МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної роботи
з курсу

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

*(для студентів 3 курсу заочної форми навчання бакалаврів
за галуззю знань 0305 «Економіка і підприємництво»
напрями підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»,
6.030509 «Облік і аудит»)*

Харків
ХНАМГ
2011

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з курсу «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 3 курсу заочної форми навчання бакалаврів за галуззю знань 0305 «Економіка і підприємництво» напрями підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік і аудит») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: О. О. Воронков. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 36 с.

Укладач ас. О.О. Воронков

Рекомендовано кафедрою Економіки підприємств міського господарства, протокол № 1 від 31.08.10 р.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Вивчення дисципліни «Економіко-математичне моделювання» передбачено освітньо-професійною програмою підготовки бакалавра за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік і аудит». Зміст дисципліни ґрунтується на необхідності підготовки фахівців, що мають теоретичну базу та практичні навички з використання математичних методів обґрунтування рішень в управлінні економічними системами.

Метою вивчення дисципліни «Економіко-математичне моделювання» є формування системи базових знань в області методології постановки задач, побудови економіко-математичних моделей та методів їх розв'язання і аналізу. В результаті вивчення курсу студенти повинні оволодіти прийомами з побудови економіко-математичних оптимізаційних та економетричних моделей а також методами розв'язання задач різної складності.

У процесі вивчення дисципліни «Економіко-математичне моделювання» студент повинен виконати контрольну роботу, яка містить два завдання. Перше полягає у розв’язанні задачі на тему «Лінійне програмування». Пропонована задача є найпростішою задачею виробничого планування. При розв’язанні задачі треба застосувати два методи - геометричний і симплексний, скласти двоїсту задачу і визначити тіньові оцінки ресурсів, далі надати економічну інтерпретацію елементам розв’язків прямої та двоїстої задач. Друге завдання потребує побудови економетричної моделі. Для його виконання треба оцінити вигляд кореляційної залежності, визначити параметри рівняння регресії і охарактеризувати їх економічний зміст, оцінити силу лінійної залежності і впливу досліджуваного фактору, перевірити статистичну значущість отриманих результатів - виконати перевірку адекватності моделі та встановити довірчі межі помилки апроксимації. Через великий обсяг обчислень при побудові і аналізі економетричних моделей рекомендується використовувати сучасні пакети прикладних статистичних програм, зокрема STATISTICA, SPSS, SAS, Econometric Views, Mesosaur-Econometric, Excel та ін.

У методичних вказівках наведено основні теоретичні положення і розглянуті на прикладах характерні етапи розв’язання завдань.

Контрольна робота повинна бути оформленою відповідно до встановлених вимог, обов'язково відповідати номеру варіанта, містити умови розв'язуваних завдань, необхідні розрахунки та пояснення і висновки.

Номер варіанта контрольної роботи треба вибирати за останньою цифрою номера залікової книжки студента. Контрольна робота повинна бути виконана в термін, призначений навчальним графіком. Наприкінці роботи необхідно навести літературу, якою студент користувався при розв’язанні завдань.

На титульному аркуші треба чітко написати назву дисципліни, варіант завдання, прізвище, ім’я та по батькові студента, вказати курс, спеціальність і факультет.

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1. Найпростіша задача виробничого планування

Найпростіша задача виробничого планування (задача про оптимальне використання ресурсів) за класифікацією належить до задач лінійного програмування (ЗЛП). Математичну модель задачі лінійного програмування завжди записують у двох формах – у ***загальній формі*** (ЗЗЛП) і ***канонічній формі*** (КЗЛП).

Нагадаємо визначення:

Функцію

$$L = \Sigma c_j x_j \tag{1.1}$$

називають цільовою функцією (або лінійною формою) задачі лінійного програмування (ЗЛП), а умови

$$\Sigma a_{ij} x_j \le b_i; \quad (i=1,m;\ j=1,n), \qquad x_j \ge 0 \tag{1.2}$$

- обмеженнями задачі лінійного програмування.

Загальною задачею лінійного програмування називають задачу, що полягає у визначенні мінімальної або максимальної величини функції (1.1) при виконанні умов (1.2).

Приклад 1.1. Для виготовлення двох видів виробів *A* і *B* використовують три види сировини. На виробництво одиниці виробу *A* потрібно витратити сировини першого типу *4 од.*, другого – *3 од.* і третього - *3 од.* На виробництво одиниці виробу *B* потрібно витратити сировини першого типу *3 од.*, другого – *4 од.* і третього – *5 од*. Виробництво забезпечене сировиною першого типу в кількості *440 од.*, другого – *393 од.*, третього – *450 од.* Дохід від реалізації одиниці готового виробу *A* дорівнює *6 грош.од.*, виробу *B – 5 грош.од.*

Скласти план виробництва виробів так, щоб дістати найбільший дохід від реалізації виробів.

Умову задачі зведемо у таблицю 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

Сировина	***A***	***B***	***Запаси***
$\mathbf{S_1}$	4	3	440
$\mathbf{S_2}$	3	4	393
$\mathbf{S_3}$	3	5	450

Складемо математичну модель задачі, для чого позначимо кількість виробів *A*, яку необхідно виготовити, $\boldsymbol{x_1}$, а виробів *B* – $\boldsymbol{x_2}$. Запаси сировини обмежені нерівностями

$$4x_1+3x_2 \le 440,$$

$$3x_1+4x_2 \le 393,$$

$$3x_1+5x_2 \le 450.$$

Дохід від реалізації виробів *A* і *B* виразимо рівністю

$$L = 6x_1 + 5x_2 \Rightarrow max.$$

Отже, треба знайти такі x_1 і x_2, які задовольняють нерівностям і перетворюють на максимум цільову функцію *L*.

Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

У тому випадку, коли ЗЗЛП містить дві змінні x_1 і x_2, множину її допустимих планів можна зобразити на координатній площині й дістати розв'язок за графічним методом. Графічне розв'язання ЗЗЛП носить ілюстративний характер, але основний зміст і термінологія розповсюджуються на задачі великої розмірності. Пару значень змінних x_1 і x_2 зображують точкою з координатами (x_1, x_2). Оскільки змінні x_1, x_2 повинні бути не меншими за нуль, їх припустимі значення лежать тільки вище осі Ox_1, (на якій $x_2 = 0$) і правіше осі Ox_2 (на якій $x_1 = 0$). Відповідно до основних теорем лінійного програмування цільова функція L перетворюється на максимум в одній з вершин багатокутника припустимих розв’язків. Такою вершиною є вершина, що найбільш віддалена від початку координат.

Приклад 1.2. Звернемося до моделі, отриманої у прикладі 1.1 і побудуємо на площині $x_1 0 x_2$ область припустимих рішень ЗЛП або переконаємося, що вона не існує (рис. 1.1). Розв’язком кожної нерівності є напівплощина, що обмежує область припустимих рішень задачі. Покладемо в першому рівнянні $x_1 = 0$, отримаємо рівняння прямої лінії, перша точка якої

$3x_2 = 440, \quad x_2 = 440/3 = 147$ має координати (0, 147),

друга точка $4x_1 = 440, x_1 = 440 / 4 = 110$ має координати (110, 0).

Аналогічно отримаємо координати точок для другого обмеження (131, 0) і (0; 98,25) та для третього обмеження (150, 0) і (0, 90).

Отриманий багатокутник є областю припустимих рішень, тобто будь-яка точка його площини задовольняє нерівностям. Її називають *припустимим планом*. Зазначимо, що цих рішень - нескінченна множина, тому що будь-яка пара значень вільних змінних, узята з ОПР, задовольняє системі нерівностей.

Для визначення вершини, де цільова функція L перетворюється на максимум, геометричним методом побудуємо градієнт цільової функції - вектор $grad\, L = c\{6,5\}$. Далі побудуємо лінію рівня, що відповідає $L = 0$; вона проходить крізь початок координат і перпендикулярна вектору c. Цю лінію називають опорною прямою. Переміщуючи опорну пряму в напрямку вектора $c=\{6,5\}$, визначимо, що найвіддаленою вершиною многокутника є вершина *A*, у якій перетинаються прямі нерівностей 1 і 2. Визначимо її координати:

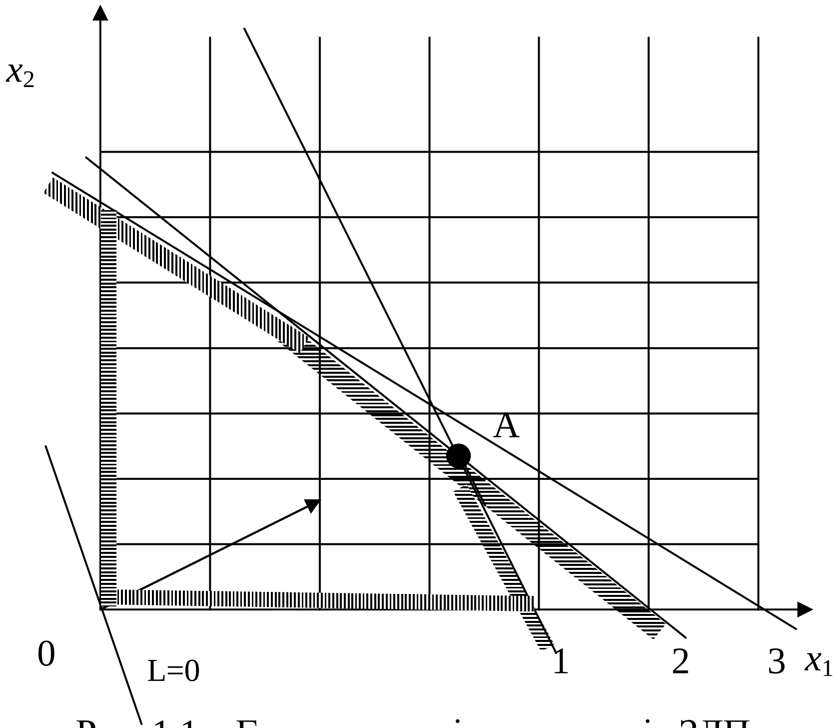

Рис. 1.1 – Геометрична інтерпретація ЗЛП

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+3x_2 &= 440 \\ 3x_1+4x_2 &= 393 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & x_1 = 110-\frac{4}{3}x_2 \\ & 330-\frac{9}{4}x_2+4x_2=393 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & x_1 = 110-3*\frac{36}{4}=83 \\ & \frac{7}{4}x_2=63, \quad x_2=63*\frac{4}{7}=36 \end{aligned}\right\}.$$

Отже, для одержання максимального доходу необхідно виробити 83 вироби *A* та 36 виробів *B*. Цільова функція при цьому досягне значення

$$L_{max} = 6 * 83 + 5 * 36 = 498 + 180 = 678 \text{ грош.од.}$$

Канонічна форма ЗЛП

Переважна більшість методів розв'язання задач лінійного програмування призначена для канонічних задач. Тому початковий етап розв'язання будь-якої загальної ЗЛП завжди пов'язаний з приведенням її до еквівалентної КЗЛП.

Канонічною називають задачу лінійного програмування, що полягає у встановленні *екстремального* значення функції

$$L = \Sigma c_j x_j \tag{1.3}$$

за умов

$$\Sigma a_{ij}x_{ij} = b_i \quad \text{і} \quad x_j \geq 0. \tag{1.4}$$

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до форми ***канонічної задачі*** (КЗЛП). Зазначимо, що не є принциповим, що треба шукати для цільової функції – максимум або мінімум. Випадок, коли L треба перетворити на максимум, легко звести до знаходження мінімуму, якщо змінити знак L на зворотний (мінімізувати не L, а $L'= -L$), тому що

$$min\ f(x_1, x_2,\ldots,x_n) = max[-f(x_1, x_2,\ldots,x_n)]$$

і навпаки.

Від умов-нерівностей можна перейти до умов-рівностей шляхом введення нових додаткових змінних. Причому кількість додаткових змінних дорівнює кількості нерівностей m. У КЗЛП кількість рівнянь m, що задають множину D, менша або дорівнює кількості змінних n задачі ($m \leq n$). У такій системі рівнянь m змінних називають ***базисними***, а решті (n-m) змінних – ***вільними***.

Якщо m рівностей (1.4) є лінійно незалежними, то систему з m лінійно незалежних рівностей з n змінними ($m < n$) завжди можна розв'язати відносно m змінних, називаних базисними, якщо виразити їх через інші $k=n- m$ змінних, називаних вільними. Вільним змінним можна надавати будь-які значення, не порушуючи умову (1.4).

План КЗЛП $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ *називають базисним планом задачі, якщо його компоненти, що відповідають базисним стовпцям, більші за нуль* ($x_j > 0$)*, а всі інші компоненти (не базисні) – дорівнюють нулю.*

Нагадаємо основні теореми лінійного програмування.

Теорема 1. Якщо цільова функція L приймає максимальне значення в деякій точці ОПР, то вона приймає це значення і в деякій кутовій точці ОПР.

Теорема 2. Кожний припустимий базисний план є кутовою точкою ОПР.

Справедливе й зворотне ствердження: *якщо план* $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ *є кутовою точкою ОПР, то він є припустимим базисним планом задачі.*

Приклад 1.3. Звернемося до моделі, отриманої у прикладі 1.1, і приведемо її до канонічної форми, для чого введемо додаткові змінні $\boldsymbol{x_3, x_4, x_5}$.

Отримаємо таку КЗЛП: знайти $x=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що задовольняють системі рівнянь

$$4x_1+3x_2 +x_3 = 440,$$

$$3x_1+4x_2 + x_4 = 393,$$

$$3x_1+5x_2 + x_5 = 450.$$

і перетворюють на максимум цільову функцію L:

$$L = 6x_1 + 5x_2 +0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \Rightarrow max.$$

Отримана система рівнянь містить три рівняння $(m = 3)$ і п'ять невідомих змінних $(n = 5)$. Зазначимо, що за економічним змістом додаткові змінні є залишками ресурсів першого, другого та третього типів відповідно.

Симплексний метод

За своєю сутністю симплексний метод є послідовним перебором кутових точок, за яким значення цільової функції зростає від однієї ітерації до іншої (від однієї кутової точки до іншої). Критерій оптимальності в симплексному методі реалізують шляхом визначення оцінок Δ_j для небазисних векторів-стовпців матриці A щодо поточного базису (симплекс-різниць). Якщо симплекс-різниці показують неоптимальність плану, здійснюють перехід до наступного базису. При цьому один стовпець виводять з базису, а інший вводять. Якщо є кілька стовпців, що мають від'ємні симплекс-різниці, треба вибирати, який з них вводити до базису в першу чергу.

Для застосування симплексного методу необхідно задачу подати в канонічній формі.

Алгоритм симплексного методу

1. Визначити початковий опорний план.
2. Скласти симплексну таблицю.
3. Перевірити план на оптимальність. Для цього обчислити

$L_j = \Sigma c_j * a_{ij}$ і оцінки векторів $\Delta_j = L_j - c_j$.

Опорний план є оптимальним, якщо всі $\Delta_j \geq 0$, інакше або задача не має розв'язання, або треба перейти до нового опорного плану.

4. Щоб знайти новий опорний план, треба визначити напрямні рядок і стовпець таблиці. До базису вводять вектор, для якого добуток $\Delta_j * \Theta_j$ є найбільшим за абсолютною величиною, де Θ_j – найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводять до базису:

$$\Theta = min\ (b_i / a_{ij}).$$

5. Визначити коефіцієнти нового опорного плану (коефіцієнти розкладання векторів $\overline{A}_j$ за векторами нового базису).
6. Перевірити новий опорний план на оптимальність.

Приклад 1.4. Повернемося до задачі, умову якої приведено до КЗЛП у прикладі 1.3. Система обмежень задачі становить систему з 3 рівнянь (m=3) із 5 невідомими (n=5). Така система має нескінченну множину рішень.

У цій системі базис складають m = 3 елементи розв’язку, що не дорівнюють нулю, а інші 2 елементи розв’язку дорівнюють нулю. Додатний базисний розв’язок називають ***опорним планом***.

Очевидно, що одним з розв’язків системи є

$$x = (0, 0, 440, 393, 450),$$

такий план відповідає тому, що вироби A і B не випускають і $L = 0$.

Складемо симплекс-таблицю.

Таблиця 1.2 – Початкова симплекс-таблиця

Базис	$C_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	440	4	3	1	0	0
A_4	0	393	3	4	0	1	0
A_5	0	450	3	5	0	0	1
	L_j	0	0	0	0	0	0
	Δ_j		-6	-5	0	0	0

Визначимо $L_j = \Sigma c_j * a_{ij}.:$

$$L_1 = 4*0 + 3*0 + 3*0 = 0;$$

$$L_2 = 3*0 + 4*0 + 5*0 = 0;$$

Визначимо $\Delta_j = L_j - c_j.:$

$$\Delta_1 = 0 - 6 = -6;$$

$$\Delta_2 = 0 - 5 = -5;$$

$$\Delta_3 = 0 - 0 = 0 \ldots$$

Оскільки Δ_1 і $\Delta_2 < 0$, план є не оптимальним.

Перейдемо до нового опорного плану. Визначимо вектор, який введемо до базису (A_1 або A_2). Це повинен бути вектор, для якого добуток $\Delta_j * \Theta_j$ є найбільшим. Знайдемо Θ_j для A_1:

$$\Theta_1 = min\ (b_i / a_{ij}) = min\ (440/4;\ 393/3;\ 450/3) = min(110;\ 131;\ 150) = 110.$$

Визначимо Θ_j для A_2:

$$\Theta_2 = min\ (b_i / a_{ij}) = min\ (440/3;\ 393/4;\ 450/5) = min(146{,}6;\ 98{,}2;\ 90) = 90.$$

Визначимо добутки. Для A_1 $\Delta_1 * \Theta_1 = 6 * 110 = 660$. Для A_2 $\Delta_2 * \Theta_2 == 5 * 90 = 450$. Найбільший добуток дорівнює 660, тому введемо до базису вектор A_1.

З базису треба виводити вектор, якому відповідає найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводять до базису. Для A_1 $\Theta_1 = 110$, що відповідає першому рядку таблиці. Виведемо з базису вектор A_3. Складемо нову симплекс-таблицю.

Таблиця 1.3 – Проміжна симплекс-таблиця

Базис	**$C_{баз}$**	**C_j**	6	5	0	0	0
		P_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**
A_1	6	110	1	3/4	1/4	0	0
$\leftarrow A_4$	0	63	0	7/4	-3/4	1	0
A_5	0	120	0	11/4	-3/4	0	1
	L_j	660	6	18/4	6/4	0	0
	Δ_j		0	-2/4	6/4	0	0

Вектор, що вводять до базису, повинен мати коефіцієнти 1, 0 , 0. Для одержання 1 у головному рядку нової таблиці розділимо всі коефіцієнти рядка, який відповідає виведеному вектору $\boldsymbol{A_3}$, на 4. Щоб другий елемент вектора $\boldsymbol{A_1}$

дорівнював 0 (рядок, що відповідає вектору A_4, дістаємо з його ж рядка у попередній таблиці), помножимо головний рядок нової таблиці на мінус 3 і додамо до другого рядка попередньої таблиці:

-330	–3	-9/4	-3/4	–0	-0
393	+3	+4	+0	+1	+0
+63	+0	+7/4	-3/4	+1	+0

-330	–3	-9/4	-3/4	–0	-0
450	+3	+5	+0	+0	+1
+120	+0	+11/4	-3/4	+0	+1

Третій рядок нової таблиці дістанемо аналогічно.

Отже отримали новий опорний план:

$$x = (110; 0; 0; 63; 120),$$

при якому функція цілі

$$L = 6*110 + 5*0 = 660 – \text{зросла}.$$

Перевіримо план на оптимальність, для чого знайдемо

$$L_j = \Sigma c_j * a_i \quad \text{і} \quad \Delta_j = L_j – c_j..$$

Оскільки $\Delta_2 = -2/4 < 0$, план не є оптимальним.

Перейдемо до нового опорного плану. Для цього введемо до базису вектор A_2, оскільки для нього $\Delta_2 = -2/4 < 0$.

З базису виводимо вектор, якому відповідає найменше відношення вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора A_2.

$$\Theta_1 = min\ (b_i / a_{ij}) = min\ (110/3; 252/7; 480/11) = min(146,7; 36; 44) = 36.$$

Виводимо вектор A_4. Складемо нову таблицю.

Таблиця 1.4 – Кінцева симплекс-таблиця

Базис	***С*** $_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	5	36	0	1	-3/7	4/7	0
A_5	0	21	0	0	11/28	-44/28	1
A_1	6	83	1	0	16/28	-12/28	0
	L_j	*678*	*6*	*5*	*9/7*	*2/7*	*0*
	Δ_j		0	0	*9/7*	*2/7*	*0*

Вектор, що вводять до базису, повинний мати коефіцієнти 1, 0 , 0. Для одержання 1 у головному рядку нової таблиці розділимо всі коефіцієнти рядка, який відповідає виведеному вектору A_4 на 7/4. Щоб другий елемент вектора A_2 дорівнював 0 (рядок, що відповідає вектору A_5, отримуємо з його ж рядка в попередній таблиці), помножимо головний рядок нової таблиці на –11/4 і додамо до третього рядка попередньої таблиці. Для рядка, що відповідає A_1, головний рядок помножимо на мінус 3/4:

-99	+0	-11/4	+33/28	–44/28	+0
120	+0	+11/4	-3/4	+0	+1
+21	+0	+0	+11/28	-44/28	+1

-27	+0	-3/4	+9/28	–12/28	+0
110	+1	+3/4	+1/4	+0	+0
+83	+1	+0	16/28	-12/28	+0

Отримали новий опорний план:

$$x = (83; 36; 0; 0; 21),$$

при якому функція цілі $L = 6*83 + 5*36 = 678$ – стала більше. Це свідчить, що з кожним кроком ми наближаємося до оптимального рішення, тобто поліпшуємо план.

Перевіримо новий план на оптимальність, визначивши оцінки оптимальності Δ_j. Всі $\Delta_j \geq 0$, тому отриманий план є оптимальним. Функція цілі

$$L_{max} = 678 \text{ грош.од.}$$

Цей дохід є максимальним і може бути отриманий, якщо виготовити 83 вироби *A* і 36 виробів *B*.

Розв'язання задачі за допомогою функції Excel «Пошук рішення»

1. Внести вихідні дані в комірки.
2. Зарезервувати комірки для значень x_1 і x_2.
3. Внести вирази для обмежень, посилаючись на клітки x_1 і x_2.
4. Внести вирази цільової функції, посилаючись на клітки x_1 і x_2.

5. Встановити курсор на клітку цільової функції і в меню *Сервіс* знайти функцію *Пошук рішення.*

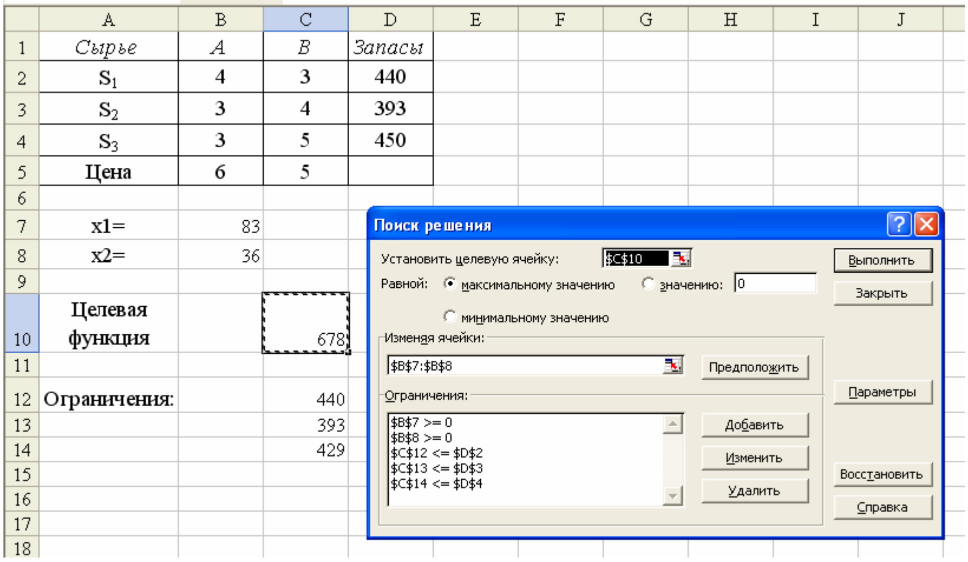

Рис. 1.2 – Розв’язання ЗЛП за допомогою *Пошуку рішення*

Призначення реквізитів Діалогового вікна «Пошук рішення»

Встановити цільову комірку - служить для вказівки цільової комірки, значення якої необхідно максимізувати, мінімізувати або встановити рівним заданому числу. Ця комірка повинна містити формулу.

Рівною - служить для вибору варіанта оптимізації значення цільові комірки (максимізація, мінімізація або підбір заданого числа).

Змінюючи комірки - служить для вказівки комірок, значення яких змінюються в процесі пошуку розв'язання доти, поки не будуть виконані накладені обмеження й умова оптимізації значення комірки, зазначеної в полі "Встановити цільову комірку".

Припустити - використовується для автоматичного пошуку комірок, що впливають на формулу, посилання на яку наведене у полі „Встановити цільову комірку”. Результат пошуку відображається в полі "Змінюючи комірки".

Обмеження - служить для відображення списку граничних умов поставленої задачі.

Для побудови двоїстої задачі можна скористуватися властивостями пари сполучених задач:

1. Якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації й навпаки.
2. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі $c_1, з_2, ..., c_n$ стають вільними членами обмежень двоїстої задачі.
3. Вільні члени обмежень прямої задачі $b_1, b_2, ..., b_m$ стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.
4. Матрицю обмежень двоїстої задачі отримують транспонуванням матриці обмежень прямої задачі.
5. Знаки нерівностей в обмеженнях змінюють на зворотні.
6. Кількість обмежень прямої задачі дорівнює кількості змінних двоїстої задачі, а кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі.

Запишемо задачі в матричній формі:

Пряма

Знайти

$L(\overline{X}) = max\ \overline{C}^T\ \overline{X}$

при $\overline{A}\ \overline{X} \le \overline{P}_0,\ \overline{X} \ge 0$.

Двоїста

Знайти

$L^*(\overline{U}) = min\ \overline{P_0}^T\ \overline{U}$

при $\overline{A}^T\ \overline{U} \ge \overline{C},\ \overline{U} \ge 0$.

Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої і двоїстої задач встановлюють наступні теореми.

Теорема 3. Якщо $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ є припустимими розв'язками прямої та двоїстої задач, тобто якщо

$$\overline{A}\ \overline{X} \le \overline{P_0} \qquad \text{і} \qquad \overline{A}^T\ \overline{U} \ge \overline{C},$$

тоді

$$\overline{C}^T\ \overline{X_0} \le \overline{P_0}^T\ \overline{U_0},$$

тобто значення цільової функції прямої задачі ніколи не перевищує значень цільової функції двоїстої задачі.

Теорема 4. Якщо $L(\overline{X_0}) = L^*(\overline{U_0})$ для деяких планів $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ прямої та двоїстої задач, то $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ – оптимальні розв'язки цих задач.

Теорема 5. (Перша теорема двоїстості). Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то й інша має оптимальний план і значення цільових функцій дорівнюють одне одному

$$L_{max} = L'_{min}.$$

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена (для прямої задачі - зверху, для двоїстої - знизу), то інша задача взагалі не має планів.

Теорема 6. (Друга теорема двоїстості). План $x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ прямої задачі та план $u_0 = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ двоїстої задачі є оптимальними планами цих задач тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $j = 1,n$ виконується рівність

$$[(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i) < 0] \rightarrow U_{\text{іопт}} = 0,$$

тобто якщо в оптимальному розв'язку прямої задачі якийсь ресурс витрачається не повністю, то його «тіньова ціна» дорівнює 0.

Між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач і елементами індексних рядків симплекс-таблиць (індексний – це рядок, у який записують значення L_j), що відповідають цим розв'язкам, існує наступний взаємозв'язок:

$$a_{0,n+i}^{ПР} = u_{iOPT}, i = \overline{1,m},$$

$$-a_{0,m+j}^{ДВ} = x_{jOPT}, j = \overline{1,n},$$

де n – кількість змінних прямої задачі;

m – кількість обмежень прямої задачі;

$a_{0,n+i}^{ПР}$ - $(n+i)$-й елемент прямої задачі;

$a_{0,m+j}^{ДВ}$ - $(m+j)$-й елемент двоїстої задачі.

Приклад 1.5. Складемо двоїсту задачу до моделі з прикладу 1.1.

Пряма	***Двоїста***
Знайти такі x_1 і x_2, що перетворюють на максимум цільову функцію L	Знайти такі u_1, u_2 і u_3, що перетворюють на мінімум цільову функцію L'
$L = 6x_1 + 5x_2 \to max.$	$L' = 440*u_1 + 393*u_2 + 450*u_3 \to min$
і задовольняють обмеженням:	і задовольняють обмеженням:
$4x_1+3x_2 \le 440$	$4*u_1 + 3*u_2 + 3*u_3 \ge 6$
$3x1+4x2 \le 393$	$3*u_1 + 4*u_2 + 5*u_3 \ge 5.$
$3x_1+5x_2 \le 450.$	

Скористаємося індексним рядком останньої таблиці (табл. 1.4) й визначимо розв'язок двоїстої задачі. Нагадаємо, що кількість змінних прямої задачі $n=2$.

Базис	$\boldsymbol{C_{баз}}$	$\boldsymbol{Cj}$	6	5	0	0	0
		$\boldsymbol{P_0}$	$\boldsymbol{A_1}$	$\boldsymbol{A_2}$	$\boldsymbol{A_3}$	$\boldsymbol{A_4}$	$\boldsymbol{A_5}$
$\boldsymbol{A_2}$	5	36	0	1	-3/7	4/7	0
$\boldsymbol{A_5}$	0	21	0	0	11/28	-11/7	1
$\boldsymbol{A_1}$	6	83	1	0	4/7	-3/7	0
індексний рядок	$\boldsymbol{L_j}$	*678*	*6*	*5*	*9/7*	*2/7*	*0*
	$\boldsymbol{\Delta_j}$		0	*0*	*9/7*	*2/7*	*0*

Дістали: $u_1 = a_{0,n+1}^{ПР} = a_{0,3}^{ПР} = \frac{9}{7} = 1,286$.

$u_2 = a_{0,n+2}^{ПР} = a_{0,4}^{ПР} = \frac{2}{7} = 0,286$.

$u_3 = a_{0,n+3}^{ПР} = a_{0,5}^{ПР} = 0$.

Тобто оптимальний план двоїстої задачі

$$U_0 = (1,286,\ 0,286,\ 0).$$

Обчислимо значення функції цілі при оптимальному плані двоїстої задачі

$L^* = 440*1,286 + 393*0,286 + 450*0 = 678$ *грош.од.*

Як видно з прикладу, ***розв'язання прямої задачі*** дає оптимальний план виготовлення виробів *A* і *B*, а ***розв'язання двоїстої задачі*** – оптимальну систему оцінок сировини, використовуваної для виготовлення цих виробів.

Оптимальним планом є виготовлення 83 виробів *A* і 36 виробів *B*. Визначимо, чи вся сировина витратиться при такому плані:

сировина S_1: 4*83 + 3*36 = 440 - буде витрачена повністю;

сировина S_2: 3*83 + 4*36 = 393 - буде витрачена повністю;

сировина S_3: 3*83 + 5*36 = 429 - не буде витрачена повністю, залишиться ще 21 од.

Змінні $u_1 = 1{,}286$ і $u_2 = 0{,}286$ є умовними двоїстими оцінками одиниці сировини S_1 і S_2 відповідно. Ці оцінки відмінні від нуля, а сировина S_1 і S_2 повністю витрачається при оптимальному плані виготовлення виробів *A* і *B*. Двоїста оцінка одиниці сировини S_3=0. Цей вид сировини не витрачається повністю при оптимальному плані виробництва.

Отже, додатну двоїсту оцінку мають лише ті види сировини, які повністю витрачаються при оптимальному плані виробництва. Тому двоїсті оцінки визначають ***дефіцитність*** використовуваної підприємством сировини.

Величина двоїстої оцінки показує, на скільки зросте максимальне значення цільової функції прямої задачі при збільшенні кількості сировини відповідного виду на одиницю.

Повернемося до прикладу. Збільшення кількості сировини S_1 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, при якому загальна вартість виготовленої продукції зросте на 1,286 грош.од. і рівнюватиме

678+1,286 = 679,286 грош.од.

Числа, що стоять у стовпці A_3, показують, що вказаного збільшення можна досягнути за рахунок збільшення випуску виробів *A* на 4/7 одиниці й скорочення випуску виробів *B* на 3/7 одиниці. Внаслідок цього витрата сировини S_3 зменшиться на 11/28 одиниці.

Аналогічне збільшення кількості сировини S_2 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, при якому загальна вартість виготовленої продукції зросте на 0,286 грош.од. і дорівнюватиме

678+0,286 = 678,286 грош.од.

Числа, що стоять у стовпці A_4, показують, що вказаного збільшення можна досягнути за рахунок збільшення випуску виробів *B* на 4/7 одиниці й скорочення випуску виробів *A* на 3/7 одиниці. Причому, видаток сировини S_3 зросте на 11/7 одиниці.

Підставимо оптимальні двоїсті оцінки до системи обмежень двоїстої задачі:

$$4*1{,}286 + 3*0{,}286 + 3*0 = 6$$

$$3*1{,}286 + 4*0{,}286 + 5*0 = 5,$$

бачимо, що обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі рівності. Це означає, що двоїсті оцінки сировини дорівнюють в точності їх цінам. Тому випускати ці два види продукції економічно доцільно. (Якщо виконуються нерівності типу >, випуск цих виробів є економічно недоцільним).

На підставі другої теореми двоїстості (теорема 6):

$$[(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i) < 0] \rightarrow U_{i\text{опт}} = 0$$

сформулюємо принцип рентабельності.

Кількість продукції, витрати на виробництво якої перевищують дохід, в оптимальному розв'язку дорівнює нулю.

$$[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} U_i - c_j) > 0] \rightarrow x_{j\text{опт}} = 0$$

.

1.2. Побудова кореляційної залежності

Побудова кореляційної залежності між результативною і факторною ознаками Y та X і оцінка тісноти зв'язку між ними є основною метою кореляційного аналізу. Кореляційний аналіз заснований на використанні рівняння регресії.

Нагадаємо, що залежність

$$y = f(x), \tag{1.5}$$

в якої кожному значенню x відповідає одне певне значення y, називають ***функціональною***.

Одному значенню факторної ознаки X x_i може відповідати низка значень Y: $y_1, y_2, \dots, y_k$, що зазвичай викликане впливом різних факторів на результативну ознаку Y або помилками вимірювання. У цьому випадку залежність називають статистичною**.** В такій залежності для кожного значення x_i можна визначити умовне середнє $\overline{y}_i$.

Статистичною називають залежність між X та Y, при цьому із зміною факторної ознаки X змінюється розподіл результативної ознаки Y. Статистичну залежність, в якої при зміні X змінюється середнє значення Y, називають ***кореляційною***.

$$\overline{y_x} = \varphi(x) \tag{1.6}$$

Регресією Y на X називають умовне математичне сподівання випадкової величини Y за умови, що X прийняла значення x_i. Лінію, що з'єднує точки $\overline{y}_i$, називають ***лінією регресії***. Для апроксимації лінії регресії аналітичним виразом використовують ***рівняння регресії***. На практиці найчастіше використовують лінійне рівняння регресії:

$$Y = \rho_{yx}\, x + b. \tag{1.7}$$

Коефіцієнт при x ρ_{yx} називають ***коефіцієнтом регресії***.

Метод найменших квадратів

Для визначення значень параметрів ρ_{yx} та b рівняння регресії (1.7) застосовують ***метод найменших квадратів*** (МНК), який дозволяє при відомому класі залежності $\overline{y_x} = \varphi(x)$ так вибрати їх значення, щоб вона щонайкраще відображала дані спостережень.

При використанні МНК вимога найкращого узгодження $\overline{y_x} = \varphi(x)$ з дослідними даними зводиться до того, щоб сума квадратів відхилень кривої, що згладжує, від експериментальних точок оберталася на мінімум:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_{ip} - y_i)^2 \to \min . \tag{1.8}$$

де y_i – значення Y, отримані в результаті спостережень;

y_{ip} - розрахункові значення Y, отримані з виразу кривої, що згладжує $\varphi(x)$.

Якщо всі вимірювання провадилися з однаковою точністю та помилки вимірювань розподілені за нормальним законом, то знайдена залежність буде найімовірнішою із всіх можливих в даному класі функцій.

З урахуванням того, що $y_{ip} = \varphi(x_i)$, вираз (1.8) можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \to \min . \tag{1.9}$$

Невідомі параметри шуканої залежності визначають, записавши її не тільки як функцію аргументу x, але і як функцію невідомих параметрів a_j.

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i, a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_m) - y_i]^2 \to \min . \tag{1.10}$$

Умова (1.10) виконується, якщо всі часткові похідні суми квадратів відхилень за параметрами a_j дорівнюватимуть нулю. Часткові похідні дають систему m+1 рівнянь із m+1 невідомими, розв'язання якої дає шукані параметри a_j, що задовольняють умові (1.9).

Дістанемо для лінійного рівняння регресії (1.7) за методом найменших квадратів вираз для коефіцієнта регресії ρ_{yx} та вільного члена b. Для цього підставимо до (1.10) вираз (1.7):

$$\sum_{i=1}^{n}[\rho_{yx}x_i + b - y_i]^2 \to \min .$$

Для відшукання мінімуму візьмемо похідні за параметрами ρ_{yx} та b і дорівняємо їх до нуля, дістанемо систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n}[\rho_{yx}x_i + b - y_i] * x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}[\rho_{yx}x_i + b - y_i] = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (1.11)$$

з якої в результаті перетворень отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{yx} * \sum x_i^2 + b * \sum x_i = \sum x_i y_i \\ \rho_{yx} * \sum x_i + nb = \sum y_i \end{aligned}\right\}, \qquad (1.12)$$

звідки виразимо ρ_{yx} та b

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}; \qquad (1.13)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 * \sum y_i - \sum x_i * \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}. \qquad (1.14)$$

Приклад 1.6. Для аналізу залежності обсягу споживання Y (грош.од.) від рівня доходу X (грош.од.) складена вибірка за щомісячними даними протягом року. Дані зведені до табл. 1.5. Необхідно оцінити вид залежності і визначити параметри рівняння регресії.

Таблиця 1.5 – Вихідні дані

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	107	109	110	113	120	122	123	128	136	140	145	150
y_i	102	105	108	110	115	117	119	125	132	130	141	144

Для визначення виду залежності побудуємо поле кореляції (рис. 1.3).

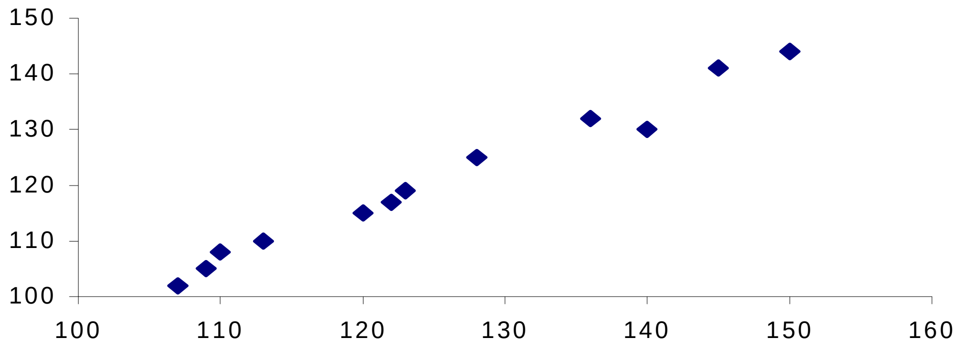

Рис. 1.3 - Розміщення статистичних даних на полі кореляції

З розміщення точок на полі кореляції можна припустити, що залежність лінійна:

$$\hat{y} = b + \hat{\rho}_{yx} x \ .$$

Для наочності розрахунків складемо допоміжну таблицю 1.6.

Таблиця 1.6 – Розрахункові дані

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2	$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	107	102	11449	10914	10404	103,63	-1,63	2,66
2	109	105	11881	11445	11025	105,49	-0,49	0,24
3	110	108	12100	11880	11664	106,43	1,57	2,46
4	113	110	12769	12430	12100	109,23	0,77	0,59
5	120	115	14400	13800	13225	115,77	-0,77	0,59
6	122	117	14884	14274	13689	117,63	-0,63	0,40
7	123	119	15129	14637	14161	118,57	0,43	0,18
8	128	125	16384	16000	15625	123,24	1,76	3,10
9	136	132	18496	17952	17424	130,71	1,29	1,66
10	140	130	19600	18200	16900	134,45	-4,45	19,80
11	145	141	21025	20445	19881	139,11	1,89	3,57
12	150	144	22500	21600	20736	143,78	0,22	0,05
Сума	**1503**	**1448**	**190617**	**183577**	**176834**	**1448**		
Середнє	**125,25**	**120,67**	**15884,75**	**15298,08**	**14736,17**	**120,67**		

За формулами (1.13) та (1.14) знайдемо оцінки параметрів рівняння регресії:

$$\hat{\rho}_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{15298{,}08 - 125{,}25 \cdot 120{,}67}{15884{,}75 - (125{,}25)^2} = 0{,}9339;$$

$$b = \overline{y} - \hat{\rho}_{yx}\,\overline{x} = 120{,}67 - 0{,}9339 * 125{,}25 = 3{,}699.$$

Отже, рівняння регресії має вигляд:

$$\hat{y} = 3{,}699 + 0{,}9339\,x.$$

Отримане рівняння регресії в будь-якому разі вимагає певної інтерпретації та аналізу. У розглянутому прикладі коефіцієнт $\hat{\rho}_{yx}$ можна розглядати як граничну схильність до споживання. Фактично він показує, на яку величину зміниться обсяг споживання, якщо рівень доходу збільшиться на одиницю. Вільний член b визначає прогнозоване значення рівня споживання при нульовому доході (тобто автономне споживання). Однак тут необхідна обережність. Важливо, наскільки віддалені дані спостережень від осі координат залежної змінної, тому що навіть при вдалому виборі рівняння регресії для досліджуваного інтервалу немає гарантій, що вона залишиться саме такою і при істотному віддаленні від вибірки. У розглянутому прикладі b=3,699 (грош.од.). Цей факт можна пояснити для окремого споживача (витрата накопичених або позичених коштів), однак при розгляді сукупності споживачів він втрачає зміст.

Визначення тісноти лінійної залежності

Для оцінки тісноти кореляційної залежності використовують ***вибірковий коефіцієнт кореляції***:

$$r_в = \rho_{yx} \frac{s_x}{s_y}, \tag{1.15}$$

де s_x, s_y – вибіркові середні квадратичні відхилення змінних *X* та *Y* відповідно.

Для обчислення коефіцієнта кореляції безпосередньо за даними спостережень використовують формулу

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}. \tag{1.16}$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції приймає значення від -1 до +1. Якщо $r_в = 0$, лінійний зв'язок відсутній, чим ближче значення $|r_в|$ до одиниці, тим тісніше зв'язок, і при $|r_в| = 1$ він стає функціональним.

Щоб оцінити, яка частина варіації залежної змінної пояснюється варіацією факторної ознаки, використовують ***коефіцієнт детермінації*** R^2:

$$R^2 = 1 - \frac{Q_{зал}}{Q_{заг}}, \tag{1.17}$$

де $Q_{зал}$ - залишкова сума квадратів відхилень, що характеризує вплив факторів, які не враховані в регресійній моделі:

$$Q_{зал} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2; \tag{1.18}$$

$Q_{заг}$ – загальна сума квадратів відхилень статистичних значень залежної змінної від її середньої

$$Q_{заг} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2. \tag{1.19}$$

Величина R^2 приймає значення від 0 до 1 і характеризує якість рівняння регресії.

Приклад 1.7: Для аналізу тісноти лінійної залежності, отриманої в прикладі 1.6, обчислимо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}} = \frac{184{,}1625}{14{,}04 \cdot 13{,}23} = 0{,}9914.$$

Отримане значення коефіцієнта кореляції дозволяє зробити висновок про сильну лінійну залежність розглянутих показників, що також підтверджується розташуванням точок на полі кореляції щодо апроксимуючої прямої (рис. 1.4).

Щоб визначити, яка частина варіації рівня споживання описується отриманим рівнянням регресії, обчислимо коефіцієнт детермінації R^2:

$$\mathrm{R}^2 = 1 - \frac{Q_{зал}}{Q_{заг}},$$

$$R^2 = 1 - \frac{2{,}938}{175{,}7} = 0{,}983.$$

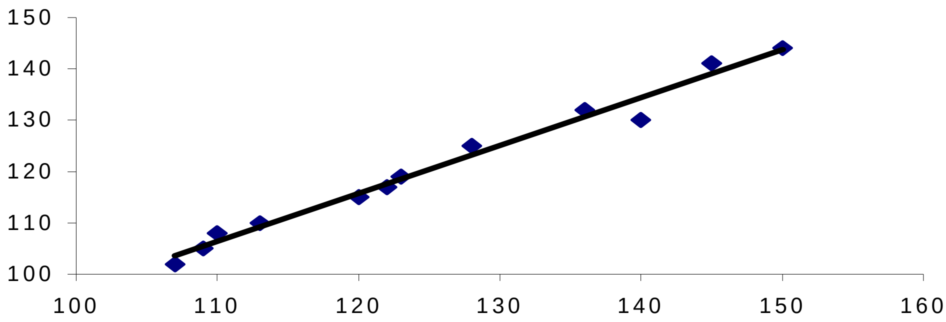

Рис. 1.4 - Розташування апроксимуючої залежності щодо статистичних даних

Це означає, що вся варіація обсягу споживання, що викликана невизначено великим переліком факторів, на 98,3% залежить від рівня доходу, і тільки на 1,7% від інших факторів.

Перевірка статистичної значущості рівняння регресії

Перевірка значущості рівняння регресії дозволяє встановити, чи відповідає математична модель, що виражає залежність між змінними, статистичним даним. Для цього висувають ***нульову гіпотезу***

$$H_0: \rho_{yx} = 0. \qquad (1.20)$$

Перевірка значущості рівняння регресії провадиться шляхом ***дисперсійного аналізу***, для чого в загальному випадку розраховують незміщені оцінки дисперсій залежної змінної, які викликані впливаючим фактором, $S^2_{факт}$, та впливом неврахованих $s^2_{зал}$ факторів. Оцінки дисперсій $S^2_{факт}$ та $s^2_{зал}$ мають χ^2-розподіл з m-1 і n-m ступенями свободи відповідно, а їх відношення - F-розподіл (розподіл Фішера) з тими самими ступенями свободи. Рівняння регресії є значущим, якщо спостережуване значення F-статистики більше за табличне значення критерію Фішера

$$F = \frac{s^2_{факт}}{s^2_{зал}} > F_{\alpha,k_1,k_2}\ , \qquad (1.21)$$

де F_{α,k_1,k_2} - табличне значення F-критерію Фішера, визначене на рівні значущості α при $k_1 = m$-1 і $k_2 = n$-m ступенях свободи; m – кількість оцінюваних параметрів рівняння регресії; n – кількість спостережень.

Якщо коефіцієнт детермінації R^2 відомий, то спостережуване значення F-статистики можна визначити за формулою

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}. \qquad (1.22)$$

Отже, якщо спостережуване значення F-статистики більше за табличне значення F-критерію Фішера, яке відповідає рівневі значущості α при ступенях свободи k_1 і k_2, нульову гіпотезу відхиляють.

Для оцінки значущості коефіцієнта кореляції висувають нульову гіпотезу

$$H_0\!: r_{xy} = 0. \qquad (1.23)$$

При перевірці нульової гіпотези виходять з того, що при відсутності кореляційного зв'язку статистика

$$|t| = \frac{|r_{xy}|\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (1.24)$$

має t-розподіл Стьюдента з n-2 ступенями свободи. Гіпотезу H_0 відхиляють, якщо

$$|t| = \frac{|r_{xy}|\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-r^2}} > t_{n-m-1;\alpha}, \qquad (1.25)$$

де $t_{n-m-1;\alpha}$ - табличне значення t-критерію Стьюдента.

Приклад 1.8. Перевіримо адекватність моделі, отриманої у прикладі 1.6. З цією метою для перевірки нульової гіпотези: H_0: $\hat{\rho}_{yx} = 0$ обчислимо F-статистику:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = 264{,}61.$$

Знайдемо табличне значення F-критерію $F_{(\alpha;\, m;\, n\text{-}m\text{-}1)}$

$$F_{(0{,}05;\, 2;\, 9)} = 4{,}26.$$

Порівняємо табличне значення з експериментальним. Оскільки

$$F>F_{(0,05;\ 2;\ 9)},$$

нульову гіпотезу відхиляємо, тобто коефіцієнти регресії є значущими.

Оцінимо значущість коефіцієнта кореляції, для чого обчислимо *t*-статистику

$$t=\frac{r_{xy}\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}} = 22{,}81.$$

Знайдемо відповідне табличне значення *t*-розподілу при 9 ступенях свободи і рівневі значущості $\alpha=0{,}05$ $t_{(n\text{-}m\text{-}1;\ \alpha/2)}$ $t_{(9;\ 0{,}025)} = 2{,}262$.

Оскільки $|t|>t_{табл.}$, можна зробити висновок про вірогідність коефіцієнта кореляції, який характеризує тісноту зв'язку між залежною і незалежною змінними.

Визначення довірчих границь помилки апроксимації

Рівняння регресії визначає математичне сподівання залежної змінної $\hat{y}$, а не її фактичне значення *y*. Різниця $\hat{y}-y$ є стандартною помилкою рівняння, породженою дією неврахованих факторів. Можна показати, що статистика $t=\frac{\hat{y}-M(Y)}{s_y}$ має *t*-розподіл Стьюдента з *k*=*n*-2 ступенями свободи. Для встановлення ***довірчих меж*** помилки апроксимації можна з певною імовірністю встановити граничне значення помилки рівняння регресії *Δy* і побудувати ***довірчий інтервал*** для умовного математичного сподівання *M(Y)*.

$$\Delta y = t_{крит.}\, s_y \sqrt{1-R^2}, \qquad (1.26)$$

де $t_{\text{крит.}}$ – критичне значення *t* при заданому рівні значущості і кількості ступенів свободи *k*=*n*-2; s_y – стандартна помилка групової середньої $\hat{y}$.

Приклад 1.9. Побудуємо довірчі межі для рівняння регресії, отриманого в прикладі 1.6. Скористаємося формулою (1.26), при цьому врахуємо, що для рівняння парної регресії при рівні значущості 5% $t_{крит.}$=1,96, тоді

$$\Delta y= 1{,}96*\sqrt{175{,}7} *\sqrt{1-0{,}983} =3{,}4,$$

що становить 2,82% (3,4/120,67).

Отже, остаточне рівняння регресії має вигляд:

$$y=3{,}699+0{,}9339\,x\pm 0{,}0282\,\hat{Y}$$

Нанесемо на графік довірчі межі (рис. 1.5).

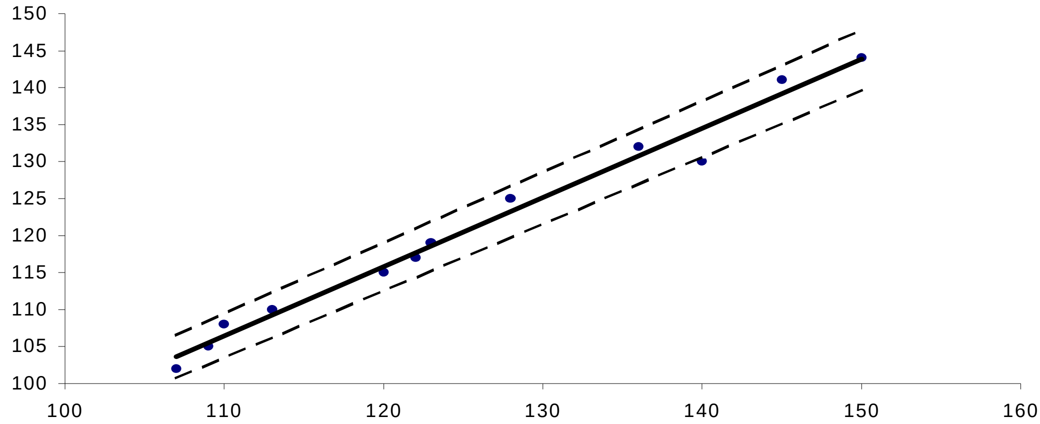

Рис. 1.5 - Положення довірчих меж

Отримане рівняння регресії можна використовувати для аналізу впливу зміни рівня доходу на обсяг споживання, для прогнозування обсягу споживання при відомій тенденції рівня доходу.

Прогнозування результативної ознаки Y

Оцінки параметрів рівняння регресії дозволяють використовувати його для прогнозу.

Помилку прогнозу визначають за формулою

$$m_{\hat{y}_p} = S_{зал}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_p-\bar{x})^2}{\sum(x\ \ -\bar{x})^2}}\,. \qquad (1.27)$$

Граничну помилку прогнозу для п’ятивідсоткового рівня визначають за формулою

$$\Delta_{\hat{y}_p} = t_{табл}\cdot m_{\hat{y}_p}\,, \qquad (1.28)$$

а довірчий інтервал прогнозу – за формулою $\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p}$.

Приклад 1.10. Визначимо прогнозоване значення обсягу споживання при зростанні доходу на 20% для моделі з прикладу 1.6. Оскільки прогнозований дохід становить x_p*=x*1,2=125,25*1,2=150,3 грош.од.*, то прогнозоване значення обсягу споживання складе $\overline{y}_{р}$*=3,699+0,9339*150,3=144,1 грош.од.*

Помилка прогнозу складе

$$m_{\hat{y}_p} = 6,3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(150,3 - 125,25)^2}{12*14,67}} = 13,58.$$

Гранична помилка прогнозу, що у 95% випадків не буде перевищеною, складе

$$\Delta_{\hat{y}_p} = 1,96 \cdot 13,58 = 26,6 \text{ } \textit{грош.од.}$$

Визначимо довірчий інтервал прогнозу

$$\gamma_{\hat{y}_{\min}} = 144,1 - 26,6 = 117,5 \text{ } \textit{грош.од.};$$

$$\gamma_{\hat{y}_{\min}} = 144,1 + 26,6 = 170,7 \text{ } \textit{грош.од.};$$

Виконаний прогноз є надійним, з імовірністю $p = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$ результативна ознака знаходиться у межах від 117,5 грош.од. до 170,7 грош.од.

2. ІНДІВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1.

Розв'язати задачу лінійного програмування за двома методами - геометричним та симплексним. Побудувати двоїсту задачу та знайти її оптимальний план, використовуючи для цього останню симплексну таблицю прямої задачі. Пояснити економічний зміст розв'язків пари сполучених задач.

Задача: Для виготовлення двох видів виробів *A* і *B* використовують три види сировини (див. табл.). На виготовлення одиниці виробу *A* потрібно витратити сировини першого типу a_1, другого – a_2 і третього - a_3 од. На виготовлення одиниці виробу *B* потрібно витратити сировини першого типу b_1, другого - b_2 і третього – b_3 од. Виробництво забезпечене сировиною першого типу в кількості P_1, другого - P_2, третього – P_3.

Таблиця 2.1 - Вихідні дані до завдання 1

Варіант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	P_1	P_2	P_3	α	β
1	16	8	5	4	7	9	144	929	362	4	4
2	9	7	4	5	8	16	786	151	862	3	2
3	12	10	3	3	5	6	805	670	930	6	2
4	8	7	4	3	6	9	192	156	187	2	3
5	15	11	9	4	5	10	833	459	714	3	2
6	6	5	3	3	10	12	18	611	303	3	9
7	11	8	5	3	4	3	453	241	622	5	2
8	9	6	3	4	7	8	221	611	428	3	2
9	3	4	3	5	8	11	927	200	941	2	5
10	10	5	4	9	11	15	512	943	89	7	9

Дохід від реалізації одиниці готового виробу *A* дорівнює α *грош.од.*, виробу *B* - β *грош.од*. Скласти план виробництва виробів, що забезпечить найбільший дохід від реалізації.

Завдання 2.

За територіями регіону наведені дані за 20XX р. (див. таблицю). Побудувати лінійне рівняння парної регресії y від x; розрахувати лінійний коефіцієнт парної кореляції і середню помилку апроксимації; оцінити статистичну значущість параметрів регресії і кореляції за допомогою F-критерію Фішера і t-критерію Стьюдента; виконати прогноз витрат y при прогнозованому значенні обсягу виробництва продукції x, що становить 107% від середнього рівня; оцінити точність прогнозу, розрахувавши помилку прогнозу та його довірчий інтервал; на одному графіку побудувати вихідні дані і теоретичну пряму.

Таблиця 2.2 - Вихідні дані до завдання 2

Варіант	**1**		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**8**		**9**		**10**	
Номер регіону	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**	**Середньодушовий прожитковий мінімум у день одного працездатного, грн.,**	**Середньоденна заробітна плата, грн.,**
1	81	124	74	122	77	123	83	137	79	134	92	147	75	133	69	124	78	133	97	161
2	77	131	81	134	85	152	88	142	91	154	78	133	78	125	83	133	94	139	73	131
3	85	146	90	136	79	140	75	128	77	128	79	128	81	129	92	146	85	141	79	135
4	79	139	79	125	93	142	89	140	87	138	88	152	93	153	97	153	73	127	99	147
5	93	143	89	120	89	157	85	133	84	133	87	138	86	140	88	138	91	154	86	139
6	100	159	87	127	81	181	79	153	76	144	75	122	77	135	93	159	88	142	91	151
7	72	135	77	125	79	133	81	142	84	160	81	145	83	141	74	145	73	122	85	135
8	90	152	93	148	97	163	97	154	94	149	96	141	94	152	79	152	82	135	77	132
9	71	127	70	122	73	134	79	132	79	125	80	127	88	133	105	168	99	142	89	161
10	89	154	93	157	95	155	90	150	98	163	102	151	99	156	99	154	113	168	95	159
11	82	127	87	144	84	132	84	132	81	120	83	129	80	124	85	127	69	124	72	120
12	111	162	121	165	108	165	112	166	115	162	94	147	112	156	94	155	83	130	115	160

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування.- К.: КНЕУ, 2001.
2. Исследование операций в экономике/ Под ред. Н.Ш.Кремера.- М., ЮНИТИ, 2003.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций.- Киев, 1979.
4. Замков О.О. Математические методы в экономике.- М., 2001.
5. Карманов В.Г. Математическое программирование.- М.: Наука, 1986.
6. Наконечний С.И., Терещенко Т.П. Эконометрия, - К.:КНЭУ, 2001.
7. Эконометрика: Учебник для вузов/ Под ред. проф. Н.Ш.Кремера.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.-311 с.
8. Практикум по эконометрике: Учеб. пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордиенко и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2002 - 192 с.
9. Воронков, О.О. Конспект лекцій з курсу «Економіко-математичне моделювання» (для студ. 3 курсу заочної форми навчання бакалаврів за галуззю знань 0305 — «Економіка і підприємництво» напрями підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік і аудит») / А. Є. Ачкасов, О. О. Воронков, Харк. нац. акад. міськ. госп-ва.: - Х.: ХНАМГ, 2010.- 204 с.

Додаток

Таблиця F-розподілу Фішера

для рівня значущості α=0,05 (5%)

n-m-1	m									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,20	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,68	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	1,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98

Таблиця t-розподілу Стьюдента

(критичні значення t (α, n-m-1))

Тест	**Рівень значущості α**							
Двобічний	50 %	20 %	10 %	5 %	2 %	1 %	0,2 %	0,1 %
Однобічний	25 %	10 %	5 %	2,5 %	1 %	0,5 %	0,1 %	0,05 %
n-m-1								
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	0,861	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки

до виконання контрольної роботи з курсу

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання бакалаврів за галуззю знань 0305 «Економіка і підприємництво» напрями підготовки 6.030504 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік і аудит»)

УКЛАДАЧ**: ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *А. Є. Ачкасов*

За редакцією автора

Комп’ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2010, поз. 470М

Підп. до друку 20.12.10 Формат 60х84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,1
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК №731 від 19.12.2001