Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківська національна академія міського господарства

С. О. Станішевський
Ю. Є. Печеніжський

З А В Д А Н Н Я

З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(Модуль 3)

І П Р И К Л А Д И Ї Х Р О З В ' Я З А Н Н Я

(для самостійної роботи студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)

ХАРКІВ
ХНАМГ
2011

Станішевський С. О. Завдання з вищої математики (модуль 3) і приклади їх розв’язання (для самостійної роботи студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво») / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 110 с.

Автори: С. О. Станішевський,
Ю. Є. Печеніжський

Рецензент: Архіпова О. С.

Рекомендовано кафедрою Вищої математики,
протокол № 5 від 24.12.2010 р.

ВСТУП

Дані методичні вказівки містять завдання для самостійної роботи з курсу вищої математики, що відповідають третьому заліковому модулю робочої програми. З метою полегшення засвоєння курсу вищої математики в методичних вказівках подано рішення типових варіантів завдань за кожною темою. Ступінь труднощів їхнього розв'язання відповідає пропонованим для самостійної роботи завданням. Кожна задача подана у тридцяти варіантах. У кожному модулі нумерація тем прохідна.

Методичні вказівки дозволяють здійснювати перехід від пасивних форм навчання до активних, що виражається у самостійній роботі студента з рекомендованими нижче джерелами і розв'язанні запропонованих задач.

Велика кількість задач може бути використана викладачами для проведення практичних і контрольних робіт в аудиторії з метою поточного контролю засвоєння студентами матеріалу з вищої математики.

Зауваження і пропозиції щодо даних вказівок надсилайте за адресою, яку вказано на останній сторінці.

Змістовий модуль 3.1

Тема 11. ***Числові та функціональні ряди***

Знакододатні числові ряди

1. Довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ і знайти його суму.

Рішення. Загальний член $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ даного ряду представимо у вигляді суми найпростіших дробів:

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2},$$

$$2n+1 = An(n+1)^2 + B(n+1)^2 + Cn^2(n+1) + Dn^2,$$

$$\begin{array}{r|l} n=0 & B=1, \\ n=-1 & D=-1, \\ n^3 & 0=A+C, \\ n & 2=A+2B \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} \Rightarrow A=0, C=0, \text{ тому } a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Знайдемо суму перших n членів ряду:

$$S_n = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Далі обчислимо суму ряду:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1,$$

тобто ряд збігається і його сума $S = 1$.

2. Дослідити на збіжність зазначені ряди з додатними членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^{n^2}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)$.

Рішення.

а) скористаємося ознакою Д'аламбера. Маємо:

$$a_n=\frac{n!}{n^n},\ \frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=-\frac{-4}{y^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1,$$ тобто даний ряд збігається;

б) відповідно до радикальної ознаки Коші, маємо:

$$a_n=\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1,$$

тобто даний ряд збігається ;

в) скористаємося інтегральною ознакою Коші. Для цього досліджуємо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{2^{x^2}}=\lim_{A\to\infty}\int_1^A x2^{-x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_1^A 2^{-x^2}d(-x^2)\right)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{2^{-x^2}}{\ln 2}\right)\Bigg|_1^A=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln 2\cdot 2^{A^2}}+\frac{1}{4\ln 2}\right)=\frac{1}{4\ln 2}.$$

Оскільки даний інтеграл збігається, то збігається і досліджуваний ряд;

г) досліджуємо даний ряд за допомогою ознаки порівняння, що полягає в наступному. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k,\ k\in R,\ k\neq 0$, то ряди з такими загальними членами поводяться однаково у сенсі збіжності: чи обоє збігаються, чи обоє розбігаються. Маємо $a_n=tg^2\frac{\pi}{4\sqrt{\pi}}$. Даний ряд будемо порівнювати з гармонійним розбіжним рядом із загальним членом $b_n = \frac{1}{n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{tg^2\,\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{tg^2\,\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\left(\frac{\pi}{4\sqrt{n}}\right)^2\cdot\frac{16}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{16} \neq 0 .$$

Тут $tg\alpha \sim \alpha$, коли $\alpha \to 0$. Отже, досліджуваний ряд розбігається;

д) для цього ряду необхідна ознака збіжності рядів $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не виконується. Дійсно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - sin\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, тобто даний ряд розбігається.

Знакозмінні ряди

3. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}$.

Рішення.

а) скористаємося ознакою Лейбниця.

Маємо: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n7^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n7^n} = 0$, тобто даний ряд збігається.

Досліджуємо ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n7^n}$.

Застосуємо ознаку Д'аламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n7^n}{(n+1)7^{n+1}} = \frac{1}{7}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{7} < 1$, тобто утворений ряд збігається.

Отже, початковий ряд абсолютно збігається;

б) представимо даний ряд у вигляді суми двох рядів :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} .$$

Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ виконується ознака Лейбниця. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ –

гармонійний (розбіжний). Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається умовно. Сума збіжного і розбіжного рядів являє собою розбіжний ряд. Отже, досліджуваний ряд розбігається.

Степеневі ряди

4. Знайти області збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{x^n}{n^2+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3-x^2\right)^n$.

Рішення.

а) Скористаємося ознакою Д'аламбера:

$$u_n=\sqrt{\frac{x^n}{n^2+1}},\quad u_{n+1}=\sqrt{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{x^{n+1}}\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}\sqrt{x^n}}\right|=\sqrt{x}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}}=\sqrt{x}.$$

Інтервал збіжності визначається нерівністю $\sqrt{x}<1$, відкіля $0<x<1$. Досліджуємо граничні точки цього інтервалу. При $x=0$ одержимо числовий ряд, члени якого нулі. Цей ряд збігається, точка $x=0$ входить у його область збіжності. При $x=1$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Скористаємось ознакою порівняння рядів з додатними членами. Порівняємо цей ряд з гармонійним розбіжним рядом:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1\neq 0.$$

Отже, числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ розбігається і точка $x=1$ не входить у область збіжності. Таким чином, область збіжності досліджуваного ряду: $0\le x<1$;

б) за ознакою Д'аламбера маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)n^2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\cdot\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|^{n+1}\cdot\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|^n=$$

$$=\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| < 1,\ -1 < \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} < 1.$$

Розв'язуємо отримані нерівності:

$$-1 < \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}.$$

Звідси $x^2+3x+2>0,\ x\in(-\infty;-2)\cup(-1;\infty)$.

Далі, $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}<1$, $\frac{-6x}{x^2-3x+2}<0$, $\frac{x}{x^2-3x+2}>0$.

Отже, $x\in(-2;-1)\cup(0;\infty)$. Перетинання цих множин дає множину $x\in(0;\infty)$. Коли $x = 0$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$, для якого $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq 0$, тобто необхідна ознака збіжності не виконується. Отже, цей числовий ряд розбігається. Область збіжності досліджуваного ряду: $0 < x < \infty$;

в) скористаємося радикальною ознакою Коші.

Знаходимо:

$$u_n = (3-x^2)^n,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|3-x^2|^n} = |3-x^2| < 1,\quad -1 < 3-x^2 < 1.$$

Розв'язуємо отримані нерівності:

$$3-x^2>-1,\quad x^2-4<0,\ x\in(-2;2);$$

$$3-x^2<1,\quad x^2-2>0,\ x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty).$$

Перетинання знайдених множин дає множини збіжності даного ряду $x\in(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$.

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях цих інтервалів. При $x = \pm 2$ одержимо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Цей знакозмінний числовий ряд розбігається, тому що не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$).

При $x = \pm\sqrt{2}$ одержуємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$, що розбігається, оскільки необхідна ознака збіжності також не виконується. Отже, область збіжності досліджуваного ряду: $(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)$.

5. Розкласти функцію $y=\cos^2 x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=\frac{\pi}{3}$. Знайти область збіжності до цієї функції отриманого ряду .

Рішення. Перетворимо дану функцію: $y=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$. Розкладемо отриману функцію в ряд Тейлора. Для цього знайдемо значення даної функції і її похідних до *n*-го порядку включно у точці $x_0=\frac{\pi}{3}$:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\,,\quad f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\,;$$

$$f'(x)=-\sin 2x\,,\quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

$$f''(x)=-2\cos 2x\,,\quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{2\pi}{3}=1\,;$$

$$f'''(x)=4\sin 2x\,,\quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}\,;$$

………………………………………………………………….

$$f^{n}(x)=-2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right),\ f^{n}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Отримані числові значення похідних підставляємо в ряд Тейлора при $x_0=\frac{\pi}{3}$:

$$\cos^2 x=\frac{1}{4}-\frac{1}{1!}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{1}{3!}2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(-2^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n.$$

Для знаходження області збіжності отриманого ряду необхідно з'ясувати при яких значеннях x залишковий член ряду Тейлора прямує до нуля. Він має вид

$$R_n(x)=\frac{2^{n-1}}{(n+1)!}\sin\left(2\varsigma+n\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1},$$

де $\varsigma \in (x;x_0)$. Оскільки $\left|sin\left(2\varsigma + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$, досить знайти область збіжності ряду з загальним членом $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$.

Відповідно до ознаки Д'Аламбера**,**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+2}\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot 2^n\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\left|x-\frac{\pi}{3}\right|}{n+2} = 0 < 1 .$$

Отриманий ряд збігається при будь-якому x. Отже область його збіжності до функції $f(x) = cos^2 x$ така: $-\infty < x < \infty$.

6. Обчислити $e^{-\frac{1}{2}}$ з точністю α $=0,0001$, скориставшись розкладанням функції $y = e^x$ в степеневий ряд.

Рішення. Скористаємося рядом

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots (-\infty < x < \infty).$$

Тому що $x = -\frac{1}{2}$, то $e^{-\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot 2!} - \frac{1}{8\cdot 3!} + \frac{1}{16\cdot 4!} - \frac{1}{32\cdot 5!} + \ldots$.

Одержали знакозмінний числовий ряд. Для того щоб обчислити значення функції з точністю $\alpha = 0,0001$, необхідно, щоб перший член, що відкидається, був менше $0,0001$ (по наслідку з ознаки Лейбниця). Маємо

$$\alpha_7 = \frac{1}{64\cdot 6!} = \frac{1}{64\cdot 720} = \frac{1}{46080} < 0,0001 .$$

З заданим ступенем точності:

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384} - \frac{1}{3840}, \quad e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065 .$$

7. Використовуючи розкладання підінтегральної функції у степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$ з точністю до $0,001$.

Рішення. Скористаємося біноміальним рядом

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \ldots,$$

який збігається, коли ($-1 < x < 1$). Тоді $\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}} = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{-x}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Одержали біном $(1+z)^m$, де $m=-\frac{1}{3}$, а $z=\left(-\frac{x}{2}\right)^3$. Маємо:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{28}{27}\cdot\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^9+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{x^9}{18176}+\ldots\right),$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}} \approx \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{x^3}{24}+\frac{x^6}{288}+\frac{x^9}{18176}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^4}{4\cdot 24}+\frac{x^7}{7\cdot 288}+\frac{7x^{10}}{181760}+\ldots\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{96}+\frac{1}{2016}-\frac{7}{181760}+\ldots\right)$$

Тому що $\frac{1}{2016}<0{,}001$, то $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}} \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{192}\approx 0{,}495$.

8. Знайти розкладання в степеневий ряд по степенях $x-1$ рішення диференціального рівняння $y'=2x+y^3$, $y(1)=1$ (записати три перших, відмінних від нуля, члена цього розкладання).

Рішення. Точка $x = 1$ не є особливою для даного рівняння, тому його рішення можна шукати у вигляді ряду:

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

Маємо:

$f(1)=1$; $f'(1)=2+1^3=3$; $f''(1)=2+3y^2y'$; $f''(1)=2+3\cdot 1^2\cdot 3=11$.

Підставимо знайдені значення похідних у шуканий ряд і одержимо рішення даного рівняння:

$$y=1+\frac{3}{1!}(x-1)+\frac{11}{2!}(x-1)^2+\ldots\quad.$$

9. Методом послідовного диференціювання знайти перші 5 членів розкладання у степеневий ряд рішення диференціального рівняння $4x^2y''+y=0$ при початкових умовах: $y(1)=1$, $y'(1)=\frac{1}{2}$.

Рішення. Шукану функцію даного рівняння представимо у вигляді:

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\dots$$

Підставляючи знайдені значення похідних у ряд, одержуємо шукане рішення даного диференціального рівняння:

$$y=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4\cdot 2!}(x-1)^2+\frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{15}{16\cdot 4!}(x-1)^4\dots,$$

або $y=1+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(x-1)^3}{16}-\frac{5(x-1)^4}{128}+\dots$.

Тригонометричні ряди

10. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $w=2\pi$) функцію

$$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$$

Рішення. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(\pi+x)^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=\pi+x, & du=dx,\\ dv=\cos nxdx, & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi+x}{n}\sin nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n)=\frac{2}{\pi(2n-1)^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi+x)\sin nxdx=\begin{vmatrix}u=\pi+x, & du=dx,\\ dv=\sin nxdx, & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi+x}{n}\cos nx\right)\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0}\right)=-\frac{1}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є для даної функції запишеться у виді

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi nx)}{n}.$$

11. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=8^{\frac{x}{2}}$ задану в інтервалі ($0;\pi$), продовживши її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

Рішення.

а) Продовжимо дану функцію парним чином (рис. 1).

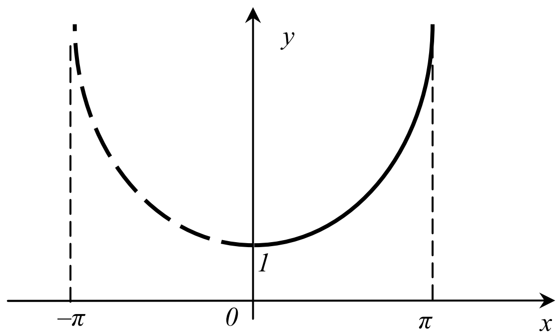

Рис. 1

Тоді

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}8^{\frac{x}{2}}dx=\frac{2}{\pi}\cdot 2\cdot\left.\frac{8^{\frac{x}{2}}}{\ln 8}\right|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi\ln 8}\left(8^{\frac{\pi}{2}}-1\right),\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}8^{\frac{x}{2}}\cos nxdx .$$

Знайдемо невизначений інтеграл $\int_0^{\pi}8^{\frac{x}{2}}\cos nxdx$, виконавши двічі інтегрування частинами:

$$\int_0^{\pi}8^{\frac{x}{2}}\cos nxdx=\frac{4n^2}{4n^2+\ln^2 8}\left(\frac{1}{n}8^{\frac{x}{2}}\sin nx+\frac{\ln 8}{2n^2}8^{\frac{x}{2}}\cos nx\right)+C .$$

Обчислимо коефіцієнти a_n:

$$a_n=\frac{8n^2\cdot 8^{\frac{x}{2}}}{\pi(4n^2+\ln^2 8)n}\left.\left(\sin nx+\frac{\ln 8}{2n}\cos nx\right)\right|_0^{\pi}=\frac{4\ln 8(8^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n-1)}{\pi(4n^2+\ln^2 8)} .$$

Отже, розкладання даної функції по косинусах має вид

$$8^{\frac{x}{2}} = \frac{2(8^{\frac{\pi}{2}} - 1)}{\pi \ln 8} + \frac{4\ln 8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n - 1}{4n^2 + (\ln 8)^2} \cos nx .$$

б) Продовжимо дану функцію непарним чином (рис.2).

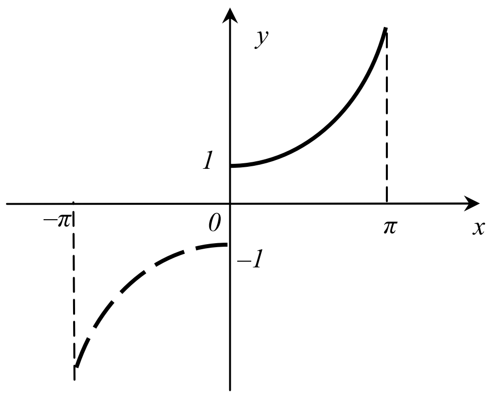

Рис. 2

Тоді $$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 8^{\frac{x}{2}} \sin nx dx .$$

Знайдемо невизначений інтеграл $\int_0^{\pi} 8^{\frac{x}{2}} \sin nx dx$, виконавши двічі інтегрування частинами:

$$\int 8^{\frac{x}{2}} \sin nx dx = \frac{4n^2}{4n^2 + \ln^2 8} \left(-\frac{1}{n} 8^{\frac{x}{2}} \cos nx + \frac{\ln 8}{2n^2} 8^{\frac{x}{2}} \sin nx\right) + C$$

$$b_n = \frac{8n^2}{\pi(4n^2 + \ln^2 8)} \left(-\frac{1}{n} 8^{\frac{x}{2}} \cos nx + \frac{\ln 8}{2n^2} 8^{\frac{x}{2}} \sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8n}{\pi} \cdot \frac{(8^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{n+1} + 1)}{4n^2 + \ln^2 8} .$$

Отже, розкладання даної функції по синусах має вид

$$8^{\frac{x}{2}} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{n+1} + 1}{4n^2 + \ln^2 8} n \sin nx .$$

12. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $w = 2$) функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0,\\ 0{,}5, & x=0,\\ x, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

Рішення. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\int_{-1}^{0}dx+\int_{0}^{1}xdx=x\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_n=\int_{-1}^{0}cos(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}x\,cos(n\pi x)dx=\begin{vmatrix}u=x,\ du=dx, & v=\dfrac{sin(n\pi x)}{\pi n}\\ dv=cos(n\pi x)dx, & \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi n}sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{\pi n}x\,sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{n}\int_{0}^{1}sin(n\pi x)dx=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n-1);\quad a_n=\frac{-2}{\pi^2(2n-1)^2},$$

$$b_n=\int_{-1}^{0}sin(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}x\,sin(n\pi x)dx=\begin{vmatrix}u=x,\ du=dx, & v=\dfrac{1}{\pi n}cos(n\pi x)\\ dv=sin(n\pi x)dx, & \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{0}-\frac{x}{\pi n}cos(n\pi x)\Big|_{0}^{1}+\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{1}cos(n\pi x)dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(1-(-1)^n)-\frac{1}{\pi n}(-1)^n+\frac{1}{n^2\pi^2}sin(n\pi x)\Big|_{0}^{1}=-\frac{1}{\pi n}+\frac{(-1)^n}{\pi n}-\frac{(-1)^n}{\pi n}=-\frac{1}{\pi n}.$$

У підсумку одержуємо наступний ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n\pi x)}{n}.$$

13. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану графічно (рис.3).

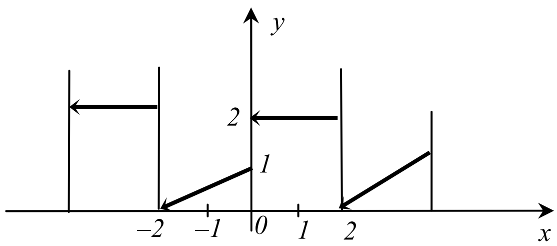

Рис. 3

Рішення. Запишемо аналітичне вираження даної функції:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x+1, & -2<x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 2, \quad w=4.\end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Bigg|_{-2}^{0}+x\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{2}(-1+2)+2=\frac{5}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\frac{x}{2}+1,\ du=\frac{1}{2}dx, & \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx, & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{x}{2}+1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}-$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{1}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^{n+1}+1)=\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2},$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\int_{0}^{2}\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=\frac{x}{2}+1,\ du=\frac{1}{2}dx, & \\ dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx, & v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|=-\left(\frac{x}{2}+1\right)\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{0}^{2}=-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}-$$

$$-\frac{2}{n\pi}(-1)^n+\frac{2}{n\pi}=\frac{1}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}(-1)^n=\frac{1+2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Отже, шуканий ряд Фур'є має вид:

$$f(x)=\frac{5}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2n-1)\frac{\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2(-1)^{n+1})}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

14. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

на відрізку $[0;2]$ і знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Рішення. Продовжимо функцію парним чином і обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\int_0^1 xdx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2=\frac{1}{2}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=1\,.$$

$$a_n=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{vmatrix} u=x,\ du=dx, \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx,\ v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2x}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1-\frac{2}{\pi n}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\frac{2(2-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2+\frac{2}{n\pi}\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2=-\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}\,.$$

Отже,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\big((2n+1)\pi x\big)}{(2n+1)^2}\,.$$

Поклавши $x=0$, одержуємо:

$$0=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Таким чином, за допомогою ряду Фур'є ми знайшли суму числового ряду.

Завдання до теми 11

$\boxed{1}$ Довести збіжність числового ряду та знайти його суму

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-2^n}{14^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+5^n}{20^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-4^n}{20^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{10^n}$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$

12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+3^n}{21^n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-3^n}{21^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$

28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$

$\boxed{2}$ Дослідити на збіжність числовий ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot tg \frac{\pi}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 1}{5^n (n+1)!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (n+1)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (2n+3)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{3^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \ldots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n+1)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^n}}{n!}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{2\pi}{3^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n \cdot (n+3)!}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \ldots (5n-4)}{1 \cdot 3 \cdot 7 \ldots (4n-1)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 tg\frac{2\pi}{5^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8...(3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11...(4n-1)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)\cdot sin\frac{\pi}{4^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9...(4n-3)}{1\cdot 4\cdot 7...(3n-2)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4\cdot n!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12...(5n-3)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$

$\boxed{3}$ Дослідити на збіжність числовий ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg\frac{1}{2n+1}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(n+2))^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg\frac{1}{5^n}\right)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^{-n}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(ln(n+1))^{2n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(ln(n+3)\right)^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-4n-1}\right)^{n^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(sin\frac{\pi}{n^2}\right)^{2n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{3^n}\right)^{n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(ln(n+1)\right)^{3^n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^{n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}5^n$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^{n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n+1}\right)^{2n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(ln(n+5)\right)^{2n}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^{n}$

4 Дослідити на збіжність числовий ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n^2+1}\right)^{2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)ln(3n+2)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^3(3n+4)}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{n^2+49}\right)^2$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$

9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{(7n+3)^{10}}}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+n}{25+n^2}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+5)\ln^2(10n+5)}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)\ln(\ln(n+3))}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(9n+4)^5}}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^5(2n+3)}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-4)\ln^2(9n-4)}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^2-2n}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+8)\ln^3(3n+8)}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln(n+4)\ln(\ln(n+4))}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{4+n^2-n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+3)ln^2(10n+3)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)ln(n+5)ln(ln(n+5))}$

$\boxed{5}$ Дослідити на збіжність числовий ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+2)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{3^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+3)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-n+1}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+4)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{2\pi}{3^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+1)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n-1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{4n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+1)}$

$\boxed{6}$ Дослідити на збіжність числовий ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^7 n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3+n^2}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^{2n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{3^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+5}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(7n-1)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{9^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{3n^4+5n-2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n-1)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$

$\boxed{7}$ Дослідити на умовну і абсолютну збіжність числовий ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)3^n}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n+1)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{3^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n-1)3^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{3n^2+1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n5^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{\ln(n+1)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{3^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\, n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n-2)!}$

$\boxed{8}$ Дослідити на умовну і абсолютну збіжність числовий ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{ln(n+)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^4}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{3^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{n^3}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n^3+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(ln(n+1))^n}$

11. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n(ln\,n)^2}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

13. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\,ln\,n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^{1.5}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{12^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{9n-1}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{ln\,n}{7^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(5n+1)^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{n^2}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{n^2+1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}sin\frac{\pi}{8}n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^n}{2n+2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}sin^n\frac{\pi}{6n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+2)}$

28. $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-3}{n^2-1}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{(n+1)^3}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4n}{5n+1}\right)^n$

$\boxed{9}$ Знайти область збіжності степеневого ряду

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1))\cdot x^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{x}{2^n}\right)x^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{n^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0.1)^n x^{2n}}{n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg x)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n+1}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\frac{1}{n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$

$\boxed{10}$ Знайти область збіжності степеневого ряду

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\sqrt{n}}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n x}{n^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot x)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\left(\frac{x}{2^n}\right)$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{x^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x-2)^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n n\, ln\, n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{2n+1}}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nx)^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,x^n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(nx)}{n^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(nx)}{n^2}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{e^{nx}}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$

11 Знайти область збіжності степеневого ряду

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n+1}}{2n-1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n\,ln(1+n^{-1})}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n^2}(2+x)^{n^2}$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(1+n)}$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n}$$

12. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(1+n)^n}$$

13. $$\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$$

14. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}(x+1)^n}{(1+n)}$$

15. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$$

16. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$$

17. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2\ (1+2n)}$$

18. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$$

19. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n\sqrt[3]{n+2}}{n+1}$$

20. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n(x+1)^n}{2^{n+1}n^n}$$

21. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{2n4^n}$$

22. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$$

23. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$$

24. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$$

25. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n\ln n}$$

26. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n(2n+1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}}$$

27. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$$

28. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n\ln n}$$

29. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{n3^n}$$

30. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{5^n n}$$

12 Розкласти функцію $f(x)$: а) у ряд Маклорена в околі нуля; б) у ряд Тейлора в околі точки x_0. З'ясувати область збіжності отриманих рядів до цієї функції

№ п/п	$f(x)$	x_0	№ п/п	$f(x)$	x_0
1.	$\cos 5x$	$\pi / 15$	16.	$x^3 \operatorname{arctg} x$	1
2.	$\sin x^2$	$\sqrt{\pi} / 2$	17.	$x^2 / \left(1+x^2\right)$	2
3.	$\cos x^3$	$\sqrt[3]{\pi}$	18.	$2/(1-3x^2)$	$1/3$
4.	e^{3x}	$1/3$	19.	$4/(1+x)$	3
5.	$ch\left(2x^3\right)$	$1/2$	20.	$e^{-\frac{x}{2}}$	2
6.	shx	1	21.	e^{-x^2}	1
7.	2^{-x^2}	1	22.	5^x	1
8.	$x \cdot \cos \sqrt{x}$	π^2	23.	$(\sin 3x)/x$	$\pi / 6$
9.	$1/x$	-2	24.	$1/(x+3)$	-2
10.	e^x	1	25.	$1/(2x+5)$	3
11.	$(x-3)^{-2}$	1	26.	$\sin(\pi x / 4)$	2
12.	$\ln(5x+3)$	$2/5$	27.	$(x^2-2x+2)^{-1}$	1

13.	$(4+x)^{-0,5}$	-3		28.	$\cos x$	$\pi / 4$
14.	$(x-1)^{-0,5}$	2		29.	$(x^2-4x+5)^{-1}$	-2
15.	$\sin x$	$1/2$		30.	$\ln(5x+3)$	1

13 Обчислити наближено зазначену величину з точністю 0,001, використавши розклад в степеневий ряд відповідно підібраної функції

1. e	2. $\sqrt[5]{250}$	3. $\sin 1$
4. $\sqrt{1,3}$	5. $arctg\,\dfrac{\pi}{10}$	6. $\ln 3$
7. $ch2$	8. $\lg e$	9. π
10. $\cos 2^0$	11. e^2	12. $\sqrt[3]{80}$
13. $\ln 5$	14. $arctg0,5$	15. $\sqrt[6]{738}$
16. $\sqrt[3]{e}$	17. $\sin 1^0$	18. $\sqrt[3]{8,36}$
19. $\ln 10$	20. $\arcsin\dfrac{1}{3}$	21. $\lg 7$

22.	23.	24.
$\sqrt{e}$	$\cos 10^0$	$30^{-\frac{1}{3}}$
25.	26.	27.
$\sqrt[10]{1080}$	e^{-1}	$\sin\frac{\pi}{100}$
28.	29.	30.
$\sqrt[4]{90}$	$136^{-\frac{1}{7}}$	$e^{-\frac{1}{3}}$

14 Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, отримати визначений інтеграл з точністю до 0,001

1.	2.	3.
$\int_0^{0.25} ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$	$\int_0^{1} arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$	$\int_0^{0.2} \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$
4.	5.	6.
$\int_0^{0.5} \frac{arctgx}{x}dx$	$\int_0^{0.2} \sqrt{x}\cdot \cos xdx$	$\int_0^{0.5} ln\left(1+x^3\right)dx$
7.	8.	9.
$\int_0^{1} x^2\cdot \sin xdx$	$\int_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot xdx$	$\int_0^{0.5} \sqrt{x^2+1}\cdot xdx$
10.	11.	12.
$\int_0^{0.5} \frac{1}{x^5+1}dx$	$\int_0^{1} \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$	$\int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x}dx$
13.	14.	15.
$\int_0^{0.1} \frac{e^x-1}{x}dx$	$\int_0^{0.5} x^2\cdot \cos 3xdx$	$\int_0^{0.5} ln\left(1+x^2\right)dx$

16.	17.	18.
$\int_{0}^{0.4}\sqrt{x}\cdot e^{-\frac{x}{4}}dx$	$\int_{0,3}^{0.5}\frac{1+\cos x}{x^2}dx$	$\int_{0}^{0.5}\frac{arctgx^2}{x^2}dx$
19.	20.	21.
$\int_{0}^{0.8}\frac{1-\cos x}{x}dx$	$\int_{0}^{1}\sin x^2dx$	$\int_{0}^{0.1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$
22.	23.	24.
$\int_{0}^{1}\cos\sqrt[3]{x}dx$	$\int_{0}^{1}\sqrt{x}\cdot\sin xdx$	$\int_{0}^{25}\frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$
25.	26.	27.
$\int_{0}^{1}\cos\frac{x^2}{4}dx$	$\int_{0}^{1}arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$	$\int_{0}^{0.5}\frac{x-arctgx}{x^2}dx$
28.	29.	30.
$\int_{0}^{0.4}\sqrt{1-x^3}dx$	$\int_{0}^{0.5}e^{-x^2}dx$	$\int_{0}^{0.5}\sqrt{1+x^3}dx$

$\boxed{7}$ Знайти розклад частинного розв’язку диференціального рівняння в степеневий ряд Маклорена (записати три перших ненульових членів цього розкладу), що відповідає початковій умові: $y(x_0)=y_0$

1. $y'=xy+e^y$, $y(0)=0$
2. $y'=x^2y^2+1$, $y(0)=1$
3. $y'=x^2-y^2$, $y(0)=0,5$
4. $y'=x^3+y^2$, $y(0)=0,5$
5. $y'=x+y^2$, $y(0)=-1$
6. $y'=x+x^2+y^2$, $y(0)=1$
7. $y'=2\cos x-xy^2$, $y(0)=1$
8. $y'=e^x-y^2$, $y(0)=0$
9. $y'=x+y+y^2$, $y(0)=1$
10. $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$

11. $y' = x^2y^2 + y\cdot sin x,$ $y(0)=0,5$
12. $y' = 2y^2 + y\cdot e^x,$ $y(0)=1/3$
13. $y' = e^{3x} + 2xy^2,$ $y(0)=1$
14. $y' = x + e^y,$ $y(0)=0$
15. $y' = 2cos\, y + 2\cdot cos\, x,$ $y(0)=0$
16. $y' = x^2 + 2y^2,$ $y(0)=0,2$
17. $y' = x^2 + y^2 + xy,$ $y(0)=0,5$
18. $y' = x + e^{sin\, x},$ $y(0)=0$
19. $y' = xy - y^2,$ $y(0)=0,2$
20. $y' = 2x + e^x + y^2,$ $y(0)=1$
21. $y' = x\cdot sin\, x - y^2,$ $y(0)=1$
22. $y' = 2x^2 - xy,$ $y(0)=0$
23. $y' = xe^x + 2y^2,$ $y(0)=0$
24. $y' = x - 2y^2,$ $y(0)=0,5$
25. $y' = y\cdot e^x,$ $y(0)=1$
26. $y' = 2\,sin\, x + xy,$ $y(0)=0$
27. $y' = x^2 + e^y,$ $y(0)=0$
28. $y' = x^2 + y,$ $y(0)=1$
29. $y' = y^2 + x^2 + xy,$ $y(0)=1$
30. $y' = e^x + xy,$ $y(0)=0$

$\boxed{16}$ Методом послідовного диференціювання знайти перші k членів розкладу в степеневий ряд частинного рішення диференціального рівняння, що відповідає зазначеним початковим умовам: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0$

1. $y' = arcsin\, y + x,$ $y(0)=0,5,\quad k=4$
2. $y' = yx + ln(y+x),$ $y(1)=0,\quad k=5$
3. $y' = yx + ln(y+x),$ $y(0)=0,\quad k=5$
4. $y' = y^{-1} + x,$ $y(0)=1,\quad k=5$
5. $y''' = yx + y'\cdot x^2,$ $y(0)=y'(0)=y''(0)=1,\quad k=6$
6. $y' = 2x - 0,1y^2,$ $y(0)=1,\quad k=3$
7. $y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + x,$ $y(0)=1,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=\dfrac{1}{2},\quad k=6$
8. $y' = x^2 - xy,$ $y(0)=0,1,\quad k=3$
9. $y'' = 2y\cdot y',$ $y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad k=3$

10. $y' = 2x + \cos y,$ $\quad y(0) = 0, \quad k = 5$

11. $y''' = y \cdot e^x - x \cdot (y')^2,$ $\quad y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 1, \quad k = 6$

12. $y' = 3x - y^2,$ $\quad y(0) = 2, \quad k = 3$

13. $y'' = x \cdot y \cdot y',$ $\quad y(0) = y'(0) = 1, \quad k = 6$

14. $y' = x^2 - 2y,$ $\quad y(0) = 1, \quad k = 3$

15. $y'' = y^{-1} \cdot y' - x^{-1},$ $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad k = 4$

16. $y' = x^2 + 0{,}2y^2,$ $\quad y(0) = 0{,}1, \quad k = 3$

17. $y'' = x \cdot y + (y')^2,$ $\quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2, \quad k = 5$

18. $y' = xy + y^2,$ $\quad y(0) = 0{,}1, \quad k = 3$

19. $y'' = e^y \cdot \sin y',$ $\quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad k = 3$

20. $y' = 0{,}2 \cdot x + y^2,$ $\quad y(0) = 1, \quad k = 3$

21. $y'' = x^2 + y^2,$ $\quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 0{,}2, \quad k = 4$

22. $y' = xy + x^2 + e^{-x},$ $\quad y(0) = 0, \quad k = 3$

23. $y' = (1 - x^2) y^{-1} + 1,$ $\quad y(0) = 1, \quad k = 5$

24. $y'' + y = 0,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad k = 3$

25. $y'' = x + y \cdot \cos y',$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{3}, \quad k = 3$

26. $y' = \cos x + x^2,$ $\quad y(0) = 0, \quad k = 3$

27. $y' = 4y + 2xy^2 - e^{3x},$ $\quad y(0) = 2, \quad k = 4$

28. $(1 - x) y'' + y = 0,$ $\quad y(0) = y'(0) = 1, \quad k = 3$

29. $4x^2 \cdot y'' + y = 0,$ $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{1}{2}, \quad k = 3$

30. $y' = y^3 + 2x^2,$ $\quad y(1) = 1, \quad k = 3$

17 Розкласти у ряд Фур'є періодичну (період $T=2\pi$) функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi;\pi]$

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ x-1, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ x+2, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}-x+0{,}5, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 0{,}5x+1, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}2x+3, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 3-x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}x-2, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 4x-3, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}5-x, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 3x-1, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}3-2x, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 0{,}5\cdot(\pi-x), & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}5x+1, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 1-4x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 4x-2x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}x+0{,}5\pi, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 6x-5, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}6x-2, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 4-9x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 10x-3, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{4}, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ \dfrac{x}{5}-2, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi \le x \le 0\\ 3-8x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi \le x \le 0\\ 0, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$

18 Розкласти в ряд Фур’є функцію $f(x)$, яка задана на інтервалі $[0;\pi]$, продовжуючи її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження

1. $f(x)=e^{x}$
2. $f(x)=x^{2}$
3. $f(x)=2^{x}$
4. $f(x)=chx$
5. $f(x)=e^{-x}$
6. $f(x)=(x-1)^{2}$
7. $f(x)=3^{-0,5x}$
8. $f(x)=sh2x$
9. $f(x)=e^{2x}$
10. $f(x)=(x-2)^{2}$
11. $f(x)=4^{\frac{x}{3}}$
12. $f(x)=ch\dfrac{x}{2}$
13. $f(x)=e^{4x}$
14. $f(x)=(x+1)^{2}$
15. $f(x)=5^{-x}$
16. $f(x)=sh3x$
17. $f(x)=e^{-\frac{x}{4}}$
18. $f(x)=(2x-1)^{2}$
19. $f(x)=6^{\frac{x}{4}}$
20. $f(x)=ch4x$
21. $f(x)=e^{-3x}$
22. $f(x)=x^{2}+1$
23. $f(x)=7^{\frac{-x}{7}}$
24. $f(x)=sh\dfrac{x}{5}$
25. $f(x)=e^{-\frac{2x}{3}}$
26. $f(x)=(x-\pi)^{2}$
27. $f(x)=10^{-x}$
28. $f(x)=ch\dfrac{x}{\pi}$
29. $f(x)=e^{\frac{4x}{3}}$
30. $f(x)=(x-5)^{2}$

19 Розкласти в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі періодичну функцію $f(x)$ (період $T=2l$)

1.	$f(x)=\lvert x\rvert,$	$-1<x<1,$	$l=1$
2.	$f(x)=2x,$	$-1<x<1,$	$l=1$
3.	$f(x)=e^x,$	$-2<x<2,$	$l=2$
4.	$f(x)=\lvert x\rvert-5,$	$-2<x<2,$	$l=2$
5.	$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\end{cases}$		$l=1$
6.	$f(x)=x,$	$1<x<3,$	$l=1$
7.	$f(x)=\begin{cases}1, & -2\le x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$		$l=2$
8.	$f(x)=10-x,$	$5<x<15,$	$l=5$
9.	$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0\\ 0{,}5, & x=0\\ x, & 0<x\le 1\end{cases}$		$l=1$
10.	$f(x)=5x-1,$	$-5<x<5,$	$l=5$
11.	$f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\le 0,\\ \pi, & 0<x<3,\end{cases}$		$l=3$
12.	$f(x)=3-x,$	$-2<x<2,$	$l=2$
13.	$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ -1, & 1<x<2,\end{cases}$		$l=1$
14.	$f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0,\\ 2, & 0<x<2,\end{cases}$		$l=2$

15. $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ $\quad l=3$

16. $f(x)=2x-3,\quad -3 < x < 3,\quad l=3$

17. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0 < x < 1,5 \\ -1, & 1,5 < x < 3 \end{cases}$ $\quad l=3$

18. $f(x)=3-|x|,\quad -5 < x < 5,\quad l=5$

19. $f(x)=\begin{cases} -x, & -4 < x < 0 \\ 1, & x=0 \\ 2, & 0 < x < 4 \end{cases}$ $\quad l=4$

20. $f(x)=1+x,\quad -1 < x < 1,\quad l=1$

21. $f(x)=\begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ -0,5, & x=0 \\ 0,5\cdot x, & 0 < x < 2 \end{cases}$ $\quad l=2$

22. $f(x)=2x+2,\quad -1 < x < 3,\quad l=2$

23. $f(x)=\begin{cases} 3, & -3 < x < 0 \\ 1,5, & x=0 \\ -x, & 0 < x < 3 \end{cases}$ $\quad l=3$

24. $f(x)=1-|x|,\quad -3 < x < 3,\quad l=3$

25. $f(x)=\begin{cases} -2, & -4 < x < 0, \\ -0,5, & x=0, \\ 1+x, & 0 < x < 4, \end{cases}$ $\quad l=4$

26. $f(x)=4x-3,\quad -5 < x < 5,\quad l=5$

27. $f(x)=\begin{cases} x+2, & -2 < x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ $\quad l=2$

28. $f\left(x\right)=\begin{cases}-0,5, & -6<x<0\\ 1, & 0<x<6\end{cases}$ $\qquad l=6$

29. $f\left(x\right)=\begin{cases}-2x, & -2<x<0\\ 2, & x=0,\\ 4, & 0<x<2\end{cases}$ $\qquad l=2$

30. $f\left(x\right)=\left|x\right|-3,\qquad -4<x<4,\qquad l=4$

Змістовий модуль 3.2

Тема 12. ***Кратні інтеграли***

Подвійний інтеграл

1. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням по x, а потім із зовнішнім інтегруванням по y, якщо область D обмежена лініями $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{2+y}$, $x = 0$, $x = 2$.

Рішення. Область D зобразимо на рис. 4. Вона обмежена дугами парабол $x^2 = y+2$, $x^2 = y$ і прямими $x = 0$, $x = 2$.

Отже, $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dx .$$

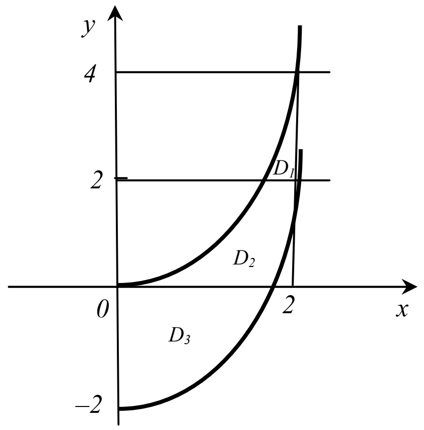

Рис. 4

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x-2)dxdy$ по області D,

обмеженої лініями $x = 0, y = 7 - x,\ y = \frac{1}{2}x + 1$.

Рішення. Область D зображена на рис. 5 Якщо вибрати внутрішнє інтегрування по y, а зовнішнє - по x, то подвійний інтеграл по цій області запишеться одним повторним інтегралом:

$$\iint_D (x-2)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} (x-2)dy = \int_0^4 (xy - y^2)\Bigg|_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(7x - x^2 - 49 + 14x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 1 - x + x\right)dx =$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{9}{4}x^2 + 21x - 48\right)dx == \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 48x\right)\Bigg|_0^4 = -72 .$$

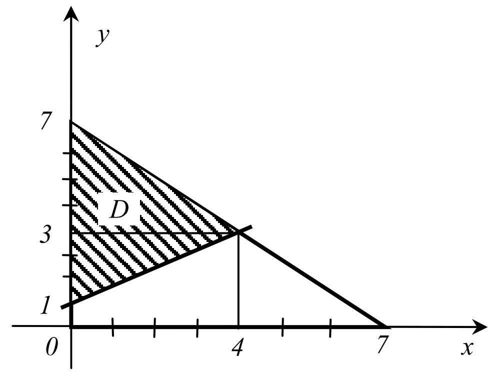

Рис. 5

3. Обчислити подвійний інтеграл

$$I = \int_{-R}^{0} dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy ,$$

використовуючи полярні координати. Знайти його чисельне значення при $R = 1$.

Рішення. Область інтегрування D являє собою чверть кола, розташованого в другому квадранті (рис. 6).
Перейдемо до полярних координат $x = \rho\, cos\varphi$, $y = \rho\, sin\varphi$,

$x^2 + y^2 = \rho^2$, де $0 \le \rho \le R$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$.

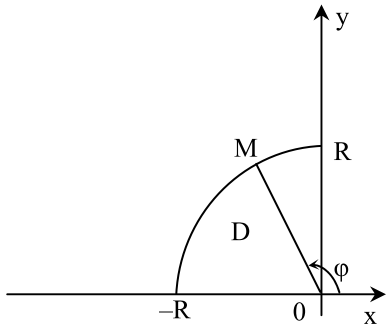

Рис. 6

Тоді $$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^R \frac{ln(1+\rho)}{\rho} \rho d\rho = \left| u = ln(1+\rho), \right.$$

$$du = \frac{d\rho}{1+\rho}, \quad dv = d\rho, \quad v = \rho \left| = \varphi \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\rho \, ln(1+\rho) \Big|_0^R - \int_0^R \frac{\rho d\rho}{1+\rho} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(Rln(1+R) - \rho \Big|_0^R + ln(1+\rho) \Big|_0^R \right) = \frac{\pi}{2}\big(R\,ln(1+R) - R + ln(1+R) \big).$$

Коли $R = 1$ одержуємо: $I = \frac{\pi}{2}(2ln2 - 1)$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

$$y = x^2 - 3x \text{ і } 3x + y - 4 = 0.$$

Рішення. Дана плоска фігура обмежена знизу параболою $y = x^2 - 3x$, зверху прямою $y = -3x + 4$. (рис.7). Вершина параболи має координати: $x = 1{,}5$; $y = -2{,}25$.

Знайдемо абсциси точок перетинання цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x, \\ y = -3x + 4. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x = -3x + 4, \Rightarrow x^2 = 4, \Rightarrow x = \pm 2.$$

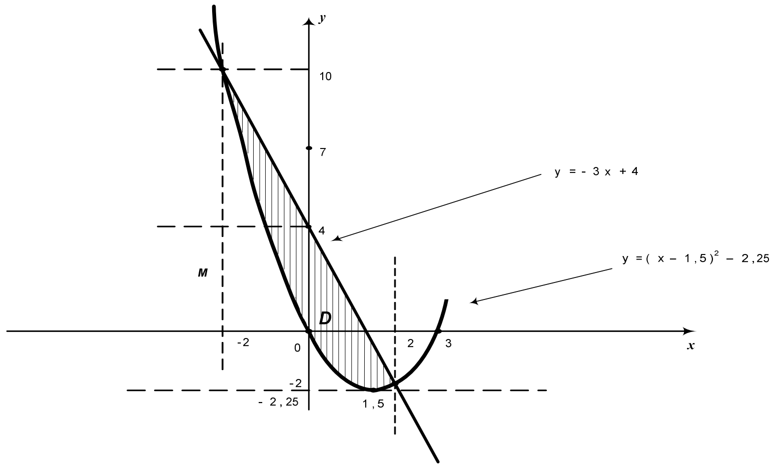

Рис. 7

Отже,

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{x^2-3x}^{4-3x}dy=\int\limits_{-2}^{2}y\Big|_{x^2-3x}^{4-3x}dx=\int\limits_{-2}^{2}(4-3x-x^2+3x)dx=$$

$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}=\frac{32}{3}\,од^2.$$

5. За допомогою подвійного інтеграла обчислити у полярних координатах площу фігури, обмеженою лінією $(x^2+y^2)^2=2y^3$.

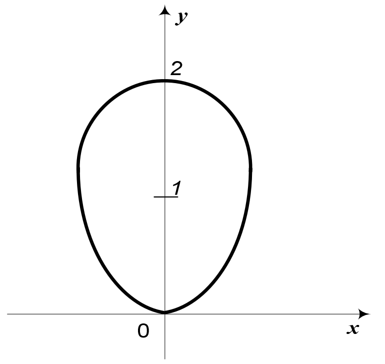

Рис. 8

Рішення. Рівняння лінії у полярних координатах має вигляд $\rho = 2\sin^3\varphi$. Вона зображена разом з обмеженою нею областю D на рис.8. Полюс O лежить на границі області D, і тому маємо:

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\sin^3\phi} \rho d\rho = \int_0^\pi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\sin^3\phi} d\varphi = 2\int_0^\pi \sin^6\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\cos 2\varphi)^3 d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1 - 3\cos 2\varphi + 3\cos^2 2\varphi - \cos^3 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^\pi + \frac{3}{2}\int_0^\pi (1+\cos 4\varphi)d\varphi - \int_0^\pi \cos 2\varphi(1-\sin^2 2\varphi)d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{3}{2}\varphi\Bigg|_0^\pi + \frac{3}{8}\sin 4\varphi\Bigg|_0^\pi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{6}\sin^3 2\varphi\Bigg|_0^\pi\right) = \frac{5}{8}\pi \quad од^2.$$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{1-y}$, $y = x$, $y = -x$, $z = 0$.

Рішення. Дане тіло обмежене зверху параболічним циліндром $z = \sqrt{1-y}$, з боків площинами $y = x$, $y = -x$ і знизу площиною $z = 0$ (рис.9).

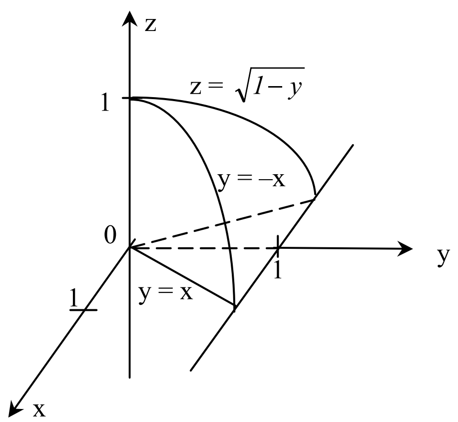

Рис. 9

Областю інтегрування D є трикутник, тому:

$$V = \iint\limits_D \sqrt{1-y}\,dxdy = 2\int\limits_1^0 dy \int\limits_0^y \sqrt{1-y}\,dx = 2\int\limits_1^0 \sqrt{1-y}\; x\Big|_0^y\, dy = 2\int\limits_1^0 y\sqrt{1-y}\,dy =$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{1-y} = t, \ y = 1 - t^2, \ t = 1 \ \text{при } y = 0 \\ 1-y = t^2, \ dy = -2tdt, \ t = 0 \ \text{при } y = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\int\limits_1^0 (1-t^2)t(-2tdt) = 4\int\limits_0^1 (t^2 - t^4)dt = 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}\text{ од}^3.$$

Потрійний інтеграл

7. Розставити межі інтегрування у потрійному інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, якщо область V обмежена поверхнями; $x = 1$, $y = x$, $z = 0$, $z = y^2$. Зобразити область інтегрування.

Рішення. Область інтегрування зображена на рис. 10.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y,z)dz.$$

Границі інтегрування розставляємо відповідно до даних поверхонь.

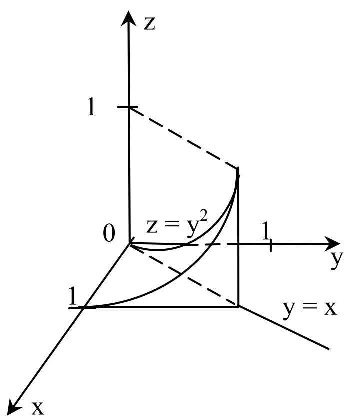

Рис. 10

8. Обчислити $\iiint\limits_V (3x + 2y - z^3)dxdydz$, якщо $V: 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $1 \le z \le 3$.

Рішення. Для даної області V одержуємо:

$$\iiint\limits_V (3x + 2y - z^3)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 (3x + 2y - z^3)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3xz + 2yz - \frac{z^4}{4} \right)\Bigg|_1^3 dy = \int_0^1 dx \int_0^2 (6x + 4y - 20)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(6xy + 2y^2 - 20y\right)\Big|_0^2 dx = = \int_0^1 (12x - 32)dx = \left(\frac{12x^2}{2} - 32x \right)\Bigg|_0^1 = 6 - 32 = -26.$$

9. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{x^2 - y^2 - R^2}$ по області, розташованої у першому октанті й обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ і конусом $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$, за допомогою циліндричних координат.

Рішення. На рис. 11 зображена область інтегрування V і її

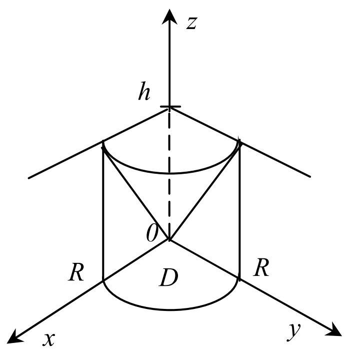

Рис. 11

проекція D на площину Oxy. Перейшовши до циліндричних координат

$\rho,\ \varphi,\ z$ по формулах:

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ z=z\ ,$$
$$0\le\varphi\le 2\pi\ ,\ \ 0\le\rho\le\infty\ ,\ \ -\infty\le z\le\infty\ ,$$
$$dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz\ ,$$

у яких для даної області $0\le z\le h$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le R$, одержимо

$$z^2=\frac{h^2\rho^2}{R^2}\ ,\ \ z=\frac{h\rho}{R}\ ,$$

$$\iiint_V\frac{xzdxdydz}{x^2-y^2-R^2}=\iiint_V\frac{\rho^2(\cos\varphi)zd\varphi d\rho dz}{\rho^2-R^2}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^R\frac{\rho^2}{\rho^2-R^2}d\rho\int_{\frac{h\rho}{R}}^{h}zdz=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^R\frac{\rho^2}{\rho^2-R^2}\cdot\left.\frac{z^2}{2}\right|_{\frac{h\rho}{R}}^{h}d\rho=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^R\frac{\rho^2}{\rho^2-R^2}\left(h^2-\frac{h^2\rho^2}{R^2}\right)d\rho=$$

$$=\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int_0^R\rho^2d\rho=\frac{h^2}{2R^2}\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^R=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{h^2}{R^2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)\cdot(R^3-0)=\frac{1}{6}Rh^2\ .$$

Застосування кратних інтегралів

10. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого зазначеними поверхнями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $2z=x^2+y^2$.

Рішення. Рівняння $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ визначає параболоїд обертання, інші поверхні - площини. Лінія перетину площини і поверхні є парабола. Шукане тіло зображене на рис. 12. Його об'єм V обчислюємо за формулою:

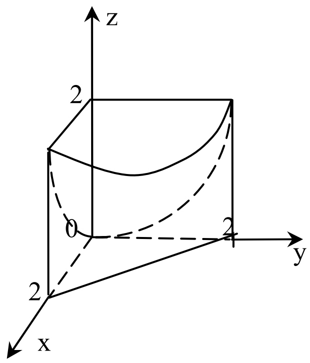

Рис. 12

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}dy\int\limits_0^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}z\Big|_0^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}\frac{1}{2}(x^2+y^2)dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(x^2(2-x)+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{1}{3}(2-x)^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{12}(2-x)^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}+\frac{16}{12}\right)=\frac{4}{3}\text{ ед.}^3$$

11. Обчислити $I=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1,5}dxdydz$, якщо область інтегрування обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4$ та площиною $y=0\left(y\geq 0\right)$.

Рішення. Область V уявляє собою півкулю, розташовану праворуч площини $Oxz\left(y\geq 0\right)$, тобто треба скористатися сферичними координатами: $x=r\sin\theta\cos\varphi$; $y=r\sin\theta\sin\varphi$; $z=r\cos\theta$, де $0\leq r<\infty$; $0\leq\varphi\leq 2\pi$; $0\leq\theta<\pi$; $J=r^2\sin\theta$.

Тут $\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1,5}=r^3$.

У даному випадку: $0\leq z\leq 2$; $0\leq\varphi\leq\pi$; $0\leq\theta<\pi$.

Отже, $I = \iiint\limits_{V^*} r^3 \cdot r^2 \cdot \sin\theta dr d\varphi\, d\theta =$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2} r^5 dr = \varphi\Big|_0^{\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^6}{6}\Big|_0^{2} = \frac{64}{3}\pi .$$

12. Обчислити масу m неоднорідної пластини D, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = x$, якщо поверхнева щільність у кожній її точці $\mu = x^2 + 2xy$.

Рішення. Границі інтегрування за змінною x находимо з системи:

$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x \end{cases}$. Маємо, $x \in [0;1]$. Змінна y розташована між даними лініями.

Для обчислення маси m плоскої пластини, яка має поверхневу щільність μ, скористаємося фізичним змістом подвійного інтеграла і формулою $m = \iint\limits_D (x^2 + 2xy) dx dy$, де область інтегрування D зображена на рис. 13. Це дозволяє представити подвійний інтеграл у вигляді повторного:

$$m = \int_0^1 dx \int_x^{2x-x^2} (x^2 + 2xy) dy = \int_0^1 (x^2 y + xy^2)\Big|_x^{2x-x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 (2x^3 - x^4 - x^3 + 4x^3 - 4x^4 + x^5 - x^3) dx =$$

$$= \int_0^1 (x^5 - 5x^4 + 4x^3) dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^5 + x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} .$$

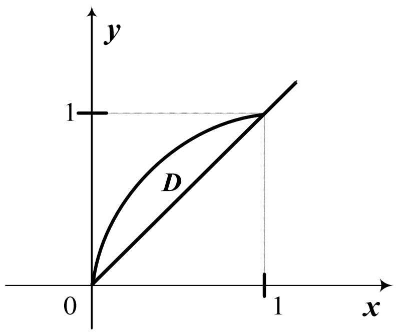

Рис. 24

13. Обчислити статичний момент щодо осі *Oy* однорідної пластини *D*, обмеженої лініями $x^2+y^2-2ax=0$, $x^2+y^2-ax=0$, *y – x = 0, y + x = 0,* використавши полярні координати. Поверхнева щільність пластини $\mu = 2$.

Рішення. На рис. 14 зображена пластина *D.* Статичний момент щодо осі *Oy* даної пластини визначається за формулою:

$$M_y=\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy\ .$$

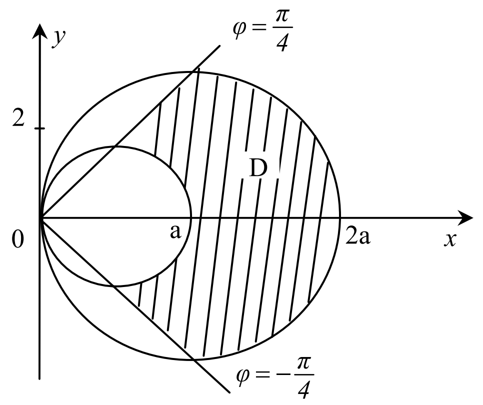

Рис. 14

У полярній системі координат область *D* перетвориться в область *D′:*

$$\alpha\cos\varphi\le\rho\le 2\alpha\cos\varphi\ ,\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\ .\text{ Тоді}$$

$$M_y=\iint\limits_{D'}2\rho\cos\varphi\cdot\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_{\alpha\cos\varphi}^{2\alpha\cos\varphi}\rho^2d\rho=2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{\alpha\cos\varphi}^{2\alpha\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{14}{3}a^3\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{28}{3}a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4}d\varphi=\frac{7}{3}a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{7}{3}a^3\left((\varphi+\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi\right)=$$

$$=\frac{7}{3}a^3\left(\frac{\pi}{4}+1+\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{7}{3}a^3\left(\frac{3}{8}\pi+1\right).$$

14. Обчислити координати центра мас однорідного тіла, що займає область *V,* обмежену поверхнями $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}$, $y = 2$.

Рішення. Дане тіло симетричне щодо осі *Oy* (рис. 15), тому $x_c=z_c=0$, а $y_c=\iiint\limits_V ydxdydz\,/\iiint\limits_V dxdydz$.

Переходимо до циліндричних координат: $x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,\ y = y$.
Тоді

$$\iiint\limits_V dxdydz=\iiint\limits_V \rho d\varphi d\rho dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^{2}dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho\left(2-\frac{1}{2}\rho\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{1}{6}\rho^3\right)\Big|_0^4 d\varphi=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\pi .$$

$$\iiint\limits_V ydxdydz=\iiint\limits_V y\rho d\rho d\varphi dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^{2}ydy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho\left(4-\frac{1}{4}\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{16}\right)\Big|_0^4 d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 16\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi .$$

Отже, $y_c=\frac{16\pi\cdot 3}{32\pi}=\frac{3}{2}$ і центр мас $C\left(0,\frac{3}{2},0\right)$.

15. Обчислити момент інерції щодо осі *Oy* однорідного тіла (щільність $\delta = const$) обмеженого поверхнею $y=5-x^2-z^2$ і площиною $y = 1$.

Рішення. Дану область зобразимо на рис.16. Систему координат розташуємо так, як показано на рисунку. Шуканий момент інерції обчислюємо за формулою

$$I_y = \iiint\limits_V \delta(x^2 + z^2)dxdydz = \delta\iiint\limits_V (x^2 + z^2)dxdydz\ .$$

Переходимо до циліндричних координат $x = \rho cos\varphi,\ z = \rho sin\varphi,\ y = y.$

$$I_y = \delta\iiint\limits_V \rho^2 \rho d\rho d\varphi dy = \delta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_1^{5-\rho^2} dy = \delta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 y\Big|_1^{5-\rho^2} \rho^3 d\rho =$$

$$= \delta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4\rho^3 - \rho^5)d\rho = \delta\int\limits_0^{2\pi}\left(\rho^4 - \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \delta\left(2^4 - \frac{2^6}{6}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{32}{3}\pi\delta.$$

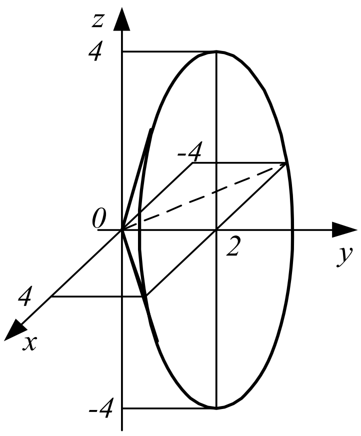

Рис. 15

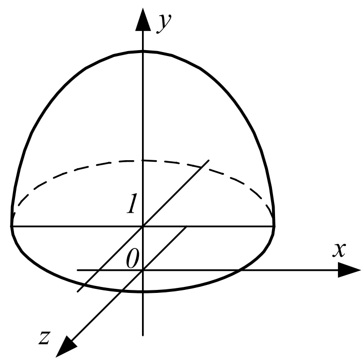

Рис. 16

Завдання до теми 12

$\boxed{1}$ Зобразити область інтегрування та змінити порядок інтегрування

1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx$

2. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx$

3. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$

4. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$

5. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)\,dy$

6. $\int_{0}^{\sqrt{2}/2} dy \int_{0}^{\arcsin y} f(x,y)\,dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f(x,y)\,dx$

7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)\,dx$

8. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)\,dx$

9. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy$

10. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)\,dy$

11. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln x}^{1} f(x,y)\,dy$

12. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f(x,y)\,dx$

13. $\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} f(x,y)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f(x,y)dx$

14. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x}}^{0} f(x,y)dy$

15. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

16. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$

17. $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

18. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^2} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f(x,y)dx$

19. $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$

20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$

21. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

22. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

23. $\int_{0}^{\pi/4} dx \int_{0}^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\cos x} f(x,y)dy$

24. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f(x,y)dx$

25. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f(x,y)dy$

26. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

27. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_1^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy$

28. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

29. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$

30. $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

2 Розставити границі інтегрування двома способами, якщо область інтегрування D подана зазначеними лініями

№ п/п	D
1.	$y=\sqrt{4-x^2}$; $y=\sqrt{3x}$; $x\ge 0$
2.	$x=\sqrt{8-y^2}$; $y\ge 0$; $y=x$
3.	$x^2=2-y$; $x+y=0$
4.	$x\ge 0$; $y\ge 0$; $y=1$; $x=\sqrt{4-y^2}$
5.	$x\ge 0$; $y\ge 1$; $y\le 3$; $y=x$
6.	$x\ge 0$; $y\ge x$; $y=\sqrt{8-x^2}$
7.	$x=\sqrt{2-y^2}$; $x=y^2$; $y\ge 0$

№ п/п	D
16.	$x^2=2y$; $5x-2y-6=0$
17.	$x\ge 0$; $y\ge 0$; $y\le 1$; $y=\ln x$
18.	$y=\sqrt{2-x^2}$; $y=x^2$
19.	$y=x^2$ -2; $y=x$
20.	$y^2=2x$; $x^2=2y$; $x\le 1$
21.	$y^2=2-x$; $y=x$
22.	$y\ge 0$; $x+2y-12=0$; $y=x$

8.	$x \le 0$; $y \ge 1$; $y \le 3$; $y = -x$		23.	$y = 0$; $y \ge x$; $y = -\sqrt{2 - x^2}$
9.	$y \ge 0$; $x = \sqrt{y}$; $y = \sqrt{6 - x^2}$		24.	$y = -x$; $y^2 = x + 3$
10.	$y = \sqrt{4 - x^2}$; $x \ge 0$; $x = 1$; $y = 0$		25.	$x = -1$; $x = -2$; $y \ge 0$; $y = x^2$
11.	$y \le 0$; $x^2 = -y$; $x = \sqrt{2 - y^2}$		26.	$y \ge 0$; $y \le 1$; $y = x$; $x^2 + y^2 = 4$
12.	$y = 6 - x^2$; $y = -x$		27.	$x = 0$; $x = -2$; $y \ge 0$; $y = x^2 + 4$
13.	$x = 0$; $y = 0$; $y = 1$; $(x - 3)^2 + y^2 = 1$		28.	$x = \sqrt{9 - y^2}$; $y = x$; $y \ge 0$
14.	$x \le 0$; $y = 1$; $y = 4$; $y = -x$		29.	$x + 2y - 6 = 0$; $y = x$; $y \ge 0$
15.	$y = -x$; $3x + y = 3$; $y = 3$		30.	$x \ge 0$; $y = 1$; $y = -1$; $y = \log_{1/2} x$

3 Обчислити подвійний інтеграл по області інтегрування D, обмеженої вказаними лініями

1. $\iint (x^2 + y)dxdy,$ $D: x^2 = y;\ y^2 = x$
2. $\iint xy^2 dxdy,$ $D: y = x^2;\ y = 2x$
3. $\iint (x + y)dxdy,$ $D: y^2 = x;\ y = x$
4. $\iint x^2 y dxdy,$ $D: y = 2 - x;\ y = x;\ x \ge 0$
5. $\iint (x^3 - 2y)dxdy,$ $D: y = x^2 - 1;\ x \ge 0;\ y \le 0$
6. $\iint (y - x)dxdy,$ $D: y = x;\ y = x^2$
7. $\iint (1 + y)dxdy,$ $D: y^2 = x;\ 5y = x$

8. $\iint (x+y)dxdy,$ $D:\ y=x^2-1;\ y=-x^2+1$

9. $\iint x(y-1)dxdy,$ $D:\ y=5x;\ \ y=x;\ \ x=3$

10. $\iint (x-2)ydxdy,$ $D:\ y=x;\ \ y=0,5x;\ \ x=2$

11. $\iint (x-y^2)dxdy,$ $D:\ y=x^2;\ \ y=1$

12. $\iint x^2ydxdy,$ $D:\ y=2x^2;\ \ y=0;\ \ x=1$

13. $\iint (x^2+y^2)dxdy,$ $D:\ x=y^2;\ \ x=1$

14. $\iint xydxdy,$ $D:\ y=x^3;\ \ y=0;\ \ x\le 2$

15. $\iint (x+y)dxdy,$ $D:\ y=x^3;\ \ y=8;\ \ y=0;\ \ x=3$

16. $\iint x(2x+y)dxdy,$ $D:\ y=1-x^2;\ \ y\ge 0$

17. $\iint y(1-x)dxdy,$ $D:\ y^3=x;\ \ y=x$

18. $\iint xy^3dxdy,$ $D:\ y^2=1-x;\ \ x\ge 0$

19. $\iint x(y+5)dxdy,$ $D:\ y=x+5;\ \ x+y+5=0;\ \ x\le 0$

20. $\iint (x-y)dxdy,$ $D:\ y=x^2-1;\ \ y=3$

21. $\iint (x+1)y^2dxdy,$ $D:\ y=3x^2;\ \ y=3$

22. $\iint xy^2dxdy,$ $D:\ y=x;\ \ y=0;\ \ x=1$

23. $\iint (x^3+y)dxdy,$ $D:\ x+y=1;\ \ x+y=2;\ \ x\le 1;\ \ x\ge 0$

24. $\iint xy^3dxdy,$ $D:\ y=x^3;\ \ y\ge 0;\ \ y=4x$

25. $\iint (x^3+3y)dxdy,$ $D:\ x+y=1;\ \ y=x^2-1;\ \ x\ge 0$

26. $\iint xydxdy,$ $D:\ y=\sqrt{x};\ \ y=0;\ \ x+y=2;\ x=0$

27. $\iint y^2x^{-2}dxdy$ $D:\ y=x;\ \ xy=1;\ \ y=2$

28. $\iint y(1+x^2)dxdy,$ $D:\ y=x^3;\ \ y=3x$

29. $\iint y^2(1+2x)dxdy,$ $D:\ x=2-y^2;\ \ x=0$

30. $\iint e^y dxdy,$ $D:\ y=\ln x;\ \ y=0;\ \ x=2$

4 Обчислити подвійний інтеграл, використовуючи у полярні координати

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$

2. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

3. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}dy$

5. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

6. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2+y^2)dy$

7. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ln(1+x^2+y^2)dy$

8. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} cos(x^2+y^2)dy$

9. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$

10. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dy$

11. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt[3]{1+x^2+y^2}dy$

12. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

13. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)dy$

14. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}$

15. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$

16. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$

17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

18. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)dy$

19. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$

20. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2) dy$

21. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$

22. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy$

23. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\, sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$

24. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)e^{x^2+y^2} dy$

25. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy$

26. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy$

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$

28. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\; dy$

29. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2) dy$

30. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$

5 Обчислити площу плоскої фігури D, обмеженої зазначеними лініями

1. $D: \; y^2 = 4x, \; x+y=3, \; y \ge 0$

2. $D: \; x = \sqrt{4-y^2}, \; y = \sqrt{3x}, \; x \ge 0$

3. $D: \; y = 6x^2, \; x+y=2, \; x \ge 0$

4. $D: \; y = x^2+2, \; x \ge 0, \; x=2, \; y=x$

5. $D: \; y^2 = x+2, \; x=2$

6. $D: \; y = 4x^2, \; 9y = x^2, \; y \le 2$

7. $D: \; x = -2y^2, \; x = 1-3y^2$
$x \le 0, \; y \ge 0$

8. $D: \; y = x^2, \; , \; y = -x$

9. $D:\ y=8:(x^2+4),\ x^2=4y$

10. $D:\ x=y^2,\ x=\frac{3}{4}y^2+1$

11. $D:\ y=x^2+1,\ x+y=3$

12. $D:\ y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$

13. $D:\ y^2=4x,\ x^2=4y$

14. $D:\ y=x^2+4x,\ y=x+4$

15. $D:\ y=\cos x,\ y\le x+1,\ y\ge 0$

16. $D:\ 2y=\sqrt{x},\ x+y=5,\ x\ge 0$

17. $D:\ y=2^x,\ y=2x-x^2,\ x=2,\ x=0$

18. $D:\ x=4-y^2,\ x-y+2=0$

19. $D:\ y=-2x^2+2,\ y\ge -6$

20. $D:\ x=y^2,\ x=\sqrt{2-y^2}$

21. $D:\ y^2=4x\ ,x=\frac{8}{(y^2+4)}$

22. $D:\ x^2+y^2=4,\ y\le\frac{1}{2}x,\ y\ge 0$

23. $D:\ y=4-x^2,\ y=x^2-2x$

24. $D:\ y^2=4-x,\ y=x+2,\ y=\pm 2$

25. $D:\ x=y^2+1,\ x+y=3$

26. $D:\ y=x^2,\ y=\frac{3}{4}x^2+1$

27. $D:\ x^2=3y,\ y^2=3x$

28. $D:\ x=y^2,\ y^2=4-x$

29. $D: y=-x^2+1,\ x\le y+1,\ x\ge 0$

30. $D:\ xy=1,\ x^2=y,\ y=2,\ x=0$

$\boxed{6}$ За допомогою подвійних інтегралів обчислити у полярних координатах площу плоскої фігури, обмеженої зазначеними лініями ($a>0$)

1. $\rho=a(3+\cos 2\varphi)$

16. $(x^2+y^2)^3=a^4y^2$

2. $(x^2+y^2)^3=a^4x^2$

17. $\rho^2=a^2(3+\sin\varphi)$

3. $\rho = a(2-\sin\varphi)$

4 $(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$

5. $\rho = a\cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}$

6. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$

7. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

8. $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2$

9. $\rho \ = a \ (1+\sin^2\varphi)$

10. $(x^2+y^2)^3 = a^3y^3$

11. $\rho \ = a^2\sin^2\varphi$

12. $(x^2+y^2)^2 = a^2(2x^2+y^2)$

13. $\rho = a\sin\varphi\sqrt{\sin\varphi}$

14. $(x^2+y^2)^2 = a^2(2x^2+3y^2)$

15. $\rho = a^2(2-\cos 2\ \varphi)$

18. $(x^2+y^2)^3 = a^2y^4$

19. $\rho = a\sin\varphi\sqrt{\cos\varphi}$

20. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy\ (y^2-x^2)$

21. $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$

22. $(x^2+y^2)^2 = a^2xy$

23. $\rho^2 = a^2(1+\cos^2\varphi)$

24. $(x^2+y^2)^3 = a^3x^3$

25. $\rho = a^2\cos^2\varphi$

26. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2+2y^2)$

27. $\rho = a\cos\varphi\sqrt{\cos\varphi}$

28. $(x^2+y^2)^2 = a^2(3x^2+2y^2)$

29. $\rho = a^2\left(2-sin\,2\varphi\right)$

30. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$

$\boxed{7}$ Обчислити об’єм тіла, обмеженого зазначеними поверхнями

1. $z = x^2+y^2,\ \ x+y=1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0$
2. $z = 2-(x^2+y^2),\ x+2y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$
3. $z = x^2,\ x-2y+2=0,\ x+y-7=0,\ z\ge 0$

4. $z = 2x^2 + 3y^2, y = x^2,\ y = x,\ z \geq 0$

5. $z = 2x^2 + y^2, y \leq x,\ x = 2,\ y = 3x,\ z \geq 0$

6. $z = x,\ y = 4,\ x = \sqrt{25 - y^2},\ y \geq 0,\ z \geq 0$

7. $z + x + y = 2,\ z \geq 0,\ y = \sqrt{x},\ y = x$

8. $y = 1 - x^2,\ x + y + z = 3,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

9. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

10. $z = 4 - 4x^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

11. $2x + 3y - 12 = 0,\ 2z = y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

12. $z = 10 + x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x = 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

13. $z = x^2 + 1,\ x + y = 6,\ x \geq 0,\ y = 2x,\ z \geq 0$

14. $z = 3x^2 + 2y^2 + 1,\ y = x^2 - 1,\ y = 3,\ z \geq 0$

15. $3y = \sqrt{x}, y \leq x,\ x + y + z = 10,\ y = 1,\ z = 0$

16. $y^2 = 1 - x,\ x + y + z = 1,\ x = 0,\ z = 0$

17. $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 3x + 2y + 6,\ z = 0$

18. $x^2 = 1 - y,\ x + y + z = 3,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

19. $x = y^2,\ x = 1,\ x + y + z = 6,\ z \geq 0$

20. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

21. $y = x^2, y = 4,\ z = 2x + 5y + 10,\ z \geq 0$

22. $y = 2x,\ x + y + z = 2,\ x \geq 0,\ z \geq 0$

23. $y = 1 - z^2, y = x, y = -x,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

24. $x^2 + y^2 = 4y,\ z^2 = 4 - y,\ z \geq 0$

25. $x^2 + y^2 = 1,\ z = 2 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$

26. $y = x^2,\ z \geq 0,\ y + z = 2$

27. $z^2 = 4 - x,\ x^2 + y^2 = 4x,\ z \geq 0$

28. $z = x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x \geq 0,\ y = 1,\ z \geq 0$

29. $z = y^2,\ x + y = 1,\ x \geq 0,\ z \geq 0$

30. $y^2 = x,\ x = 3,\ z = x,\ z \ge 0$

$\boxed{8}$ Розставити границі інтегрування в потрійному інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, якщо область V обмежена зазначеними поверхнями. Побудувати область інтегрування

1. $x = 1,\ y = 3x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 2(x^2 + y^2)$
2. $x = 1,\ y = 4x,\ z \ge 0,\ z = \sqrt{3y}$
3. $x = 3,\ y = x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 3x^2 + y^2$
4. $y = 2x,\ y = 2,\ z \ge 0,\ z = 2\sqrt{x}$
5. $x = 0,\ y = x,\ y = 5,\ z \ge 0,\ z = 2x^2 + y^2$
6. $x \ge 0,\ y = 2x,\ y = 1,\ z \ge 0,\ x + y + z = 3$
7. $x \ge 0,\ y = 3x,\ y = 3,\ z \ge 0,\ x = 3\sqrt{z}$
8. $x = 5,\ y = 0{,}2x,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z = x^2 + 5y^2$
9. $x = 2,\ y = 4x,\ y = 3\sqrt{x},\ z \ge 0,\ z = 4$
10. $x = 2,\ y = 4x,\ z \ge 0,\ y = 2\sqrt{z}$
11. $x = 3,\ y = x/3,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 2z = x^2 + y^2$
12. $x = 4,\ y = x/4,\ z \ge 0,\ z = 4y^2$
13. $x \ge 0,\ y = 3x,\ y = 3,\ z \ge 0,\ z = 2(x^2 + y^2)$
14. $x \ge 0,\ y = 4x,\ y = 8,\ z \ge 0,\ z = 3x^2 + y^2$
15. $x \ge 0,\ y = 5x,\ y = 10,\ z \ge 0,\ z = x^2 + y^2$
16. $y = x,\ y = -x,\ y = 2,\ z \ge 0,\ z = 3(x^2 + y^2)$
17. $x = 1,\ y = 2x,\ y = 3x,\ z \ge 0,\ z = 2x^2 + y^2$
18. $y = x,\ y = -2x,\ y = 1,\ z \ge 0,\ z = x^2 + 4y^2$
19. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 1,\ z = 3x^2 + 2y^2$
20. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 3x + 2y = 6,\ z = x^2 + y^2$
21. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 2,\ z = 4 - x^2 - y^2$
22. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 3,\ z = 9 - x^2 - y^2$

23. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 3x + 4y = 12,\ z = 6 - x^2 - y^2$

24. $x \ge 0,\ y = x,\ z \ge 0,\ y = 3,\ z = 18 - x^2 - y^2$

25. $x = 2,\ y \ge 0,\ z \ge 0, y = 3x,\ z = 4(x^2 + y^2)$

26. $x \ge 0,\ y = 2x,\ y = 4,\ z \ge 0,\ z = 10 - x^2 - y^2$

27. $x = 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ y = 2x,\ z = 4\sqrt{y}$

28. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0, 2x + 3y = 6,\ z = 3 + x^2 + y^2$

29. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y = 4,\ z = 16 - x^2 - y^2$

30. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ 5x + y = 5,\ z = x^2 + y^2$

$\boxed{9}$ Обчислити потрійний інтеграл від функції $F(x,y,z)$ по області V

№ п/п	$F(x,y,z)$	V		
1.	$2x^2 + 3y + z$,	$2 \le x \le 3$	$-1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 4$
2.	$x^2\ \ yz$	$-1 \le x \le 2,$	$0 \le y \le 3,$	$2 \le z \le 3$
3.	$x + y + 4z^2$	$-1 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 1$
4.	$x^2 + y^2 + z^2$	$0 \le x \le 3,$	$-1 \le y \le 2,$	$0 \le z \le 2$
5.	$x^2 y^2 z$	$-1 \le x \le 3,$	$0 \le y \le 2,$	$-2 \le z \le 5$
6.	$x + y + z$	$0 \le x \le 1,$	$-1 \le y \le 0,$	$1 \le z \le 2$
7.	$2x - y^2 - z$	$1 \le x \le 5,$	$0 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 0$
8.	$2xy^2 z$	$0 \le x \le 3,$	$-2 \le y \le 0,$	$1 \le z \le 2$
9.	$5xyz^2$	$-1 \le x \le 0,$	$2 \le y \le 3,$	$1 \le z \le 2$
10.	$x^2 + 2y^2 - z$	$0 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 3,$	$-1 \le z \le 2$
11.	$x + 2yz$	$-2 \le x \le 0,$	$0 \le y \le 1,$	$0 \le z \le 2$
12.	$x + yz^2$	$0 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 2,$	$-1 \le z \le 3$
13.	$xy + 3z$	$-1 \le x \le 1,$	$0 \le y \le 1,$	$1 \le z \le 2$
14.	$xy - z^2$	$0 \le x \le 2,$	$0 \le y \le 1,$	$-1 \le z \le 3$
15.	$x^3 + yz$	$-1 \le x \le 2,$	$0 \le y \le 1,$	$0 \le z \le 1$
16.	$x^3 + y^2 - z$	$0 \le x \le 2,$	$-1 \le y \le 0,$	$0 \le z \le 1$

17.	$2x^2+y-z^3$	$0\le x\le 1,$	$-2\le y\le 1,$	$0\le z\le 1$
18.	x^2yz^2	$0\le x\le 2,$	$1\le y\le 2,$	$-1\le z\le 0$
19.	$x+y-z$	$0\le x\le 4,$	$1\le y\le 3,$	$-1\le z\le 5$
20.	$x+2y+3z^2$	$-1\le x\le 2,$	$0\le y\le 1,$	$1\le z\le 2$
21.	$3x^2+2y+z$	$0\le x\le 1,$	$0\le y\le 1,$	$-1\le z\le 3$
22.	$xy-z^3$	$0\le x\le 1,$	$-1\le y\le 2,$	$0\le z\le 3$
23.	x^3yz	$-1\le x\le 2,$	$1\le y\le 3,$	$0\le z\le 1$
24.	xy^2z	$-2\le x\le 1,$	$0\le y\le 2,$	$0\le z\le 3$
25.	xyz^2	$0\le x\le 2,$	$-1\le y\le 0,$	$0\le z\le 4$
26.	$x+yz$	$0\le x\le 1,$	$-1\le y\le 4,$	$0\le z\le 2$
27.	$x+y^2-z^2$	$-2\le x\le 0,$	$1\le y\le 2,$	$0\le z\le 5$
28.	$x+y+z^2$	$-1\le x\le 0,$	$0\le y\le 1,$	$2\le z\le 3$
29.	$x+y^2-2z$	$1\le x\le 2,$	$-2\le y\le 3,$	$0\le z\le 1$
30.	$x-y-z$	$0\le x\le 3,$	$0\le y\le 1,$	$-2\le z\le 1$

10 Обчислити потрійний інтеграл від функції $F(x,y,z)$ по області V за допомогою циліндричної або сферичної систем координат

№ п/п	$F(x,y,z)$	V
1.	$x^2+y^2+z^2$	$x^2+y^2+z^2=4$; $x\ge 0;$ $y\ge 0;$ $z\ge 0$
2.	$y\sqrt{x^2+y^2}$	$0\le z\le 2;$ $-x\le y\le x$; $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$
3.	z^2	$1\le x^2+y^2\le 36$; $y\ge x$; $x\ge 0$; $z\ge 0$
4.	y	$x^2+y^2+z^2=32$; $y^2=x^2+z^2$; $y\ge 0$
5.	x	$x^2+y^2+z^2=8$; $x^2=y^2+z^2$; $x\ge 0$
6.	y	$4\le x^2+y^2+z^2\le 16$; $y\le\sqrt{3}x$; $y\ge 0$; $z\ge 0$
7.	y	$z=\sqrt{8-x^2-y^2}$; $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $y\ge 0$
8.	$\dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$	$x\ge 0$; $y\ge\sqrt{3}x$; $z\ge 0$; $4\le x^2+y^2+z^2\le 36$

9.	$\dfrac{y^2 z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$	$y \ge 0$; $y \le \sqrt{3}x$; $z = 3(x^2+y^2)$; $z = 3$
10.	$\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$	$x^2+y^2+z^2 = 16$; $z \ge 0$
11.	$\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$z = 2(x^2+y^2)$; $y \ge 0$; $y \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$; $z = 18$
12.	$\dfrac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$	$z = x^2+y^2$; $y \ge 0$; $y \le x$; $z = 4$
13.	$\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$x^2+y^2 = 4y$; $y+z = 4$; $z \ge 0$
14.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$x^2+y^2 = 2x$; $x+z = 2$; $z \ge 0$; $y \ge 0$
15.	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$x^2+y^2 = 16y$; $y+z = 16$; $z \ge 0$; $x \ge 0$
16.	$\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2 = 2x$; $x+z = 2$; $z \ge 0$
17.	xy	$2 \le x^2+y^2+z^2 \le 8$; $z^2 = x^2+y^2$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$
18.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$x^2+y^2 = 2y$; $x^2+y^2 = 4y$; $x \ge 0$; $z \ge 0$; $z = 6$
19.	$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$x^2+y^2+z^2 = 36$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $y \le -x$
20.	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$x^2+y^2 = 2x$; $x^2+y^2 = 4x$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $z = 4$; $y \le x$
21.	$\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$; $y \ge 0$; $y \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$; $z \ge 0$
22.	$\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2-2x+y^2 = 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $x+z = 2$
23.	x^2	$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 16$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $y \le x$
24.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$x^2+y^2 = 4y$; $y+z = 4$; $z \ge 0$

25.	$\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16$; $y \le \sqrt{3}\cdot x$; $y \ge 0$; $z \ge 0$
26.	$z\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=2x$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $z=3$
27.	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $y \le x$
28.	x	$x^2 = 2(y^2+z^2)$; $x=4$; $x \ge 0$
29.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$; $y \ge 0$; $z \ge 0$; $y \le x$
30.	x	$z=\sqrt{18-x^2-y^2}$; $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $x \ge 0$

$\boxed{11}$ За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого зазначеними поверхнями. Зробити рисунок

1. $z^2 = 4-x$, $x^2+y^2=4x$
2. $z \ge 0$, $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y=7$
3. $z=4-y^2$, $x^2+y^2=4$, $z \ge 0$
4. $x \ge 0$, $z \ge 0$, $z=y$, $x=4$, $y=\sqrt{25-x^2}$
5. $x^2+y^2=1$, $z=2-x-y$, $z \ge 0$
6. $z \ge 0$, $z=4-x$, $x=2\sqrt{y}$, $y=2\sqrt{x}$
7. $z=y^2$, $x \ge 0$, $z \ge 0$, $x+y=2$
8. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $2x-y=0$, $x+y=9$, $z=x^2$
9. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $z=x$, $x=\sqrt{9-y^2}$, $x=\sqrt{25-y^2}$
10. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x=4$, $y=2x$, $z=x^2$
11. $x^2+y^2=4$, $z=4-x-y$, $z \ge 0$
12. $x \ge 0$, $z \ge 0$, $y=2x$, $y=3$, $z=\sqrt{y}$
13. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x=3$, $y=2x$, $z=y^2$
14. $x \ge 0$, $z \ge 0$, $y \ge x$, $z=1-x^2-y^2$
15. $z \ge 0$, $y^2=2-x$, $z=3x$

16 . $z \ge 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$

17 . $z \ge 0$, $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$

18 . $z \ge 0$, $y = 2$, $y = x$, $z = x^2$

19. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$

20. $z \ge 0$, $y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 4$

21. $z \ge 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5 - x - y$

22. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x - y = 0$, $2x + y = 2$, $4z = y^2$

23. $z \ge 0$, $z = x$, $x = \sqrt{4 - y^2}$

24. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $2x + y = 2$, $z = y^2$

25. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y = 2$, $z = x^2$

26. $z \ge 0$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$, $z = 1 - y^2$

27. $y \ge 0$, $z \ge 0$, $y = 4$, $z = x$, $x = \sqrt{25 - y^2}$

28. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $y = 3 - x$, $z = 9 - x^2$

29. $z \ge 0$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = y^2$

30. $x \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y = 4$, $z = 4\sqrt{y}$

$\boxed{12}$ Обчислити масу неоднорідної матеріальної пластини D, обмеженої зазначеними лініями, якщо поверхнева щільність в кожній її точці $\mu = \mu(x, y)$

№ п/п	D	μ
1.	$y^2 = x$, $x = 3$	x
2.	$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$	x^2
3.	$x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 6$,	$0{,}5y^2$
4.	$x^2 + y^2 = 4x$	$4 - x$
5.	$x = 0$, $y = 1$, $y = x$,	$x^2 + 2y^2$
6.	$x^2 + y^2 = 1$	$2 - x - y$

№ п/п	D	μ
7.	$x^2+y^2=4y$	$\sqrt{4-y}$
8.	$y=x$, $y=-x$, $y=1$	$\sqrt{1-y}$
9.	$x=0$, $y=2x$, $x+y=2$,	$2-x-y$
10.	$x=1$, $x=y^2$	$4-x-y$
11.	$y=0$, $x^2=1-y$,	$3-x-y$
12.	$y=x^2$, $x=y^2$,	$3x+2y+6$
13.	$y=x^2$, $y=4$	$2x+5y+10$
14.	$x=0$, $y=0$, $x+y=1$	$2x^2+y^2$
15.	$x=0$, $y^2=1-x$	$2-x-y$
16.	$y=\sqrt{x}$, $y=x$	$2-x-y$
17.	$y=x^2-1$, $y=1$	$3x^2+2y^2+1$
18.	$x=1$, $y=x$, $y=0$,	x^2+2y^2+10
19.	$y=0$, $y=2x$, $x+y=6$,	x^2
20.	$x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^2+y^2=4$	$4-x^2$
21.	$y=x^2$, $y=2$	$2-y$
22.	$x=0$, $y=0$, $x+y=1$	x^2+y^2
23.	$y=x^2+1$, $x-y=3$	$4x+5y+2$
24.	$y=x^2-1$, $x+y=1$	$2x+5y+8$
25.	$x=0$, $y=0$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$	x
26.	$x=2$, $y=x$, $y=3x$	$2x^2+y^2$
27.	$y=x$, $y=x^2$	$2x+3y$
28.	$x=0$, $x+2y+2=0$, $x+y=1$	x^2
29.	$x=0$, $y=0$, $x+2y=1$	$2-(x^2+y^2)$
30.	$x=0$, $y=0$, $x+y=2$	x^2+y^2

13 Обчислити статичний момент однорідної матеріальної пластини D, обмеженої зазначеними лініями, відносно поданої вісі координат

№ п/п	D	Вісь
1.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ x-y\le 0;$	Ox
2.	$x^2+y^2-2ax=0;\ \ x+y\le 0;$	Oy
3.	$x^2+y^2+2ay\le 0;\ \ x-y\ge 0;$	Ox
4.	$x^2+y^2+2ax=0;\ \ x+y\ge 0;$	Ox
5.	$x^2+y^2+2ax\ge 0;\ \ x^2+y^2+2ay\le 0;\ \ x\le 0;$	Ox
6.	$x^2+y^2-2ay\ge 0;\ \ x^2+y^2+2ax\le 0;\ \ y\ge 0;$	Oy
7.	$x^2+y^2-2ay\le 0;\ \ x^2+y^2-2ax\ge 0;\ \ x\ge 0;$	Ox
8.	$x^2+y^2-2ax\le 0;\ \ x^2+y^2+2ay\ge 0;\ \ y\le 0;$	Oy
9.	$x^2+y^2-2ax\ge 0;\ \ x^2+y^2+2ay<0;\ \ x\ge 0;$	Ox
10.	$x^2+y^2+2ax\le 0;\ \ x^2+y^2+2ay\ge 0;\ \ y\le 0;$	Oy
11.	$x^2+y^2-2ay\le 0;\ \ x^2+y^2+2ax\ge 0;\ \ x\le 0;$	Ox
12.	$x^2+y^2-2ay\ge 0;\ \ x^2+y^2-2ax\le 0;\ \ y\ge 0;$	Oy
13.	$x^2+y^2+2ay=0;\ \ x^2+y^2+ay=0;\ \ x\le 0;$	Ox
14.	$x^2+y^2-2ax=0;\ \ x^2+y^2-ax=0;\ \ y\ge 0;$	Oy
15.	$x^2+y^2+2ay=0;\ \ x^2+y^2+ay=0;\ \ x\ge 0;$	Ox
16.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ x^2+y^2-ay=0;\ \ x\ge 0;$	Ox
17.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ x^2+y^2-ay=0;\ \ x\le 0;$	Ox
18.	$x^2+y^2+2ax=0;\ \ x^2+y^2+ax=0;\ y\ge 0;$	Oy
19.	$x^2+y^2-2ax=0;\ \ x^2+y^2-ax=0;\ y\le 0;$	Ox
20.	$x^2+y^2+2ax=0;\ \ x^2+y^2+ax=0;\ \ y\le 0;$	Oy
21.	$x^2+y^2+2ay=0;\ \ x+y\le 0;\ \ x\ge 0;$	Ox
22.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ y\text{-}x\ge 0;\ \ x\ge 0;$	Ox
23.	$x^2+y^2+2ax=0;\ \ y\text{-}x\ge 0;\ \ y\le 0;$	Oy
24.	$x^2+y^2-2ay=0;\ \ x+y\ge 0;\ \ x\le 0;$	Ox

25.	$x^2+y^2+2ax=0;\ x+y\le 0;\ y\ge 0;$	Oy
26.	$x^2+y^2-2ax=0;\ y\text{-}x\le 0;\ y\ge 0;$	Ox
27.	$x^2+y^2-2ax=0;\ y\text{-}x\le 0;\ x+y\ge 0;$	Oy
28.	$x^2+y^2-2ay=0;\ y\text{-}x\ge 0;\ x+y\ge 0;$	Ox
29.	$x^2+y^2+2ax=0;\ x+y\le 0;\ y\text{-}x\ge 0;$	Oy
30.	$x^2+y^2+2ay=0;\ y\text{-}x\le 0;\ x+y\le 0;$	Ox

14 Обчислити координати центра мас однорідного тіла V , обмеженого зазначеними поверхнями

№ п/п	V	№ п/п	V
1.	$x=6(y^2+z^2);\ y^2+z^2=3;\ x=0$	16.	$x=7(y^2+z^2);\ \ x=28$
2.	$y=3\sqrt{x^2+z^2};\ x^2+z^2=36;\ y=0$	17.	$z=2\sqrt{x^2+y^2};\ z=8$
3.	$z=5(x^2+y^2);\ x^2+y^2=2;\ z=0$	18.	$z=8(y^2+x^2);\ z=32$
4.	$x=6\sqrt{y^2+z^2};\ y^2+z^2=9;\ x=0$	19.	$y=3\sqrt{x^2+z^2};\ y=9$
5.	$9y=x^2+z^2;\ x^2+z^2=4;\ y=0$	20.	$x^2+z^2=6y;\ y=8$
6.	$3z=\sqrt{x^2+y^2};\ x^2+y^2=4;\ z=0$	21.	$8x=\sqrt{y^2+z^2};\ \ x=0,5$
7.	$2x=y^2+z^2;\ y^2+z^2=4;\ x=0$	22.	$y^2+z^2=8x;\ x=2$
8.	$4y=\sqrt{x^2+z^2};\ x^2+z^2=16;\ y=0$	23.	$z=9\sqrt{x^2+y^2};\ z=36$
9.	$z=3(x^2+y^2);\ x^2+y^2=9;\ z=0$	24.	$x^2+z^2=4y;\ y=9$
10.	$x=2\sqrt{y^2+z^2}\ \ y^2+z^2=4;\ x=0$	25.	$x=5\sqrt{y^2+z^2};\ \ x=20$
11.	$y=x^2+z^2;\ y^2+z^2=10;\ y=0$	26.	$y^2+z^2=3x;\ x=9$
12.	$y=3\sqrt{x^2+z^2};\ y^2+z^2=16;\ y=0$	27.	$y=\sqrt{x^2+z^2};\ y=4$
13.	$z=x^2+y^2;\ x^2+y^2=4;\ z=0$	28.	$z=\sqrt{x^2+y^2};\ z=4$
14.	$z=2\sqrt{x^2+y^2};\ x^2+y^2=9;\ z=0$	29.	$x^2+y^2=2z;\ z=3$
15.	$x=y^2+z^2;\ y^2+z^2=9;\ x=0$	30.	$x=y=z=0;\ x+y+z=3$

15 Обчислити момент інерції однорідного тіла V відносно зазначеної вісі координат, обмеженого поданими поверхнями. Щільність тіла δ дорівнює 1

№ п/п	V	Вісь	№ п/п	V	Вісь
1.	$y^2 = x^2 + z^2;\ y = 4;$	Oy	2.	$x = y^2 + z^2;\ x = 2;$	Ox
3.	$y^2 = x^2 + z^2;\ y = 2;$	Oy	4.	$x = y^2 + z^2;\ x = 9;$	Ox
5.	$x^2 = y^2 + z^2;\ x = 2;$	Ox	6.	$y = x^2 + z^2;\ y = 2;$	Oy
7.	$x^2 = y^2 + z^2;\ x = 3;$	Ox	8.	$x = y^2 + z^2;\ x = 3;$	Ox
9.	$y = 2\sqrt{x^2 + y^2};\ y = 2;$	Oy	10.	$y = x^2 + z^2;\ y = 3;$	Oy
11.	$z = x^2 + z^2;\ z = 3;$	Ox	12.	$z = 3 - x^2 - y^2;\ z = 0;$	Oz
13.	$x = y^2 + z^2;\ y^2 + z^2 = 1;\ x = 0;$	Ox	14.	$z^2 = x^2 + y^2;\ z = 3;$	Oz
15.	$x^2 = y^2 + z^2;$ $y^2 + z^2 = 1;\ x = 0;$	Oz	16.	$y^2 = x^2 + z^2;$ $x^2 + z^2 = 4;\ y = 0;$	Oy
17.	$2y = x^2 + z^2;\ y = 2;$	Oy	18.	$x^2 = y^2 + z^2;\ x = 2;$	Ox
19.	$2z = x^2 + z^2;\ z = 2;$	Oz	20.	$z = 2(x^2 + y^2);\ z = 2;$	Ox
21.	$2z = x^2 + y^2;$ $x^2 + y^2 = 4;\ z = 0;$	Oz	22.	$x^2 = y^2 + z^2;$ $y^2 + z^2 = 4;\ x = 0;$	Oz
23.	$x = 1 - y^2 - z^2;\ x = 0;$	Ox	24.	$y = 4 - x^2 - z^2;\ y = 0;$	Oy
25.	$x = 3(y^2 + z^2);\ x = 3;$	Ox	26.	$z = 9 - x^2 - y^2;\ z = 0;$	Oz
27.	$z = 4\sqrt{x^2 + y^2};\ z = 4;$	Oz	28.	$z = 3(x^2 + y^2);\ z = 3;$	Oz
29.	$x = 2\sqrt{y^2 + z^2};\ x = 2;$	Ox	30.	$y = 3(x^2 + z^2);\ y = 3;$	Oy

Змістовий модуль 3.3

Тема 13. ***Криволінійні інтеграли***

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (x^2+y^2)^n\,dl$, де L - коло $x^2+y^2=a^2$.

Рішення. Маємо криволінійний інтеграл першого роду (тобто по дузі). Запишемо рівняння кола $x^2+y^2=a^2$ у параметричному вигляді: $x=\alpha\cos t$, $y=\alpha\sin t$, $0\le t\le 2\pi$. Тоді

$$x'_t=-\alpha\sin t,\ y'_t=\alpha\cos t,\ dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt,$$

$$dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=adt.$$

Отже,

$$\oint\limits_L (x^2+y^2)^n\,dl=a^{2n+1}\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi a^{2n+1}.$$

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{OB}} xdl$, де L_{OB} - відрізок прямої від точки $O(0,0)$ до точки $B(l,2)$.

Рішення. Знаходимо рівняння прямої OB за двома точками: $y = 2x$.

Далі маємо:

$$dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx;\quad dl=\sqrt{5}dx;\quad \int\limits_{L_{OB}} xdl=\sqrt{5}\int\limits_0^1 xdx=\sqrt{5}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\oint\limits_{L_{OB}} 2x(y-1)dx+x^2dy$, де L - контур фігури, обмеженої параболою $y=x^2$ і прямою $y = 9$ при додатному напрямку обходу.

Рішення. Маємо криволінійний інтеграл другого роду (тобто по координатах). У відповідності з властивостями криволінійних інтегралів другого роду маємо:

$$I=\int\limits_{L_1} 2x(y-1)dx+x^2dy+\int\limits_{L_2} 2x(y-1)dx+x^2dy,$$

де L_1 - дуга параболи $y = x^2$, L_2 - відрізок прямої $y = 9$. Тому що парабола і пряма перетинаються в точках $(-3,9)$ і $(3,9)$, то

$$I = \int_{-3}^{3}(4x^3 - 2x)dx + \int_{-3}^{3}16xdx = (x^4 - x^2 + 8x^2)\Big|_{-3}^{3} = 0 .$$

4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду: $I = \int\limits_L (\sqrt[3]{x} + y)dx - (\sqrt[3]{y} + x)dy$, де L - верхня дуга астроїди $x = 8\cos^3 t$, $y = 8\sin^3 t$ від точки $(8,0)$ до точки $(-8,0)$.

Рішення. Знаходимо:

$$dx = 24\cos^2 t(-\sin t)dt ,\quad dy = 24\sin^2 t\cos t dt ,\quad 0 \le t \le \pi .$$

Тоді

$$I = \int_0^{\pi}(2\cos t + 8\sin^3 t)(-24\sin t\cos^2 t)dt - (2\sin t + 8\cos^3 t)24\sin^2 t\cos t dt =$$

$$= \int_0^{\pi}(-48\sin t\cos^3 t - 192\sin^4 t\cos^2 t - 48\sin^3 t\cos t - 192\sin^2 t\cos^4 t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi}(-24\sin 2t - 48\sin^2 2t)dt = 12\cos 2t\Big|_0^{\pi} - 24\int_0^{\pi}(1 - \cos 4t)dt =$$

$$= -24\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi} = -24\pi .$$

5. Показати, що вираз

$$\left(\frac{y}{1 + x^2y^2} - 1\right)dx + \left(\frac{x}{1 + x^2y^2} - 10\right)dy$$

є повним диференціалом функції $U(x,y)$. Знайти цю функцію.

Рішення. Перевіримо, чи виконується умова повного диференціала $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ для функції $U(x,y)$. Маємо:

$$P(x,y) = \frac{y}{1 + x^2y^2} - 1 ;\quad Q(x,y) = \frac{x}{1 + x^2y^2} - 10 ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1 + x^2y^2} - 1\right) = \frac{1 + x^2y^2 - y2x^2y}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} = \frac{1 - x^2y^2}{\left(1 + x^2y^2\right)^2} ;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-10\right)=\frac{1+x^2y^2-x2xy^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}.$$

Отже, даний вираз є повним диференціалом функції *U(x,y)*. Застосуємо криволінійний інтеграл другого роду. Поклавши $x_0=0,\ y_0=0$, по формулі

$$U(x;y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C$$ знайдемо *U(x,y)*:

$$U(x,y)=\int_0^x(-1)dx+\int_0^y\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy+C=$$

$$=-x\Big|_0^x+(arctgxy-10y)\Big|_0^y+C=-x+arctgxy-10y+C.$$

Результат обчислення вірний, якщо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y).$$

Зробимо перевірку:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x+arctgxy-10y+C)=-1+\frac{y}{1+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-x+arctgxy-10y+C)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10.$$

Отже, $U(x,y)=arctgxy-x-10y+C$.

6. Розв'язати рівняння $(x^{-1}-y^3+4)dx+(-y^{-1}-3xy^2)dy=0$.

Рішення Позначимо: $P(x,y)=x^{-1}-y^3+4$, $Q(x,y)=-y^{-1}-3xy^2$, тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-3y^2;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2.$$

Тому що $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, маємо рівняння у повних диференціалах. Його загальний інтеграл:

$$\int_{x_0}^{x}(x^{-1}-y^3+4)dx+\int_{y_0}^{y}(-y^{-1}-3xy^2)dy=C_0.$$

Після інтегрування

$$ln|x|\Big|_{x_0}^{x} - y^3 x\Big|_{x^0}^{x} + 4x\Big|_{x^0}^{x} - ln|y|\Big|_{y_0}^{y} - 3x_0\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y^0}^{y} = C_0,$$

$$ln|x| - ln|x_0| - xy^3 + y^3x_0 + 4x - 4x_0 - ln|y| + ln|y_0| - x_0y^3 + x_0y_0^3 = C_0.$$

Відкіля $ln\left|\frac{x}{y}\right| - xy^3 + 4x = C$, де $C = C_0 + ln\left|\frac{x_0}{y_0}\right| + 4x_0 - x_0y_0^3$.

7. Обчислити моменти інерції щодо осей координат однорідного відрізка прямої $4x + 2y = 3$, що лежить між точками $(0,\frac{3}{2})$ і $(2,-\frac{5}{2})$.

Рішення. Використовуючи загальні формули для обчислення моментів інерції, за допомогою криволінійного інтегралу першого роду послідовно знаходимо:

$$I_x = \int_L y^2 dl, \text{ де } L: 4x + 2y = 3, \quad y = -2x + \frac{3}{2}, \quad dl = \sqrt{5}dx,$$

$$I_x = \sqrt{5}\int_0^2 \left(-2x + \frac{3}{2}\right)^2 dx = -\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{3}\left.\left(-2x + \frac{3}{2}\right)^3\right|_0^2 =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{6}\left(\frac{-125}{8} + \frac{27}{8}\right) = \frac{49\sqrt{5}}{24},$$

$$I_y = \int_L x^2 dl, \quad I_y = \sqrt{5}\int_0^2 x^2 dx = \sqrt{5}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}\sqrt{5}.$$

8. Обчислити роботу A сили $\overline{F} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ вздовж прямої від точки $B(1,1,1)$ до точки $C(2,3,4)$.

Рішення. Запишемо параметричне рівняння прямої $BC: x = 1 + t$; $y = 1 + 2t$; $z = 1 + 3t$, де $t \in [0,1]$. Тоді, за фізичним сенсом криволінійного інтегралу другого роду, роботу A сили $\overline{F}$ вздовж шляху BC обчислюємо за формулою:

$$A = \int_{L_{BC}} yzdx + xzdy + xydz = \int_0^1 (1+2t)(1+3t)dt + 2(1+t)(1+3t)dt +$$

$$+ 3(1+t)(1+2t)dt = \int_0^1 \left(18t^2 + 22t + 6\right)dt = \left.\left(6t^3 + 11t^2 + 6t\right)\right|_0^1 = 23.$$

9. Обчислити: $I=\oint\limits_L y(1-x^2)dx+(1+y^2)xdy$, де контур L – коло $x^2+y^2=4$ вздовж якого рухаємося у додатному напрямку.

Рішення. Скористаємося формулою Грина: $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, де D область, яку обмежено контуром L. Маємо, $I=\iint\limits_D(1+y^2-1+x^2)dxdy=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$, тут D – коло, визначене нерівністю $x^2+y^2\le 4$. Виконаємо заміну змінних: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ dxdy=\rho d\rho d\varphi$, де $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 2$.

Отже,

$$I=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_{D^*}\rho^3 d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^3 d\rho=\varphi\Big|_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2=8\pi .$$

10. Дано функцію $u(M)=\frac{\sqrt{x}}{z}-\frac{\sqrt{y}}{x}+2xyz$ і точки $M_1(1;1;-1)$, $M_2(-2;-1;1)$.

Обчислити: а) похідну цієї функції в точці M_1, за напрямком вектора $\overline{M_1M_2}$; б) $\overline{grad}\,U(M_1)$.

Рішення. а) скористаємося формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_1}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_1}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_1}\cos\gamma ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2z\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz\Big|_{M_1}=-\frac{3}{2};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2x\sqrt{y}}+2xz\Big|_{M_1}=-\frac{5}{2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\sqrt{y}}{x^2}+2yz\Big|_{M_1}=1 .$$

Будуємо вектор $\overline{M_1M_2}=(-2-1;-1-1;1+1)=(-3;-2;2)$.

Обчислюємо напрямні косинуси:

$$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{9+4+4}}=-\frac{3}{\sqrt{17}};\ \cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{9+4+4}}=-\frac{2}{\sqrt{17}};$$

$$\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{9+4+4}}=\frac{2}{\sqrt{17}} .$$

Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right) - \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) + 1\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = \frac{23}{2\sqrt{17}} \ ;$$

б) відповідно до визначення, маємо:

$$\overline{grad}\, U(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} \cdot \bar{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} \cdot \bar{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} \cdot \bar{k} = -\frac{3}{2}\bar{i} - \frac{5}{2}\bar{j} + \bar{k} \ .$$

11. Знайти у точці $M(-1,0,1)$ рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні S:

$$z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4 \ .$$

Рішення. Знаходимо частинні похідні від функції $F(x,y,z) = 0$, тобто

$$x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4 - z = 0 :$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y - 4 \ ; \ \ \frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 3x + 2 \ ; \ \ \frac{\partial F}{\partial z} = -1 \ .$$

Обчислимо: $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M$; $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M$; $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M$. Маємо:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M = -6 \ ; \ \ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M = -1 \ ; \ \ \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M = -1 \ .$$

Формула дотичної площини має вигляд

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M \cdot (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M \cdot (z - z_0) = 0 \ .$$

Отже : $-6(x+1) - y - (z-1) = 0$ або $6x + y + z + 5 = 0$,
а рівняння нормалі знаходимо по формулі

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M} \ ,$$ тобто $$\frac{x+1}{-6} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$ або

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \ .$$

Завдання до теми 13

$\boxed{1}$ Обчислити криволінійний інтеграл по дузі

1. $\int\limits_L \sqrt{2-z^2}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L - дуга кривої: $x=t\cos t,\ y=t\sin t,$ $z=t,\ 0\le t\le 2\pi$

2. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L - коло $x^2+y^2=4$

3. $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де L_{OB} - відрізок прямої; $O(0,0);\ B(2,2)$

4. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(-1,0,),\ B(0,1,)$

5. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(0,4),\ B(4,0)$

6. $\int\limits_L \frac{ydl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L - дуга кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi/2$

7. $\int\limits_{L_{AB}} ydl$, де L_{AB} - дуга астроїди $x=\cos^3 t;\ y=\sin^3 t;\ A(1,0);\ B(0,1)$

8. $\int\limits_{L_{OB}} ydl$, де L_{OB} - дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$; $O(0,0);\ B\left(\frac{35}{6},\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$

9. $\oint\limits_L xydl$, де L - контур прямокутника з вершинами: $O(0,0),\ A(4,0),$ $B(4,2),C(0,2)$

10. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dl$, де L - дуга кривої: $x=cos\ t,\ y=sin\ t,\ z=\sqrt{3}\ t$; $0 \le t \le 2\pi$

11. $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl$, де L - дуга кардіоїди $\rho=2(1+cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi/2$

12. $\int\limits_L \sqrt{2y}\ dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=2(t-sin\ t),\ y=2(1-cos\ t);$ $0 \le t \le 2\pi$

13. $\int\limits_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L_{OA} - відрізок прямої; $O(0,0)\ \ A(1,2)$

14. $\int\limits_L \frac{\left(y^2-x^2\right)xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dl$, де L - дуга кривої $\rho=9sin\ 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4$

15. $\oint\limits_{L_{ABO}} (x+y)dl$, де L_{ABO} - контур трикутника з вершинами: $A(1,0),$ $B(0,1),\ O(0,0)$

16. $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=2cos\ t,$ $y=2sin\ t,\ z=2t;\ \ 0 \le t \le 2\pi$

17. $\oint\limits_{L_{OAB}} (x+y)dl$, де L_{OAB} - контур трикутника з вершинами: $O(0,0)$ $A(-1,0),\ B(0,1)$

18. $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - контур лемніскати Бернулі $\rho^2=cos\ 2\varphi,$ $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$

19. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L - коло $x^2+y^2=2y$

20. $\oint\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами: $O(0,0)$ $A(5,0)$, $B(5,3)$, $C(0,3)$

21. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L - коло $x^2+y^2=4x$

22. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}\right)dl$, де L_{AB} - дуга астроїди: $x=\cos^3 t;\ y=\sin^3 t;$ $A(1,0);\ B(0,1)$

23. $\oint\limits_L xydl$, де L_{OABC} - контур квадрата, рівняння сторін якого: $x=\pm 1$, $y=\pm 1$

24. $\int\limits_L y^2dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ $0\le t\le 2\pi$

25. $\oint\limits_{L_{ABCD}} xydl$, де L_{ABCD} - контур прямокутника з вершинами: $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$

26. $\oint\limits_L ydl$, де L - дуга параболи $y^2=2x$, яка відсічена параболою $x^2=2y$

27. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(4,0)$, $B(6,1)$

28. $\oint\limits_L (x-y)dl$, де L - коло $x^2+y^2=2x$

29. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L - перша чверть кола $\rho=2$

30. $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де L_{AB} - відрізок прямої $A(1,1,1),B(2,2,2)$

$\boxed{2}$ Обчислити криволінійний інтеграл по дузі

1. $\oint\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,dl$, де L - коло: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$

2. $\int\limits_L xyzdl$, де L - чверть кола: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=0{,}25R^2$, яка лежить в першому октанті

3. $\int\limits_L arctg\dfrac{y}{x}dl$, де L - частина дуги спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, яка розташована всередені кола радіуса R з центром в полюсі

4. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L - дуга кривої: $x=acos\ t,\ y=asin\ t,\ z=bt,$ $0\le t\le 2\pi$

5. $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L - перший виток конічної гвинтової лінії: $x=tcos\ t,\ y=tsin\ t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$

6. $\int\limits_L (x+z)dl$, де L - дуга кривої: $x=t,\ y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)t^2, z=t^3,\ 0\le t\le 1$

7. $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, де L - крива: $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right), x\ge 0$

8. $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - перший виток лемніскати: $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$

9 $\int\limits_L xydl$, де L - перша чверть еліпса: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

10. $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - чверть кола: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, яка лежить в першому октанті

11 $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-z}$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(0,0,-2)$; $B(4,0,0)$

12. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$

13. $\oint\limits_L (x-y)dl$, де L - коло $x^2+y^2-ax=0$

14. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$; $0\le t\le 2\pi$

15. $\int\limits_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$; $0\le t\le 2\pi$

16. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де L - розгортка кола: $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$

17. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L_{AB} - відрізок прямої $A(0,-2)$, $B(4,0)$

18. $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=5\cos t,$

$y=5\sin t,\ z=t;\ 0\le t\le 2\pi$

19. $\oint\limits_{L_{OABC}} yzdl$, де L_{OABC} - контур прямокутника з вершинами: $O(0,0,0),$

$A(0,4,0),\ B(0,4,2), C(0,0,2)$

20. $\int\limits_L x^2 dl$, де L - дуга верхньої половини кола $x^2+y^2=a^2$

21. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=4\cos t,$

$y=4\sin t,\ z=3t;\ 0\le t\le 2\pi$

22. $\oint\limits_L ydl$, де L - дуга параболи $y^2=6x$, яка відсічена параболою $x^2=6y$

23. $\int\limits_{L_{AB}} xdl$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2$; $A(2,4)$, $B(1,1)$

24. $\int\limits_L (x+y)dl$, де L - перший виток лемніскати $\rho^2=9\cos 2\varphi$

25. $\oint\limits_L \left(z^2+y^2\right)dl$, де L - коло $z^2+y^2=4$

26. $\int\limits_L y^2 dl$, де L - перша арка циклоїди: $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t)$

27. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L - розгортка кола: $x=6(\cos t+t\sin t),$

$y=6(\sin t-t\cos t);\ 0\le t\le 2\pi$

28. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії: $x=9\cos t,$

$y=9\sin t,\ z=9t;\ 0 \le t \le 2\pi$

29. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2\right)^2 dl$, де L - коло: $x=3\cos t,\ y=3\sin t;\ 0 \le t \le 2\pi$

30. $\oint\limits_L y\,dl$, де L - дуга параболи $y^2=12x$, яка відсічена параболою $x^2=12y$

$\boxed{3}$ Обчислити криволінійний інтеграл по координатах

1. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2;$

$A(-1,1),\ B(1,1)$

2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} - дуга астроїди: $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t;$

$A(2,0),\ B(0,2)$

3. $\int\limits_{L_{OA}} \left(x^2+y^2\right)dx+2xy\,dy$, де L_{OA} - дуга кубічної параболи $y=x^3$;

$O(0,0),\ A(1,1)$

4. $\oint\limits_L (x+2y)dx+(x-y)dy$, де L - коло: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$

(додатний напрямок обходу контура)

5 $\oint\limits_L \left(x^2 y - x\right)dx+\left(y^2 x-2y\right)dy$, де L - дуга еліпса: $x=3\cos t,\ y=2\sin t$

(додатний напрямок обходу контура)

6. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx+x^2 y\,dy$, де L_{AB} - дуга еліпса: $x=\cos t,\ y=\alpha \sin t;$

$A(1,0)$, $B(0,2)$

7. $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx - x^2 dy$, де L_{OBA} - ламана: *O(0,0), B(2,0), A(2,1)*

8. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - y^2\right)dx + xydy$, де L_{AB} - відрізок прямої; *A(1,1),B(3,4)*

9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos ydx - \sin xdy$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(2\pi,-2\pi)$, $B(-2\pi,2\pi)$

10. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, де L_{AB} - відрізок прямої; *A(1,2), B(3,6)*

11. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$, де L_{AB} - дуга кубічної параболи $y=x^3$; *A(0,0), B(1,1)*

12. $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$, де L_{ABC} - ламана; *A(1,2), B(3,2), C(3,5)*

13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 zdz$, де L_{OB} - відрізок прямої; *O(0,0,0), B(-2,4,5)*

14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx + xdy$, де L_{OA} - дуга кола: *x=Rcos t, y=Rsin t; O(R,0), A(0,R)*

15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y^2=x$; *O(0,0), A(1,1)*

16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, де L_{AB} - відрізок прямої; *A(1,1,1), B(2,3,4)*

17. $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, де L_{AB} - дуга параболи $y^2=4-4x$; *A(1,0), B(0,2)*

18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx+(y-x)dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y=x^2$; $O(0,0)$, $B(1,1)$

19. $\int\limits_{L_{OB}} (xy-y^2)dx+xdy$, де L_{OB} - дуга параболи $y=x^2$; $O(0,0)$, $B(1,1)$

20. $\int\limits_{L_{AB}} xdy-ydx$, де L_{AB} - дуга астроїди: $x=2\cos^3 t; y=2\sin^3 t$; $A(2,0)$, $B(0,2)$

21. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)dx+\frac{1}{2}x^2dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y^2=4x$; $A(0,0)$, $B(1,2)$

22. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx+x^2ydy$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(1,0)$, $B(0,2)$

23. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx+y^2dy+z^2dz$, де L_{AB} - дуга одного витка гвинтової лінії: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$; $A(1,0,0)$, $B(1,0,4\pi)$

24. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx+xdy$, де L_{AB} - дуга лінії $y=\ln x$; $A(1,0)$, $B(e,1)$

25. $\oint\limits_{L} ydx+xdy$, де L - дуга еліпса: $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ (додатний напрямок обходу контура)

26. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx+x^2dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y=\frac{x^2}{4}$; $O(0,0)$, $A(2,1)$

27. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, де L_{AB} - ламана лінія $y=|x|$; $A(-1,1)$, $C(0,0)$, $B(2,2)$

28. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, де L_{OA} - відрізок прямої; $O(0,0,0)$, $A(2,1,-1)$

29. $\oint\limits_{L} xdy - ydx$, де L - контур трикутника з вершинами: $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ (додатний напрямок обходу контура)

30. $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2 + y\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$, де L_{ABC} - ламана; $A(2,0)$, $B(5,3)$, $C(5,0)$.

$\boxed{4}$ Обчислити криволінійний інтеграл по координатах

1. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, де L_{OA} - дуга параболи $y=2x^2$; $O(0,0)$, $A(1,2)$

2. $\int\limits_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, де L_{OBA} - ламана; $O(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $A(0,2,10)$

3. $\int\limits_{L} \frac{x}{y}dx + \frac{1}{y-a}dy$, де L - дуга циклоїди: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $\pi/6 \le t \le \pi/3$

4. $\int\limits_{L} yzdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz$, де L - дуга кривої: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=at/(2\pi)$, від точки перетину її з площиною $z=0$ до точки перетину її з площиною $z=a$

5. $\int\limits_{L_{OA}} 2xzdy - y^2dz$, де L_{OA} - дуга параболи $z = \frac{x^2}{4}$; $O(0,0,0)$, $A(2,0,1)$

6. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x - \frac{1}{y}\right)dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2$; $A(1,1)$,$B(2,4)$

7. $\int\limits_{L_{AB}} \cos z dx - \sin x dz$, де L_{AB} - відрізок прямої; $A(2,0,-2)$, $B(-2,0,2)$

8. $\int\limits_{L} y dx - x dy$, де L - чверть дуги кола: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, яка лежить в першому квадранті (додатний напрямок обходу контура)

9. $\int\limits_{L_{OA}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{y}dy$, де L_{OA} - дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$; $O(0,0)$, $A(1,2)$

10. $\oint\limits_{L} y dx - x dy$, де L - дуга еліпса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, (додатний напрямок обходу контура)

11. $\int\limits_{L_{OA}} x dy$, де L - дуга синусоїди $y=\sin x$; $O(0,0)$, $A(\pi,0)$

12. $\oint\limits_{L} x dy$, де L - контур трикутника, який утворюється прямими: $y=x$, $x=2$, $y=0$ (додатний напрямок обходу контура)

13. $\int\limits_{L} y^2 dx + x^2 dy$, де L - верхня половина еліпса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (від′ємний напрямок обходу контура)

14. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xy dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$; $O(0,0)$, $B(1,2)$

15. $\int\limits_{L} x dx + xy dy$, де L - дуга верхньої половини кола $x^2+y^2=2x$ (додатний напрямок обходу контура)

16. $\int\limits_{L}(x-y)dx+dy$, де L - дуга верхньої половини кола $x^2+y^2=R^2$ (додатний напрямок обходу контура)

17. $\oint\limits_{L}(x^2-y)dx$, де L - контур прямокутника, який утворився прямими: $x=0, y=0, x=1, y=2$ (додатний напрямок обходу контура)

18. $\int\limits_{L_{OB}} 4x\sin^2 ydx+y\cos 2xdy$, де L_{OB} - відрізок прямої; $O(0,0)$, $B(3,6)$

19. $\oint\limits_{L} ydx-xdy$, де L - дуга еліпса: $x=6\cos t, y=4\sin t$ (додатний напрямок обходу контура)

20. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx+x^2dy$, де L_{OA} - дуга параболи $x=2y^2$; $O(0,0)$, $A(1,2)$

21. $\oint\limits_{L}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, де L - контур трикутника з вершинами: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ (додатний напрямок обходу контура)

22. $\int\limits_{L_{ABO}}(xy-x)dx+\frac{x^2}{2}dy$, де L_{ABO} - ламана: $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(0,5;3)$ (додатний напрямок обходу контура)

23. $\int\limits_{L_{OA}}(xy-y^2)dx+xdy$, де L_{OA} - відрізок прямої; $O(0,0)$, $A(1,2)$

24. $\int\limits_{L_{OA}} xdy-ydx$, де L_{OA}-дуга кубічної параболи $y=x^3$; $O(0,0)$, $A(2,8)$

25. $\int\limits_{L_{AB}} 2y\sin 2x dx - \cos 2x dy$, де L_{AB} - будь-яка крива від точки $A(\pi/4,2)$ до точки $B(\pi/6,1)$

26. $\int\limits_{L_{OB}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy$, де L_{OB} - дуга параболи $y=4x^2$; $O(0,0)$, $B(1,4)$

27. $\int\limits_{L_{AB}} xy e^X dx + (x-1)e^X dy$, де L_{AB} - будь-яка крива від точки $A(0,2)$ до точки $B(1,2)$

28. $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx + (x-y)dy$, де L_{AB} - дуга параболи $y=x^2$; $A(-1,1)$, $B(1,1)$

29. $\int\limits_{L_{AB}} xdy$, де L_{AB} - дуга кола $x^2+y^2=a^2$; $x \ge 0$, $A(0,-a)$, $B(0,a)$

30. $\int\limits_{L} y^2 dx + x^2 dy$, де L - дуга еліпса: $x=5\cos t$, $y=2\sin t$, $y \ge 0$
(додатний напрямок обходу контура)

$\boxed{5}$ Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x,y)$, і знайти її

1. $(2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$
2. $\left(2xy^2\left(1 + x^2y^2\right)^{-1} - 3\right)dx + \left(2x^2y\left(1 + x^2y^2\right)^{-1} - 5\right)dy$
3. $-(0{,}5\cos 2y + y\sin 2x)dx + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)dy$
4. $\left(y^2e^{xy^2} + 3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 1\right)dy$
5. $\left((x+y)^{-1} + \cos x\cos y - 3x^2\right)dx + \left((x+y)^{-1} - \sin x\sin y + 4y\right)dy$
6. $\left(yx^{-1} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + xy^{-1} + 1\right)dy$

7. $\left(e^{x+y} - \cos x\right)dx + \left(e^{x+y} + \sin y\right)dy$

8. $\left(y : \sqrt{1-x^2y^2} + 2x\right)dx + \left(x : \sqrt{1-x^2y^2} + 6y\right)dy$

9. $\left(e^{xy} + xye^{xy} + 2\right)dx + \left(x^2e^{xy} + 1\right)dy$

10. $\left(ye^{xy} + y^2\right)dx + \left(xe^{xy} + 2xy\right)dy$

11. $\left(y\cos xy + 2x - 3y\right)dx + \left(x\cos xy - 3x + 4y\right)dy$

12. $(y\sin(x+y) + xy\cos(x+y - 9x^2)dx + (x\sin(x+y) +$
$+ xy\cos(x+y) + 2y)dy$

13. $\left(5y + \cos x + 6xy^2\right)dx + \left(5x + 6x^2y\right)dy$

14. $\left(y^2e^{xy} - 3\right)dx + e^{xy}(1+xy)dy$

15. $(1+\cos xy)ydx + (1+\cos xy)xdy$

16. $(y - \sin x)dx + \left(x - 2y\cos y^2\right)dy$

17. $\left(\sin 2x - x^{-2}y^{-1}\right)dx - x^{-1}y^{-2}dy$

18. $(x+y)x^{-1}y^{-1}dx + (y-x)y^{-2}dy$

19. $\left(20x^3 - 21x^3y + 2y\right)dx + \left(3 + 2x - 7x^3\right)dy$

20. $\left(ye^{xy} - 2\sin x\right)dx + \left(xe^{xy} + \cos y\right)dy$

21. $y\left(e^{xy} + 5\right)dx + x\left(e^{xy} + 5\right)dy$

22. $\left(x - \dfrac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2 - y^2} - y\right)dy$

23. $e^{x-y}(1 + x + y)dx + e^{x-y}(1 - x - y)dy$

24. $(x\ln y + y)x^{-1}dx + (y\ln x + x)y^{-1}dy$

25. $\left(3x^2 - 2xy + y\right)dx + \left(x - x^2 - 3y^2 - 4y\right)dy$

26. $\left(2xe^{x^2-y^2} - \sin x\right)dx + \left(\sin y - 2ye^{x^2-y^2}\right)dy$

27. $\left(y : \sqrt{1-x^2y^2} + x^2\right)dx + \left(x : \sqrt{1-x^2y^2} + y\right)dy$

28. $(1-y)x^{-2}y^{-1}dx + (1-2x)x^{-1}y^{-2}dy$

29. $\left((y-1)^{-1} - y(x-1)^{-2} - 2\right)dx + \left((x-1)^{-1} - x(y-1)^{-2} + 2y\right)dy$

30. $\left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx + \left(2xy - x^2 - 3y^2\right)dy$

$\boxed{6}$ Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

1. $x^{-1}dy - y \cdot x^{-2} \cdot dx = 0$
2. $(x : (x^2 + y^2))dy - (y : (x^2 + y^2))dx = 0$
3. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$
4. $xdx + ydy + (ydx - xdy) : (x^2 + y^2) = 0$
5. $(x : \sqrt{x^2 - y^2} - 1)dx - y : \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = 0$
6. $2x(1 - e^y) \cdot (1 + x^2)^{-2}dx + e^y(1 + x^2)^{-1}dy = 0$
7. $2x \cdot y^{-3}dx + (y^2 - 3x^2) \cdot y^{-4}dy = 0$
8. $(1 - e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - x : y)dy = 0$
9. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$
10. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$
11. $(x : \sqrt{x^2 + y^2} + x^{-1} + y^{-1})dx + (y : \sqrt{x^2 + y^2} + y^{-1} - y^{-2})dy = 0$
12. $(3x^2 tgy - 2y^3 \cdot x^{-3})dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3y^2 \cdot x^{-2})dy = 0$
13. $(2x + (x^2 + y^2) : (x^2y))dx = (x^2 + y^2)x^{-1}y^{-2}dy$
14. $(\sin 2x \cdot y^{-1} + x)dx + (y - \sin^2 x : y^{-2})dy = 0$
15. $3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$
16. $(xdx + ydy) : \sqrt{x^2 + y^2} + (xdy - ydx) : x^2 = 0$
17. $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$
18. $y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 - y^2 - a^2)dx = 0$
19. $(\sin y + y\sin x + x^{-1})dx + (x\cos y - \cos x + y^{-1})dy = 0$
20. $(y + \sin x \cdot \cos^2 yx) : \cos^2 yxdx + (x\sec^2 xy - \sin y)dy = 0$
21. $(3x^2 - y\cos xy + y)dx + (x - x\cos xy)dy = 0$
22. $(12x^3 - y^{-1} \cdot e^{x/y})dx + (16y + xy^{-2} \cdot e^{x/y})dy = 0$
23. $(y : (2\sqrt{xy}) + 2xy\sin x^2y + 4)dx + (x : (2\sqrt{xy}) + x^2 \sin x^2y)dy = 0$

24. $y \cdot 3^{xy} \ln 3dx + (x \cdot 3^{xy} \ln 3 - 3)dy = 0$

25. $((x-y)^{-1} + 3x^2y^7)dx + (7x^3y^6 - (x-y)^{-1})dy = 0$

26. $(2y \cdot x^{-3} + y\cos xy)dx + (x^{-2} + x\cos xy)dy = 0$

27. $(y : \sqrt{1-x^2y^2} - 2x)dx + x : \sqrt{1-x^2y^2}\,dy = 0$

28. $(5x^4y^4 + 28x^6)dx + (4x^5y^3 - 3y^2)dy = 0$

29. $(2xe^{x^2+y^2} + 2)dx + (2ye^{x^2+y^2} - 3)dy = 0$

30. $(3y^3\cos 3x + 7)dx + (3y^2\sin 3x - 2y)dy = 0$

$\boxed{7}$ Геометричне та фізичне застосування криволінійних інтегралів

1. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y=(e^x+e^{-x}):2,\ 0\le x \le 1$.
2. Обчислити моменти інерції відносно вісей координат відрізка однорідної прямої $2x+y=1$, який лежить між ними.
3. Знайти координати центра мас чверті однорідного кола $x^2+y^2=a^2$, яка знаходиться в першому квадранті
4. Обчислити масу дуги кривої $y=\ln x$, від точки $A\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\ln 3\right)$ до точки $B\left(\sqrt{8};\frac{1}{2}\ln 8\right)$, якщо щільність дуги в кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.
5. Обчислити момент інерції відносно вісі Оу дуги полукубічної параболи $y^2 = x^3$ від точки $O(0,0)$ до точки $A\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$.
6. Обчислити момент інерції відносно початку координат контура квадрата, який має сторони $x=\pm a;\ y=\pm a$. Щільність квадрата – стала.
7. Обчислити довжину дуги кривої $x = 2 - \frac{t^4}{4},\ y = \frac{t^6}{6}$, яка обмежена точками перетину її з вісями координат.
8. Обчислити координати центра мас однорідного полукола $x^2+y^2=4$, симетричного відносно вісі Ox.

9. Обчислити координати центра мас однорідної дуги одної арки циклоїди $x=t-sin\ t,\ y=1-cos\ t$.
10. Обчислити момент інерції відносно початку координат відрізка прямої, сталої щільності, який лежить між точкою $A(2,0)$ і точкою $B(0,1)$.
11. Обчислити координати центра мас однорідного контура сферичного трикутника $x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$
12. Обчислити статичні моменти відносно координатних вісей дуги астроїди $x=2cos^3t,\ y=2sin^3t,$яка розташована в першому квадранті.
13. Обчислити масу відрізка прямої $y=2-x$, який лежить між вісями координат, якщо лінійна щільність в будь-якій його точці пропорціональна квадрату її абсциси, а в точці $(2,0)$ дорівнює 4.
14. Найти статичний момент відносно вісі Oy однорідної дуги першого витка лемніскати Бернулі $\rho = a\sqrt{cos\ 2\varphi}$.
15. Знайти роботу сили $\bar{F} = x\bar{i} + (x+y)\bar{j}$ при переміщенні точечної маси m по дузі еліпса $x^2/16+y^2/9=1$.
16. Обчислити момент інерції відносно вісі Oz однорідної дуги першого витка гвинтової лінії $x=2cos\ t,\ y=2sin\ t,\ z=t.$
17. Обчислити масу кривої $\rho = 3\,sin\,\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, якщо щільність в будь-якій її точці пропорціональна відстані до полюса, а при $\varphi=\pi/4$ дорівнює 3.
18. Обчислити координати центра мас однорідної дуги першого витка гвинтової лінії $x=cos\ t,\ y=sin\ t,\ z=2t.$
19. Обчислити моменти інерції відносно координатних вісей дуги чверті кола $x=2cos\ t,\ y=2sin\ t,$ розташованої в першому квадранті.
20. Обчислити координати центра мас дуги першого витка гвинтової лінії $x=2cos\ t,\ y=2sin\ t,\ z=t,$ якщо щільність в будь-якій її точці пропорціональна аплікаті точки і в точці $t=\pi$ дорівнює 1.
21. Обчислити масу дуги чверті еліпса $x^2+y^2/4=1,$ розташованого в першому квадранті, якщо лінійна щільність в будь-якій її точці дорівнює добутку координат цієї точки.

22. Обчислити роботу сили $\bar{F}=(x\text{-}y)\bar{i}+x\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж контура квадрата, утвореного прямими $x=\pm a$, $y=\pm a$.

23. Обчислити статичний момент відносно вісі Ox однорідної дуги ланцюгової лінії $y=(e^x+e^{-x}):2,\ 0\le x\le 0{,}5$.

24. Обчислити роботу сили $\bar{F}=xy\bar{i}+(x+y)\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої $y=x$ від точки $(0,0)$ доточки $(1,1)$.

25. Обчислити статичний момент відносно вісі Ox однорідної дуги кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

26. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $x=3(t\text{-}\sin t)$, $y=3(1\text{-}\cos t)$.

27. Обчислити роботу сили $\bar{F}=(x+y)\bar{i}\ -\ x\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки від початку координат в точку $(1,1)$ вздовж параболи $y=x^2$.

28. Обчислити роботу сили $\bar{F}=y\bar{i}+(x+y)\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ у додатньому напрямку.

29. Обчислити момент інерції відносно осей координат однорідного відрізка прямої $y=2x$ від точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$.

30. Обчислити роботу сили $\bar{F}=(x\text{-}y)\bar{i}+2y\bar{j}$ при переміщенні матеріальної точки від початку координат в точку $(1,\text{-}3)$ вздовж параболи $y=\text{-}3x^2$.

$\boxed{8}$ Дана функція $u=u(x,y,z)$ і точки M_1 і M_2. Обчислити:

похідну цієї функції в точці M_1 за напрямом вектора $\overline{M_1M_2}$;

$\overrightarrow{grad}\ u(M_1)$

1.	$u=x^2y+y^2z+z^2x,$	$M_1(1,-1,2),$	$M_2(3,4,-1)$
2.	$u=5xy^3z^2,$	$M_1(2,1,-1),$	$M_2(4,-3,0)$
3.	$u=\ln(x^2+y^2+z^2),$	$M_1(-1,2,1),$	$M_2(3,1,-1)$

4. $u = z \cdot exp\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$ $M_1(0,0,0),$ $M_2(3,-4,2)$

5. $u = ln(xy + yz + xz),$ $M_1(-2,3,-1),$ $M_2(2,1,-3)$

6. $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2},$ $M_1(1,1,1),$ $M_2(3,2,1)$

7. $u = x^2 y + xz^2 - 2,$ $M_1(1,1,-1),$ $M_2(2,-1,3)$

8. $u = x \cdot e^y + ye^x - z^2,$ $M_1(3,0,2),$ $M_2(4,1,3)$

9. $u = 3xy^2 + z^2 - xyz,$ $M_1(1,1,2),$ $M_2(3,-1,4)$

10. $u = 5x^2 yz - xy^2 z + yz^2,$ $M_1(1,1,1),$ $M_2(9,-3,9)$

11. $u = x : (x^2 + y^2 + z^2),$ $M_1(1,2,2),$ $M_2(-3,2,-1)$

12. $u = y^2 z - 2xyz + z^2,$ $M_1(3,1,-1),$ $M_2(-2,1,4)$

13. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz,$ $M_1(1,-1,2),$ $M_2(5,-1,4)$

14. $u = ln(1 + xy^2 + z^2),$ $M_1(1,1,1),$ $M_2(3,-5,1)$

15. $u = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5,$ $M_1(1,2,1),$ $M_2(-3,-2,6)$

16. $u = ln(x^3 + y^3 + z + 1),$ $M_1(1,3,0),$ $M_2(-4,1,3)$

17. $u = x - 2y + e^z,$ $M_1(-4,-5,0),$ $M_2(2,3,4)$

18. $u = x^y - 3xyz,$ $M_1(1,-1,2),$ $M_2(3,4,-1)$

19. $u = 3x^2 yz^3,$ $M_1(1,-1,2),$ $M_2(3,4,-1)$

20. $u = exp\left(xy + z^2\right),$ $M_1(-5,0,2),$ $M_2(2,4,-3)$

21. $u = x^{yz},$ $M_1(3,1,4),$ $M_2(1,-1,-1)$

22. $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right),$ $M_1(1,2,-1),$ $M_2(0,-1,3)$

23. $u = \left(x - y\right)^z,$ $M_1(1,5,0),$ $M_2(3,7,-2)$

24. $u = x^2 y + y^2 z - 3z,$ $M_1(0,-2,-1),$ $M_2(12,-5,0)$

25. $u = 10 : (x^2 + y^2 + z^2 + 1),$ $M_1(-1,2,-2),$ $M_2(2,0,1)$

26. $u = ln(1 + x^2 - y^2 + z^2),$ $M_1(1,1,1),$ $M_2(5,-4,8)$

27. $u = xy^{-1} + yz^{-1} - zx^{-1},$ $M_1(-1,1,1),$ $M_2(2,3,4)$

28. $u = x^3 + xy^2 - 6xyz,$ $M_1(1,3,-5),$ $M_2(4,2,-2)$

29. $u = xy^{-1} - yz^{-1} - xz^{-1},$ $M_1(2,2,2),$ $M_2(-3,4,1)$

30. $u = exp\left(x - yz\right),$ $M_1(1,0,3),$ $M_2(2,-4,5)$

$\boxed{9}$ Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до поверхні S у точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

1. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,$ $M_o(2,1,-1)$
2. $S: x^2 + z^2 - 4y^2 = -2xy,$ $M_o(-2,1,2)$
3. $S: x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7,$ $M_o(1,2,1)$
4. $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8,$ $M_o(-1,1,2)$
5. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,$ $M_o(2,1,-1)$
6. $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0,$ $M_o(2,1,-1)$
7. $S: x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46,$ $M_o(1,2,-3)$
8. $S: x^2 + y^2 - xz - yz = 0,$ $M_o(0,2,2)$
9. $S: x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z = 2,$ $M_o(1,1,1)$
10. $S: y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z,$ $M_o(1,1,1)$
11. $S: z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y,$ $M_o(-1,-1,-1)$
12. $S: z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y,$ $M_o(1,-1,1)$
13. $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,$ $M_o(-1,1,1)$
14. $S: x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13,$ $M_o(3,1,2)$
15. $S: 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,$ $M_o(1,-2,1)$
16. $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2,$ $M_o(2,1,0)$
17. $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3,$ $M_o(1,2,1)$
18. $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,$ $M_o(3,1,4)$
19. $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,$ $M_o(1,1,2)$
20. $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5,$ $M_o(-2,1,0)$
21. $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11,$ $M_o(1,4,-1)$
22. $S: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8,$ $M_o(0,2,0)$
23. $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0,$ $M_o(-1,-1,1)$
24. $S: x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z,$ $M_o(1,0,1)$

25. $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0,$ $M_o(1,-1,1)$

26. $S: x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8,$ $M_o(1,1,0)$

27. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10,$ $M_o(-1,1,3)$

28. $S: z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15,$ $M_o(-1,3,4)$

29. $S: z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10,$ $M_o(-7,1,8)$

30. $S: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1,$ $M_o(1,-1,2)$

Додаток

Комплексні числа

1. Спростити: $2i^{121}-3i^{30}+7i^{14}-i^{3}$.

Рішення:

Використовуємо формули:

$$i^{4k}=1;\ \ i^{4k+1}=i;\ \ i^{4k+2}=-1;\ \ i^{4k+3}=-i,$$

де $k\in N$.

$$i^{121}=i^{4\cdot 30+1}=i;\ \ i^{30}=i^{28+2}=i^{4\cdot 7+2}=-1;$$

$$i^{14}=i^{12+2}=i^{4\cdot 3+2}=-1;\ \ i^{3}=-i.$$

Тоді

$$2i^{121}-3i^{30}+7i^{14}-i^{3}=2i-3(-1)+7(-1)-(-i)=2i+3-7+i=3i-4=$$

$$=2i+3-7+i=3i-4=-4+3i.$$

2. Спростити: $(2-3i)(4+7i)-(1+i)(2+3i)-i^{2}$.

Рішення:

1) $(2-3i)(4+7i)=8-12i+14i-21i^{2}=29+2i$;

2) $(1+i)(2+3i)=2+2i+3i+3i^{2}=-1+5i$;

3) $(2-3i)(4+7i)-(1+i)(2+3i)-i^{2}=(29+2i)-(-1+5i)-i^{2}=$
$=30-3i+1=31-3i$.

3. Виконати дії:

а) $\dfrac{9-7i}{2-3i}+(5+i)(15-3i)-(1+i)(1-i)$;

б) $(1+2i)^{2}-(1-i)^{2}+(1+i)^{3}$.

Рішення:

а) 1) $\dfrac{9-7i}{2-3i}=\dfrac{(9-7i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{18-14i+27i+21}{4+9}=\dfrac{39+13i}{13}=3+i$,

2) $(5+i)(15-3i)=75+15i-15i+3=78$;

3) $(1+i)(1-i)=1+1=2$;

4) $3+i+78-2=3+i+76=79+i$;

б) 1) $(1+2i)^{2}=1+4i-4=-3+4i$;

2) $(1-i)^{2}=1-2i-1=-2i$;

3) $(1+i)^{3}=1+3i-3+i^{3}=-2+2i$;

4) $(1+2i)^2-(1-i)^2+(1+i)^3=-3+4i+2i-2+2i=-5+8i$.

4. Розв'язати рівняння $x+yi=(1+2i)^2$.

Рішення:

$$(1+2i)^2=1+4i-4=-3+4i$$

$$x+yi=-3+4i\Rightarrow x=-3, y=4 .$$

5. Знайти корені рівняння:

а) $x^2-x+1=0$; б) $x^2+4=0$; в) $x^2-2x+2=0$.

Рішення:

а) $D=(-1)^2-4\cdot 1=-3$; $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3i^2}}{2}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

б) $x^2=-4$; $x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$;

в) $D=(-1)^2-2=-1$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{-1}}{1}=1\pm i$.

6. Знайти корені рівняння: $x^4=16$.

Рішення:

$$x^4=16\Rightarrow x^4-16=0\Rightarrow(x^2-4)(x^2+4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-2)(x+2)(x^2+4)=0\Rightarrow(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0 ;$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm 2, \\ x_{3,4}=\pm\sqrt{-4} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm 2, \\ x_{3,4}=\pm 2i. \end{array}\right.$$

7. Знайти корені рівнянь:

а) $x^4+5x^2+4=0$;

б) $x^3+8=0$.

Рішення:

а) $x^4+5x^2+4=0$. Позначимо $x^2=t$. Тоді $t^2+5t+4=0\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-4 \\ t_2=-1 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x^2=-4 \\ x^2=-1 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm 2i, \\ x_{3,4}=\pm i. \end{array}\right.$$

б) $x^3+8=0\Rightarrow(x+2)(x^2-2x+4)=0\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x_2-2x+4=0 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=-2 \\ (x-1)^2+3=0 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=-2, \\ x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}i. \end{array}\right.$$

8. Записати в тригонометричній формі комплексне число $z=2+5i$.

Рішення: Знаходимо модуль комплексного числа

$$r=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}\approx 5{,}385 .$$

Знаходимо головне значення аргументу $tg\varphi=\frac{5}{2}=2{,}5\Rightarrow\varphi=68^0 12'$.

Отже, $z=5{,}385(\cos 68^0 12'+i\sin 68^0 12')$.

9. Представити числа $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$, $z_3=1+i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі, а потім знайти комплексне число $\frac{z_1}{z_2\cdot z_3}$.

Рішення:

$r_1=|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $tg\varphi_1=1$, $\varphi_1=\arg z_1=\frac{\pi}{4}$; $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$r_2=|z_2|=\sqrt{3+1}=2$, $tg\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi_2=\arg z_2=\frac{\pi}{6}$; $z_2=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$r_3=|z_3|=\sqrt{3+1}=2$, $tg\varphi_3=\sqrt{3}$, $\varphi_3=\arg z_3=\frac{\pi}{3}$; $z_3=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$.

Отже, $z_2\cdot z_3=2\cdot 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_1}{z_2\cdot z_3}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}(1-i).$$

10. Знайти всі значення $\sqrt[3]{8+i}$.

Рішення. Запишемо комплексне число в тригонометричній формі
$r=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}\approx 8{,}062$.

$\varphi=\arg z=tg\frac{1}{8}=7^0 6'$, тобто

$$\sqrt[3]{8+i}=\sqrt[3]{8{,}062}\cdot\left(\cos\frac{7^0 6'+360^0 k}{3}+i\sin\frac{7^0 6'+360^0 k}{3}\right)=$$

$$=2{,}005(\cos(2^0 22'+120^0 k)+i\sin(2^0 22'+120^0 k)) .$$

Якщо $k=0$, то $\omega_0=2{,}0052(\cos 2^0 22'+i\sin 2^0 22')$,

$k=1$, то $\omega_1=2{,}0052(\cos 122^0 22'+i\sin 122^0 22')$,

$k=2$, то $\omega_2=2{,}0052(\cos 242^0 22'+i\sin 242^0 22')$.

Отже,
$\omega_0=2{,}00334+0{,}0828i$; $\omega_1=-1{,}0734+1{,}7120i$; $\omega_2=-0{,}9300-1{,}7764i$.

11. Знайти корені двочленного рівняння $\omega^5+32i=0$.

Рішення: Перепишемо рівняння так $\omega^5 = -32i$. Число $-i$ представимо в тригонометричній формі:

$\omega^5 = 32(cos(-90^0) + i\,sin(-90^0))$ або $\omega = 2\sqrt[5]{cos(-90^0) + i\,sin(-90^0)}$,

тобто

$$\omega = 2\left(cos\frac{-90^0 + 360^0 k}{5} + i\,sin\frac{-90^0 + 360^0 k}{5} \right) =$$

$$= 2(cos(-18^0 + 72^0 k) + i\,sin(18^0 + 72^0 k)).$$

Якщо $k = 0$, то $\omega_0 = 2(cos(-18^0) + i\,sin(-18^0)) = 1{,}9022 - 0{,}6180i$,

$k = 1$, то $\omega_1 = 2(cos\,54^0 + i\,sin\,54^0) = 1{,}1756 + 0{,}6180i$,

$k = 2$, то $\omega_2 = 2(cos\,126^0 + i\,sin\,126^0) = -1{,}1756 + 1{,}6180i$,

$k = 3$, то $\omega_3 = 2(cos\,198^0 + i\,sin\,198^0) = -1{,}9022 - 0{,}6180i$,

$k = 4$, то $\omega_4 = 2(cos\,270^0 + i\,sin\,270^0) = -2i$.

12. Обчислити $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{12}$.

Рішення: Представимо число $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ в тригонометричній формі:

$$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1;$$

$$tg\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{11\pi}{6}, \text{ тому що } cos\,\varphi > 0,\ sin\varphi < 0.$$

За формулою Муавра маємо:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{12} = \left(cos\frac{11}{6}\pi - i\,sin\frac{11}{6}\pi \right)^{12} = cos\,22\pi + i\,sin\,22\pi = 1.$$

13. Представити в тригонометричній і показниковій формах число $z = -3$.

Рішення: По визначенню $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$. У даному випадку маємо:

$r = |z| = |-3| = 3$, $argz = \varphi = \pi$, тому $z = 3(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$ і $z = 3e^{i\pi}$.

14. Представити число $z + \bar{z}$ у тригонометричній і показниковій формах, якщо $z = (3 + 2i)e^{5i}$.

Рішення: Перетворимо число z, використовуючи формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

$$z = (3+2i)(\cos 5 + i\sin 5) = (3\cos 5 - 2\sin 5) + i(2\cos 5 + 3\sin 5) .$$

Тоді $\bar{z} = (3\cos 5 - 2\sin 5) - i(2\cos 5 + 3\sin 5)$.

Відкіля $z + \bar{z} = 2(3\cos 5 - 2\sin 5)$ - дійсне число, його модуль

$$|z+\bar{z}| = 2|3\cos 5 - 2\sin 5|, \text{ а } arg(z+\bar{z}) = 0 .$$

З'ясуємо знак дійсного числа $3\cos 5 - 2\sin 5$. Тому що кут 5 радіан має градусну міру, рівну приблизно $286^0 30'$, то $\cos 5 > 0$, а $\sin 5 < 0$, тому $z + \bar{z} = 2(3\cos 5 - 2\sin 5) > 0$. Тоді $(6\cos 5 - 4\sin 5)(\cos 0 + i\sin 0)$ - тригонометрична форма числа $z + \bar{z}$, а $(6\cos 5 - 4\sin 5)e^{0i}$ - показникова.

15. Записати в показниковій формі число

$$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12})}{1-i} .$$

Рішення: Кожне з чисел $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_3 = 1 - i$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$ представимо в показниковій формі:

$$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}, \; z_3 = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}, \; z_2 = e^{-i\frac{\pi}{12}},$$

тоді

$$z = \frac{z_1 z_2}{z_3} = \frac{2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2} e^{i\pi} .$$

16. Записати всі значення кореня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показниковій формі.

Рішення: $r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3^2}\right) + 1^2} = 2$; $\varphi = arg\, z = tg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$,

маємо $\omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[4]{2} e^{i(12k+1)\frac{\pi}{24}}$, де $k = 0, 1, 2, 3.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М. "Наука", 1981, 720 с.
2. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. К. "Либідь", 1996, 40 с.
3. Кулініч Г.Л. і ін. Вища математика. Книга 1. К. "Либідь", 1994, 310с.; 1995, 370 с.
4. Кулініч Г.Л. і ін. Вища математика. Книга 2. К. "Либідь", 1996, 336с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Київ, «Видавництво А.С.К.», 2003. – 648 с.
6. Станішевський С.О. Вища математика. Конспект лекцій. Модуль 3. Харків, ХНАМГ. – 2009. – 84 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

СТАНІШЕВСЬКИЙ Степан Олександрович,
ПЕЧЕНІЖСЬКИЙ Юрій Євгенович

Завдання з вищої математики (модуль 3) і приклади їх розв'язання (для самостійної роботи студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2011, поз. 159 М

Підп. до друку 16.05.2011 р.
Друк на ризографі
Зам. №
Формат 60 x 84 1/16
Ум. друк. арк. 6,4
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011