, необхідно і достатньо виконання умови $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ у всіх точках області D :

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \Leftrightarrow \oint_L Pdx + Qdy = 0.$$

□ Нехай контур L обмежує область $D_1 \subseteq D$. Запишемо формулу Гріна

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Якщо умова теореми виконана, то подвійний інтеграл у правій частині дорівнює нулю і цим доведено достатність.

Доведемо необхідність методом від супротивного. Припустимо, що $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, а умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ не виконується хоча б в одній точці $M_0(x_0, y_0)$ області D , скажімо, в цій точці $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y > 0$.

Оскільки в лівій частині нерівності функція неперервна, то вона буде додатна у всіх точках деякої досить малої області $D_1 \subseteq D$, яка містить в собі точку $M_0(x_0, y_0)$. Візьмемо подвійний інтеграл по цій області, який матиме додатне значення $\iint_{D_1} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) dx dy > 0$.

Але за формулою Гріна ліва частина одержаної нерівності дорівнює криволінійному інтегралу по контуру L , який обмежує область D_1 , і за припущенням дорівнює нулю. Отже, це припущення невірне. Приходимо до висновку, що $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ в усіх точках

області D . ■

Коли згадати, що рівність $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ був повним диференціалом, то доведену теорему можна сформулювати так: для того, щоб криволінійний інтеграл $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.

Підсумовуючи висновки нашого дослідження, можна стверджувати, що коли область D однозв'язна і функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\partial P/\partial y$ та $\partial Q/\partial x$ у цій області, то всі чотири наступні твердження рівносильні, тобто якщо виконується одне з них, то виконуються і всі інші:

1) криволінійний інтеграл $\oint_L Pdx + Qdy$, взятий по довільному замкненому контуру L , цілком розміщеному в області D , дорівнює нулю;

2) криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$ не залежить від форми лінії інтегрування L_{AB} , що цілком лежить в області D і з'єднує початкову A і кінцеву B точки;

3) вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повний диференціал деякої функції $u(x, y)$, тобто в області D існує така функція $u(x, y)$, що $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, де $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ і $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$;

4) у всіх точках області D має місце рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Зауваження. На практиці зручно користуватись останньою умовою $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

Приклад 2. Використовуючи умову $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, перевірити, що $\oint_L (x^3 + y \operatorname{tg} x)dx + (4y + \ln \cos x)dy = 0$.

□ $\partial P/\partial y = \operatorname{tg} x = \partial Q/\partial x$. ■

3.2.8. Обчислення функції за її повним диференціалом. Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах

Розглянемо функцію $u(x, y)$, задану в деякій області D , де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Позначимо $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$. Тоді для повного диференціалу $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Але за цієї умови криволінійний інтеграл $\int_{L_{M_0 M_1}} P dx + Q dy$ не залежить від форми шляху інтегрування, а визначається положенням початкової $M_0(x_0, y_0)$ та кінцевої $M_1(x_1, y_1)$ точок. Такий інтеграл записується так $\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, де шлях інтегрування обирається довільно.

Зауваження 1. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії $M_0 N M_1$, ланки $M_0 N$ і $N M_1$ якої паралельні осям координат. При цьому можливі два способи побудови ламаної, що відображені на рис. 101 і рис. 102.

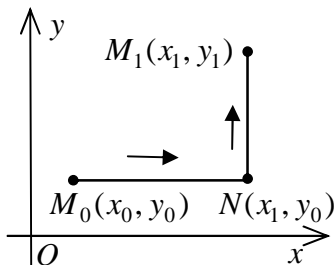


Рис. 101

Для першого способу (рис. 101): на відрізку $M_0 N$: $y = y_0 = \text{const}$; $dy = 0$, а на відрізку $N M_1$: $x = x_1 = \text{const}$; $dx = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{N(x_1, y_0)} P(x, y) dx + \int_{N(x_1, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} Q(x, y) dy = \\ & = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy. \end{aligned}$$

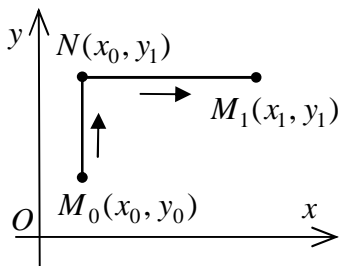


Рис. 102

Для другого способу (рис. 102): на відрізку M_0N : $x = x_0 = const$; $dx = 0$, а на відрізку NM_1 : $y = y_1 = const$; $dy = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{N(x_0, y_1)} Q(x, y)dy + \int_{N(x_0, y_1)}^{M_1(x_1, y_1)} P(x, y)dx =$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)dx.$$

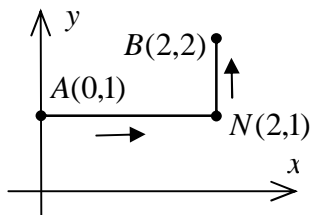


Рис. 103

Приклад 1. Знайти інтеграл

$$\int_{A(0,1)}^{B(2,2)} \left(x - 2x/y \right) dx + \left(3 + x^2/y^2 \right) dy.$$

□ За шлях інтегрування оберемо ламану ANB (рис. 103). На відрізку AN : $y = 1 = const$, $dy = 0$, а на відрізку NB : $x = 2 = const$, $dx = 0$. Тоді

$$\int_{A(0,1)}^{B(2,2)} \left(x - \frac{2x}{y} \right) dx + \left(3 + \frac{x^2}{y^2} \right) dy = \int_{A(0,1)}^{N(2,1)} \left(x - \frac{2x}{1} \right) dx + \int_{N(2,1)}^{B(2,2)} \left(3 + \frac{x^2}{y^2} \right) dy = \int_0^2 \left(x - \frac{2x}{1} \right) dx + \int_1^2 \left(3 + \frac{2^2}{y^2} \right) dy = -\left(\frac{1}{2} \right) x^2 \Big|_0^2 + \left(3y - \frac{4}{y} \right) \Big|_1^2 = 3. \blacksquare$$

Зауваження 2. Якщо в криволінійному інтегралі, що не залежить від форми шляху інтегрування, початкову точку $M_0(x_0, y_0)$ зафіксувати, а кінцеву точку $M(x, y)$ розглядати як змінну, то цей інтеграл буде деякою функцією координат x і y точки $M(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Функцію $u(x, y)$ називають **первісною**. Задача відшукування функції (первісної) $u(x, y)$ за її повним диференціалом роз-

в'язується з точністю до довільної сталої:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + C, \quad C = \text{const},$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їх частинні похідні неперервні.

Використовуючи поняття первісної, дістаємо **формулу Ньютона – Лейбница** для криволінійних інтегралів

$$\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} P dx + Q dy = u(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0).$$

Приклад 2. Перевірити, що вираз $(y dx + x dy) \sin xy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$ та знайти цю функцію (первісну). За допомогою отриманої первісної обчислити відповідний криволінійний інтеграл $I = \int_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} y \sin xy dx + x \sin xy dy$.

□ Запишемо даний вираз у вигляді $y \sin xy dx + x \sin xy dy$. Тобто $P(x, y) = y \sin xy$; $Q(x, y) = x \sin xy$. Обчислимо

$$\partial P / \partial y = \sin xy + xy \cos xy; \quad \partial Q / \partial x = \sin xy + xy \cos xy.$$

Як бачимо, $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$. Значить, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію.

Нехай $M_0(0,0)$ – початкова точка. За шлях інтегрування обемо ланаму M_0NM , де на відрізку M_0N : $y = 0 = \text{const}$, $dy = 0$, а на відрізку NM : $x = x = \text{const}$, $dx = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} y \sin xy dx + x \sin xy dy + C = \int_{M_0(0,0)}^{N(x,0)} + \int_{N(x,0)}^{M(x,y)} + \\ &+ C = \int_0^x 0 \cdot \sin(x \cdot 0) dx + \int_0^y x \sin xy dy + C = 0 + \\ &+ x \cdot \left. (-1/x) \cos xy \right|_0^y + C = -\cos xy + 1 + C. \end{aligned}$$

Включивши одиницю в довільну сталу, маємо

$$u(x, y) = \tilde{C} - \cos xy, \quad \text{де } \tilde{C} \text{ – довільна стала.}$$

Даний інтеграл знайдемо за формулою Ньютона – Лейбница:

$$I = \int_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} y \sin xy \, dx + x \sin xy \, dy = -\cos xy \Big|_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} = 2. \quad \blacksquare$$

Зауваження 3. Якщо для диференціального рівняння першого порядку $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ виконується умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, то воно називається **рівнянням у повних диференціалах**. Оскільки ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, то відновлюючи функцію за її повним диференціалом, загальний розв'язок (загальний інтеграл) $u(x, y) = C$ вказаного рівняння можна подати в одній із форм

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C; \quad \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx = C.$$

Приклад 3. Пересвідчитися, що диференціальне рівняння

$$(y \sin x + \sin y - 1/x^2)dx + (x \cos y - \cos x + 2y)dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок.

□ Маємо $P = y \sin x + \sin y - 1/x^2$; $Q = x \cos y - \cos x + 2y$.

Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y = \sin x + \cos y$ і $\partial Q/\partial x = \cos y + \sin x$ на всій координатній площині Oxy за винятком точок осі Oy : $x = 0$. Оскільки виконується умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, то маємо рівняння у повних диференціалах. Знайдемо його загальний розв'язок за формулою

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C,$$

використовуючи початкову точку $M_0(x_0, y_0) = M_0(\pi, 0)$. Тоді

$$\int_{\pi}^x (0 \cdot \sin x + \sin 0 - 1/x^2)dx + \int_0^y (x \cos y - \cos x + 2y)dy = C:$$

$$(1/x) \Big|_{\pi}^x + x \cdot \sin y \Big|_0^y - \cos x \cdot y \Big|_0^y + y^2 \Big|_0^y = C; \quad 1/x - 1/\pi + x(\sin y -$$

$$- \sin 0) - \cos x \cdot (y - 0) + y^2 - 0 = C; \quad 1/x + x \sin y -$$

$$- y \cos x + y^2 = \tilde{C}, \quad \text{де } \tilde{C} = C + 1/\pi - \text{довільна стала. } \blacksquare$$

3.2.9. Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Тоді вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy, \quad \text{де } \frac{\partial u}{\partial x} = P \text{ і } \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

При цьому дане векторне поле можна записати так

$$\vec{F}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \vec{j} = \text{grad } u(x, y).$$

Векторне поле \vec{F} , що є градієнтом деякого скалярного поля u : $\vec{F} = \text{grad } u$, називається **потенціальним**. Скалярна функція u називається **потенціалом** цього векторного поля \vec{F} .

Зауваження 1. У прикладних дисциплінах іноді перед градієнтом ставиться знак "-", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\vec{E} = -\text{grad } u$ означає, що в напрямку вектора напруженості електричного поля \vec{E} електричний потенціал u спадає.

Умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ потенціальності плоского векторного поля рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача обчислення потенціала векторного поля рівнозначна задачі відшукування повного диференціала.

Оскільки $\text{grad}(u + C) = \text{grad } u$, то *потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої C . Потенціал векторного поля визначається циркуляцією цього поля по довільній лінії M_0M , що з'єднує фіксовану початкову $M_0(x_0, y_0)$ і змінну кінцеву $M(x, y)$ точки:*

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} d\vec{l} + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$

Зауваження 2. Для вибору конкретного значення довільної сталої C використовуються додаткові умови. Наприклад, для електростатичного поля точкового заряду приймається, що потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

Циркуляція градієнта скалярного поля дорівнює різниці потенціалів цього поля градієнтів:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \text{grad } u \, d\vec{l} + C = u(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0).$$

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Якщо це поле потенціальне, а $u = u(x, y, z)$ - його потенціал, то $P = \partial u / \partial x$; $Q = \partial u / \partial y$; $R = \partial u / \partial z$.

У потенціальному векторному полі $\vec{F} = \text{grad } u$ циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та кінцевої $M(x, y, z)$ точок:

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^M \vec{F} \, d\vec{l} &= \int_{M_0}^M P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \int_{M_0}^M \frac{\partial u}{\partial x} \, dx + \frac{\partial u}{\partial y} \, dy + \frac{\partial u}{\partial z} \, dz = \int_{M_0}^M du = \\ &= u \Big|_{M_0}^M = u(M_0) - u(M). \end{aligned}$$

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Big|_M = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Отже, $\boxed{\text{rot } \vec{F} = \vec{0}}$, якщо поле - потенціальне. Тобто, *потенціальне поле є безвихровим.*

Зворотнє твердження також вірне. Тобто, *безвихрове. поле є потенціальним.*

Зокрема, рівність $\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}}$ свідчить про те, що *поле градієнтів завжди потенціальне.*

Висновок: *щоб визначити, чи задане векторне поле потенціальне, достатньо пересвідчитись, що його ротор дорівнює нулю.*

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтеграла за координатами.

Теорема. *Наступні чотири властивості векторного поля \vec{F} , заданого в однозв'язній області D , еквівалентні:*

1) *циркуляція поля \vec{F} по будь-якому замкненому контуру, розміщеному в області D , дорівнює нулю;* 2) *циркуляція поля \vec{F} вздовж довільної кривої L_{AB} , яка лежить в області D , з початком в точці A та кінцем в точці B залежить тільки від положення точок A та B і не залежить від форми кривої;* 3) *існує функція (потенціал) $u = u(x, y, z)$ така, що $\boxed{\vec{F} = \operatorname{grad} u}$ (поле \vec{F} є потенціальним);* 4) $\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}}$ (поле \vec{F} є безвихровим).

Якщо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенціальне, то його потенціал $u = u(x, y, z)$ знаходиться за формулою

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz + C,$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ та їх частинні похідні неперервні; $C = const$.

Зауваження 3. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, ланки якої паралельні осям координат. При цьому можливі різні способи побудови такої ламаної.

Приклад 1. Пересвідчитись, що просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \frac{2x}{yz} \vec{i} - \frac{x^2}{y^2 z} \vec{j} - \frac{x^2}{yz^2} \vec{k}$$

потенціальне. Знайти його потенціал $u = u(x, y, z)$.

□ Обчислимо ротор даного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x/(yz) & -x^2/(y^2z) & -x^2/(yz^2) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-x^2/(yz^2) \right) - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left(-x^2/(y^2z) \right) \Big) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-x^2/(yz^2) \right) - \frac{\partial}{\partial z} (2x/(yz)) \right) \vec{j} + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-x^2/(y^2z) \right) - \frac{\partial}{\partial y} (2x/(yz)) \right) \vec{k} = \left(\frac{x^2}{y^2z^2} - \frac{x^2}{y^2z^2} \right) \vec{i} - \\ & - \left(-\frac{2x}{yz^2} + \frac{2x}{yz^2} \right) \vec{j} + \left(-\frac{2x}{y^2z} + \frac{2x}{y^2z} \right) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Оскільки $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$, то поле - безвихрове, а значить, і потенціальне.

Знайдемо його потенціал. Нехай $M_0(0,1,1)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$ (рис. 104), де

$$M_0N_1 : y = 1 = \text{const}, dy = 0; \quad z = 1 = \text{const}, dz = 0$$

$$N_1N_2 : x = x = \text{const}, dx = 0; \quad z = 1 = \text{const}, dz = 0;$$

$$N_2M : x = x = \text{const}, dx = 0; \quad y = y = \text{const}, dy = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} P dx + Q dy + \\ & + R dz + C = \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{N_1(x, y_0, z_0)} + \\ & + \int_{N_1(x, y_0, z_0)}^{N_2(x, y, z_0)} + \int_{N_2(x, y, z_0)}^{M(x, y, z)} + C = \end{aligned}$$

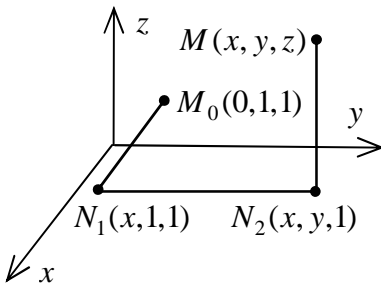


Рис. 104

$$= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C.$$

Таким чином,

$$u(x, y, z) = \int_0^x \frac{2x}{1 \cdot 1} dx - \int_1^y \frac{x^2}{y^2 \cdot 1} dy - \int_1^z \frac{x^2}{yz^2} dz + C = x^2 \Big|_0^x +$$

$$= x^2 \cdot (1/y) \Big|_1^y + (x^2/y) \cdot (1/z) \Big|_1^z + C =$$

$$= x^2 + x^2/y - x^2 + x^2/(yz) - x^2/y + C = x^2/(yz) + C. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E} = q\vec{r}/|\vec{r}|^3$ точкового електричного заряду q ($q = const$), де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Пересвідчитись, що це векторне поле \vec{E} потенціальне, і обчислити його потенціал $u = u(x, y, z)$.

$$\square |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \vec{E} = q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} x\vec{i} +$$

$$q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} y\vec{j} + q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} z\vec{k}.$$

Позначимо $P = q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} x$,

$$Q = q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} y, \quad R = q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} z.$$

Тоді, наприклад, $\partial R/\partial y = -(3/2)qz(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} 2y$,

$\partial Q/\partial z = -(3/2)qy(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} 2z$, тому $\partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$.

Аналогічно можна показати, що $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$; $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Звідси дістаємо $rot \vec{E} = \vec{0}$. Значить, поле \vec{E} - потенціальне.

Обчислимо його потенціал. Нехай $M_0(0, 0, 1)$ - початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$, де

$$M_0N_1: y = 0 = const, dy = 0; \quad z = 1 = const, dz = 0$$

$$N_1N_2: x = x = const, dx = 0; \quad z = 1 = const, dz = 0;$$

$N_2M : x = x = const, dx = 0; y = y = const, dy = 0.$

Тоді
$$u(x, y, z) = \int_0^x q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} x dx +$$

$$+ \int_0^y q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} y dy + \int_1^z q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} z dz + C = -q \times$$

$$\times (x^2 + 1)^{-1/2} \Big|_0^x - q \cdot (x^2 + y^2 + 1)^{-1/2} \Big|_0^y - q \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \Big|_1^z +$$

$$+ C = -q / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + q + C = -q / |\vec{r}| + \tilde{C}, \tilde{C} = C + q. \blacksquare$$

3.3. Оператор Гамільтона та його застосування

Операції обчислення характеристик скалярних і векторних полів можуть бути спрощені, якщо скористатися **диференціально-векторним оператором**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$
, який був введений Гамільтоном і називається **оператором Гамільтона** ("набла"-оператором).

3.3.1. Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$.

Застосуємо до функції $u = u(x, y, z)$ оператор "набла" за правилами множення вектора на число:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = grad u.$$

Отже,
$$grad u = \nabla u.$$

Приклад. Нехай $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$. Знайти

а) $grad |\vec{r}|$; б) $grad(1/|\vec{r}|)$.

□ $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $grad |\vec{r}| = \nabla |\vec{r}| =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} +$$

$$+ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

б) Розв'язати самостійно. Відповідь: $\text{grad}(1/|\vec{r}|) = -\vec{r}/|\vec{r}|^3$ ■

Застосування "набла"-оператора до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку $\boxed{\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v}$.

Наприклад,

$$\text{grad}(\vec{r} + 1/|\vec{r}|) = \nabla(\vec{r} + 1/|\vec{r}|) = \nabla\vec{r} + \nabla(1/|\vec{r}|) = \vec{r}/|\vec{r}| - \vec{r}/|\vec{r}|^3.$$

3.3.2. Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Застосуємо оператор Гамільтона до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) =$$

$$= \partial P / \partial x + \partial Q / \partial y + \partial R / \partial z = \text{div } \vec{F}. \quad \text{Отже, } \boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \vec{F}}.$$

Розглянемо тепер векторний добуток:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{F}. \quad \text{Отже, } \boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}}.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів

здійснюється за правилами відповідно скалярного чи векторного добутку:

$$\boxed{\nabla \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \nabla \cdot \vec{F}_1 + \nabla \cdot \vec{F}_2}; \quad \boxed{\nabla \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \nabla \times \vec{F}_1 + \nabla \times \vec{F}_2}.$$

3.3.3. Диференціальні операції другого порядку

Ми розглянули *диференціальні операції першого порядку*: $grad u = \nabla u$, $div \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$, $rot \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції. У результаті маємо *диференціальні операції другого порядку*. Таких операцій існує лише п'ять, їх можна записати через "набла"-оператор.

Для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ маємо:

$$div grad u = \nabla \cdot \nabla u; \quad rot grad u = \nabla \times \nabla u = \vec{0}.$$

Для векторного поля \vec{F} маємо: $grad div \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F})$;

$$div rot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0; \quad rot rot \vec{F} = \nabla \times (\nabla \times \vec{F}).$$

Розглянемо ці операції докладніше.

Обчислимо

$$\begin{aligned} div grad u &= \nabla \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{k} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Оператор $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ позначається через Δ ("дельта") і називається *оператором Лапласа (лапласіаном)*:

$$\boxed{\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla}; \quad \boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \quad \text{або} \quad \boxed{div grad u = \Delta u}.$$

Як відомо, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, тому

$$rot grad u = \nabla \times \nabla u = \vec{0}. \quad \text{Поле градієнта є безвихровим.}$$

Зокрема, в електротехніці для поля потенціалу $rot grad u = \vec{0}$.

Якщо в мішаному добутку векторів є два однакових вектори, то він дорівнює нулю. Тому

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0. \quad \text{Поле вихору – соленоїдальне.}$$

Приклад. Для скалярного поля $u = y^2z - xyz + x^2 - 3$ знайти його градієнт $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ і лапласіан Δu . Перевірити, що векторне поле градієнтів $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ є потенціальним ($\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$). Для потенціального векторного поля \vec{a} знайти його потенціал $v = v(x, y, z)$ за допомогою криволінійного інтеграла за координатами

$$v(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

де за фіксовану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ взяти початок координат $O(0, 0, 0)$ і покласти $v(0, 0, 0) = 0$.

$$\begin{aligned} \square \vec{a} = \operatorname{grad} u = \nabla u &= \frac{\partial}{\partial x}(y^2z - xyz + x^2 - 3)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(y^2z - xyz + \\ &+ x^2 - 3)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(y^2z - xyz + x^2 - 3)\vec{k} = (2x - yz)\vec{i} + (2yz - xz)\vec{j} + \\ &+ (y^2 - xy)\vec{k}; \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - yz) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(2yz - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - xy) = 2 + 2z + 0 = 2 + 2z; \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x - yz & 2yz - xz & y^2 - xy \end{vmatrix} =$$

$$= ((2y - x) - (2y - x))\vec{i} - (-y + y)\vec{j} + (-z + z)\vec{k} = \vec{0};$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= \int_0^x P(x, 0, 0) dx + \int_0^y Q(x, y, 0) dy + \int_0^z R(x, y, z) dz + C = \\ &= \int_0^x (2x - 0 \cdot 0) dx + \int_0^y (2y \cdot 0 - x \cdot 0) dy + \int_0^z (y^2 - xy) dz + C = \end{aligned}$$

$$= x^2 \Big|_0^x + 0 + (y^2 - xy) \cdot z \Big|_0^z + C = x^2 + (y^2 - xy)z + C ;$$

$$v(0, 0, 0) = 0 : C = 0 ; \quad v(x, y, z) = x^2 + (y^2 - xy)z . \quad \blacksquare$$

3.4. Поверхневий інтеграл за площею

3.4.1. Поняття поверхневого інтеграла за площею (першого роду)

Поверхня σ називається *двосторонньою*, якщо обхід по довільному замкненому контуру, що лежить на поверхні σ і не має спільних точок з її межею, не змінює напрямку нормалі до поверхні. Якщо ж дана умова не виконується, тобто існує замкнений контур, при обході вздовж якого напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається *односторонньою*.

Двосторонню поверхню називають *орієнтовною*, а вибір певної сторони поверхні, якій відповідає певний напрямок нормалі, називається *орієнтацією* поверхні.

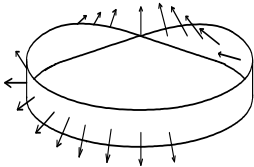


Рис. 105

Наприклад, круговий конус, еліптичний циліндр, довільна замкнена поверхня без самоперетину (сфера, еліпсоїд, ...) – двосторонні поверхні, а лист Мебіуса (рис. 105) – одностороння поверхня.

Для двосторонньої поверхні σ сторона σ^+ , якій відповідає додатний напрям нормалі, називається *додатною (зовнішньою)*, а інша сторона σ^- – *від'ємною (внутрішньою)*. Для замкненої поверхні за додатну (зовнішню) приймається та сторона, що відповідає вектору нормалі, напрямленому назовні.

Зауваження 1. Надалі розглядатимемо лише кусково-гладкі двосторонні поверхні.

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ , обмежену просторовою лінією L . Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(x, y, z)$ на поверхні σ .

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожного частинного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u(\overline{M}_i) = u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^n u(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i$.

Одержаний вираз називається **інтегральною сумою** для функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ .

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i$, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок \overline{M}_i , за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається **поверхневим інтегралом за площею (поверхневим інтегралом першого роду)** від функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ :

$$\iint_{\sigma} u(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u(\overline{M}_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \Delta\sigma_i,$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр i -го майданчика $\Delta\sigma_i$ (найбільша з відстаней між двома довільними точками його межі).

Якщо $\mu = \mu(x, y, z) \geq 0$ і функцію $\mu(x, y, z)$ розглядати як поверхневу густину маси, розподіленої по поверхні σ , то інтеграл виражає масу всієї поверхні: $m = \iint_{\sigma} \mu(x, y, z) d\sigma$ (фізичний зміст поверхневого інтеграла за площею).

Коли $u(x, y, z) \equiv 1$, то маємо площу поверхні σ : $S = \iint_{\sigma} d\sigma$.

Зауваження 2. Поверхневий інтеграл за площею не залежить від вибору орієнтації поверхні σ :

$$\iint_{\sigma^-} u(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma^+} u(x, y, z) d\sigma.$$

Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

3.4.2. Обчислення поверхневого інтеграла за площею

Розглянемо інтеграл $\iint_{\sigma} u(x, y, z) d\sigma$. Припустимо, що поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проєкції σ на площину Oxy (рис. 106). Покажемо, що в такому випадку обчислення інтеграла першого роду по поверхні σ зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy} .

Розглянемо елементарний майданчик $d\sigma$ на поверхні σ , який проєкується на елемент $dS = dx dy$ області D_{xy} .

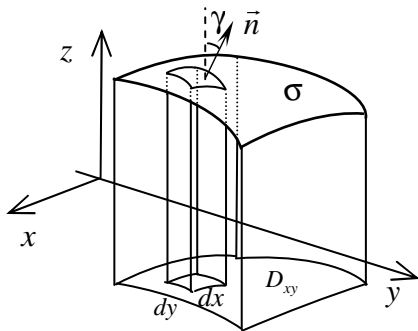


Рис. 106

Проведемо нормаль \vec{n} так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю Oz , тоді $\cos \gamma > 0$. Будемо вважати, що майданчик $d\sigma$ настільки малий, що в його межах нормаль не змінюється. Тоді площі елементарної частини $d\sigma$ та її проєкції $dS = dx dy$ зв'язані співвідношенням

$$dxdy = |\cos \gamma| d\sigma = \cos \gamma d\sigma.$$

$$\text{Звідси } d\sigma = dxdy / \cos \gamma.$$

З іншого боку, вибрана нормаль \vec{n} до поверхні $z = z(x, y)$ має проєкції $-z'_x, -z'_y, 1$. Тому $\cos \gamma = 1 / \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ і тоді $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy$. Значить, інтеграл

$$\boxed{\iint_{\sigma} u(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy.}$$

Зауваження 1. Поклавши $u(x, y, z) \equiv 1$, для площі поверхні σ дістаємо формулу

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Зауваження 2. Може статися, що поверхня σ неправильна в напрямі осі Oz , але правильна в напрямі осі Oy чи Ox , тобто може бути подана явно у вигляді $y = y(x, z)$ чи $x = x(y, z)$. Тоді хід міркувань залишається тим же з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину Oxz чи Oyz . При цьому змінні x , y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно). У загальному випадку поверхню σ треба розбити на правильні у вибраному напрямі частини.

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл за площею $\iint_{\sigma} (4x + 5z) d\sigma$, де σ – частина площини $p: 2x + 2y + 5z = 10$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню σ на одну з координатних площин відповідно а) Oxy ; б) Oyz ; в) Oxz . До кожного способу зробити рисунок поверхні σ як правильної у вибраному напрямі (відповідно а) Oz , б) Ox чи в) Oy) і рисунок її проекції (відповідно а) D_{xy} , б) D_{yz} чи в) D_{xz}) як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

□ а) Поверхню σ будемо розглядати як правильну в напрямі осі Oz , а її проекцію D_{xy} – як правильну в напрямі осі Oy плоску область (рис. 107). Тоді

$$\sigma: z = (10 - 2x - 2y)/5; \quad z'_x = -2/5; \quad z'_y = -2/5;$$

$$D_{xy}: 0 \leq x \leq 5; \quad 0 \leq y \leq 5 - x.$$

За формулою

$$\iint_{\sigma} u(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

дістаємо

$$\iint_{\sigma} (4x + 5z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} (4x + 5 \cdot (10 - 2x - 2y)/5) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{1 + (-2/5)^2 + (-2/5)^2} \, dx dy = (1/5)\sqrt{33} \iint_{D_{xy}} (2x - 2y + \\
& + 10) \, dx dy = (1/5)\sqrt{33} \int_0^5 dx \int_0^{5-x} (2x - 2y + 10) \, dy = (1/5)\sqrt{33} \times \\
& \times \int_0^5 (2xy - y^2 + 10y) \Big|_0^{5-x} dx = (1/5)\sqrt{33} \int_0^5 (2x(5-x) - (5-x)^2 + \\
& + 10(5-x)) dx = (1/5)\sqrt{33} \int_0^5 (-3x^2 + 10x + 25) dx = (1/5)\sqrt{33} \times \\
& \times (-x^3 + 5x^2 + 25x) \Big|_0^5 = 25\sqrt{33}.
\end{aligned}$$

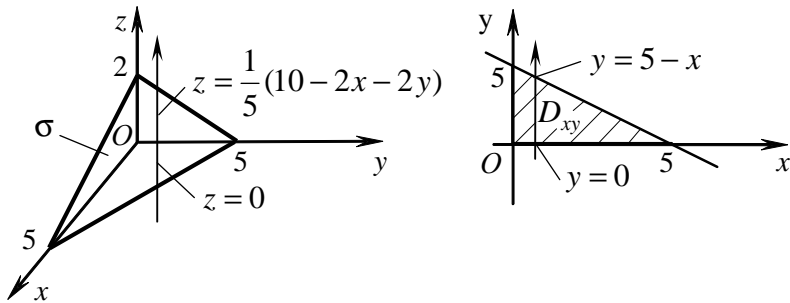


Рис. 107

(Способами б) і в) розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. Обчислити масу m частини σ поверхні параболоїда обертання $2z = x^2 + y^2$, яка міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4$, якщо поверхнева густина $\mu(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

□ $\sigma: z = x^2/2 + y^2/2$, звідки $z'_x = x$, $z'_y = y$.

Зводячи поверхневий інтеграл до подвійного, для шуканої маси поверхні дістанемо співвідношення

$$m = \iint_{D_{xy}} \mu(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx dy,$$

де область D_{xy} - проекція вказаної частини σ поверхні параболоїда на площину Oxy . Область D_{xy} - круг радіуса $R = 2$ з центром у початку координат. Перейдемо до полярних координат:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad x^2 + y^2 = \rho^2; \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi; \\ f(x, y) &= \mu(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \left((x^2 + y^2) / \sqrt{1 + x^2 + y^2} \right) \times \\ &\quad \times \sqrt{1 + x^2 + y^2} = x^2 + y^2 = \rho^2. \end{aligned}$$

Тоді

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \rho^4 \Big|_0^2 d\varphi = 4 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi. \quad \blacksquare$$

3.5. Поверхневий інтеграл за координатами

3.5.1. Поняття поверхневого інтеграла за координатами (другого роду). Потік векторного поля

Розглянемо деяку просторову область V , в якій задано поверхню σ , обмежену просторовою лінією L . Нехай вибрана сторона на σ^\pm (зафіксовано один певний знак “+” чи “-”) поверхні характеризується одиничним вектором нормалі

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора \vec{n} , $|\vec{n}| = 1$.

Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну векторну функцію $\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$. Інакше кажучи, розглянемо векторне поле \vec{F} на поверхні σ .

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожного частинного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, об-

числимо в цій точці значення заданої функції $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і нормалі $\vec{n}(\overline{M}_i)$, потім знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і $\vec{n}(\overline{M}_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^n \vec{F}(\overline{M}_i) \cdot \vec{n}(\overline{M}_i) \Delta\sigma_i$.

Одержаний вираз називається **інтегральною сумою** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$ по вибраній стороні σ^\pm поверхні σ .

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n \vec{F}(\overline{M}_i) \cdot \vec{n}(\overline{M}_i) \Delta\sigma_i$, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок \overline{M}_i , за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається **поверхневим інтегралом за координатами (поверхневим інтегралом другого роду)** від вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$ по вибраній стороні σ^\pm поверхні σ :

$$\boxed{\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\overline{M}_i) \cdot \vec{n}(\overline{M}_i) \Delta\sigma_i},$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Розглянемо докладніше вираз i -го доданку. За означенням скалярного добутку

$$\begin{aligned} \vec{F}(\overline{M}_i) \cdot \vec{n}(\overline{M}_i) \Delta\sigma_i &= |\vec{F}(\overline{M}_i)| \cdot |\vec{n}(\overline{M}_i)| \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\sigma_i = \\ &= |\vec{F}(\overline{M}_i)| \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\sigma_i, \quad \varphi = \widehat{\vec{F}(\overline{M}_i), \vec{n}(\overline{M}_i)}. \end{aligned}$$

Останній вираз допускає таке тлумачення: цей добуток визначає об'єм циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $|\vec{F}(\overline{M}_i)| \cdot \cos \varphi$ (рис. 108). Коли вважати, що векторне поле \vec{F} є швидкість рідини, що протікає через поверхню σ , то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка переміщується через частинний майданчик $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямі вектора $\vec{F}(\overline{M}_i)$. Інтеграл $\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ визна-

чає загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через вибрану сторону σ^\pm поверхні σ .

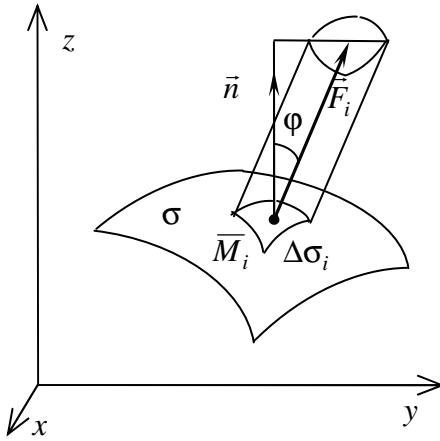


Рис. 108

Тому поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ також називають **поток векторного поля \vec{F}** через вибрану сторону σ^\pm поверхні σ :

$$\Pi^\pm = \iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

(фізичний зміст поверхневого інтеграла за координатами).

Якщо поверхня σ замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$.

Зауваження 1. Якщо всюди на поверхні σ векторне поле \vec{F} дотичне до неї ($\vec{F} \perp \vec{n}$) (тобто, $\sigma \in$ **векторною поверхнею**, що утворюється з векторних ліній), то потік через неї дорівнює нулю:

$$\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^\pm} 0 d\sigma = 0.$$

Зауваження 2. При зміні орієнтації поверхні σ поверхневий інтеграл за координатами тільки змінює знак:

$$\iint_{\sigma^-} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -\iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

оскільки при цьому одиничний вектор нормалі \vec{n} змінює знак. Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Якщо виразити скалярний добуток у координатній формі, то одержимо співвідношення

$$\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^\pm} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma,$$

що відображає **зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду**.

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна подати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно поверхневий інтеграл можна розбити на три інтеграли-доданки:

$$\Pi^{\pm} = \iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\vec{i} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Розглянемо останній з інтегралів $\iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma$. Обчислимо скалярний добуток $\vec{k} \cdot \vec{n} = |\vec{k}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \gamma = \cos \gamma$ (рис. 109). Далі $\cos \gamma d\sigma$ є проекція елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy : $\cos \gamma d\sigma = dxdy$, тому $\iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} R dxdy$.

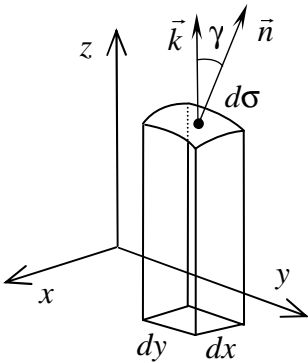


Рис. 109

Аналогічно

$$\cos \alpha d\sigma = dydz, \quad \cos \beta d\sigma = dxdz.$$

Тоді

$$\iint_{\sigma^{\pm}} P\vec{i} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P dydz;$$

$$\iint_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} Q dxdz.$$

Отримані три інтеграли

$$I_x = \iint_{\sigma^{\pm}} P dydz, \quad I_y = \iint_{\sigma^{\pm}} Q dxdz,$$

$$I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R dxdy$$

називаються **поверхневими інтегралами за відповідною парою координат** (y, z) або (x, z) , або (x, y) . **Повний поверхневий інтеграл за координатами** $\Pi^{\pm} = I_x + I_y + I_z$ записується так

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P dydz + Q dxdz + R dxdy,$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Зауваження 3. Виділимо два важливі випадки, коли поверхневий інтеграл $I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R dxdy$ за парою координат (x, y) дорівнює

нулю:

а) якщо $R=0$ всюди на поверхні σ , тобто векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + 0\vec{k}$ є **плоскопаралельним** (вектор \vec{F} паралельний одній площині Oxy), при цьому $\vec{F} \perp \vec{k}$;

б) якщо $\vec{k} \perp \vec{n}$ всюди на поверхні σ , тобто σ є циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні осі Oz , при цьому її проекцією D_{xy} на площину Oxy служить деяка лінія – фігура нульової площі.

Аналогічні твердження справедливі для поверхневих інтегралів $I_x = \iint_{\sigma^\pm} P dydz$ і $I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q dx dz$.

3.5.2. Обчислення поверхневого інтеграла за координатами

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Можна спочатку перейти до поверхневого інтеграла першого роду, а потім спроектувати поверхню σ на одну з координатних площин і перейти до подвійного інтеграла.

Але, як правило, зручніше спроектувати поверхню σ на всі три координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

Метод проектування на одну з координатних площин. Нехай поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням

$z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy

(рис. 110). Тоді для напрямних косинусів одиничного вектора нормалі $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ справедливі співвідношення:

$$\cos \alpha = \frac{-z'_x}{\pm \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}};$$

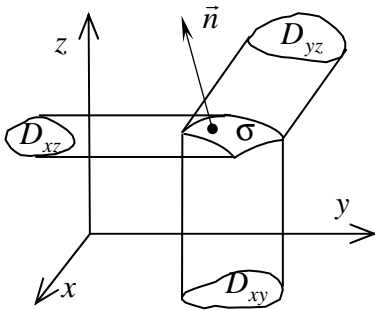


Рис. 110

$$\cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

де перед квадратним коренем береться один певний знак “+” чи “-” у залежності від орієнтації поверхні.

Площі елементарного майданчика $d\sigma$ та його проєкції $dS = dx dy$ зв'язані рівністю:

$$d\sigma = dx dy / \cos\gamma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy.$$

Відповідно для поверхневого інтеграла маємо:

у векторній формі

$$\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D_{xy}} [(\vec{F}, \vec{n}) / |\cos\gamma|]_{z=z(x,y)} dx dy$$

або в координатній формі

$$\boxed{\iint_{\sigma^\pm} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma^\pm} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) d\sigma =}$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{-z'_x P}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{-z'_y Q}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{R}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \right) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy =$$

$$\boxed{= \pm \iint_{D_{xy}} (-z'_x(x,y)P(x,y,z(x,y)) - z'_y(x,y)Q(x,y,z(x,y))) +}$$

$$\boxed{+ R(x,y,z(x,y))) dx dy}.$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy} . При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут γ між нормаллю \vec{n} і вибраною віссю Oz – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Зауваження 1. Аналогічно розглядаються випадки поверхонь, що правильні в напрямі осей Ox чи Oy . При цьому змінні x , y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно).

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл за координатами

$$I = \iint_{\sigma^-} (xy/z - 3) dydz - (z/(yx)) dx dz + (2z/x) dx dy$$

методом проектування на одну координатну площину. Тут σ^- – внутрішня сторона частини поверхні гіперболічного параболоїда $z = xy$, що відсікається площинами $z = 0$ і $2x + y - 2 = 0$, відповідний вектор нормалі \vec{n} утворює з віссю Oz тупий кут γ .

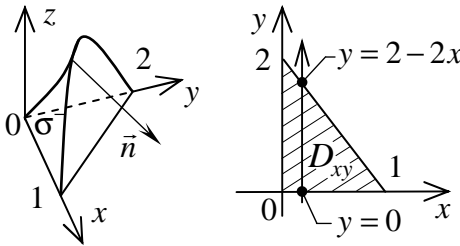


Рис. 111

□ Задана поверхня зображена на рис. 111. Поверхня σ – правильна в напрямі осі Oz і задається явно рівнянням $z = xy$. Прямокутний трикутник D_{xy} – її проекція на площину Oxy . При цьому перед подвійним інтегралом береться

знак мінус, оскільки кут γ – тупий. Тоді

$$\sigma^- : z = xy; z'_x = y; z'_y = x; D_{xy} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - 2x;$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma^-} (xy/z - 3) dydz - (z/(yx)) dx dz + (2z/x) dx dy = \\ &= - \iint_{D_{xy}} (-y(xy/(xy) - 3) - x(-xy/(yx)) + (2xy/x)) dx dy = \\ &= - \iint_{D_{xy}} (4y + x) dx dy = - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (4y + x) dy = - \int_0^1 (2y^2 + xy) \Big|_0^{2-2x} dx = \\ &= - \int_0^1 (6x^2 - 14x + 8) dx = -(2x^3 - 7x^2 + 8x) \Big|_0^1 = -3. \blacksquare \end{aligned}$$

Метод проектування на всі три координатні площини. Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямках Ox , Oy , Oz . Зокре-

ма, її можна задати явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функцію $z(x, y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проєкції σ на площину Oxy (рис. 110).

Якщо $dS = dx dy$ - площа проєкції елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy , то площа самого майданчика

$$d\sigma = dx dy / |\cos \gamma| = \pm dx dy / \cos \gamma,$$

де береться один певний знак “+” чи “-” у залежності від орієнтації поверхні. Тоді для поверхневого інтеграла $I_z = \iint_{\sigma^\pm} R dx dy$ маємо:

$$I_z = \iint_{\sigma^\pm} R dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла за парою координат (x, y) зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy} . При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos \gamma \geq 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos \gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли $I_x = \iint_{\sigma^\pm} P dy dz$ і $I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q dx dz$ за відповідною парою координат (y, z) чи (x, z) :

$$I_x = \iint_{\sigma^\pm} P dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz;$$

$$I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz,$$

де D_{yz} і D_{xz} – проєкції поверхні σ на координатні площини відповідно Oyz і Oxz . При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо кут між нормаллю \vec{n} і координатною віссю відповідно Ox чи Oy – гострий, чи знак мінус, якщо цей кут – тупий.

Повний поверхневий інтеграл за координатами знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів

$$\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^\pm} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = I_x + I_y + I_z.$$

Зауваження 2. У загальному випадку поверхню σ доводиться розбивати на правильні у вибраному напрямі частини.

Приклад 2. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ , відповідний вектор нормалі \vec{n} якої утворює з віссю Oz гострий кут γ :

$$\vec{F} = \frac{x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{\pi x}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{1 - z^2}{x^2 + y^2} \vec{k};$$

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0).$$

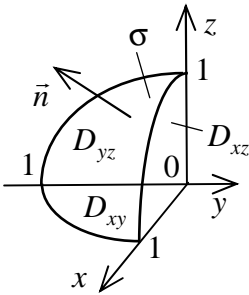


Рис. 112

□ Поверхня σ є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 112). Вона правильна в усіх трьох напрямках Ox , Oy і Oz . При цьому нормаль \vec{n} до вибраної сторони σ^+ з осями Ox і Oz утворює гострі кути α і γ , а з віссю Oy – тупий кут β . Позначимо проєкції σ на координатні площини відповідно D_{yz} , D_{xz} і D_{xy} , які будуть чвертями кругів радіуса $R=1$. Поверхню σ можна

задати явно відповідно одним з рівнянь

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2} \quad \text{чи} \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини за відповідною парою координат (y, z) , (x, z) і (x, y) :

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\sigma^+} \frac{x^2 \, dydz}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{\pi x \, dx dz}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1 - z^2}{x^2 + y^2} \, dx dy = \\ &= I_x + I_y + I_z \end{aligned}$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів-доданків:

$$I_x = \iint_{\sigma^+} \frac{x^2 \, dydz}{\sqrt{y^2 + z^2}} = + \iint_{D_{yz}} \frac{1 - y^2 - z^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} \, dydz = \begin{cases} y = \rho \cos \varphi; \\ z = \rho \sin \varphi; \end{cases}$$

$$y^2 + z^2 = \rho^2; \left| \begin{array}{l} dydz = \rho d\rho d\varphi \\ D_{yz} \end{array} \right| = \iint \frac{1-\rho^2}{\rho} \rho d\rho d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2) d\rho =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} (\rho - \rho^3/3) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{2}{3} \cdot \varphi \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{3};$$

$$I_y = \iint_{\sigma^+} \frac{\pi x dx dz}{x^2 + y^2 + z^2} = - \iint_{D_{xz}} \frac{\pi x dx dz}{x^2 + (1-x^2-z^2) + z^2} = -\pi \iint_{D_{xz}} x dx dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi; z = \rho \sin \varphi; x^2 + z^2 = \rho^2; dx dz = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= -\pi \iint_{D_{xz}} \rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = -\pi \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= -\pi \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \cdot (\rho^3/3) \Big|_0^1 d\varphi = -\frac{1}{3} \pi \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{3};$$

$$I_z = \iint_{\sigma^+} \frac{1-z^2}{x^2+y^2} dx dy = + \iint_{D_{xy}} \frac{1-(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{\pi}{4}$$

(це просто площа чверті круга).

$$\text{Отже, } \Pi = I_x + I_y + I_z = \pi/3 - \pi/3 + \pi/4 = \pi/4. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F} = (x(16-y^2)^{1/2}/(x^2 + y^2 + 4z^2))\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ частини поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = 16$, що відтинається площинами $z = 0$, $z = 2$.

□ Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини за відповідними парами координат (y, z) , (x, z) і (x, y) :

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^+} (x(16-y^2)^{1/2}/(x^2 + y^2 + 4z^2)) dy dz +$$

$$+ xy^2z dx dz + xyz dx dy = I_x + I_y + I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів I_x , I_y і I_z .

Поверхня σ (рис. 113) неправильна в усіх трьох напрямках Ox , Oy і Oz . Її проекцією D_{xy} на площину Oxy є лінія (коло $x^2 + y^2 = 16$) – фігура нульової площі. Тому останній з інтегралів-доданків дорівнює нулю: $I_z = \iint_{\sigma^+} xyz \, dxdy = 0$.

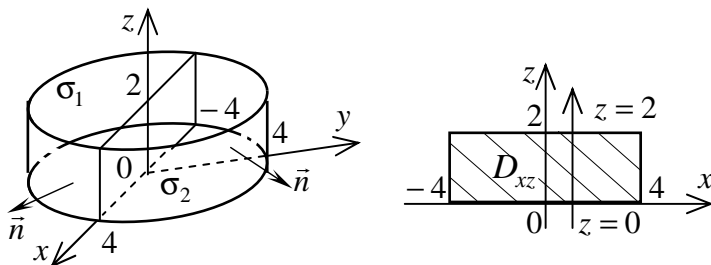


Рис. 113

Розглянемо другий інтеграл $I_y = \iint_{\sigma^+} xy^2z \, dxdz$. Поверхня σ координатною площиною $y=0$ розбивається на дві правильні в напрямі осі Oy частини: ліву $\sigma_{y1}: y = -\sqrt{16-x^2}$ і праву $\sigma_{y2}: y = \sqrt{16-x^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 113), де D_{xz} – прямокутник: $-4 \leq x \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$. При цьому нормаль \vec{n} до зовнішньої сторони σ_{y1}^+ з віссю Oy утворює тупий кут β , а нормаль \vec{n} до зовнішньої сторони σ_{y2}^+ з віссю Oy утворює гострий кут β . Тоді

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_{\sigma^+} xy^2z \, dxdz = \iint_{\sigma_{y1}^+} xy^2z \, dxdz + \iint_{\sigma_{y2}^+} xy^2z \, dxdz = \\ &= -\iint_{D_{xz}} x(16-x^2)z \, dxdz + \iint_{D_{xz}} x(16-x^2)z \, dxdz = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо перший інтеграл $I_x = \iint_{\sigma^+} \frac{x(16-y^2)^{1/2}}{x^2+y^2+4z^2} \, dydz$. По-

верхня σ координатною площиною $x = 0$ розбивається на дві прямих частини: задню σ_{x1} : $x = -\sqrt{16 - y^2}$ і передню σ_{x2} : $x = \sqrt{16 - y^2}$ зі спільною проекцією D_{yz} на площину Oyz (рис. 114), де D_{yz} – прямокутник: $-4 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$. При цьому нормаль \vec{n} до зовнішньої сторони σ_{x1}^+ з віссю Ox утворює тупий кут α , а нормаль \vec{n} до зовнішньої сторони σ_{x2}^+ з віссю Ox утворює гострий кут α . Тоді

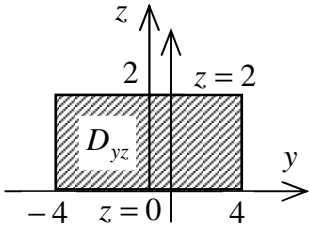


Рис. 114

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_{\sigma^+} \frac{x(16 - y^2)^{1/2} dydz}{x^2 + y^2 + 4z^2} = \iint_{\sigma_{x1}^+} \frac{x(16 - y^2)^{1/2} dydz}{x^2 + y^2 + 4z^2} + \\
 &+ \iint_{\sigma_{x2}^+} \frac{x(16 - y^2)^{1/2} dydz}{x^2 + y^2 + 4z^2} = - \iint_{D_{yz}} \frac{-\sqrt{16 - y^2} (16 - y^2)^{1/2} dydz}{(16 - y^2) + y^2 + 4z^2} + \\
 &+ \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{16 - y^2} (16 - y^2)^{1/2} dydz}{(16 - y^2) + y^2 + 4z^2} = \frac{1}{2} \iint_{D_{yz}} \frac{16 - y^2}{4 + z^2} dydz = \frac{1}{2} \int_{-4}^4 (16 - y^2) dy \int_0^2 \frac{dz}{4 + z^2} = \frac{1}{2} \cdot (16y - y^3/3) \Big|_{-4}^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \arctg(z/2) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Отже, $\Pi = I_x + I_y + I_z = 16\pi/3$. ■

Приклад 4. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E} = k q \vec{r} / |\vec{r}|^3$ позитивного точкового електричного заряду q ($q = const$), розміщеного в початку координат, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $k = const$. Обчислити потік цього векторного поля через зовнішню сторону σ^+ поверхні сфери σ радіуса R з центром у початку координат.

□ На поверхні сфери $|\vec{r}| = R = const$, а одиничний вектор зов-

нішньої нормалі $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/R$. Тоді $\vec{r} \cdot \vec{n} = |\vec{r}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0 = R$;

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} k \frac{q}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{kq}{R^2} \iint_{\sigma^+} d\sigma = \frac{kq}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi kq. \quad \blacksquare$$

3.5.3. Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів має місце формула, аналогічна формулі Гріна. Розглянемо у просторі деяку поверхню σ , обмежену замкненою лінією L (рис. 115). Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде область D , обмежена замкненою лінією l . Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Якщо покласти $z=0$ і $R(x, y, z) \equiv 0$, то матимемо плоске векторне поле, що в області D приймає значення

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Обчислимо ротор цього векторного поля

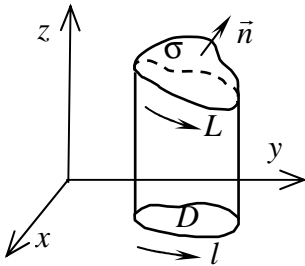


Рис. 115

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k}. \end{aligned}$$

Тоді потік цього ротора через додатну сторону D^+ області D буде

$$\iint_{D^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{D^+} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Оскільки одинична нормаль \vec{n} до області D співпадає з \vec{k} , то $\vec{n} \cdot \vec{k} = 1$, $\cos \gamma = 1 > 0$. Перейдемо до подвійного інтеграла:

$$\begin{aligned} \iint_{D^+} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{D^+} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) d\sigma = \\ &= + \iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) dx dy. \end{aligned}$$

Згадуючи формулу Гріна, отримуємо

$$\iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) dx dy = \oint_l \vec{F} d\vec{l}.$$

$$\text{Звідси } \iint_{D^+} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) \vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_l \vec{F} d\vec{l}.$$

$$\text{Остаточно, маємо формулу Стокса } \oint_l \vec{F} d\vec{l} = \iint_{D^+} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

що для плоского поля є векторним записом формули Гріна.

У просторі для поверхні σ , обмеженої замкнутою лінією L , **формула Стокса** залишається в тому ж вигляді

$$\boxed{\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma},$$

при цьому вибирається додатний напрям обходу контуру L : якщо дивитися з кінця вектора нормалі \vec{n} до відповідної сторони σ^+ поверхні σ , то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки (при цьому поверхня, обмежена контуром, залишається зліва).

Отже, справедлива **теорема Стокса (зв'язок між криволінійним і поверхневим інтегралами)**: Циркуляція векторного поля \vec{F} вздовж замкнутої лінії L , що обмежує поверхню σ , дорівнює потоку ротора цього поля через указану поверхню.

Зауваження 1. Розглянемо довільний одиничний вектор \vec{n} , що виходить з деякої точки M , і оточимо цю точку плоским майданчиком $\Delta\sigma$, перпендикулярним до вектора \vec{n} і обмеженим замкненим контуром ΔL . За формулою Стокса одержимо $\oint_{\Delta L} \vec{F} d\vec{l} = \iint_{\Delta\sigma^+} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення, тоді

$$\oint_{\Delta L} \vec{F} d\vec{l} = \text{rot } \vec{F}(M_*) \cdot \vec{n} \Delta\sigma = n p_{\vec{n}} \text{rot } \vec{F}(M_*) \cdot \Delta\sigma.$$

Розділивши рівність на $\Delta\sigma$ і стягуючи майданчик $\Delta\sigma$ до даної точки M , тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \rightarrow 0$ (при цьому $M_* \rightarrow M$ і $\Delta L \rightarrow 0$), дістанемо

$$\boxed{n p_{\vec{n}} \text{rot } \vec{F}(M) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left(\oint_{\Delta L} \vec{F} d\vec{l} / \Delta\sigma \right)}.$$

Таким чином можна визначити проекцію ротора на довільну

вісь (щільність циркуляції $C_{\vec{n}} = n p_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{F}$), тобто *потоп* $\operatorname{rot} \vec{F}$ *не залежить від вибору системи координат (є інваріантною векторною характеристикою поля)*.

Зауваження 2. Коли векторне поле безвихрове, тобто $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, то для довільного замкненого контура L , який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо $\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$. Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, тобто для довільного замкненого контура L $\oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0$, то за формулою Стокса маємо $\iint_{\sigma^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0$, звідки $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

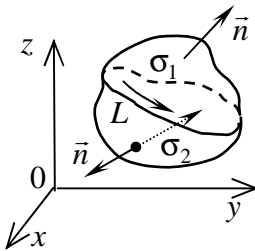


Рис. 116

Зауваження 3. Із формули Стокса випливає, що *потік вихору векторного поля \vec{F} не залежить від виду поверхні σ , що натягнута на замкнений контур L* . Якщо через цей контур провести дві поверхні σ_1 та σ_2 (рис. 116), що обмежують деяке просторове тіло V , то

$$\iint_{\sigma_1^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_{\sigma_2^-} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Змінивши орієнтацію поверхні σ_2 на зовнішню σ_2^+ , маємо

$$\iint_{\sigma_2^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -\iint_{\sigma_2^-} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -\iint_{\sigma_1^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Тоді для замкненої поверхні $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, що обмежує просторове тіло V , одержуємо

$$\iint_{\sigma^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_1^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

Отже, *потік вихору векторного поля \vec{F} через замкнену поверхню дорівнює нулю:* $\boxed{\iint_{\sigma^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0}$.

Приклад 1. Обчислити потік ротора векторного поля $\vec{F} = (y + xz)\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + xyz\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$), відповідний вектор нормалі \vec{n} якої утворює з віссю Oz гострий кут γ .

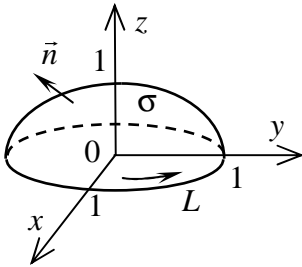


Рис. 117

□ Поверхня σ є півсферою одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 117), обмеженою замкненою лінією L – колом $x^2 + y^2 = 1$ в площині Oxy . За формулою Стокса

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\sigma^+} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \\ &= \oint_L (y + xz)dx + (x + yz)dy + xyzdz = \end{aligned}$$

Далі врахуємо, що L лежить у площині $z = 0$, і перейдемо до параметричних рівнянь

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{l} x = 1 \cos t; \quad y = 1 \sin t; \quad z = 0; \quad dx = -\sin t \, dt; \\ dy = \cos t \, dt; \quad dz = 0; \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} (\sin t \cdot (-\sin t) + \\ &\quad \times \cos t \cdot \cos t) \, dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt = (1/2) \cdot \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 2. Дано просторове векторне поле $\vec{F} = (3z - x + 2y)\vec{i} + 6xy\vec{j} + 6(2y - 3z)\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини $p: x + 2y - 3z - 6 = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Знайти циркуляцію $\Gamma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}$ векторного поля вздовж замкненого контуру L , що обмежує поверхню σ , при додатному напрямі обходу відносно нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ цієї площини p . Обчислення провести двома способами: а) безпосередньо за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса.

□ Поверхня σ – це $\Delta M_x M_y M_z$ (рис. 118) з вектором нормалі $\vec{N} = (4, 2, -3)$. Замкнений контур L – це периметр $\Delta M_x M_y M_z$.

а) Знайдемо циркуляцію безпосередньо за означенням:

$$\Gamma = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L (3z - x + 2y)dx + 6xy dy + 6(2y - 3z)dz = \\ \int_{M_x M_z} + \int_{M_z M_y} + \int_{M_y M_x},$$

де кожний доданок обчислимо окремо.

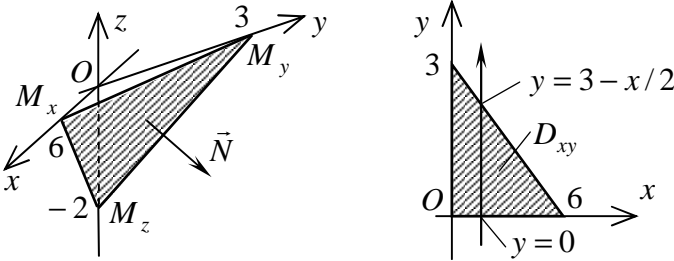


Рис. 118

Ділянка $M_x M_z$ – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $y = 0$. Тоді

$$M_x M_z : \begin{cases} x + 2y - 3z - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x/3 - 2 & dx = dx; \\ y = 0; & dy = 0; \end{cases}$$

$$dz = (1/3)dx; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = 0; \quad \int_{M_x M_z} (3z - x + 2y)dx + 6xy dy +$$

$$+ 6(2y - 3z)dz = \int_6^0 [(3 \cdot (x/3 - 2) - x + 2 \cdot 0) + 6x \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot (2 \cdot 0 - \\ - 3 \cdot (x/3 - 2)) \cdot (1/3)] dx = \int_6^0 (6 - 2x) dx = (6x - x^2) \Big|_6^0 = 0.$$

Ділянка $M_z M_y$ – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $x = 0$. Тоді

$$M_z M_y : \begin{cases} x + 2y - 3z - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y/3 - 2 & dx = 0; \\ x = 0; & dy = dy; \end{cases}$$

$$dz = (2/3)dy; \quad y_1 = 0; \quad y_2 = 3; \quad \int_{M_z M_y} (3z - x + 2y)dx + 6xy dy +$$

$$+ 6(2y - 3z) dz = \int_0^3 [(3 \cdot (2y/3 - 2) - 0 + 2y) \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot y +$$

$$+ 6 \cdot (2y - 3 \cdot (2y/3 - 2)) \cdot (2/3)] dy = 24 \int_0^3 dy = 24 \cdot y|_0^3 = 72.$$

Ділянка $M_y M_x$ – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $z = 0$. Тоді

$$M_y M_x : \begin{cases} x + 2y - 3z - 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x/2 \\ z = 0; \end{cases}$$

$$dx = dx; \quad dy = -(1/2)dx; \quad dz = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 6;$$

$$\int_{M_y M_x} (3z - x + 2y)dx + 6xy dy + 6(2y - 3z) dz = \int_0^6 [(3 \cdot 0 - x + 2 \cdot (3 -$$

$$- x/2)) + 6x \cdot (3 - x/2) \cdot (-1/2) + 6 \cdot (2 \cdot (3 - x/2) - 3 \cdot 0) \cdot 0] dy =$$

$$= (1/2) \int_0^6 (3x^2 - 22x + 12) dx = (1/2) \cdot (x^3 - 11x^2 + 12x) \Big|_0^6 = -54.$$

$$\text{Отже, } \Gamma = 0 + 72 - 54 = 18.$$

б) Оскільки лінія L замкнена, можна застосувати формулу Стокса. Виберемо за поверхню σ , що натягнута на L , частину площини $p - \Delta M_x M_y M_z$. Поверхня σ правильна в усіх трьох напрямках Ox , Oy і Oz . Для обчислення поверхневого інтеграла використаємо метод проектування на одну координатну площину, за яку виберемо Oxy . При цьому нормаль до вибраної сторони σ^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ . Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy є $\Delta O M_x M_y$ (рис. 118). Тоді

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3z - x + 2y & 6xy & 6(2y - 3z) \end{vmatrix} = \left(6 \frac{\partial}{\partial y} (2y - 3z) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial z}(6xy) \Big) \vec{i} - \left(6\frac{\partial}{\partial x}(2y-3z) - \frac{\partial}{\partial z}(3z-x+2y) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(6xy) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y}(3z-x+2y) \right) \vec{k} = (12-0)\vec{i} - (0-3)\vec{j} + (6y-2)\vec{k} = \\
& = 12\vec{i} + 3\vec{j} + (6y-2)\vec{k}; \quad \sigma: z = x/3 + 2y/3 - 2; \quad z'_x = 1/3; \\
& \quad z'_y = 2/3; \quad \cos \gamma < 0 \Rightarrow "-"; \quad \sigma \xrightarrow{Oz} D_{xy} = \Delta OM_x M_y: \\
& 0 \leq x \leq 6; \quad 0 \leq y \leq 3 - x/2; \quad \Gamma = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \\
& = \iint_{\sigma^+} 12 dydz + 3 dx dz + (6y-2) dx dy = - \iint_{D_{xy}} \left(-(1/3) \cdot 12 - \right. \\
& \quad \left. - (2/3) \cdot 3 + (6y-2) \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} (8-6y) dx dy = \\
& = \int_0^6 dx \int_0^{3-x/2} (8-6y) dy = \int_0^6 (8y-3y^2) \Big|_0^{3-x/2} dx = \frac{1}{4} \int_0^6 (-3x^2 + 20x - \\
& \quad - 12) dx = (1/4) \cdot (-x^3 + 10x^2 - 12x) \Big|_0^6 = 18. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.5.4. Формула Остроградського – Гаусса

Розглянемо просторове тіло V , обмежене замкненою поверхнею σ (рис. 119). Проекцію тіла на площину Oxy позначимо через

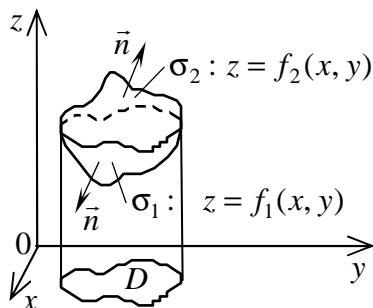


Рис. 119

D . Нехай лінія L на поверхні тіла, що проектується в межу області D , поділяє поверхню σ на дві правильні в напрямі осі Oz частини σ_1 та σ_2 , які описуються явно відповідно рівняннями $z = f_1(x, y)$ і $z = f_2(x, y)$. Окрім того, виділимо зовнішню сторону σ^+ поверхні, якій відповідає одиничний вектор нормалі \vec{n} . Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Обчислимо потрійний інтеграл

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dV &= \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \iint_D dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = \iint_D \left(R(x, y, z) \Big|_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \right) dx dy = \\ &= \iint_D [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))] dx dy = \\ &= \iint_D R(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, f_1(x, y)) dx dy = \end{aligned}$$

Далі перетворимо одержані подвійні інтеграли в поверхневі

$$= \iint_{\sigma_2^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_1^+} R(x, y, z) dx dy = \oiint_{\sigma^+} R(x, y, z) dx dy.$$

Таким чином $\iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\sigma^+} R(x, y, z) dx dy.$

Аналогічно можна обчислити

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\sigma^+} Q dx dz; \quad \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\sigma^+} P dy dz.$$

Склавши ці три рівності, маємо **формулу Остроградського – Гаусса** в координатній формі

$$\oiint_{\sigma^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

або у векторній формі $\oiint_{\sigma^+} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV.$

Отже, справедлива теорема Остроградського – Гаусса (зв'язок між поверхневим і потрійним інтегралами):

Потік векторного поля \vec{F} через зовнішню сторону σ^+ замкненої поверхні σ дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом V , обмеженим цією поверхнею, від дивергенції $\operatorname{div} \vec{F}$ поля.

Зауваження 1. Розглянемо деяку точку M , розміщену всередині замкненої поверхні $\Delta\sigma$, що обмежує об'єм ΔV . За формулою Остроградського – Гауса $\iint_{\Delta\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{F} dV$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення. Тоді

$$\iint_{\Delta\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \operatorname{div} \vec{F}(M_*) \Delta V.$$

Розділивши рівність на ΔV і стягуючи поверхню $\Delta\sigma$ до даної точки M , тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \rightarrow 0$, $M_* \rightarrow M$, $\Delta V \rightarrow 0$, дістанемо

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\iint_{\Delta\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma / \Delta V \right).$$

Отже, *дивергенція $\operatorname{div} \vec{F}$ не залежить від вибору системи координат (є інваріантною скалярною характеристикою поля).*

Зауваження 2. Нехай векторне поле \vec{F} – соленоїдальне, тобто $\operatorname{div} \vec{F} = 0$. Розглянемо **векторну трубку** – поверхню, утворену векторними лініями, що проходять через деякий замкнений контур, який не збігається з векторною лінією. Виділимо її частину об'ємом V , розміщену між перерізами σ_1 і σ_2 (рис. 120). Оскільки за умовою $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то згідно формули Остроградського – Гауса потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Тоді для зовнішньої сторони замкненої поверхні, що обмежує виділений об'єм V , маємо

$$\iint_{\sigma_0^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_1^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma_2^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 0,$$

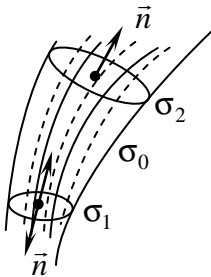


Рис. 120

де σ_0 – бічна поверхня трубки; \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі.

Оскільки на бічній поверхні трубки нормаль \vec{n} перпендикулярна до векторної лінії поля, то $\iint_{\sigma_0^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$. Тоді

$$\iint_{\sigma_2^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = -\iint_{\sigma_1^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Якщо змінити напрям нормалі на поверхні σ_1 , тобто взяти внутрішню нормаль \vec{n} (у напрямі векторних ліній), то дістанемо

$$\boxed{\iint_{\sigma_2^+} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma_1^-} \vec{F} \vec{n} d\sigma}.$$

У соленоїдальному полі потік вектора \vec{F} в напрямі векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той же.

Якщо \vec{F} – поле швидкостей текучої рідини, то в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Відповідно до формули $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$ поле ротора довільного векторного поля – трубчатє. Справедливе й зворотнє твердження: кожнє трубчатє поле є полем ротора деякого векторного поля. Тобто, якщо $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то існує таке поле $\vec{\Phi}$, що $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{\Phi}$. Вектор $\vec{\Phi}$ називають **вектором-потенціалом** даного поля.

Зауваження 3. Оскільки $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$, то векторний потенціал $\vec{\Phi}$ визначається з точністю до доданка $\operatorname{grad} u$, де $u = u(x, y, z)$ – довільна двічі диференційовна функція.

Таким чином, справедлива теорема. Для соленоїдального поля \vec{F} наступні чотири властивості еквівалентні:

- 1) потік поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю;
- 2) потік поля через поверхню σ , обмежену замкненим контуром L і відповідно з ним орієнтовану, залежить тільки від вибору контура L і не залежить від конкретного вибору поверхні σ ;
- 3) існує таке поле $\vec{\Phi}$, що $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{\Phi}$;
- 4) розбіжність поля \vec{F} дорівнює нулю, тобто $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

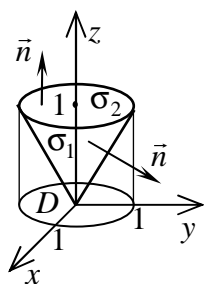


Рис. 121

Приклад 1. Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = (x^3 - yz)\vec{i} + (y^3 + 2x)\vec{j} + xz^2\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ повної поверхні σ конуса $V: z^2 = x^2 + y^2, z = 1$.

□ Оскільки поверхня σ (рис. 121) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гауса.

Проекцією конуса V на площину Oxy є круг D радіуса $R = 1$ з центром у початку

координат. Бокова поверхня конуса σ_1 задається явно рівнянням $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а поверхня основи σ_2 задається явно рівнянням $z = 1$. Знайдемо дивергенцію

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 + 2x) + \frac{\partial}{\partial z}(xz^2) = 3x^2 + 3y^2 + 2xz.$$

Тоді

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_V (3(x^2 + y^2) + 2xz) \, dx \, dy \, dz =$$

Для обчислення потрібного інтеграла перейдемо до циліндричних координат

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z; \quad x^2 + y^2 = \rho^2; \\ \sigma_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho; \quad \sigma_2 : z = 1; \quad dx \, dy \, dz = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \end{array} \right| = \\ &= \iiint_V (3\rho^2 + 2\rho \cos \varphi \cdot z) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{\rho}^1 (3\rho^2 + \\ &+ 2\rho z \cos \varphi) \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3\rho^2 z + \rho \cos \varphi \cdot z^2) \Big|_{\rho}^1 \rho \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3\rho^3 - \\ &- 3\rho^4 + \rho^2 \cos \varphi - \rho^4 \cos \varphi) \, d\rho = \int_0^{2\pi} \left((3/4)\rho^4 - (3/5)\rho^5 + \cos \varphi \times \right. \\ &\left. \times (1/3)\rho^3 - \cos \varphi \cdot (1/5)\rho^5 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} (3/20 + (2/15)\cos \varphi) \, d\varphi = \\ &= \left((3/20)\varphi + (2/15)\sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi/10. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Зауваження 4. Для спрощення обчислень незамкнену поверхню можна доповнити іншими поверхнями до замкненої. Потім знайти потік за формулою Остроградського – Гаусса і від одержаного результату відняти потоки через додаткові поверхні.

Приклад 2. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{F} = (x^3 - xy^2)\vec{i} - 2y(x^2 + z^2)\vec{j} + (2y^2z + z^3 + x^2 + y^2)\vec{k}$$

через зовнішню сторону σ_1^+ півсфери $\sigma_1: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

□ Поверхню σ_1 доповнимо до замкненої $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, де σ_2 – круг D_{xy} радіуса $R = 2$ на площині $Oxy: z = 0$ (рис. 122).

Знайдемо дивергенцію

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y(x^2 + z^2)) + \frac{\partial}{\partial z}(2y^2z + z^3 + x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Тоді потік $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ через всю замкнену поверхню:

$$\Pi = \oiint_{\sigma^+} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz =$$

Для обчислення потрібного інтеграла перейдемо до сферичних координат

$$= \left| \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta; \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad \sigma_1: r = 2; \quad dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{array} \right| =$$

$$= \iiint_V r^2 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^2 r^4 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot \frac{1}{5} \times$$

$$\times r^5 \Big|_0^2 d\theta = \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{32}{5} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} d\varphi =$$

$$= (32/5) \int_0^{2\pi} d\varphi = (32/5) \varphi \Big|_0^{2\pi} = 64\pi/5.$$

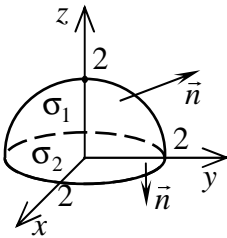


Рис. 122

Далі обчислимо потік Π_2 через додат-

кову поверхню σ_2 :

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \iint_{\sigma_2^+} \vec{F} \vec{n} d\sigma &= \iint_{\sigma_2^+} (x^3 - xy^2) dydz - 2y(x^2 + z^2) dx dz + \\ &+ (2y^2z + z^3 + x^2 + y^2) dx dy = I_x + I_y + I_z. \end{aligned}$$

Поверхня σ_2 на площини Oyz і Oxz проектується у відрізки – фігури нульової площі. Тому перші два інтеграли-доданки дорівнюють нулю

$$I_x = \iint_{\sigma_2^+} (x^3 - xy^2) dydz = 0; \quad I_y = -2 \iint_{\sigma_2^+} y(x^2 + z^2) dx dz = 0.$$

Нормаль \vec{n} до вибраної сторони σ_2^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ , тоді

$$I_z = \iint_{\sigma_2^+} (2y^2z + z^3 + x^2 + y^2) dx dy = - \iint_{D_{xy}} (2y^2 \cdot 0 + 0^3 + x^2 + y^2) dx dy = \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2; \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = - \iint_{D_{xy}} \rho^2 \rho d\rho d\varphi = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho =$$

$$= -2\pi \cdot (1/4) \cdot \rho^4 \Big|_0^2 = -8\pi. \quad \text{Отже, } \Pi_2 = 0 + 0 - 8\pi = -8\pi.$$

Таким чином, шуканий потік

$$\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 = 64\pi/5 + 8\pi = 104\pi/5. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти потік Π просторового векторного поля $\vec{F} = (6x - y)\vec{i} + (y - 2z + 6)\vec{j} + (3x + y - 2z)\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди V , утвореної при перетині площини $p: -3x + y - 2z + 6 = 0$ з координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Обчислення провести двома способами: а) безпосередньо за означенням потоку; б) за допомогою формули Остроградського – Гауса.

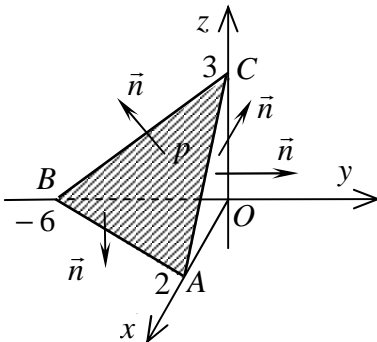


Рис. 123

а) безпосередньо за означенням потоку; б) за допомогою формули Остроградського – Гауса.

□ а) Знайдемо потік безпосередньо за означенням. Піраміда $V = OABC$ зображена на рис. 123. Проекціями піраміди V на координатні площини відповідно D_{yz} (рис. 124), D_{xz} (рис. 125) і D_{xy} (рис. 126) служать прямокутні трикутники, що є правильними плос-

кими областями в напрямі відповідних координатних осей. Потік Π через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди є сумою потоків через всі її чотири грані:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\sigma^+} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^+} (6x - y) dydz + (y - 2z + 6) dx dz + \\ &+ (3x + y - 2z) dx dy = \Pi_{\Delta ABC} + \Pi_{\Delta OBC} + \Pi_{\Delta OAC} + \Pi_{\Delta OAB}. \end{aligned}$$

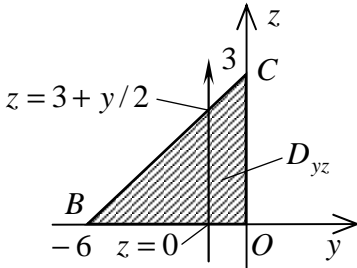


Рис. 124

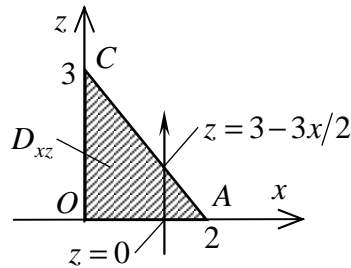


Рис. 125

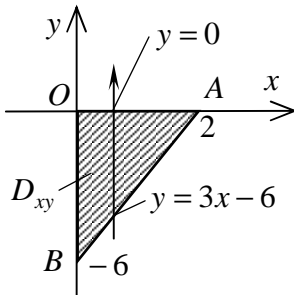


Рис. 126

Для обчислення поверхневих інтегралів-доданків будемо використовувати метод проектування на всі три координатні площини. Тоді

$$\begin{aligned} \Pi_{\Delta ABC} &= \iint_{\Delta ABC} (6x - y) dydz + (y - 2z + 6) dx dz + (3x + y - 2z) dx dy = \\ &= I_x + I_y + I_z; \end{aligned}$$

$$I_x = \iint_{\Delta ABC} (6x - y) dydz =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{l} \Delta ABC : x = 2 + y/3 - 2z/3; \cos \alpha > 0 \Rightarrow "+"; \\ \Delta ABC \xrightarrow{Ox} D_{yz} = \Delta OBC : -6 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 3 + y/2 \end{array} \right| = \\ &= + \iint_{D_{yz}} (6 \cdot (2 + y/3 - 2z/3) - y) dydz = \iint_{D_{yz}} (12 + y - 4z) dydz = \\ &= \int_{-6}^0 dy \int_0^{3+y/2} (12 + y - 4z) dz = \int_{-6}^0 (12z + yz - 2z^2) \Big|_0^{3+y/2} dy = \end{aligned}$$

$$= \int_{-6}^0 (3y + 18) dy = (3y^2/2 + 18y) \Big|_{-6}^0 = 54;$$

$$I_y = \iint_{\Delta ABC} (y - 2z + 6) dx dz = \left| \begin{array}{l} \Delta ABC : y = 3x + 2z - 6; \\ \cos \beta < 0 \Rightarrow "-"; \end{array} \right.$$

$$\Delta ABC \xrightarrow{Oy} D_{xz} = \Delta OAC : \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq z \leq 3 - 3x/2 \end{array} \right. = - \iint_{D_{xz}} (3x + 2z - 6 - 2z + 6) dx dz =$$

$$= -3 \iint_{D_{xz}} x dx dz = -3 \int_0^2 x dx \int_0^{3-3x/2} dz = -3 \int_0^2 xz \Big|_0^{3-3x/2} dx = -3 \int_0^2 (3x - 3x^2/2) dx = -3 \cdot (3x^2/2 - x^3/2) \Big|_0^2 = -6;$$

$$I_z = \iint_{\Delta ABC} (3x + y - 2z) dx dy = \left| \begin{array}{l} \Delta ABC : z = 3 - 3x/2 + y/2; \\ \cos \gamma > 0 \Rightarrow "+"; \end{array} \right.$$

$$\Delta ABC \xrightarrow{Oz} D_{xy} = \Delta OAB : \left| \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2; \quad 3x - 6 \leq y \leq 0 \end{array} \right. = + \iint_{D_{xy}} \left(3x + y - 2 \cdot \left(3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \right) \times$$

$$\times dx dy = 6 \iint_{D_{xy}} (x - 1) dx dy = 6 \int_0^2 (x - 1) dx \int_{3x-6}^0 dy = 6 \int_{3x-6}^0 (x - 1) y \Big|_{3x-6}^0 dx =$$

$$= -18 \int_0^2 (x^2 - 3x + 2) dx = -18 (x^3/3 - 3x^2/2 + 2x) \Big|_0^2 = -12;$$

$$\Pi_{\Delta ABC} = 54 - 6 - 12 = 36; \quad \Pi_{\Delta OBC} = \iint_{\Delta OBC} (6x - y) dy dz +$$

$$+ (y - 2z + 6) dx dz + (3x + y - 2z) dx dy = I_x + I_y + I_z;$$

$$I_x = \iint_{\Delta OBC} (6x - y) dy dz = \left| \begin{array}{l} \Delta OBC : x = 0; \quad dx = 0; \\ \cos \alpha < 0 \Rightarrow "-"; \end{array} \right.$$

$$\Delta OBC \xrightarrow{Ox} D_{yz} = \Delta OBC : \left| \begin{array}{l} -6 \leq y \leq 0; \quad 0 \leq z \leq 3 + y/2 \end{array} \right. = - \iint_{D_{yz}} (6 \cdot 0 - y) dy dz = \iint_{D_{yz}} y dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-6}^0 y dy \int_0^{3+y/2} dz = \int_{-6}^0 yz \Big|_0^{3+y/2} dy = \int_{-6}^0 (3y + y^2/2) dy = \\
&= (3y^2/2 + y^3/6) \Big|_{-6}^0 = -18; \quad I_y = \iint_{\Delta OBC} (y - 2z + 6) dx dz = \\
&= |\Delta OBC : x = 0; dx = 0| = 0; \quad I_z = \iint_{\Delta OBC} (3x + y - 2z) dx dy = \\
&= |\Delta OBC : x = 0; dx = 0| = 0; \quad \Pi_{\Delta OBC} = -18 + 0 + 0 = -18; \\
\Pi_{\Delta OAC} &= \iint_{\Delta OAC} (6x - y) dy dz + (y - 2z + 6) dx dz + (3x + y - \\
&\quad - 2z) dx dy = I_x + I_y + I_z; \quad I_x = \iint_{\Delta OAC} (6x - y) dy dz = \\
&= |\Delta OAC : y = 0; dy = 0| = 0; \quad I_y = \iint_{\Delta OAC} (y - 2z + 6) dx dz = \\
&= \left| \begin{array}{l} \Delta OAC : y = 0; dy = 0; \cos \beta > 0 \Rightarrow "+"; \\ \Delta OAC \xrightarrow{Oy} D_{xz} = \Delta OAC : 0 \leq x \leq 2; 0 \leq z \leq 3 - 3x/2 \end{array} \right| = \\
&= + \iint_{D_{xz}} (0 - 2z + 6) dx dz = \iint_{D_{xz}} (6 - 2z) dx dz = \int_0^2 dx \int_0^{3-3x/2} (6 - 2z) dz = \\
&= \int_0^2 (6z - z^2) \Big|_0^{3-3x/2} dx = \int_0^2 (9 - 9x^2/4) dx = (9x - 3x^3/4) \Big|_0^2 = 12; \\
I_z &= \iint_{\Delta OAC} (3x + y - 2z) dx dy = |\Delta OAC : y = 0; dy = 0| = 0; \\
\Pi_{\Delta OAC} &= 0 + 12 + 0 = 12; \quad \Pi_{\Delta OAB} = \iint_{\Delta OAB} (6x - y) dy dz + \\
&\quad + (y - 2z + 6) dx dz + (3x + y - 2z) dx dy = I_x + I_y + I_z; \\
I_x &= \iint_{\Delta OAB} (6x - y) dy dz = |\Delta OAB : z = 0; dz = 0| = 0; \\
I_y &= \iint_{\Delta OAB} (y - 2z + 6) dx dz = |\Delta OAB : z = 0; dz = 0| = 0; \\
I_z &= \iint_{\Delta OAB} (3x + y - 2z) dx dy = \left| \begin{array}{l} \Delta OAB : z = 0; dz = 0; \\ \cos \gamma < 0 \Rightarrow "-"; \end{array} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta OAB \xrightarrow{Oz} D_{xy} = \Delta OAB : \left| = - \iint_{D_{xy}} (3x + y - 2 \cdot 0) dx dy = \right. \\ \left. 0 \leq x \leq 2; 3x - 6 \leq y \leq 0 \right. \\ = - \int_0^2 dx \int_{3x-6}^0 (3x + y) dy = - \int_0^2 (3xy + y^2/2) \Big|_{3x-6}^0 dx = \int_0^2 (27x^2/2 - 36x + \\ + 18) dx = (9x^3/2 - 18x^2 + 18x) \Big|_0^2 = 0; \quad \Pi_{\Delta OAB} = 0 + 0 + 0 = 0; \end{aligned}$$

$$\Pi = 36 - 18 + 12 + 0 = 30.$$

б) Для обчислення потоку Π через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди можна застосувати формулу Остроградського – Гаусса. Знайдемо дивергенцію

$$\operatorname{div} \vec{F} = (6x - y)'_x + (y - 2z + 6)'_y + (3x + y - 2z)'_z = 6 + 1 - 2 = 5.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\sigma^+} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 5 \iiint_V dx dy dz = \\ &= \left| V \xrightarrow{Oz} D_{xy} : 0 \leq x \leq 2; 3x - 6 \leq y \leq 0 \right| = 5 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{3-3x/2+y/2} dz = \\ &= 5 \int_0^2 dx \int_{3x-6}^0 (3 - 3x/2 + y/2) dy = 5 \int_0^2 (3y - 3xy/2 + y^2/4) \Big|_{3x-6}^0 dx = \\ &= 5 \int_0^2 (9x^2/4 - 9x + 9) dx = 5 \cdot (3x^3/4 - 9x^2/2 + 9x) \Big|_0^2 = 30. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти потік просторового векторного поля $\vec{F} = xy^2 \vec{i} + x^2 y \vec{j} + z(x^2 + y^2) \vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ повної поверхні σ просторового тіла V , обмеженого параболоїдом обертання $z = 1 + (x^2 + y^2)/2$ і площиною $z = 1 + y$ (рис. 88). Обчислення провести двома способами: а) безпосередньо за означенням потоку; б) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь: $\Pi = \iint_{\sigma^+} \vec{F} \vec{n} d\sigma = 2\pi/3$. ■

3.6. Диференціальні рівняння з частинними похідними

3.6.1. Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок. Крайові задачі

У *математичній фізиці* вивчаються математичні моделі фізичних процесів, які мають форму диференціальних рівнянь з частинними похідними чи споріднених рівнянь або їх комбінацій, що розглядаються при певних додаткових умовах. Функції багатьох змінних описують різноманітні явища в електродинаміці, теорії пружності, гідродинаміці та інших галузях науки і техніки. Їх частинні похідні відображають найважливіші фізичні величини (швидкість, прискорення, потік, струм і т. п.). Використання фізичних принципів і законів, що зв'язують вказані величини, приводить до рівнянь з частинними похідними.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП) називається рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, шукану функцію та її частинні похідні. Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається його *порядком*.

$$F(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}) = 0$$

– *загальний вигляд* диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними для функції двох незалежних змінних. Тут x, y – незалежні змінні; $u = u(x, y)$ – шукана функція.

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називається будь-яка функція, що при підстановці у диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність.

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР) містить довільні сталі, число яких дорівнює порядку рівняння. Аналогічно, *загальний розв'язок* ДРЧП містить довільні функції, число яких дорівнює порядку цього рівняння.

Розв'язок ДРЧП, який входить до складу загального розв'язку при певних фіксованих довільних функціях, називається *частинним розв'язком*.

Для виділення цілком певного розв'язку ДРЧП треба вказати додаткові умови. Усі фізичні явища вивчають, починаючи з деякого моменту часу і у відповідних областях, що мають певні межі. Тому для однозначного зображення реального процесу, крім диферен-

ціального рівняння, необхідно задати ще **початкові умови**, що відображають початковий стан процесу, а також **крайові (граничні) умови**, що вказують значення шуканої функції та її похідних на межі області визначення процесу.

У випадку необмеженої області D граничні умови відпадають. Задача відшукування розв'язку ДРЧП у необмеженій області при заданих початкових умовах називається **задачею Коші (початковою задачею)**.

Задача відшукування розв'язку ДРЧП в обмеженій області при заданих початкових і граничних умовах називається **крайовою (граничною) задачею**.

Задача Коші та крайова задача формулюються для ДРЧП, які виникають при вивченні **нестационарних процесів**, що змінюються з перебігом часу. Рівняння, що описують **стационарні процеси**, не містять часу t . Тому для таких рівнянь початкові умови відсутні. Указані ДРЧП розв'язуються тільки при граничних умовах.

У залежності від типу граничних умов розрізняють три типи крайових задач математичної фізики:

1) Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях шуканої функції u на межі S області D (**граничні умови першого типу**) $u|_S = g(S)$ називається **крайовою задачею Діріхле (першою крайовою задачею)**.

2) Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях нормальної похідної (похідної за напрямом зовнішньої нормалі \vec{n}) $\partial u / \partial n$ на межі S області D (**граничні умови другого типу**) $\partial u / \partial n|_S = g(S)$ називається **крайовою задачею Неймана (другою крайовою задачею)**.

3) Якщо на межі S області D задано **граничні умови третього (змішаного) типу** $(\alpha u + \beta \partial u / \partial n)|_S = g(S)$, то маємо **третью (змішану) крайову задачу**. Тут α і β - задані числа.

Початкові та граничні умови, що доповнюють ДРЧП, на практиці є результатом деяких вимірювань, що виконуються з похибками. Можливі небажані ситуації, коли малі похибки в початкових та граничних умовах призводять до значних похибок у розв'язку.

Задача математичної фізики називається **коректно (правильно)**

но) поставленою, якщо: 1) задача має розв'язок; 2) розв'язок єдиний; 3) розв'язок неперервно залежить від початкових і граничних умов (*розв'язок стійкий* до малих змін цих умов).

Задача, що не задовольняє хоча б одній з трьох указаних умов, називається *некоректно (неправильно) поставленою*.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\partial^2 u / \partial x \partial y = 4xy - 5y^4$, де $u = u(x, y)$.

□ Зробимо заміну $\partial u / \partial x = v$. Тоді рівняння прийме вигляд: $\partial v / \partial y = 4xy - 5y^4$. Інтегруючи за y , маємо $v = \int (4xy - 5y^4) dy = 2xy^2 - y^5 + \bar{C}_1(x)$, де $\bar{C}_1(x)$ – довільна функція від x .

Звідси $\partial u / \partial x = 2xy^2 - y^5 + \bar{C}_1(x)$. Інтегруючи за x , дістаємо шуканий розв'язок: $u = \int (2xy^2 - y^5 + \bar{C}_1(x)) dx + C_2(y) = x^2 y^2 -$

$$- y^5 x + \int \bar{C}_1(x) dx + C_2(y) = x^2 y^2 - y^5 x + C_1(x) + C_2(y),$$

де $C_2(y)$ – довільна функція від y ; $C_1(x) = \int \bar{C}_1(x) dx$. ■

3.6.2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними

Найбільш загальні результати одержані для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними, які традиційно називають *рівняннями математичної фізики*.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається *лінійним*, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та всіх її частинних похідних.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F$$

– *загальний вигляд* лінійного ДРЧП другого порядку. Тут

$A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$, $D = D(x, y)$, $E = E(x, y)$, $G = G(x, y)$, $F = F(x, y)$ – задані функції, причому A, B, C, D, E, G називаються *коефіцієнтами*; F – *правою частиною*.

Якщо $\boxed{F = 0}$, то рівняння називається *однорідним*, в про-

тивному разі – **неоднорідним**.

Якщо коефіцієнти A, B, C, D, E, F, G – сталі числа, то рівняння називається **лінійним зі сталими коефіцієнтами**.

Принцип суперпозиції: Довільна лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами розв'язків лінійного однорідного ДРЧП також є розв'язком цього рівняння.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається **квазілінійним**, якщо воно лінійне відносно всіх похідних найвищого порядку.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

– **загальний вигляд** квазілінійного ДРЧП другого порядку.

Ясно, що будь-яке лінійне ДРЧП є одночасно квазілінійним.

У залежності від знака **дискримінанта** $\Delta = B^2 - AC$ квазілінійне ДРЧП другого порядку відноситься до одного з наступних трьох типів:

1) якщо $\Delta = B^2 - AC > 0$, то рівняння **гіперболічного типу**, його **канонічний вигляд** $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

2) якщо $\Delta = B^2 - AC = 0$, то рівняння **параболічного типу**, його **канонічний вигляд** $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

3) якщо $\Delta = B^2 - AC < 0$, то рівняння **еліптичного типу**, його **канонічний вигляд** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

Зауваження 1. Розбиття ДРЧП на гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння відповідає розбиттю фізичних процесів на три основні класи: хвильові, дифузійні та стаціонарні. Для рівнянь різних типів по-різному ставляться основні задачі і часто застосовуються різні методи розв'язування.

Найважливіші рівняння математичної фізики вказаних типів:

1) **одновимірне хвильове рівняння** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (гіпербо-

лічний тип);

2) *одновимірне рівняння теплопровідності (рівняння Фур'є)*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (\text{параболічний тип});$$

3) *двовимірне рівняння Лапласа*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \quad (\text{еліптичний тип}).$$

Тут a – сталий коефіцієнт.

Зауваження 2. Тип розглянутих ДРЧП визначається тільки коефіцієнтами при других похідних і не залежить від інших складових. Якщо коефіцієнти A, B, C сталі, то тип цього рівняння один і той же у всій області визначення. Якщо ж коефіцієнти A, B, C змінні, то для рівняння виділяються області його гіперболічності, параболічності та еліптичності.

3.7. Виведення основних рівнянь математичної фізики

3.7.1. Рівняння коливань струни

Розглянемо натягнену струну довжини l , закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги (наприклад, легко смикнути), то вона буде коливатися. Моделлю струни є пружна невагома (дією сили тяжіння можна знехтувати порівняно з силою натягу струни) і абсолютно гнучка (не чинить опору згину) нитка. Будемо розглядати малі плоскі поперечні коливання, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині перпендикулярно до її прямолінійного положення рівноваги – осі Ox (рис. 127). Лівий кінець струни співпадає з точкою $x = 0$, а правий – з точкою $x = l$. Процес коливань характеризується однією функцією $u(x, t)$ – відхиленням точки струни з абсцисою x у момент часу t . При фіксованому значенні t графік функції $u(x, t)$ дає форму (профіль) струни у цей момент часу.

Виділимо довільний елемент струни $[x, x + \Delta x]$, який при коливанні деформується в дугу $\cup MM_1$ (рис. 128). Довжина цієї дуги

$$\Delta l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (\partial u / \partial x)^2} dx \approx \Delta x,$$

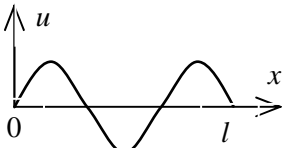


Рис. 127

оскільки при малих коливаннях $\frac{du}{dx} = o(\Delta x)$. Тобто видовження струни не відбувається. Тоді на підставі закону Гука сила натягу \vec{T} в кожній точці струни направлена вздовж дотичної до її профілю і не змінюється за величиною, тобто $|\vec{T}| = T_0 = const$.

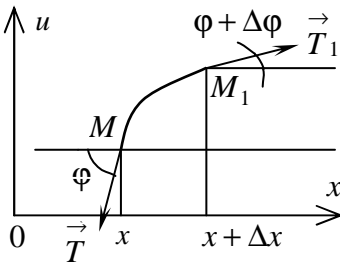


Рис. 128

Проекція на вісь Ou F_u рівнодійної сил пружності \vec{F} , які прикладені до елемента MM_1 , дорівнює

$$F_u = T_0 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T_0 \sin \varphi.$$

Оскільки кут φ малий, то $\sin \varphi \approx \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$. За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg} \varphi = \frac{du}{dx}$.

Тоді

$$F_u \approx T_0 \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = T_0 \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right).$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости дістанемо

$$\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x,$$

де $0 < \theta < 1$. Тоді $F_u \approx T_0 \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) \Delta x$.

Якщо вважати струну однорідною з лінійною густиною $\rho = \rho_0 = const$, то маса елемента $\cup MM_1$ $m = \rho \Delta l \approx \rho_0 \Delta x$. Вертикальне (в напрямку осі Ou) прискорення w довільної точки цього елемента приблизно дорівнює вертикальному прискоренню точки M з координатою x , тобто $w \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ згідно з геометричним змістом другої похідної по t .

Шукане рівняння коливань струни безпосередньо впливає з другого закону Ньютона $mw = F_u$ для елемента $\cup MM_1$ в напря-

мі осі Ou : $\rho_0 \Delta x \partial^2 u(x,t) / \partial t^2 = T_0 (\partial^2 u(x,t) / \partial x^2) \Delta x$.

$$\text{Звідси одержуємо } \boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < l; t > 0)}$$

– *одновимірне однорідне хвильове рівняння*, де $a^2 = T_0 / \rho_0$.

Це рівняння гіперболічного типу і для нього задаються дві початкові умови (ПУ) $u(x,0) = \varphi(x)$ ($0 < x < l$) (початкове положення струни) і $\partial u(x,0) / \partial t = \psi(x)$ ($0 < x < l$) (початкова швидкість струни). Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ жорстко закріплені, то граничні умови (ГУ) $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ ($t > 0$).

Таким чином, математична модель (задача математичної фізики) вільних малих плоских поперечних коливань однорідної струни з жорстко закріпленими кінцями, на яку не діють зовнішні сили, має вигляд:

$$\text{(ДРЧП)} \quad \partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2 \quad (0 < x < l; t > 0);$$

$$\text{(ПУ)} \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial u(x,0) / \partial t = \psi(x) \quad (0 < x < l);$$

$$\text{(ГУ)} \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0).$$

Можна показати, що існує єдиний розв'язок цієї задачі, який стійкий до малих змін початкових і граничних умов. Таким чином, задача поставлена коректно.

Зауваження 1. Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ вільні, то граничні умови: $\partial u(0,t) / \partial x = 0$, $\partial u(l,t) / \partial x = 0$ ($t > 0$).

Зауваження 2. Ускладнення розглянутої задачі внаслідок врахування додаткових фізичних факторів приводить до більш складних ДРЧП.

Зауваження 3. Поперечні коливання струни не єдиний вид плоских хвильових рухів. Зокрема, звукові чи електромагнітні хвилі на значній відстані від джерел збудження можна вважати плоскими й описувати їх одновимірними хвильовими рівняннями.

Зауваження 4. Розглянемо (рис. 129) довгу однорідну двопрвідною електричну лінію, що характеризується активним опором R , індуктивністю L , ємністю C і втратою G , де величини R , L , C , G розподілені вздовж лінії неперервно і рівномірно і роз-

раховані на одиницю довжини. Нехай $i(x,t)$ – сила струму; $u(x,t)$ – напруга. З рівняння балансу для сумарної зміни сили струму $\frac{\partial i}{\partial x} \Delta x + C \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x + Gu \Delta x = 0$ впливає **система телеграфних рівнянь**: $\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu = 0}$ і $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0}$. Продиференціювавши відповідним чином ці співвідношення і вилучивши одну з шуканих функцій $u(x,t)$ або $i(x,t)$, можна зазначену систему звести до вигляду, де кожне з рівнянь містить тільки одну з указаних функцій:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{RC + LG}{LC} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC} u = 0};$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{RC + LG}{LC} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC} i = 0}.$$

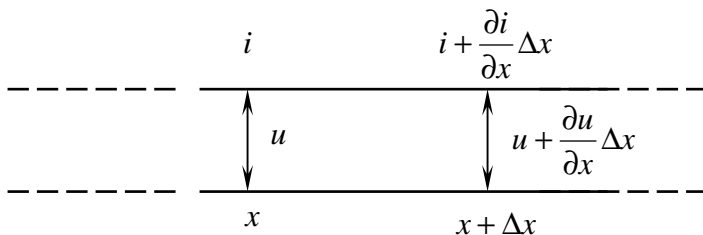


Рис. 129

3.7.2. Рівняння поширення тепла у стержні

Розглянемо (рис. 130) тонкий циліндричний однорідний стержень довжини l і сталого поперечного перерізу S . Припустимо, що бічна поверхня стержня теплоізольована (теплообмін може здійснюватися тільки через торці циліндра), а температура у всіх точках поперечного перерізу однакова (оскільки стержень тонкий – його діаметр достатньо малий порівняно з довжиною). Вісь стержня приймемо за координатну вісь Ox , причому лівий кінець стержня співпадає з точкою $x = 0$, а правий – з точкою $x = l$. Будемо вважати, що всередині стержня теплові джерела відсутні.

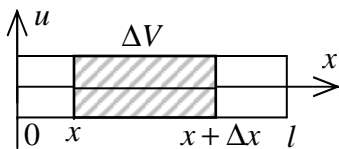


Рис. 130

Нехай $\rho = const$ – густина речовини стержня; $C = const$ – питома теплоємність; $k = const$ – коефіцієнт теплопровідності. Великою, яка характеризує процес поширення тепла в стержні, служить функція $u(x, t)$ – температура стержня в перерізі з абсцисою x в момент часу t .

Розглянемо довільний елемент стержня об'ємом $\Delta V = S\Delta x$, який розміщений між перерізами з абсцисами x і $x + \Delta x$. Згідно з законом Фур'є кількість тепла, що проходить через поперечний переріз за одиницю часу пропорційна похідній $\frac{\partial u}{\partial x}$ (градієнту температури). Тоді $\Delta Q_1 = -k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S\Delta t$ і $\Delta Q_2 = -k \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} S\Delta t$ – кількість тепла, що протікає відповідно через перерізи $x_1 = x$ і $x_2 = x + \Delta x$. У результаті зовнішній приплив тепла в елемент ΔV

$$\begin{aligned} \text{за час } \Delta t: \Delta Q &= \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = k \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) S\Delta t \approx \\ &\approx k \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) \Delta x S\Delta t. \end{aligned}$$

Цей приплив тепла ΔQ витрачається на зміну температури елемента ΔV на величину $\Delta u \approx (\partial u / \partial t) \Delta t$. Тоді

$$\Delta Q = c\Delta m\Delta u = c\rho\Delta V\Delta u \approx c\rho S\Delta x (\partial u / \partial t) \Delta t.$$

Складемо рівняння теплового балансу (з точністю до нескінченно малих більш високого порядку порівняно з Δx , Δt):

$$c\rho S\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S\Delta t. \quad \text{Звідси} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким чином, маємо **одновимірне однорідне рівняння теплопровідності** $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l$; $t > 0$), де $a^2 = k / (c\rho)$.

Це рівняння параболічного типу. Параболічні рівняння викликають при моделюванні явищ переносу (теплопередачі, дифузії,

фільтрації, випромінювання нейтронів і т.п.).

На відміну від гіперболічних рівнянь, для рівняння теплопровідності задається тільки одна початкова умова

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l) \quad (\text{початковий розподіл температури}).$$

Якщо торці стержня підтримуються при певних температурах, то граничні умови $u(0,t) = g_1(t)$, $u(l,t) = g_2(t)$ ($t > 0$).

Якщо торці стержня теплоізолювані, то граничні умови

$$\partial u(0,t)/\partial x = 0; \quad \partial u(l,t)/\partial x = 0.$$

Таким чином, математична модель (задача математичної фізики) поширення тепла в тонкому однорідному циліндричному стержні довжини l з теплоізолюваною бічною поверхнею і заданою температурою на торцях $x = 0$, $x = l$ при відсутності внутрішніх джерел тепла має вигляд:

$$(\text{ДРЧП}) \quad \partial u/\partial t = a^2 \partial^2 u/\partial x^2 \quad (0 < x < l; t > 0);$$

$$(\text{ПУ}) \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l);$$

$$(\text{ГУ}) \quad u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t) \quad (t > 0).$$

3.8. Методи розв'язування задач математичної фізики

3.8.1. Розв'язування першої крайової задачі

для хвильового рівняння методом відокремлення змінних

Метод відокремлення змінних (метод стоячих хвиль або метод Фур'є) – один з найбільш ефективних аналітичних способів розв'язування крайових задач для широкого кола лінійних ДРЧП. Звичайно його застосовують тоді, коли рівняння і граничні умови є лінійними та однорідними. У багатьох випадках він дозволяє будувати розв'язки крайових задач і для неоднорідних ДРЧП з неоднорідними граничними умовами.

Суть методу відокремлення змінних полягає у відшуванні розв'язку крайової задачі у вигляді ряду Фур'є за деякою ортогональною системою функцій, пов'язаних з цією задачею.

Загальна схема методу для випадку одновимірного однорідного лінійного ДРЧП гіперболічного (чи параболічного) типу:

1) Знаходження всієї нескінченної множини нетривіальних (ненульових) розв'язків спеціального вигляду добутку функцій $u(x, t) = X(x)T(t)$, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу, з врахуванням однорідних граничних умов. У результаті ДРЧП розщеплюється на звичайні диференціальні рівняння, кожне з яких включає лише одну функцію-співмножник. Потім знаходять розв'язки цих звичайних диференціальних рівнянь, які задовольняють виділені нульові граничні умови на межі області дослідження. Однорідні елементарні розв'язки узгоджуються між собою і з них формується нескінченна послідовність розв'язків.

2) Побудова на основі принципу суперпозиції розв'язку однорідного лінійного ДРЧП, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам, у вигляді нескінченного ряду, що формується з одержаної на першому етапі послідовності елементарних розв'язків. У класичному припущенні цей ряд повинен бути рівномірно збіжним разом з рядами, які одержуються з нього диференціюванням необхідне число разів за незалежними змінними. Відповідний розв'язок називається *класичним*. Якщо вказана умова не виконується, то відповідний розв'язок називається *узгальненим*.

Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни довжини l з жорстко закріпленими кінцями $x = 0$, $x = l$. Припустимо, що середовище опору не чинить і зовнішні сили на струну не діють. Математично вона формулюється як *перша крайова задача для одновимірного однорідного хвильового рівняння*:

знайти розв'язок $u(x, t)$ ДРЧП $\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2$ ($0 < x < l$; $t > 0$), який задовольняє початковим умовам $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\partial u(x, 0) / \partial t = \psi(x)$ ($0 < x < l$) і однорідним граничним умовам першого типу $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ ($t > 0$), де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції; a , l – відомі числа, $a > 0$, $l > 0$.

Згідно з методом відокремлення змінних розв'язування цієї задачі розбивається на два етапи:

1) Знаходження нескінченної послідовності елементарних розв'язків, що задовольняють однорідним граничним умовам.

Шукаємо ненульові розв'язки у вигляді $u(x, t) = X(x)T(t)$, де $X(x)$ – функція тільки від x , а $T(t)$ – тільки від t . Підставимо

цей вираз у рівняння і дістанемо $X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$.

Відокремимо змінні в одержаному рівнянні, поділивши обидві його частини на $a^2 X(x)T(t)$: $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$.

Ця тотожна рівність двох відношень, кожне з яких залежить тільки від x чи тільки від t , можлива лише у випадку, коли обидва відношення дорівнюють одній і тій же сталій величині. Позначимо її через λ : $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. Звідси дістанемо два звичайні

диференціальні рівняння $X'' - \lambda X = 0$ і $T'' - a^2 \lambda T = 0$, де λ – довільне дійсне число (*параметр розщеплення*).

Розв'яжемо ці рівняння для трьох можливих випадків значень параметра розщеплення λ .

а) Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, тоді: $X'' + \beta^2 X = 0$; $k^2 + \beta^2 = 0$;
 $k_{1,2} = \pm \beta i$; $X = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$; $T'' + a^2 \beta^2 T = 0$;
 $k^2 + a^2 \beta^2 = 0$; $x_{1,2} = \pm a \beta i$; $T = C \cos(a \beta t) + D \sin(a \beta t)$.

б) Якщо $\lambda = 0$, тоді: $X'' = 0$; $X' = A$; $X = Ax + B$;
 $T'' = 0$; $T' = C$; $T = Ct + D$.

в) Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, тоді: $X'' - \beta^2 X = 0$; $k^2 - \beta^2 = 0$;
 $k_{1,2} = \pm \beta$; $X = A e^{\beta x} + B e^{-\beta x}$; $T'' - a^2 \beta^2 T = 0$; $k^2 - a^2 \beta^2 = 0$;
 $k_{1,2} = \pm a \beta$; $T = C e^{a \beta t} + D e^{-a \beta t}$.

В силу довільності сталих A, B, C, D, λ маємо нескінченну множину розв'язків хвильового рівняння. Виділимо з неї підмножину розв'язків, які задовольняють зазначеним однорідним граничним умовам. Для цього підставимо в них вираз $u(x, t) = X(x)T(t)$ і дістанемо: $X(0)T(t) = 0$; $X(l)T(t) = 0$ ($t > 0$).

Оскільки для ненульових розв'язків $T(t) \neq 0$ ($t > 0$), то $X(0) = 0$; $X(l) = 0$. Таким чином, крайова задача для звичайного диференціального рівняння:

$$(ЗДР) \quad \boxed{X'' - \lambda X = 0 \quad (0 < x < l)}; \quad (ГУ) \quad \boxed{X(0) = 0; \quad X(l) = 0}$$

дає можливість відібрати ненульові розв'язки хвильового рівняння.

Значення λ , для якого остання крайова задача має ненульовий розв'язок, називається *власним значенням (власним числом)*, а відповідний розв'язок $X(x)$ – *власною функцією*. Множина всіх власних значень називається *спектром*, а поставлена задача про відшукування спектра і відповідної йому *системи власних функцій – спектральною задачею* або *задачею Штурма – Ліувілля*.

Зазначимо, що *власні функції визначаються з точністю до сталого множника*.

Розглянемо три можливих випадки значень параметра розщеплення λ .

а) Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то загальний розв'язок ЗДР визначається формулою $X = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$. Підставляючи його у граничні умови, дістанемо: $A = 0$; $A \cos(\beta l) + B \sin(\beta l) = 0$. Звідси $B \sin(\beta l) = 0$. Якщо покласти $B = 0$, то отримаємо нульовий розв'язок $X(x) = 0$. Тому треба вважати, що $\sin(\beta l) = 0$.

Розв'язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення $\beta l = \pi n, n \in Z$; $\beta_n = \pi n / l$; $\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2$; $n = 1, 2, \dots$ і відповідні їм власні функції $X_n(x) = B_n \sin(\pi n x / l)$, $n = 1, 2, \dots$, де B_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Зазначимо, що нема необхідності розглядати значення $n = 0, -1, -2, \dots$. При $n = 0$ маємо нульовий розв'язок $X_0(x) = 0$, а при $n = -1, -2, \dots$ власні функції відрізняються тільки знаком від знайдених $X_n(x)$ і тому не поповнюють набір власних функцій новими *лінійно незалежними функціями*.

У цьому випадку функція $T(t)$ набуває вигляду

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + D_n \sin \frac{\pi n a t}{l}, \quad \text{де } C_n, D_n \text{ – довільні сталі.}$$

Відповідно ненульові розв'язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідним граничним умовам, одержуються у вигляді

$$u_n(x, t) = \sin(\pi n x / l) (a_n \cos(\pi n a t / l) + b_n \sin(\pi n a t / l)),$$

де a_n, b_n – довільні сталі, причому сталі B_n, C_n, D_n введено до складу a_n, b_n , $n = 1, 2, \dots$.

б) Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок ЗДР має вигляд $X = Ax + B$. Підставляючи його в граничні умови, одержимо $B = 0$; $Al + B = 0$. Звідси $A = 0$; $B = 0$, тобто маємо нульовий розв'язок $X(x) = 0$.

в) Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, то загальний розв'язок ЗДР має вигляд $X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$. Підставляючи його в граничні умови (3.49), отримаємо систему для знаходження A і B :

$$A + B = 0; \quad Ae^{\beta l} + Be^{-\beta l} = 0.$$

Оскільки $\beta \neq 0$, то звідси одержимо $A = 0$; $B = 0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda = \beta^2 > 0$ крайова задача має тільки нульовий розв'язок $X(x) = 0$.

Таким чином, всі ненульові розв'язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідні граничні умови, утворюють послідовність $u_n(x, t) = \sin(\pi n x / l) (a_n \cos(\pi n a t / l) + b_n \sin(\pi n a t / l))$, $n = 1, 2, \dots$.

2) Знаходження розв'язку, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам.

Оскільки задане хвильове рівняння і граничні умови лінійні й однорідні, то згідно з принципом суперпозиції сума його розв'язків також є розв'язком. Більше того, функція $u(x, t)$, що задається рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

також є розв'язком, який задовольняє однорідні граничні умови.

Для знаходження коефіцієнтів a_n , b_n скористаємося початковими умовами. Дістанемо співвідношення

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \psi(x) \quad (0 < x < l),$$

які можна розглядати як розвинення відомих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряди Фур'є за синусами на проміжку $[0; l]$. Вважаючи, що умови розвинення цих функцій у ряд Фур'є виконані (наприклад, функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють умовам Діріхле на відріжку $[0; l]$), скористаємося відовими формулами для коефіцієнтів Фур'є і дістаємо

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx; \quad b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

Отже, розв'язок крайової задачі для хвильового рівняння можна подати у вигляді функціонального ряду:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n a t / l) + b_n \sin(\pi n a t / l)) \sin(\pi n x / l).$$

Зауваження 1. При розв'язуванні крайової задачі методом відокремлення змінних суттєва однорідність граничних умов, причому ці умови можуть бути не тільки першого типу

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (t > 0),$$

а й другого $\partial u(0, t) / \partial x = 0; \quad \partial u(l, t) / \partial x = 0 \quad (t > 0)$

чи третього (змішаного)

$$\alpha u(0, t) + \beta \partial u(0, t) / \partial x = 0; \quad \gamma u(l, t) + \delta \partial u(l, t) / \partial x = 0 \quad (t > 0).$$

Якщо граничні умови ненульові, то заміною змінних задачу треба попередньо звести до випадку однорідних (нульових) граничних умов. Наприклад, якщо задано граничні умови $u(0, t) = g_1(t); \quad u(l, t) = g_2(t) \quad (t > 0)$, то використовується заміна $u = v + w$. Тут $v = v(x, t)$ – довільно задана функція, що задовольняє вказаним граничним умовам, зокрема, можна покласти

$$v = (1 - x/l)g_1(t) + (x/l)g_2(t);$$

$w = w(x, t)$ – нова шукана функція, що задовольняє однорідним граничним умовам. Звичайно, диференціальне рівняння і початкові умови при цьому дещо ускладнюються.

Зауваження 2. Якщо треба розв'язати крайову задачу для неоднорідного ДРЧП з однорідними граничними умовами, то її

розв'язок шукають у вигляді функціонального ряду за власними функціями $X_n(x)$ відповідної однорідної задачі (**метод розвинення за власними функціями**). Можливий також інший підхід: якщо для неоднорідного ДРЧП, яким-небудь способом знайти частинний розв'язок v , що задовольняє однорідним граничним і однорідним початковим умовам, то введення нової шуканої функції w за формулою $u = v + w$ приводить до відповідної крайової задачі для однорідного ДРЧП.

Зауваження 3. Знайдений розв'язок першої крайової задачі для хвильового рівняння можна подати у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x / l) \sin(\pi n a t / l + \alpha_n),$$

де

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \sin \alpha_n = a_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \cos \alpha_n = b_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Кожний член $u_n(x, t) = A_n \sin(\pi n x / l) \sin(\pi n a t / l + \alpha_n)$ розкладу – це так звана **стояча хвиля** або **власне коливання**. Сталі A_n і α_n називаються відповідно **амплітудою** і **початковою фазою** стоячої хвилі $u_n(x, t)$. Кожна точка струни з фіксованою абсцисою x здійснює гармонічні коливання $u_n(x, t)$ з амплітудою $A_n \sin(\pi n x / l)$, різною для різних точок струни, і з однаковими **частотою** $\omega_n = \pi n a / l$ і **початковою фазою** α_n . Вся струна розбивається на n рівних ділянок, причому точки однієї і тієї ж ділянки знаходяться в одній і тій же **фазі** $\pi n a / l + \alpha_n$, а точки сусідніх ділянок – в прямо протилежних фазах. На рис. 131 зображені послідовні положення струни для випадків $n = 1, 2, 3$.

Точки, які відділяють одну ділянку від іншої, знаходяться в спокої. Це так звані **вузли**. Середини ділянок, які називають **пучностями**, коливаються з найбільшою амплітудою A_n . **Основний тон**, який характеризує **висоту** звуку, визначається першою складовою $u_1(x, t)$. Інші **тони (обертони)**, $u_n(x, t)$, $n = 2, 3, \dots$, які видає струна одночасно з основним тоном, характеризують певне забарв-

лення (*те́мбр*) звуку. Рух струни в цілому є накладанням різних власних коливань.

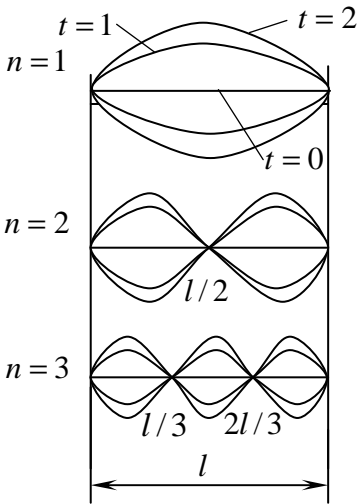


Рис. 131

Приклад 1. Знайти закон коливань струни довжиною l , що розміщена на відрізку $[0;l]$, якщо в початковий момент струні надають форми синусоїди $\varphi(x) = A \sin(4\pi x/l)$, а потім її відпускають без початкової швидкості. Кінці струни закріплені, зовнішні сили відсутні.

□ З математичної точки зору маємо першу крайову задачу:

знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l, t > 0$), який задовольняє початковим умовам

$$u(x,0) = A \sin(4\pi x/l);$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < l)$$

і однорідним граничним умовам першого типу

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0).$$

Згідно з методом відокремлення змінних розв'язок поставленої задачі можна подати у вигляді функціонального ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n a t / l) + b_n \sin(\pi n a t / l)) \sin(\pi n x / l).$$

Знайдемо його коефіцієнти:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l A \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 4; \\ A, & n = 4; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l 0 \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0.$$

Тоді шуканий розв'язок

$$u(x,t) = A \cos(4\pi a t / l) \sin(4\pi x / l) . \blacksquare$$

Приклад 2. По середині вільної струни, кінці якої закріплені в точках $x = 0$ і $x = l$, в початковий момент часу $t = 0$ вдаряють плоским молоточком шириною h і надають відповідній ділянці струни початкової швидкості v_0 . Визначити форму струни в довільний момент часу t , якщо початкове відхилення струни відсутнє.

□ Математично маємо першу крайову задачу:

знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l, t > 0$), який задовольняє початковим умовам $u(x,0) = 0$; $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0$ ($l/2 - h/2 \leq x \leq l/2 + h/2$); $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ ($0 < x < l/2 - h/2$; $l/2 + h/2 < x < l$) і однорідним граничним умовам $u(0,t) = 0$; $u(l,t) = 0$ ($t > 0$).

За методом відокремлення змінних розв'язок цієї задачі знаходимо у вигляді функціонального ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n a t / l) + b_n \sin(\pi n a t / l)) \sin(\pi n x / l) .$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l 0 \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0; \quad b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} v_0 \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= -\frac{2v_0 l}{\pi^2 n^2 a} \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} = -\frac{2v_0 l}{\pi^2 n^2 a} \cdot \left(\cos \frac{\pi n (l+h)/2}{l} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{\pi n (l-h)/2}{l} \right) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 n^2 a} \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n h}{2l} . \end{aligned}$$

Тоді шуканий розв'язок

$$u(x,t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n h}{2l} \sin \frac{\pi n a t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} . \blacksquare$$

Приклад 3. Провідник довжиною l , по якому тече змінний струм, вкритий такою якісною ізоляцією, що втрати через його по-

верхню G практично відсутні. Крім того, активний опір R настільки малий, що ним можна знехтувати. Початкове значення сили струму в провіднику дорівнює нулю $i(x,0) = 0$, а початкова напруга задається формулою $u(x,0) = E_0 \sin \frac{5\pi x}{2l}$. Обидва кінці провідника ізольовані. Знайти силу струму $i(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

□ Сила струму $i(x,t)$ задовольняє телеграфному рівнянню

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{RC + LG}{LC} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC} i = 0.$$

Оскільки за умовою задачі втрати через ізоляцію G і активний опір R відсутні, тобто $G = 0$, $R = 0$, то це рівняння переходить в однорідне хвильове рівняння $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, де $a^2 = \frac{1}{LC}$; L – індуктивність, C – ємність провідника.

З рівняння $\frac{\partial u}{\partial x} + Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0$ дістанемо $\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{R}{L} i$.

З умови задачі $R = 0$, $i(x,0) = 0$ і $\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \frac{5\pi E_0}{2l} \cos \frac{5\pi x}{2l}$.

Тоді $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t} = -\frac{5\pi E_0}{2lL} \cos \frac{5\pi x}{2l}$.

Оскільки кінці провідника ізольовані, то функція $i(x,t)$ задовольняє однорідним граничним умовам $i(0,t) = 0$, $i(l,t) = 0$.

Таким чином, задача допускає наступне математичне формулювання: знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, який задовольняє початковим умовам $i(x,0) = 0$; $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t} = -\frac{5\pi E_0}{2lL} \cos \frac{5\pi x}{2l}$ і однорідним граничним умовам $i(0,t) = 0$, $i(l,t) = 0$.

За методом відокремлення змінних розв'язок цієї задачі зна-

ходимо у вигляді функціонального ряду

$$i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\pi n a t / l) + b_n \sin(\pi n a t / l) \right) \sin(\pi n x / l).$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l 0 \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0; \quad b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \left(-\frac{5E_0 \pi}{2lL} \cos \frac{5\pi x}{2l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= -\frac{5E_0}{\pi n a l} \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \left(\sin \frac{(2n+5)\pi x}{2l} + \sin \frac{(2n-5)\pi x}{2l} \right) dx = -\frac{5E_0}{2\pi n a l} \times \\ &\times \left(-\frac{2l}{(2n+5)\pi} \cos \frac{(2n+5)\pi x}{2l} - \frac{2l}{(2n-5)\pi} \cos \frac{(2n-5)\pi x}{2l} \right) \Bigg|_0^l = \\ &= -\frac{5E_0}{\pi n a l} \cdot \left(\frac{1}{2n+5} + \frac{1}{2n-5} \right) = \frac{20E_0}{\pi a l (25 - 4n^2)}. \end{aligned}$$

Тоді шуканий розв'язок

$$i(x, t) = \frac{20E_0}{\pi a l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25 - 4n^2} \sin \frac{\pi n a t}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad \blacksquare$$

3.8.2. Розв'язування другої крайової задачі для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних

Розглянемо задачу про поширення тепла в однорідному стержні довжини l , всередині якого відсутні теплові джерела, а бічна поверхня теплоізолювана. Припустимо, що початковий розподіл при $t = 0$ температури $u(x, t)$ в стержні $u(x, 0) = \varphi(x)$ ($0 < x < l$), де $\varphi(x)$ – відома функція, а обидва його кінці $x = 0$ і $x = l$ теплоізолювані, тобто теплові потоки через них відсутні:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0).$$

Математично ця задача формулюється як *друга крайова задача (задача Неймана) для одновимірного рівняння теплопровідності*:

знайти розв'язок $u(x,t)$ ДРЧП $\boxed{\partial u/\partial t = a^2 \partial^2 u/\partial x^2}$
 $(0 < x < l; t > 0)$, який задовольняє початковій умові
 $u(x,0) = \varphi(x)$ ($0 < x < l$) і однорідним граничним умовам другого
типу $\boxed{\partial u(0,t)/\partial x = 0; \partial u(l,t)/\partial x = 0}$ ($t > 0$), де $\varphi(x)$ – відома
функція; a, l – відомі числа, $a > 0, l > 0$.

На першому етапі розв'язування задачі методом відокремлення змінних шукаємо ненульові розв'язки даного однорідного ДРЧП, які задовольняють указаним однорідним граничним умовам, у вигляді добутку функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Використовуючи відокремлення змінних у рівнянні ДРЧП і граничних умовах (зробіть це самостійно), дістанемо звичайне диференціальне рівняння

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$$

для знаходження функції $T(t)$ і крайову задачу Штурма – Ліувілля (ЗДР) $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ ($0 < x < l$); (ГУ) $X'(0) = 0$; $X'(l) = 0$ для знаходження функції $X(x)$ і довільної сталої λ (параметра розщеплення).

Рівняння $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ уже розв'язувалось в попередньому пункті 3.8.1. Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то його загальний розв'язок визначається формулою $X = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$, де A і B – довільні сталі. З граничних умов маємо:

$$X'(0) = 0: B = 0;$$

$$X'(l) = 0: -A\beta \sin(\beta l) + B\beta \cos(\beta l) = 0; A \sin \beta l = 0.$$

Якщо покласти $A = 0$, то одержимо нульовий розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому треба покласти $\sin \beta l = 0$.

Розв'язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення: $\beta l = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\beta_n = \pi n / l$; $\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2$, $n = 1, 2, \dots$ і відповідні їм власні функції $X_n(x) = A_n \cos(\pi n x / l)$, $n = 1, 2, \dots$, де A_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок ЗДР визначається фор-

мулою $X = Ax + B$, де A і B - довільні сталі. Граничні умови дозволяють знайти тільки довільну сталу A :

$$X'(0) = 0: A = 0; \quad X'(l) = 0: A = 0.$$

Звідси $X(x) = B$. Тоді $\lambda_0 = 0$ - власне значення; $X_0(x) = A_0$ - відповідна власна функція, де A_0 - довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, то загальним розв'язком ЗДР служить функція $X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$, де A і B - довільні сталі. Підставляючи його в граничні умови, дістанемо систему для знаходження A і B :

$$X'(0) = 0: A\beta - B\beta = 0; \quad X'(l) = 0: A\beta e^{\beta l} - B\beta e^{\beta l} = 0.$$

Оскільки $\beta \neq 0$, то звідси одержимо $A = 0$; $B = 0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda = \beta^2 > 0$ задача Штурма - Ліувілля має тільки нульовий розв'язок $X(x) \equiv 0$.

Таким чином, об'єднуючи всі можливі випадки λ , маємо послідовність власних значень $\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ і відповідних власних функцій $X_n(x) = A_n \cos(\pi n x / l)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

При $\lambda = \lambda_n$ диференціальне рівняння для функції $T(t)$ набуває вигляду

$$T_n'(t) + \left(\pi^2 n^2 a^2 / l^2\right) T_n(t) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\int \frac{dT_n}{T_n} = -\int \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} dt; \quad \ln T_n = -\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t + \ln C_n;$$

$$T_n = C_n e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2 / l^2\right)t} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Підставляючи функції $X_n(x) = A_n \cos(\pi n x / l)$ і $T_n = C_n e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2 / l^2\right)t}$ у формулу $u(x, t) = X(x)T(t)$, знаходимо послідовність ненульових розв'язків рівняння теплопровідності, які задовольняють однорідним граничним умовам:

$$u_n(x,t) = a_n e^{-(\pi^2 n^2 a^2 / l^2)t} \cos(\pi n x / l) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де a_n – довільна стала, до складу якої введено A_n і C_n .

На другому етапі методу відокремлення змінних будуватиметься розв'язок ДРЧП, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам. За загальною схемою методу такий розв'язок формується у вигляді функціонального ряду:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(\pi^2 n^2 a^2 / l^2)t} \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

Коефіцієнти ряду a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ знаходять за початковою умовою: $u(x,0) = \varphi(x)$: $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\pi n x / l)$.

Розглядаючи останнє співвідношення як розвинення заданої функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є за косинусами на відрізку $[0; l]$ і користуючись відомими формулами для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є, дістанемо

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Приклад. Розв'язати другу крайову задачу:

$$(ДРЧП) \quad \partial u / \partial t = 9 \partial^2 u / \partial x^2 \quad (0 < x < 4; \quad t > 0);$$

$$(ПУ) \quad u(x,0) = \varphi(x) = \pi \cos(\pi x / 8);$$

$$(ГУ) \quad \partial u(0,t) / \partial x = 0; \quad \partial u(4,t) / \partial x = 0 \quad (t > 0).$$

□ У даній задачі $a^2 = 9$, $l = 4$. Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \pi \cos \frac{\pi x}{8} dx = 2 \sin(\pi x / 8) \Big|_0^4 = 2;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{4} \int_0^4 \pi \cos \frac{\pi x}{8} \cos \frac{\pi n x}{4} dx = \frac{\pi}{4} \times$$

$$\times \int_0^4 \left(\cos \frac{\pi x(2n+1)}{8} + \cos \frac{\pi x(2n-1)}{8} \right) dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \sin \frac{\pi x(2n+1)}{8} \Big|_0^4 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{2n-1} \cdot \sin \frac{\pi x(2n-1)}{8} \Big|_0^4 = \frac{2}{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)}{2} + \frac{2}{2n-1} \times \\
 & \times \sin \frac{\pi(2n-1)}{2} = \frac{2 \cdot (-1)^n}{2n+1} + \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{4n^2-1}.
 \end{aligned}$$

Тоді шуканий розв'язок можна подати у вигляді ряду

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{4n^2-1} e^{-(\pi^2 n^2 9/4^2)t} \cos \frac{\pi n x}{4} = \\
 &= 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} e^{-(9\pi^2 n^2/16)t} \cos \frac{\pi n x}{4}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

3.8.3. Розв'язування першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі методом відокремлення змінних

Вивчення усталених (стаціонарних) процесів приводить до ДРЧП еліптичного типу. Наприклад, якщо в двовимірному однорідному рівнянні теплопровідності

$$\partial u / \partial t = a^2 (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2)$$

вважати, що шукана температура u не залежить від часу t , тобто $u = u(x, y)$, то похідна $\partial u / \partial t$ тотожно дорівнює нулю і для знаходження $u(x, y)$ одержуємо **двовимірне рівняння Лапласа** $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$, яке відноситься до еліптичного типу.

Для рівнянь еліптичного типу вказуються лише граничні умови, а початкові умови відсутні.

Обмежимося двовимірним випадком. Для однозначного обчислення $u = u(x, y)$ не треба задавати початковий розподіл шуканої величини u , а досить знати значення u на межі S області D , в якій вивчається дане явище, тобто маємо **граничну умову першого типу** $u(x, y)|_S = g(x, y)$, $(x, y) \in S$, де $g(x, y)$ - відома функція.

Така гранична умова виникає, коли межа S доступна для спостереження і в кожній її точці величину u можна виміряти.

Якщо ж у довільній точці межі S відома інтенсивність потоку

$\partial u / \partial n$ шуканої величини, то маємо *граничну умову другого типу*

$\partial u(x, y) / \partial n|_S = g(x, y)$, $(x, y) \in S$, де \vec{n} – зовнішня нормаль до межі S .

Гранична умова третього (змішаного) типу має комбінований вигляд

$(\alpha u(x, y) + \beta \partial u(x, y) / \partial n)|_S = g(x, y)$, $(x, y) \in S$, де α, β – задані числа.

Нехай у крузі радіуса ρ_0 з центром у початку координат треба знайти розв’язок $u(\rho, \varphi)$ *рівняння Лапласа (в полярних координатах)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi; 0 < \rho < \rho_0),$$

який задовольняє граничній умові $u(\rho_0, \varphi) = g(\varphi) \quad (0 < \varphi < 2\pi)$,

а також додатковим умовам, що випливають з фізичних міркувань:

$u(\rho, \varphi)$ – неперервна функція в крузі $0 \leq \rho \leq \rho_0$ (а, отже, обмежена в даному крузі);

$u(\rho, \varphi)$ – періодична функція відносно φ з періодом 2π , тобто $u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$.

Тут φ – полярний кут; ρ – полярний радіус; $g(\varphi)$ – відома періодична функція з періодом 2π .

Розв’язок поставленої *першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі* шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді $u = R(\rho) \Phi(\varphi)$. Підставляючи цей вираз у рівняння, маємо:

$$\Phi(\varphi)R''(\rho) + (1/\rho) \Phi(\varphi)R'(\rho) + (1/\rho^2) \Phi''(\varphi)R(\rho) = 0;$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda, \quad \text{де } \lambda \geq 0.$$

Значимо, що при $\lambda < 0$ розв’язок неперіодичний. (Перевірте це самостійно).

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0; \quad \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0.$$

Якщо $\lambda = 0$, то

$$\Phi''(\varphi) = 0; \quad \Phi(\varphi) = A\varphi + B; \quad \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = 0;$$

$$R'(\rho) = v(\rho); \quad \rho v' + v = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{d\rho}{\rho}; \quad \ln v = -\ln \rho + \ln C;$$

$$v = \frac{C}{\rho}; \quad R'(\rho) = \frac{C}{\rho}; \quad R\rho = C \int \frac{d\rho}{\rho}; \quad R\rho = C \ln \rho + D;$$

$u_0(\rho, \varphi) = (A\varphi + B)(C \ln \rho + D)$, де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки функція $u_0(\rho, \varphi)$ – періодична по φ , то $A = 0$. Із неперервності функції $u_0(\rho, \varphi)$ у центрі круга при $\rho = 0$ маємо $C = 0$. Отже, $u_0(\rho, \varphi) = a_0/2$, де a_0 – довільна стала, в яку введено B і D .

$$\text{Якщо } \lambda > 0, \text{ то } \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0; \quad k^2 + \lambda = 0;$$

$$k = \pm\sqrt{\lambda}i; \quad \Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi;$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0; \quad R(\rho) = \rho^\alpha;$$

$$\rho^2 \alpha(\alpha - 1) \rho^{\alpha-2} + \rho \alpha \rho^{\alpha-1} - \lambda \rho^\alpha = 0; \quad \alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda = 0;$$

$$\alpha^2 - \lambda = 0; \quad \alpha = \pm\sqrt{\lambda}; \quad R(\rho) = C\rho^{-\sqrt{\lambda}} + D\rho^{\sqrt{\lambda}};$$

$$u(\rho, \varphi) = \left(A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi \right) \left(C\rho^{-\sqrt{\lambda}} + D\rho^{\sqrt{\lambda}} \right),$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки розв'язок $u(\rho, \varphi)$ неперервний у центрі круга при $\rho = 0$, то $C = 0$. Тоді $u(\rho, \varphi) = \left(a \cos \sqrt{\lambda}\varphi + b \sin \sqrt{\lambda}\varphi \right) \rho^{\sqrt{\lambda}}$, де a, b – довільні сталі.

Знайдений розв'язок має період $2\pi/\sqrt{\lambda}$. Цей період дорівнює 2π або ціле число разів міститься в 2π тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{\lambda}$ – ціле додатне число, тобто $\sqrt{\lambda} = n$; $\lambda_n = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$).

$$\text{Отже, } u_n(\rho, \varphi) = (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \rho^n.$$

Згідно з принципом суперпозиції довільна сума знайдених

функцій $u_n(\rho, \varphi)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) і навіть ряд

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \rho^n$$

також буде розв'язком рівняння Лапласа.

Довільні сталі a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) знаходимо з граничної умови:

$$u(\rho_0, \varphi) = g(\varphi) : \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \rho_0^n = g(\varphi);$$

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho_0^n \cos n\varphi + b_n \rho_0^n \sin n\varphi).$$

Розглядаючи останній вираз як розвинення функції $g(\varphi)$ в ряд Фур'є і використовуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, одержимо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi \rho_0^n} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi \rho_0^n} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Розглянута крайова задача має важливе значення в фізичних застосуваннях. Зокрема, її можна інтерпретувати як задачу про знаходження електростатичного потенціалу кругового диску за відомим розподілом потенціалу на його межі $\rho = \rho_0$ або як задачу про стаціонарний розподіл температури всередині круга при відомій температурі на його межі і т.п.

Приклад. Знайти розподіл електростатичного потенціалу $u(\rho, \varphi)$ на однорідній тонкій круглій пластині радіуса $\rho_0 = 1$, якщо потенціал на її межі задається формулою $u(1, \varphi) = 8 \sin^2 2\varphi$.

□ Треба знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi; 0 < \rho < 1),$$

який задовольняє граничній умові $u(1, \varphi) = 8 \sin^2 2\varphi$ ($0 < \varphi < 2\pi$). а також додатковим умовам, що впливають з фізичних міркувань:

Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \rho^n.$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 8 \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{4}{\pi} \varphi \Big|_0^{2\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi} \sin 4\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8; \quad a_n = \frac{1}{\pi \rho_0^n} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi \cdot 1^n} \int_0^{2\pi} 8 \sin^2 2\varphi \times$$

$$\times \cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi - \frac{2}{\pi} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} (\cos(n+4)\varphi + \cos(n-4)\varphi) d\varphi = \frac{4}{n\pi} \sin n\varphi \Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{(n+4)\pi} \times$$

$$\times \sin(n+4)\varphi \Big|_0^{2\pi} - \begin{cases} (2/\pi)\varphi \Big|_0^{2\pi} = -4, & n = 4; \\ ((2/\pi)/(n-4)) \sin(n-4)\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0, & n \neq 4; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi \rho_0^n} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi_0 1^n} \int_0^{2\pi} 8 \sin^2 2\varphi \sin n\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) \sin n\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\varphi d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(n+4)\varphi +$$

$$+ \sin(n-4)\varphi) d\varphi = 0.$$

Тоді $u(\rho, \varphi) = 8/2 + (-4)\rho^4 \cos 4\varphi = 4 - 4\rho^4 \cos 4\varphi$. ■

Зауваження. Розглянуті методи не вичерпують усіх відомих способів розв'язування задач математичної фізики. Перелічимо деякі найбільш вживані методи:

1) Метод відокремлення змінних. 2) Метод інтегральних пе-

ретворень (зокрема, застосування перетворення Лапласа – операційний метод). 3) Метод перетворення координат. 4) Метод заміни незалежних і залежних змінних. 5) Метод функцій Гріна (функцій впливу (джерела)). 6) Метод інтегральних рівнянь. 7) Варіаційні методи (замість крайової задачі для ДРЧП розв'язується деяка задача оптимізації). 8) Чисельні методи (метод сіток, апроксимація сплайнами, метод скінченних елементів і т.п.).

3.8.4. Загальне поняття про нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними

Фізичні явища, що відбуваються в природі, як правило, носять дуже складний характер. Тому математичні моделі реальних процесів, які досить точно відображають основні їх закономірності, виявляються нелійними. Лінійні моделі виникають звичайно при додаткових спрощеннях, до яких приводять різні правдоподібні припущення, такі як малість величин, що характеризують процес.

Складність оперування з нелійними моделями довгий час стримувала їх практичне застосування. У результаті поза належною увагою залишались по-справжньому життєво важливі явища, які не піддаються лінійному описові і з класичних позицій часто сприймаються як катастрофи. Потреби більш глибокого вивчення реальних процесів і зростання можливостей обчислювальної техніки створюють передумови для підвищення інтересу до нелінійних моделей, відкриття нових чисто нелінійних математичних методів.

Можна виділити наступні три основні властивості нелінійних ДРЧП, які відрізняють їх від лінійних рівнянь:

- 1) утворення стійких усамітнених хвиль – *солітонів*; які ведуть себе подібно частинкам;
- 2) руйнування неперервних, гладких (класичних) розв'язків і утворення *розривних (узагальнених) розв'язків*, які відповідають *ударним хвилям*;
- 3) *самоорганізація систем* – утворення розв'язків зі стійкою неоднорідною структурою при однорідних умовах задачі, наприклад, утворення дисипативних (теплових) структур у нелінійних задачах дифузії.

3.9. Контрольні запитання

1. Що називається криволінійним інтегралом за довжиною (першого роду)?
2. Як обчислити криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у параметричній формі?
3. Як обчислити криволінійний інтеграл за довжиною за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
4. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити довжину дуги, масу кривої та площу циліндричної поверхні?
5. Що таке векторне поле? Що таке векторні лінії?
6. Які основні характеристики векторного поля? Дайте означення дивергенції та ротора векторного поля.
7. Що таке щільність циркуляції векторного поля?
8. Запишіть формули для обчислення дивергенції та ротора у прямокутних координатах.
9. Яке поле називається соленоїдальним? Безвихровим? Гармонічним?
10. Що називається криволінійним інтегралом за координатами (другого роду)?
11. Як обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у параметричній формі?
12. Як обчислити криволінійний інтеграл за координатами за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
13. Як визначається додатний напрям обходу замкненої кривої?
14. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Гріна, що зв'язує криволінійний і подвійний інтеграли.
15. Як за допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої фігури?
16. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?
17. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування.

18. Як за допомогою криволінійного інтеграла за координатами відновити функцію двох чи трьох змінних за її повним диференціалом?
19. Як за допомогою криволінійного інтеграла другого роду знайти загальний розв'язок диференціального рівняння у повних диференціалах?
20. Яке поле називається потенціальним? Як зв'язані поняття безвихрового і потенціального поля?
21. Як знайти потенціал векторного поля?
22. Що таке вектор-потенціал соленоїдального поля?
23. Що таке оператор Гамільтона (“набла”-оператор)? Наведіть вирази для диференціальних операцій першого порядку – градієнта, дивергенції та ротора – за допомогою цього оператора.
24. Які існують диференціальні операції другого порядку? Що таке оператор Лапласа (лапласіан)?
25. Які поверхні називаються двосторонніми? Односторонніми? Наведіть приклади двосторонніх поверхонь. Що таке орієнтація двосторонньої поверхні?
26. Яка поверхня називається правильною (стандартною) в напрямі осі Ox ? Осі Oy ? Осі Oz ? Яка поверхня називається просто правильною (стандартною)?
27. Що називається поверхневим інтегралом за площею (першого роду)?
28. Як обчислюється поверхневий інтеграл першого роду?
29. Як знайти масу матеріальної поверхні за допомогою поверхневого інтеграла за площею?
30. Що називається поверхневим інтегралом за координатами (другого роду)?
31. Які застосування має поверхневий інтеграл за координатами?
32. У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду?
33. Як обчислюється поверхневий інтеграл за координатами методом проектування на одну координатну площину?
34. Як обчислюється поверхневий інтеграл другого роду методом проектування на всі три координатні площини?
35. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Стокса, що зв'язує криволінійний і поверхневий інтеграли.

36. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Остроградського – Гауса, що зв'язує поверхневий і потрійний інтеграли.
37. Дайте означення диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП). Що таке загальний і частинний розв'язки ДРЧП?
38. Що таке початкова задача (задача Коші) для ДРЧП?
39. Укажіть основні типи граничних умов і відповідні типи крайових задач.
40. Яка задача математичної фізики називається коректно поставленою?
41. Який загальний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку?
42. Дайте класифікацію лінійних ДРЧП другого порядку. Наведіть відповідний канонічний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку кожного типу.
43. Як формулюється перша крайова задача для однорідного одновимірного хвильового рівняння? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
44. Як формулюється друга крайова задача для однорідного одновимірного рівняння теплопровідності? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
45. Як формулюється перша крайова задача для двовимірного рівняння Лапласа у крузі? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
46. Укажіть основні властивості нелінійних ДРЧП, що відрізняють їх від лінійних рівнянь.

3.10. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Примітка. Значення параметрів α , β , γ , a , l , що входять у поставлені задачі, визначаються так:

α і β – відповідно число голосних і приголосних букв у Вашому прізвищі; γ – номер варіанта; $a = |\alpha - \beta| + 1$; $l = a + 1 + [\gamma / (\alpha + \beta)]$, де $[z]$ – ціла частина числа z .

Завдання 1. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною) $I = \int_L f(x, y) dl$ по заданій дузі L .

№ в- та	Завдання
1	$\int_L (x^2 - y) dl$, L – дуга кола $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
2	$\int_L \frac{y dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
3	$\int_L (x^2 + y^2) dl$, L – дуга кола $x^2 + y^2 = 4x$, $y \geq 0$
4	$\int_L x^3 \sqrt{y} dl$, L – дуга лінії $y = x^4$, $0 \leq x \leq 1$
5	$\int_L y dl$, L – дуга циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
6	$\int_L (x^2 + y^2)^{3/2} dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$
7	$\int_L x^2 y^{-3} dl$, L – дуга лінії $y = 1/x$, $\sqrt{3}/2 \leq x \leq 1$
8	$\int_L \frac{y dl}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}$, L – дуга тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leq x \leq \pi/3$
9	$\int_L (x + y) dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$
10	$\int_L \frac{(3 - 4y) dl}{\sqrt{1 + 9xy}}$, L – дуга кубічної параболи $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$
11	$\int_L \sqrt{y} dl$, L – дуга циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
12	$\int_L \frac{y^2 dl}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$, L – дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$

13	$\int_L \frac{y \cos x}{\sqrt{2-y^2}} dl$, L – дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/3$
14	$\int_L \frac{y dl}{\sqrt{1+x^2}}$, L – дуга лінії $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$
15	$\int_L \frac{y^2 \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dl$, L – дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/4$
16	$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$
17	$\int_L \frac{y \sin x dl}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, L – дуга косинусоїди $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$
18	$\int_L (x^2 + y^2) dl$, L – дуга лінії $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
19	$\int_L x \sqrt{1+4y} dl$, L – дуга параболи $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$
20	$\int_L \frac{y dl}{\sqrt{1+16x^2 y}}$, L – дуга лінії $y = x^4$, $0 \leq x \leq 1$
21	$\int_L \frac{dl}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, L – дуга гіперболічної спіралі $\rho = 3/\varphi$, $4/3 \leq \varphi \leq \sqrt{3}$
22	$\int_L \frac{x-3y}{\sqrt{1+4y}} dl$, L – дуга параболи $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$
23	$\int_L e^x \sqrt{1+y^2} dl$, L – дуга експоненти $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$
24	$\int_L (x+y) dl$, L – дуга кола $\rho = 4 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$
25	$\int_L \frac{y dl}{\sqrt{1+x^6}}$, L – дуга лінії $y = x^4/4$, $0 \leq x \leq 1$

26	$\int_L xy dl$, L – дуга кола $\rho = 4 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$
27	$\int_L \frac{xy dl}{\sqrt{x^2 + 16y^2}}$, L – дуга еліпса $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
28	$\int_L (4x^{1/3} - 3y^{1/3}) dl$, L – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
29	$\int_L \frac{y dl}{\sqrt{1 + \sin^4 x}}$, L – дуга котангенсоїди $y = \operatorname{ctg} x$, $\pi/6 \leq x \leq \pi/2$
30	$\int_L \frac{x dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Завдання 2. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл другого роду (за координатами) $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ по заданій дузі L .

№ в-та	Завдання
1	$\int_L xy dx + (x^2 - y^2) dy$, L – дуга кривої $x = 2e^{-t}$, $y = 2e^t$, $0 \leq t \leq 1$
2	$\int_L 2xy dx + y^2 dy$, L – дуга кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
3	$\int_L xy^2 dx - x dy$, L – дуга еліпса $x = 4 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
4	$\int_L y^2 dx - 2y \sin x dy$, L – дуга лінії $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi/4$
5	$\int_L \cos^2 x dx - y^{-3} dy$, L – дуга кривої $y = \operatorname{tg} x$, $\pi/6 \leq x \leq \pi/4$

6	$\int_L \sqrt[3]{xy^2} dx - dy$, L – дуга астрои́ди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
7	$\int_L (x - y^2) dx + xy dy$, L – дуга параболи $y^2 = 1 - x$ від $A(1,0)$ до $B(0,1)$
8	$\int_L (x - 2y) dx + x dy$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
9	$\int_L 3x^2 y dx + (x^3 + 3y) dy$, L – дуга лінії $y = x^3/3$, $0 \leq x \leq 1$
10	$\int_L (x^2 - y^2) dx + (x/y) dy$, L – дуга кривої $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$
11	$\int_L y dx - (x^4 - 8y^2) dy$, L – дуга параболи $y = x^2/4$, $0 \leq x \leq 2$
12	$\int_L \frac{y dx + x dy}{\sqrt{1-x^2}}$, L – дуга лінії $y = \arcsin x$, $0 \leq x \leq 1/2$
13	$\int_L \frac{xy dx + dy}{\sqrt{1+x^2}}$, L – дуга лінії $y = \sqrt{1+x^2}$, $0 \leq x \leq 1$
14	$\int_L y^2 \sin x dx + 2y \cos x dy$, L – дуга лінії $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/2$
15	$\int_L y dx + (\cos^2 x + y \sin x) dy$, L – дуга лінії $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$
16	$\int_L (y^3/x) dx + 3y^2 \ln x dy$, L – дуга лінії $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e^2$
17	$\int_L \sin^2 x dx + y^{-2} dy$, L – дуга кривої $y = \operatorname{ctg} x$, $\pi/6 \leq x \leq \pi/4$
18	$\int_L (x^2 - 2y) dx + 3x^2 y dy$, L – дуга параболи $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$

19	$\int_L xy dx + \sqrt{1-x^2} dy$, L – дуга лінії $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 3/5$
20	$\int_L xy dx - (1+x^2) dy$, L – дуга лінії $y = \ln(1+x^2)$, $0 \leq x \leq 1$
21	$\int_L xy dx + x^2 dy$, L – дуга лінії $x = t^2$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 1$
22	$\int_L xy^2 dx + x^{5/2} dy$, L – дуга параболи $y^2 = 4x$ від $A(0,0)$ до $B(1,2)$
23	$\int_L xy dx - (x^2 + y^2) dy$, L – дуга кола $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
24	$\int_L \frac{y dx + 4x dy}{x^2 + 1}$, L – дуга лінії $y = \operatorname{arctg} x$, $0 \leq x \leq 1$
25	$\int_L 3x^2 y dx + (x^3 + 3y) dy$, L – дуга лінії $y = x^3/3$, $0 \leq x \leq 1$
26	$\int_L (x+2y) dx + (x-2y) dy$, L – дуга еліпса $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
27	$\int_L x^3 y dx - dy$, L – дуга еліпса $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
28	$\int_L y \sin x dx + \sqrt{1-y^2} \cos x dy$, L – дуга лінії $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/2$
29	$\int_L 12xy dx - (x^2 + 4y^2) dy$, L – дуга параболи $y = x^2/4$, $0 \leq x \leq 1$
30	$\int_L x^{-1} y^2 dx + 2y \ln x dy$, L – дуга лінії $y = \ln x$, $e \leq x \leq e^2$

Завдання 3. Перевірити, що задане диференціальне рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є рівнянням у повних диференціалах ($\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$) і знайти його загальний розв'язок $u(x, y) = C$, відновлюючи функцію за її повним диференціалом за допомогою криволінійного інтеграла за координатами.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\left(1 + \frac{x}{y^4}\right)dx - \frac{2x^2}{y^5}dy = 0$	16	$\frac{2xe^{-y}}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^{-y}dy}{1+x^2} = 0$
2	$2xydx + (x^2 - 2e^y)dy = 0$	17	$ydx + (x + 3y^2)dy = 0$
3	$3x^2e^y dx + x^3e^y dy = 0$	18	$xy^2dx + (x^2y + 6y)dy = 0$
4	$y dx + (x - 2e^y)dy = 0$	19	$2x e^y dx + x^2 e^y dy = 0$
5	$xy^2 dx + (e^y + x^2 y)dy = 0$	20	$y^3 dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0$
6	$\frac{y^2}{x^2} dx - \left(\frac{2y}{x} + y^4\right) dy = 0$	21	$\left(1 + \frac{2x}{y^3}\right) dx - \frac{3x^2}{y^4} dy = 0$
7	$\frac{y^2}{2x} dx + (y \ln x - e^y)dy = 0$	22	$\frac{xdx}{y^2 - x^2} - \frac{y dy}{y^2 - x^2} = 0$
8	$e^y x^{-1} dx + e^y \ln x dy = 0$	23	$(\ln y - x) dx + xy^{-1} dy = 0$
9	$xy^2 dx + (x^2 y + y^5)dy = 0$	24	$e^y dx + (xe^y - y^2) dy = 0$
10	$\frac{y^3}{3x} dx + y^2 \ln x dy = 0$	25	$\frac{\sin y}{x^2} dx - \frac{\cos y}{x} dy = 0$
11	$\frac{y dx}{x^{1-y}} + (x^y \ln x + 1)dy = 0$	26	$\frac{\sin 2y}{x^3} dx - \frac{\cos 2y}{2x^2} dy = 0$
12	$\frac{\sin 2x}{y} dx - \frac{\sin^2 x}{y^2} dy = 0$	27	$\frac{y^2}{\cos^2 x} dx + 2y \operatorname{tg} x dy = 0$
13	$3x^2 e^y dx + x^3 e^y dy = 0$	28	$\cos^2 y dx - x \sin 2y dy = 0$

14	$(ctg y + x)dx - \frac{x dy}{\sin^2 y} = 0$	29	$\frac{\sin 2x}{3y^3} dx + \frac{\cos 2x}{2y^4} dy = 0$
15	$(tg y - x^2)dx + \frac{x dy}{\cos^2 y} = 0$	30	$\frac{y}{x} dx + (\ln x + \sin y)dy = 0$

Завдання 4. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду (за площею) $I = \iint_{\sigma} \left((-1)^{\alpha} ax + (-1)^{\beta} ly + (-1)^{\gamma} z \right) d\sigma$, де σ – частина заданої площини $p: Ax + By + Cz + D = 0$, яка відсічена координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. (Тут $A = (-1)^{\beta} l$, $B = (-1)^{\gamma} a$, $C = (-1)^{\alpha} (a + l)$, $D = (-1)^{\alpha + \beta} (a + l)al$).

Задачу розв'язати трьома способами, проєктуючи поверхню σ на одну з координатних площин відповідно а) Oxy , б) Oyz , в) Oxz . До кожного способу зробити рисунок поверхні σ як правильної у вибраному напрямі відповідно а) Oz , б) Ox чи в) Oy і рисунок її проєкції (відповідно а) D_{xy} , б) D_{yz} чи в) D_{xz}) як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

Завдання 5. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = (ax + (-1)^{\alpha} y + az)\vec{i} + (x + ly + (-1)^{\beta} az)\vec{j} + ((-1)^{\gamma} ax + (-1)^{\beta} ly + z)\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини $p: Ax + By + Cz + D = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Методом проєктування на одну координатну площину знайти потік $\Pi = \iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^+} P dydz + Q dx dz + R dx dy$ цього поля через додатну сторону σ^+ вказаної поверхні, якій відповідає вектор нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$ площини p . (Тут $A = (-1)^{\alpha} a$, $B = (-1)^{\beta} l$, $C = (-1)^{\gamma} 2a$, $D = (-1)^{\alpha + \gamma} 2a^2 l$).

Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню σ на одну з координатних площин відповідно а) Oxy , б) Oyz , в) Oxz . До кожного способу зробити рисунок поверхні σ як правильної у вибраному напрямі (відповідно а) Oz , б) Ox , в) Oy) і рисунок її проєкції (відповідно а) D_{xy} , б) D_{yz} , в) D_{xz}) як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

Завдання 6. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = (lx + (-1)^\beta ayz)\vec{i} + (ay + (-1)^\gamma lxz)\vec{j} + ((-1)^\beta axy + (-1)^\alpha lz)\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини $p: Ax + By + Cz + D = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Знайти $\Gamma = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L P dx + Q dy + R dz$ – циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру L , що обмежує поверхню σ , при додатному напрямі обходу відносно вектора нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$ цієї площини p . (Тут $A = (-1)^\beta l$, $B = (-1)^\gamma a$, $C = (-1)^\alpha 2l$, $D = (-1)^{\beta+\gamma} 2al^2$).

Обчислення провести двома способами:

- безпосередньо за означенням циркуляції;
- за допомогою формули Стокса.

Для обчислення поверхневого інтеграла використати метод проектування на одну координатну площину Oxy . У просторовій системі координат $Oxyz$ зробити рисунок поверхні σ як правильної у напрямі осі Oz . На координатній площині Oxy зробити рисунок проєкції D_{xy} поверхні σ як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

Завдання 7. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = (lx^2 + (-1)^\beta ayz)\vec{i} + (y^2 + (-1)^\alpha lxy)\vec{j} + (-1)^\gamma axyz\vec{k}$ і піраміда V , утворена вказаною площиною $p: Ax + By + Cz + D = 0$ і координатними площинами $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. (Тут $A = (-1)^\gamma 2l$,

$B = (-1)^\alpha a$, $C = (-1)^\beta 2a$, $D = 4a^2 l$). Необхідно:

1) Зробити рисунок піраміди V у просторовій системі координат $Oxyz$. Зобразити вектор зовнішньої нормалі \vec{n} до кожної з граней піраміди V .

2) Знайти проекції D_{xy} , D_{xz} і D_{yz} піраміди V на відповідні координатні площини. Подати кожен плоску область D_{xy} , D_{xz} і D_{yz} як правильну в напрямі однієї з координатних осей і зробити рисунок у відповідній плоскій системі координат.

3) Знайти $\Pi = \iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^+} P dydz + Q dx dz + R dx dy$ – потік векторного поля через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди V двома способами:

а) безпосередньо за означенням потоку методом проектування на всі три координатні площини;

б) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

Завдання 8. Для скалярного поля $u = (-1)^\alpha axyz + (-1)^\beta lyz^2 + (-1)^\gamma lxz^2 + a$ знайти його градієнт $\vec{F} = \text{grad } u$ і лапласіан Δu . Обчислити $(\partial u(M_0)/\partial l)_{max} = |\text{grad } u(M_0)|$ – найбільшу швидкість зростання функції $u = u(x, y, z)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Перевірити, що одержане векторне поле градієнтів $\vec{F} = \text{grad } u$ є безвихровим ($\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$), а значить, потенціальним. Для потенціального векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ знайти його потенціал $v = v(x, y, z)$ за допомогою криволінійного інтеграла за координатами

$$v(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

За точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ взяти початок координат $(0, 0, 0)$ і покласти $v(0, 0, 0) = 0$.

Завдання 9. Для векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \left((-1)^\beta x^2 y + (-1)^\gamma a z^2 \right) \vec{i} + (-1)^\alpha a x y z \vec{j} + \left((-1)^\alpha l y^2 z + (-1)^\beta x y \right) \vec{k}$ знайти його ротор $\vec{b} = \text{rot } \vec{F}$. Обчислити найбільшу густину циркуляції $C_{\max}(M_0) = \left| \text{rot } \vec{F}(M_0) \right|$ векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Перевірити, що векторне поле роторів $\vec{b} = \text{rot } \vec{F}$ є соленоїдальним ($\text{div } \vec{b} = 0$).

Завдання 10. Методом відокремлення змінних розв'язати наступні крайові задачі:

1) Знайти розв'язок хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l$; $t > 0$) який задовольняє початковим умовам $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x)$ ($0 < x < l$) і однорідним граничним умовам першого типу $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ ($t > 0$), де

$$\varphi(x) = \left((-1)^\alpha + 1 \right) \sin \frac{\beta \pi x}{l} + \left(1 - (-1)^\alpha \right) \frac{x(l-x)}{l^2},$$

$$\psi(x) = \left((-1)^\beta + 1 \right) \sin \frac{\alpha \pi x}{l} + \left(1 - (-1)^\beta \right) \frac{x(l-x)}{l^2}.$$

2) Знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l$; $t > 0$) який задовольняє початковій умові $u(x, 0) = \varphi(x)$ ($0 < x < l$) і однорідним граничним умовам другого типу $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$ ($t > 0$), де

$$\varphi(x) = \left((-1)^\gamma + 1 \right) \sin \frac{\alpha \pi x}{l} + \left((-1)^\gamma - 1 \right) \frac{x(l-x)}{l^2}.$$

3) У крузі $0 < \rho < a$ знайти розв'язок рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ при граничній умові першого типу

$$u(a, \varphi) = (-1)^\alpha a \sin \beta \varphi + (-1)^\beta l \cos \alpha \varphi.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бізюк В.В., Якунін А.В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.
2. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.
3. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2003. – 479 с.
4. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. / За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. Ч.1 / Х.Г. Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін. – 2003. – 279 с. Ч.2 / П.П. Овчинников, П.С. Кропив'янський, С.П. Полушкін та ін. – 2003. – 375 с.
5. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Навч. посіб. у 3 т. Т. 3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.
6. Вища математика. У 2 ч. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003 – 2004. Ч.1. – 2003. – 600 с.; Ч.2. – 2004. – 791 с.
7. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 491 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Наука, 1997. Ч.1 – 304 с.; Ч.2 – 415 с.
9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2009. – 648 с.
10. Кононенко Г.М. Елементи векторного аналізу і теорія поля. – К.: КНУБА, 2005. – 243 с.
11. Мартиненко М.А., Легеза В.П. Інженерні задачі математичної фізики. – К.: НУХТ, 2008. – 389 с.
12. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.
13. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.
14. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006. – 423 с.
15. Черняк А.А., Черняк Ж.А., Доманова Ю.А. Высшая математика на базе Mathcad. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 598 с.

З М І С Т

Передмова	3
Змістовий модуль 1.	
ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ	4
1.1. Числові ряди. Основні поняття.	
Необхідна ознака збіжності	4
1.2. Достатні ознаки збіжності знакодатних рядів	9
1.2.1. Інтегральна ознака Коші	9
1.2.2. Ознаки порівняння	14
1.2.3. Ознака Даламбера	20
1.2.4. Радикальна ознака Коші	25
1.3. Знакозмінні ряди	27
1.3.1. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниці	27
1.3.2. Абсолютна й умовна збіжність знакозмінних рядів	31
1.4. Функціональні ряди	33
1.4.1. Збіжність функціональних рядів	33
1.4.2. Властивості рівномірно збіжних рядів	38
1.5. Степеневі ряди	39
1.5.1. Збіжність степеневих рядів	39
1.5.2. Властивості степеневих рядів	44
1.5.3. Ряди Тейлора і Маклорена	46
1.5.4. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена	48
1.5.5. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень	56
1.5.6. Степеневі ряди на комплексній площині	62
1.6. Ряди Фур'є	66
1.6.1. Ортогональність функцій	67
1.6.2. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є.	
Достатні умови збіжності ряду Фур'є	69
1.6.3. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій	74
1.6.4. Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом. Гармонічний аналіз	78
1.6.5. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій	84
1.6.6. Комплексна форма ряду Фур'є	88
1.6.7. Інтеграл Фур'є	91
1.7. Контрольні запитання	95
1.8. Індивідуальні завдання для самостійної роботи	98

Змістовий модуль 2. ФУНКЦІ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ	112
2.1. Поверхні другого порядку та інші поверхні	112
2.1.1. Сфера як поверхня другого порядку	112
2.1.2. Загальне рівняння поверхні другого порядку	113
2.1.3. Довільна циліндрична поверхня	114
2.1.4. Циліндричні поверхні другого порядку	116
2.1.5. Довільна конічна поверхня. Конус другого порядку	118
2.1.6. Поверхні обертання	120
2.1.7. Еліпсоїд обертання. Еліпсоїд загального вигляду	122
2.1.8. Однопорожнинний гіперболоїд обертання. Однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду	124
2.1.9. Двопорожнинний гіперболоїд обертання. Двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду	125
2.1.10. Параболоїд обертання. Параболоїд загального вигляду	127
2.1.11. Гіперболічний параболоїд	128
2.2. Диференціальне числення функцій декількох змінних	130
2.2.1. Поняття функції багатьох змінних. Область визначення	130
2.2.2. Геометричне зображення функції двох змінних	134
2.2.3. Лінії та поверхні рівня	136
2.2.4. Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність. Точки розриву	139
2.2.5. Частинні похідні та їх обчислення	143
2.2.6. Геометричний зміст частинних похідних	145
2.2.7. Частинні та повний диференціали	146
2.2.8. Похідні складених функцій	151
2.2.9. Інваріантність форми повного диференціала	154
2.2.10. Диференціювання неявно заданих функцій	155
2.2.11. Границя та похідна вектор-функції	157
2.2.12. Дотична пряма і нормальна площина до просторової лінії	159
2.2.13. Фізичний зміст вектор-функції та її похідних	161
2.2.14. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала	162
2.2.15. Частинні похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора	166
2.2.16. Скалярне поле та його зображення. Похідна за напрямом	171
2.2.17. Градієнт. Зв'язок між градієнтом, похідною за напрямом і нормаллю до поверхні рівня	175
2.2.18. Екстремум функції двох змінних. Необхідні умови екстремуму	180

2.2.19. Достатні умови екстремуму	184
2.2.20. Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області	187
2.2.21. Умовний екстремум функції двох змінних	190
2.2.22. Метод найменших квадратів	194
2.3. Кратні інтеграли	197
2.3.1. Задача про об'єм циліндричного тіла. Подвійний інтеграл і його властивості	197
2.3.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній системі координат	202
2.3.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярній системі координат	212
2.3.4. Геометричні застосування подвійного інтеграла	217
2.3.5. Фізичні застосування подвійного інтеграла	225
2.3.6. Задача про масу просторового тіла. Потрійний інтеграл і його властивості	229
2.3.7. Обчислення потрійного інтеграла у прямокутній системі координат	231
2.3.8. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Потрійний інтеграл у циліндричній та сферичній системах координат	234
2.3.9. Застосування потрійного інтеграла	240
2.4. Контрольні запитання	244
2.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи	249

Змістовий модуль 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ 266

3.1. Криволінійний інтеграл за довжиною	266
3.1.1. Задача про масу дуги. Криволінійний інтеграл за довжиною (першого роду)	266
3.1.2. Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною	268
3.1.3. Застосування криволінійного інтеграла за довжиною	271
3.2. Векторне поле. Криволінійний інтеграл за координатами	273
3.2.1. Поняття векторного поля. Векторні лінії	273
3.2.2. Дивергенція та ротор векторного поля	274
3.2.3. Криволінійний інтеграл за координатами (другого роду). Циркуляція векторного поля	278
3.2.4. Властивості криволінійного інтеграла за координатами	280
3.2.5. Обчислення криволінійного інтеграла за координатами	282
3.2.6. Формула Гріна	284

3.2.7. Умови незалежності криволінійного інтеграла за координатами від шляху інтегрування	287
3.2.8. Обчислення функції за її повним диференціалом. Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах	290
3.2.9. Потенціальне векторне поле	294
3.3. Оператор Гамільтона та його застосування	299
3.3.1. Оператор Гамільтона у скалярному полі	299
3.3.2. Оператор Гамільтона у векторному полі	300
3.3.3. Диференціальні операції другого порядку	301
3.4. Поверхневий інтеграл за площею	303
3.4.1. Поняття поверхневого інтеграла за площею (першого роду)	303
3.4.2. Обчислення поверхневого інтеграла за площею	305
3.5. Поверхневий інтеграл за координатами	308
3.5.1. Поняття поверхневого інтеграла за координатами (другого роду). Потік векторного поля	308
3.5.2. Обчислення поверхневого інтеграла за координатами	312
3.5.3. Формула Стокса	320
3.5.4. Формула Остроградського – Гаусса	326
3.6. Диференціальні рівняння з частинними похідними	337
3.6.1. Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок. Крайові задачі	337
3.6.2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними	339
3.7. Виведення основних рівнянь математичної фізики	341
3.7.1. Рівняння коливань струни	341
3.7.2. Рівняння поширення тепла у стержні	344
3.8. Методи розв'язування задач математичної фізики	346
3.8.1. Розв'язування першої крайової задачі для хвильового рівняння методом відокремлення змінних	346
3.8.2. Розв'язування другої крайової задачі для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних	356
3.8.3. Розв'язування першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі методом відокремлення змінних	360
3.8.4. Загальне поняття про нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними	365
3.9. Контрольні запитання	366
3.10. Індивідуальні завдання для самостійної роботи	368
Список літератури	379

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

В И Щ А М А Т Е М А Т И К А
для електротехніків
у трьох модулях

Навчальний посібник

М о д у л ь 3

Бізюк Валерій Васильович,
Якунін Анатолій Вікторович

Числові та функціональні ряди.
Функції декількох змінних. Елементи теорії поля.
Криволінійні та поверхневі інтеграли.
Рівняння математичної фізики

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*
Редактор *З. І. Зайцева*

Підп. до друку 02.09.2011 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 21,5
Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011