МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для самостійної роботи студентів

1 курсу всіх спеціальностей

Частина 2

Харків

ХНАМГ

2012

Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу всіх спеціальностей. Частина 2 / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: С. С. Шульгіна, Л. П. Вороновська, Є. С. Пахомова. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 112 с.

Укладачі: С. С. Шульгіна,
Л. П. Вороновська,
Є. С. Пахомова

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рецензент: С.О. Станішевський

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики,
протокол №6 від 10.02.2011р.

РОЗДІЛ 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ І НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Відомо, що однією з основних задач диференційного числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною ж задачею інтегрального числення є обернена задача: знаходження функції за похідною або диференціалом. Ця дія називається інтегруванням.

Шукану функцію називають первісною функцією по відношенню до даної функції.

За означенням, первісною функцією для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називають функцію $F(x)$, яка визначена на тому самому проміжку і задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Наприклад, первісною функцією для функції $5x^4$ буде x^5, бо $(x^5)' = 5x^4$. Однак похідна від $x^5 + 7$ також дорівнює $5x^4$, а це означає, що і $x^5 + 7$ буде первісною для $5x^4$. І взагалі $F(x) = x^5 + C$, де C-стала.

Сукупність всіх первісних функції $f(x)$, де $x \epsilon (a;b)$, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом

$\int f(x)dx$,

де $\int$ - знак інтеграла, $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x)dx$ - підінтегральний вираз, x - змінна інтегрування.

Таким чином , якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Із сказаного випливає, що результат інтегрування можна перевірити диференціюванням.

1.2. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

2. $(\int f(x)dx)' = f(x)$,
3. $d(\int f(x)dx) \quad = f(x)dx$,
4. $\int dF(x) = F(x) + C$,
5. $\int Cf(x) = C\int f(x)dx$, де C - $const \neq 0$,
6. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,
7. $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$- диференційовна функція від незалежної змінної x.
8. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

1.3 ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,\ \alpha \epsilon R,\ \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,\ \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$,

2) $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$,

3) $\int a^u = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1, \qquad \int e^u du = e^u + C$,

4) $\int sinu \cdot du = -cosu + C$,

5) $\int cosu \cdot du = sinu + C$,

6) $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$,

7) $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$,

8) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C, a\epsilon R, a \neq 0$,

9) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a\epsilon R, a \neq 0$,

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0$,

11) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2+A}\right| + C$,

12) $\int shu \cdot du = chu + C$, 13) $\int chu \cdot du = shu + C$,

14) $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$, 15) $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$.

Зауважимо, що тут α, A i a - сталі, u - незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Є три основні методи інтегрування функцій: безпосерднє інтегрування, метод заміни змінної, метод інтегрування частинами і метод розкладу. Розглянемо кожний з цих методів.

1.4. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ І МЕТОД РОЗКЛАДАННЯ

Під безпосереднім інтегруванням розуміють пряме використання таблиці інтегралів.

Метод розкладу грунтується на застосуванні властивостей 4 і 5 невизначеного інтегралу. Тут слід також мати на увазі, що даний інтеграл може бути зведений до одного або кількох табличних інтегралів після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx = \int 8x^7 dx - \int 3x^2 dx + \int 3x dx + \int 10 dx =$$

$$= 8\int x^7 dx - 3\int x^2 dx + 3\int x dx + 10\int dx$$

Далі, застосувавши до одержаних інтегралів формулу (1) таблиці знаходимо

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx = 8\frac{x^8}{8} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + 3\frac{x^2}{2} + C_3 + 10x + C_4 =$$

$$= x^8 - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 10x + C,$$

де $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла не слід. Досить всі довільні сталі підсумувати і результат, позначений однією буквою C, записати вкінці, тобто після того, як усі інтеграли будуть знайдені.

Приклад 2. Знайти $\int \frac{\sqrt{x}-x^2e^x+x^5}{x^2}dx$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{\sqrt{x}-x^2e^x+x^5}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx - \int \frac{x^2e^x}{x^2}dx + \int \frac{x^5}{x^2}dx =$$

$$= \int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int e^x dx + \int x^3 dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - e^x + \frac{x^4}{4} + C = -2\,x^{-\frac{1}{2}} - e^x + \frac{x^4}{4} + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} - e^x + \frac{x^4}{4} + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \left(1-\sqrt{x}-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

Розв'язання. Відзначимо, що

$$\left(1-\sqrt{x}-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right) = 1+\sqrt{x}-\sqrt{x}-x-x-x^{\frac{3}{2}} = 1-2x-x^{\frac{3}{2}},$$

тоді

$$\int \left(1-\sqrt{x}-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int \left(1-2x-x^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= \int dx - 2\int x dx - \int x^{\frac{3}{2}}dx = x - 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = x - x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} \quad + C.$$

Приклад 4. Знайти $\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{x^7} - 1\right)dx$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \left(\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{4}{x^7} - 1\right)dx = 2\int \frac{x^2}{x^{\frac{5}{3}}}dx - 4\int \frac{dx}{x^7} - \int dx =$$

$$= 2\int x^{\frac{1}{3}}dx - 4\int x^7 dx - \int dx = 2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 4\frac{x^8}{8} - x + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} \quad - \frac{x^8}{2} - x + C.$$

Приклад 5. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}} = \int \frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}} = \int (2-5x)^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}\cdot(-5)} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{4} + C.$$

У цьому прикладі ми скористались властивістю (7)

Приклад 6. Знайти $\int \frac{dx}{1+9x}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{1+9x} = \frac{1}{9} ln|1+9x| + C.$$

Приклад 7. Знайти $\int \cos(4x-5)\,dx$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \cos(4x-5)\,dx = \frac{1}{4} sin(4x-5) + C.$$

Приклад 8. Знайти $\int \frac{dx}{3x^2+12}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{3x^2+12} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C = \frac{1}{6} arctg\frac{x}{2} + C.$$

Приклад 9. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 10. Знайти $\int \frac{dx}{5x^2-1}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{5x^2-1} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} ln\left|\frac{x-\frac{1}{\sqrt{5}}}{x+\frac{1}{\sqrt{5}}}\right| + C = \frac{\sqrt{5}}{10} ln\left|\frac{\sqrt{5}x-1}{\sqrt{5}x+1}\right| + C.$$

Приклад 11. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C.$$

Приклад 12. Знайти $\int e^{3-7x}dx$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int e^{3-7x}dx = -\frac{1}{7}e^{3-7x} + C = -\frac{e^{3-7x}}{7} + C.$$

Приклад 13. Знайти $\int \frac{dx}{sin^2x \cdot cos^2x}$.

Розв'язання. Виконуємо тотожні перетворення над підінтегральною функцією:

$$f(x) = \frac{1}{sin^2x \cdot cos^2x} = \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} = \frac{sin^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} + \frac{cos^2x}{sin^2x \cdot cos^2x} =$$
$$= \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{sin^2x \cdot cos^2x} = \int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x} = tgx - ctgx + C.$$

Приклад 14. Знайти $\int \frac{sin2xdx}{\sqrt[3]{7-cos^2x}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{sin2xdx}{\sqrt[3]{7-cos^2x}} = \int (7-cos^2x)^{-\frac{1}{3}} sin2xdx = \int (7-cos^2x)^{-\frac{1}{3}} d(7-cos^2x) =$$
$$= \frac{3(7-cos^2x)^{\frac{2}{3}}}{2} + \mathrm{C} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(7-cos^2x)^2} + C.$$

1.5. ІНТЕГРУВАННЯ МЕТОДОМ ЗАМІНИ ЗМІННОЇ (МЕТОД ПІДСТАНОВКИ)

Метод заміни змінної застосовують в тих випадках, коли безпосередньо (за допомогою таблиці) не вдається знайти інтеграл.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{arctg2x} \cdot \frac{2}{1+4x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = arctg2x \\ du = \dfrac{2}{1+4x^2}dx \\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{1+4x^2}dx \end{matrix} \right| =$$

$=\int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^{arctg2x} + C.$

Заміну змінної розміщуємо після інтеграла у вертикальних дужках.

Приклад 2. Знайти $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \left| \begin{matrix} t = x^6 \\ dt = 6x^5dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} =$$

$$= \frac{1}{6}ln\left|t + \sqrt{t^2+7}\right| + C.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо:

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6}ln\left|x^6 + \sqrt{x^{12}+7}\right| + C.$$

Приклад 3. Знайти: а) $\int 7sin^3xcosxdx,$ б) $\int ctgxdx,$ в) $\int \frac{dx}{sinx}$.

Розв'язання. Маємо,

а) $\int 4sin^3xcosxdx = 4\int (sinx)^3cosxdx = \left| \begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix} \right| =$

$$= 4\int u^3du = 4 \cdot \frac{u^4}{4} + C = (sinx)^4 + C;$$

б) $\int ctgxdx = \int \frac{cosxdx}{sinx} = \left| \begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C = ln|sinx| + C,$

в) $\int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{sinxdx}{sin^2x} = \left| \begin{matrix} u = cosx \\ -du = sinxdx \end{matrix} \right| = \int \frac{-du}{1-u^2} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C =$

$$= \frac{1}{2}ln\left|\frac{cosx-1}{cosx+1}\right| + C = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Останній вираз отримали після тригонометричних перетворень.

Приклад 4. Знайти $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \begin{vmatrix} x+1=t^2 \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{t+1}dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 2ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C.$$

Приклад 5. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \begin{vmatrix} e^x+1=t^2 \\ e^x dx = 2tdt \\ dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1} \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

1.6. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Як вже відзначалося раніше, цей метод, як і метод підстановки, який був щойно розібраний, належить до числа основних методів інтегрування.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовні функції від x, то має місце формула

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du,$$

яка називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що грунтується на застосуванні цієї формули, методом інтегрування частинами.

Укажемо деякі види інтегралів, для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

1. $\int P(x)e^{ax}dx,$ де $P(x)$- многочлен, $u=P(x),\ dv=e^{ax}dx.$
2. $\int P(x)cosbxdx,\ \ u=P(x),\ dv=cosbxdx.$
3. $\int P(x)sinbxdx,\ \ u=P(x),\ dv=sinbxdx.$
4. $\int P(x)lnxdx,\ \ u=lnx,\ \ dv=P(x)dx.$
5. $\int P(x)\log_a x\,dx,\ u=\log_a x,\ dv=P(x)dx.$
6. $\int P(x)arctgxdx,\ u=arctgx,\ dv=P(x)dx.$

7. $\int P(x)arcctgxdx,\ u = arcctgx,\ dv = P(x)dx.$

8. $\int P(x)arcsinxdx,\ u = arcsinx,\ dv = P(x)dx.$

9. $\int P(x)arcccosxdx,\ u = arccosx,\ dv = P(x)dx.$

10. $\int e^{ax}cosbxdx,$ обидва рази за u вибирають або показникову функцію,

11. $\int e^{ax}sinbxdx,$ або тригонометричну.

Визначимо також, що за допомогою методу інтегрування частинами можна отримати так звані рекурентні формули, які дають змогу повернутися до інтегралів того самого виду, але з іншими коефіцієнтами.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int x^2sin3xdx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами :

$$\int x^2sin3xdx = \left|\begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sin3xdx, & v = \int sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x - \int\left(-\frac{1}{3}cos3x\right)2xdx = -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3xdx.$$

Проміжні обчислення розташовуємо між вертикальних дужок. До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3xdx = \left|\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos3xdx, & v = \int cos3xdx = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3xdx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x.$$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2sin3xdx = -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int x^3lnxdx$.

Розв'язання. Тут $u = lnx$, $dv = x^3dx$, одержимо

$$\int x^3 lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3dx, & v = \int x^3dx = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| = \frac{x^4}{4} lnx - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int x \cdot arctgxdx$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int x \cdot arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

Приклад 4. Знайти $\int cos3x \cdot e^{2x}dx$.

Розв'язання. Тут $u = cos3x, dv = e^{2x}dx$. Маємо

$$\int cos3x \cdot e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = cos3x, du = -3sin3xdx \\ dv = e^{2x}dx, \quad v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right| = \frac{e^{2x}}{2} \cdot cos3x -$$

$$- \int \frac{e^{2x}}{2}(-3sin3xdx) = \frac{e^{2x} \cdot cos3x}{2} + \frac{3}{2}\int sin3x \cdot e^{2x}dx.$$

Останній інтеграл знову інтегруємо частинами:

$$\int sin3x \cdot e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = sin3x, du = 3cos3xdx \\ dv = e^{2x}dx, \quad v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{matrix} \right| = \frac{e^{2x}sin3x}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} 3cos3xdx.$$

Таким чином,

$$\int cos3x \cdot e^{2x}dx = \frac{e^{2x}cos3x}{2} + \frac{3e^{2x}sin3x}{4} - \frac{9}{4}\int cos3x \cdot e^{2x}dx.$$

Розв’язавши одержане рівняння відносно вихідного інтеграла, будемо мати

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int cos3x \cdot e^{2x}dx = \frac{e^{2x}\cdot cos3x}{2}+\frac{3e^{2x}\cdot sin3x}{4}$$

або

$$\frac{13}{4}\int cos3x \cdot e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(cos3x+\frac{3sin3x}{2}\right).$$

Звідси остаточно одержимо

$$\int cos3x \cdot e^{2x}dx = \frac{2e^{2x}}{13}\left(cos3x+\frac{3sin3x}{2}\right)+C.$$

Приклад 5. Знайти $\int \cos\,(lnx)dx$.

Розв’язання. Маємо,

$$\int \cos(lnx)\,dx = \left|\begin{matrix} u=\cos(lnx)\,,du=-\sin(lnx)\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx, \qquad\qquad v=x \end{matrix}\right| =$$

$$= xcos(lnx)+\int \sin(lnx)\,dx\,.$$

До останнього інтеграла застосовуємо метод інтегрування частинами:

$$\int \sin(lnx)\,dx = \left|\begin{matrix} u=\sin\,(lnx), du=cos(lnx)\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx, \qquad v=x \end{matrix}\right| =$$

$$= xcos(lnx)+xsin(lnx)-\int \cos\,(lnx)dx.$$

Одержаний вираз має вихідний інтеграл. Отже,

$$\int \cos\,(lnx)dx = xcos(lnx)+xsin(lnx)-\int \cos\,(lnx)dx,$$

$$2\int \cos\,(lnx)dx = xcos(lnx)+xsin(lnx),$$

Остаточно, $\int \cos\,(lnx)dx = \frac{x}{2}(\cos\,(lnx)+\sin\,(lnx))+C.$

Приклад 6. Знайти $\int xtg^2xdx$.

Розв’язання. Маємо, $tg^2x=\frac{sin^2x}{cos^2x}=\frac{1-cos^2x}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}-1$, отже,

$$\int xtg^2xdx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = tg^2xdx, v = \int tg^2xdx = \int \left(\frac{1}{cos^2x} - 1\right)dx = tgx - x \end{array} \right| =$$

$$= x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx = x(tgx - x) + ln|cosx| + \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= xtgx + ln|cosx| - \frac{x^2}{2} + C.$$

1.7. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція виду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - алгербаїчні многочлени ступеня n та m з дійсними коефіцієнтами, які не мають спільних коренів, причому $Q_m(x) \neq 0$. Якщо $Q_m(x) \equiv \text{C} \neq 0$, то раціональна функція буде цілою, тобто многочленом. Таку функцію інтегрують безпосередньо:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)dx =$$

$$= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто якщо $n < m$ і неправильним раціональним дробом в протилежному випадку, тобто якщо $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n \geq m)$ можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де $T(x)$ - ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$ - правильний раціональний дріб.

Як інтегрується ціла раціональна функція відомо. Тепер розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$.

Правила інтегрування раціонального дробу

Покажемо, як інтегруються елементарні раціональні дроби (їх називають найпростішими) наступних трьох типів:

Перший: $\frac{A}{x-a}$;

Другий: $\frac{A}{(x-a)^k}$, де k – ціле число, $k > 1$;

Третій: $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де $b^2 - 4ac < 0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

У всіх трьох випадках вважаємо, що A, B, a, b, c – дійсні числа.

Інтеграли від перших двох найпростіших дробів обчислюємо безпосередньо:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\cdot\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \text{ де } k \neq 1.$$

Інтеграл від елементарного дробу третього типу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ розглянемо далі на прикладах.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int \frac{dx}{5x+6}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу першого типу. Покладемо $5x + 6 = t$, тобто виконуємо заміну змінної, тоді $5dx = dt$ і тому,

$$\int \frac{dx}{5x+6} = \frac{1}{5}\int \frac{5dx}{5x+6} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln t + C = \frac{1}{5}\ln|5x+6| + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{(3-7x)^9}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу другого типу. Оскільки $d(3-7x) = (3-7x)'dx = -7dx$, то

$$\int \frac{dx}{(3-7x)^9} = -\frac{1}{7}\int (3-7x)^{-9}(-7)dx = -\frac{1}{7}\int (3-7x)^{-9}d(3-7x) =$$

$$= -\frac{1}{7}\frac{(3-7x)^{-8}}{-8} + C = \frac{1}{56(3-7x)^8} + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{dx}{4x^2+4x+10}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де $A = 0$, $B = 1$, $b^2 - 4ac = -146 < 0$. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2 + 4x + 10$, одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+9} = \left|\begin{matrix} u = 2x+1 \\ du = 2dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x+1)^2+9} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+9} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{u}{3} + C = \frac{1}{6}arctg\frac{2x+1}{3} + C.$$

Приклад 4. Знайти $\int \frac{3x-4}{4x^2-3x+1}dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де $A = 3$, $B = -4$, $b^2 - 4ac = -7 < 0$. Спочатку виділимо $8x - 3$ похідну знаменника у чисельнику дробу. Для цього чисельник $3x - 4$ подамо у вигляді

$$3x - 4 = \frac{3}{8}\left(8x - 3 + 3 - \frac{32}{3}\right) = \frac{3}{8}(8x-3) - \frac{23}{24}.$$

Тоді

$$\int \frac{3x-4}{4x^2-3x+1}dx = \int \frac{\frac{3}{8}(8x-3) - \frac{23}{24}}{4x^2-3x+1}dx = \frac{3}{8}\int \frac{8x-3}{4x^2-3x+1}dx -$$

$$-\frac{23}{24}\int \frac{dx}{4x^2-3x+1} = \frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1| - \frac{23}{96}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1| - \frac{23}{96}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{9}{64}} = \frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1| -$$

$$-\frac{23}{96}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{8}\right)^2 - \frac{7}{64}} = \frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1| - \frac{23}{96}\cdot\frac{1}{2\frac{\sqrt{7}}{8}}ln\left|\frac{x-\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{7}}{8}}{x-\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{7}}{8}}\right| + C =$$

$$= \frac{3}{8}ln|4x^2-3x+1| - \frac{23}{24\sqrt{7}}ln\left|\frac{8x-3-\sqrt{7}}{8x-3+\sqrt{7}}\right| + C.$$

Приклад 5. Знайти $\int \frac{5x-2}{x^2+8x+16}dx$.

Розв'язання. Розв'яжемо цей приклад таким самим способом, яким розв'язано попередній.

Отже,

$$\int \frac{5x-2}{x^2+8x+16}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+8)-22}{x^2+8x+16}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+8x+16}dx -$$

$$-22\int \frac{dx}{x^2+8x+16} = \frac{5}{2}ln|x^2+8x+16| - 22\int \frac{dx}{(x+4)^2} =$$

$$= \frac{5}{2}ln|x^2+8x+16| + \frac{22}{x+4} + C = \frac{5}{2}ln(x+4)^2 + \frac{22}{x+4} + C =$$

$$= 5ln|x+4| + \frac{22}{x+4} + C.$$

Приклад 6. Знайти $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx$.

Розв'язання.

I спосіб. Маємо,

$$\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x-6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}ln|x^2+x-6| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right| + C = \frac{1}{2}ln|x^2+x-6| -$$

$$-\frac{3}{10}ln\left|\frac{2x+1-5}{2x+1+5}\right| = \frac{1}{2}ln|x^2+x-6| - \frac{3}{10}ln\left|\frac{2x-4}{2x+6}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}ln|x^2+x-6| - \frac{3}{10}ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C = \frac{1}{2}ln|(x-2)(x+3)| -$$

$$-\frac{3}{10}ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C = \frac{1}{2}ln|x-2| + \frac{1}{2}ln|x+3| - \frac{3}{10}ln|x-2| + \frac{3}{10}ln|x+3| + C$$

$$= ln|x-2|\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right) + ln|x+3|\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}ln|x-2| + \frac{4}{5}ln|x+3| + C.$$

ІІ спосіб. Підінтегральний дріб являє собою правильний раціональний дріб, але не найпростіший, бо квадратний тричлен $x^2 + x - 6$ має два дійсні корені: $x_1 = 2$ і $x_2 = -3$, так як його дискримінант $D = 1 + 24 = 25 > 0$. Тому цей квадратний тричлен можна розкласти на множники $(x-2)(x+3)$, а підінтегральний правильний раціональний дріб – на суму двох елементарних дробів першого типу, тобто подати у вигляді

$$\frac{x-1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3},$$

або

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

Для звільнення від дробових членів помножимо обидві частини рівності на добуток $(x-2)(x+3)$, в результаті одержимо

$$x - 1 = A(x+3) + B(x-2),$$

знайдемо коефіцієнти

$$\begin{array}{r|l} x = 2 & 1 = 5A \\ x = -3 & -4 = -5B \end{array}.$$

Звідки $A = \frac{1}{5}$ і $B = \frac{4}{5}$.

Таким чином,

$$\frac{x-1}{x^2+x-6} = \frac{\frac{1}{5}}{x-2} + \frac{\frac{4}{5}}{x+3} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+3},$$

$$\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx = \int\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{5}ln|x-2| + \frac{4}{5}ln|x+3| + C.$$

Другий метод має назву: **метод невідомих коефіцієнтів**.

І тип. Корені знаменника дійсні і різні.

Приклад 7. Знайти $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Розв’язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$
\begin{array}{llll}
-\begin{array}{l} x^5+x^4-8 \\ \underline{x^5-4x^3} \end{array} & & & \left|\begin{array}{l} \underline{x^3-4x} \\ x^2+x+4 \end{array}\right. \text{(ціла частина)} \\
& -\begin{array}{l} x^4+4x^3-8 \\ \underline{4x^3-16x} \end{array} & & \\
& & -\begin{array}{l} 4x^3-4x^2-8 \\ \underline{4x^3-16x} \end{array} & \\
& & & 4x^2+16x-8 \quad \text{(остача).}
\end{array}
$$

Далі подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені: $x=0, x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів першого типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

або

$$x^2+4x-2=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A + B + C = 1, \\ x & \ 2B - 2C = 4, \\ x^0 & \quad -4A = -2. \end{array}$$

Розв’язавши цю систему, находимо $A = \frac{1}{2}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{3}{4}$.

Слід визначити, що тут коефіцієнти A, B і C простіше було б знайти способом підстановки в тотожність частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$$

$$\begin{array}{r|l} x = 0 & -2 = -4A, \\ x = 2 & \ 10 = 8B, \\ x = -2 & -6 = 8C, \end{array}$$

звідки $A = \frac{1}{2}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{3}{4}$.

Таким чином,

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4\int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4\int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln|x| + 5ln|x-2| - 3ln|x+2| + C.$$

II тип. Корені знаменника дійсні, але серед них є кратні.

Приклад 8. Знайти $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx$.

Розв’язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи,що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x) = x(x-1)(x^2-4x+3) = x(x-1)(x-1)(x-3) =$$
$$= x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x = 0$ і $x = 3$ є простими, а $x = 1$ – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3 = A(x-3)(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-3) + Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & \ 3=-3A, \\ x=3 & \ 6=12B, \\ x=1 & \ 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси: $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = -1, D = \frac{1}{2}$,

отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx =$$
$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}ln|x-1| + C\ .$$

Ш тип. Серед коренів знаменника є комплексні.

Приклад 9. Знайти $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$.

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що $x^2-2x+10=0$, $D = 4-40 = -36 < 0$, маємо

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C:

$$4x - 10 = A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x + 2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{c|c} x = -2 & -18 = 18A, \\ x^2 & 0 = A + B, \\ x^0 & -10 = 10A + 2C, \end{array}$$

звідки: $A = -1, B = 1, C = 0$, отже,

$$\frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} = -\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}.$$

Маємо,

$$\int \frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx = \int \left(-\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}\right) dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 - 2x + 10} dx = -ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x + 10} dx =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 10} dx + \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2} ln|x^2 - 2x + 10| + \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 9} =$$

$$= -ln|x| + \frac{1}{2} ln|x^2 - 2x + 10| + \frac{1}{3} arctg \frac{x - 1}{3} + C.$$

1.8. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

І. Інтеграли виду $\int sin^m x \cdot cos^n x dx.$

1) Якщо m і n - цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад $m = 2k + 1$, то

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k+1} x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k} x \cdot sinx \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int (sin^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx = \int (1 - cos^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinx dx \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p + 1 > 0$, то треба застосувати підстановку $t = sinx$.

2) Якщо обидва показники m і n - парні невід'ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x),$$
$$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x).$$

3) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них від'ємний, то потрібно виконати заміну $tgx = t$ або $ctgx = t$. Тоді: $x = arctgt$ ($x = arcctgt$), $dx = \frac{dt}{t^2+1}$ $\left(dx = -\frac{dt}{t^2+1}\right)$.

II. Інтеграли виду $\int sinax \cdot cosbxdx$, $\int cosax \cdot cosbxdx$, $\int sinax \cdot sinbxdx$.

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x + \sin(a-b)\,x),$$
$$cosax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)\,x + \cos(a-b)\,x),$$
$$sinax \cdot sinbx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)\,x - \cos(a+b)\,x).$$

III. Інтеграли виду $\int R(sinx, cosx)dx$, де $R -$ раціональна функція від $sinx$ і $cosx$. За допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ $(-\pi < x < \pi)$ інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ вигідніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t$.

Слід також визначити, що в силу своєї універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто приводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1) Якщо виконується рівність $R(-sinx, cosx) \equiv -R(sinx, cosx)$, то застосуємо підстановку $cosx = t$.

2) Якщо виконується рівність $R(sinx, -cosx) \equiv -R(sinx, cosx)$, то застосуємо підстановку $sinx = t$.

3) Якщо виконується рівність $R(-sinx, -cosx) \equiv R(sinx, cosx)$, то застосовуємо підстановку $tgx = t$ (або $ctgx = t$), при цьому, якщо $tgx = t$, то

$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

IV. Інтеграли виду $\int \frac{a_1 sinx + b_1 cosx + c_1}{a_2 sinx + b_2 cosx + c_2} dx$.

Такі інтеграли беруть за допомогою універсальної підстановки $tg\frac{x}{2} = t$.

V. Інтеграли виду $\int \frac{a_1 sin^2x + b_1 cosxsinx + c_1 cos^2x}{a_2 sin^2x + b_2 cosxsinx + c_2 cos^2x} dx$.

Для знаходження цих інтегралів доцільно застосувати підстановку $tgx = t$ (або $ctgx = t$).

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int cos^4x \cdot sin^5xdx$.

Розв'язання. Тут $m = 5, n = 4$. Враховуючи, що m непарне, одержимо

$$\int cos^4x \cdot sin^5xdx = \int cos^4x \cdot sin^4x \cdot sinxdx = \int cos^4x \cdot (sin^2x)^2 \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (1-cos^2x)^2 \cdot sinxdx = \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix} \right| = -\int t^4(1-t^2)^2\,dt =$$

$$= -\int t^4(1-2t^2+t^4)dt = \int (2t^6 - t^4 - t^8)dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$.

Розв'язання. Тут $m = 2, n = -4 < 0$ і парне, тому

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ sin^2x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3x}{3} + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx$.

Розв'язання. Тут $m = -\frac{4}{3}, n = 3 > 0$ і непарне, тому

$$\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx = \int \frac{cos^2x}{\sqrt[3]{sin^4x}} \cdot cosxdx = \int \frac{1-sin^2x}{\sqrt[3]{sin^2x}} \cdot cosxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^{2/3}} \cdot dt = \int t^{-2/3}\,dt - \int t^{4/3}\,dt = 3t^{1/3} - \frac{3t^{7/3}}{7} + C =$$

$$= 3t^{1/3}\left(1 - \frac{t^2}{7}\right) + C = 3sin^{1/3}x\left(1 - \frac{sin^2x}{7}\right) + C.$$

Приклад 4. Знайти $\int tg^2xdx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int tg^2xdx = \left| \begin{matrix} t = tgx, x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int t^2 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = t - arctgt + C = tgx - x + C.$$

Приклад 5. Знайти $\int sin^4x \cdot cos^2xdx$.

Розв'язання. В нашому прикладі $m = 4, n = 2$ обидва додатні і парні, тобто маємо

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot sin^2x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot (sinx \cdot cosx)^2dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - cos2x) \cdot \frac{1}{4}sin^2 2xdx = \frac{1}{8}\int sin^2 2xdx - \frac{1}{8}\int cos2x \cdot sin^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - cos4x)\,dx - \frac{1}{16}\int sin^2 2x \cdot d(sin2x) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{1}{16} \cdot \frac{sin^3 2x}{3} + C = \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{sin^3 2x}{48} + C.$$

Приклад 6. Знайти $\int \frac{dx}{sinxsin2x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2x \cdot cosx}$.

Якщо в виразі $\frac{1}{2sin^2x \cdot cosx}$ замінити $cosx$ на $-cosx$, то дріб змінить знак на протилежний, тому тут треба застосувати підстановку $sinx = t$.

$$\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2x \cdot cosx} = \left| \begin{matrix} t = sinx, & x = arcsint \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, & cosx = \sqrt{1 - t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1 - t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1 - t^2 + t^2}{t^2(1 - t^2)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2t} - \frac{1}{4}ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C = -\frac{1}{2sinx} - \frac{1}{4}ln\left|\frac{sinx - 1}{sinx + 1}\right| + C.$$

Приклад 7. Знайти $\int \frac{2tgx + 3}{sin^2x + cos^2x}dx$.

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків у $sinx$ і $cosx$ підінтегральна функція не змінює знака, то застосовуємо підстановку $tgx = t$.

$$\int \frac{tgx + 5}{sin^2x + cos^2x}dx = \int \frac{tgx + 5}{(tg^2x + 1)cos^2x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{cos^2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t + 5}{t^2 + 1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2 + 1} + 5\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2}ln|t^2 + 1| + 5arctgt + C =$$

$$= \frac{1}{2}ln|tg^2x + 1| + 5arctg(tgx) + C = \frac{1}{2}ln|tg^2x + 1| + 5x + C.$$

Приклад 8. Знайти $\int \frac{dx}{5-4sinx+3cosx}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від $sinx$ і $cosx$. Тому виконаємо універсальну тригонометричну підстановку

$$\int \frac{dx}{5-4sinx+3cosx} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, & dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ sinx=\frac{2t}{1+t^2}, & cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2-8t+8}$$
$$=$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-4t+4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2}+C = \frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C.$$

Приклад 9. Знайти $\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $4-3cos^2x+5sin^2x = 4sin^2x+4cos^2x-3cos^2x+5sin^2x = 9sin^2x+cos^2x$, безпосередньою підстановкою одержимо

$$\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x} = \int \frac{dx}{9sin^2x+cos^2x} =$$

$$= \left| \begin{matrix} tgx=t, & dx=\frac{dt}{1+t^2} \\ sinx=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, & cosx=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{9\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}\cdot 3arctg(3t)+C = \frac{1}{3}arctg3tgx+C.$$

Приклад 10. Знайти $\int sin4x \cdot cos3xdx$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу $sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x +$ $\sin a{-}bx$, одержимо

$$\int sin4x \cdot cos3xdx = \frac{1}{2}\int (sin7x+sinx)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{cos7x}{7}-\frac{1}{2}\cdot cosx+C =$$

$$= -\frac{cos7x}{14}-\frac{cosx}{2}+C.$$

Приклад 11. Знайти $\int \frac{sin^4x}{cos^2x}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{sin^4x}{cos^2x}dx = \int \frac{(sin^2x)^2}{cos^2x}dx = \int \frac{(1-cos^2x)^2}{cos^2x}dx =$$

$$= \int \frac{1-2cos^2x+cos^4x}{cos^2x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{cos^2x} - 2\int dx + \int cos^2x\,dx = tgx - 2x + \frac{1}{2}\int (1+cos2x)\,dx =$$

$$= tgx - 2x + \frac{1}{2}x + \frac{sin2x}{4} + C.$$

1.9. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтеграл від будь-якої раціональної функції, як було показано вище, завжди береться в скінченному вигляді, чого не можна сказати про інтеграл від функції ірраціональної. Однак можна вказати на деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких беруться у скінченному вигляді. Наприклад:

1. Інтеграли виду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx$, де $R -$ раціональна функція, m_i і $n_i -$ натуральні числа $(i = 1, 2, \dots, p)$. Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^k$, де $k -$ найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$;

2. Інтеграли виду $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx$, де $R -$ раціональна функція, m_i і $n_i -$ натуральні числа $(i = 1, 2, \dots, p)$ і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ $(a, b, c, d -$ сталі дійсні числа). Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де $k -$ найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$;

3. Інтеграли виду $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $m -$ натуральне число, $a, b, c -$ такі дійсні числа, що $a \neq 0, b^2 + c^2 \neq 0$. Тут виконується підстановка $x - a = \frac{1}{t}$.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого виду від ірраціональної функції. Тут $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, тому $k = 12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Тобто

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^{12} \\ dx = 12 \cdot t^{11} dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12 \cdot t^{11} dt = 12 \int \frac{t^{17}}{t^3(t^5 - 1)} dt =$$

$$12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 - 1} = I$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Вилучаємо цілу частину і остачу діленням многочленів за допомогою кута:

$$\begin{array}{rl} -\begin{array}{l} t^{14} \\ \underline{t^{14} - t^9} \end{array} & \begin{array}{|l} \underline{t^5 - 1} \\ t^9 + t^4 \end{array} \\ -\begin{array}{l} t^9 \\ \underline{t^9 - t^4} \end{array} & \\ t^4 & \end{array}$$

Отже,

$$I = 12 \int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \int \frac{5t^4 dt}{t^5 - 1} \right) =$$

$$= \frac{6}{5} \left(t^{10} + 2t^5 + \frac{2}{5} ln|t^5 - 1| \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5} \left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + \frac{2}{5} ln \left| \sqrt[12]{x^5} - 1 \right| \right) + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл другого виду від ірраціональної функції. Тут: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, тому $k = 6$. Зробимо підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}} = \left| \begin{array}{c} 5x+1 = t^6 \\ x = \frac{1}{5}(t^6 - 1) \\ dx = \frac{6}{5}t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{6}{5}t^5 dt}{t^4 - t^3} = \frac{6}{5}\int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = I$$

Скоротивши дріб і поділивши чисельник на знаменник, отримаємо

$$I = \frac{6}{5}\int \frac{t^2 dt}{t-1} = \frac{6}{5}\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{6}{5}\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + C.$$

Оскільки $t = \sqrt[6]{5x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}} = \frac{6}{5}\left(\frac{\sqrt[3]{5x+1}}{2} + \sqrt[6]{5x+1} + ln\left|\sqrt[6]{5x+1} - 1\right|\right) + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл третього виду:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x - 1 = \frac{1}{t} \\ x = \frac{1}{t} + 1 \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \\ t = \frac{1}{x-1} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \sqrt{3 + 2\left(\frac{1}{t} + 1\right) - \left(\frac{1}{t} + 1\right)^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{3 + \frac{2}{t} + 2 - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 1}} = -\int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2 - 1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2} \cdot ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot ln\left|\frac{1}{x-1} + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - \frac{1}{4}}\right| + C.$$

4. Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ зводяться до інтегралів від раціональної відносно $sinx$ і $cosx$ функції за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

1. Для знаходження інтеграла $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$,застосовують підстановку $x=a\cdot sint$ (або $x=a\cdot cost$).

2. Для знаходження інтеграла $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, покладаємо, що $x=a\cdot tgt$ або ($x=a\cdot ctgt$).

3. Для знаходження інтеграла $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x=\frac{a}{cost}$ $\left(x=\frac{a}{sint}\right)$.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл першого типу, тому:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}=\left|\begin{array}{c}x=4sint\\ dx=4costdt\\ t=acrsin\dfrac{x}{4}\end{array}\right|=\int\frac{16sin^2t\cdot 4costdt}{\sqrt{16-16sin^2t}}=\int\frac{64sin^2tcostdt}{4\sqrt{1-sin^2t}}=$$

$$=16\int\frac{sin^2tcostdt}{\sqrt{cos^2x}}=16\int\frac{sin^2tcostdt}{cost}=16\int sin^2tdt=8\int(1-cos2t)dt=$$

$$=8t-4sin2t+C.$$

Враховуючи, що $sin2t=2sint\cdot cost=2sint\cdot\sqrt{1-sin^2t}=2\cdot\frac{x}{4}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}=$

$$=\frac{x}{8}\sqrt{16-x^2}\,,$$

остаточно будемо мати

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}=8acrsin\frac{x}{4}-\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+C.$$

Приклад 2. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл другого типу, тому:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = 3tgt \\ dx = \dfrac{3dt}{cos^2t} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3dt}{cos^2t}}{\sqrt{(9+9tg^2t)^3}} = \frac{3}{3}\int \frac{\frac{dt}{cos^2t}}{\sqrt{\left(1+\frac{sin^2t}{cos^2t}\right)^3}} =$$

$$= \int \frac{dt}{cos^2t\sqrt{\left(\frac{cos^2t+sin^2t}{cos^2t}\right)^3}} = \int \frac{cos^3tdt}{cos^2t} = \int costdt = sint + C.$$

Оскільки $sint = tgt \cdot cost = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$,

то остаточно одержимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + \mathrm{C}.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$.

Розв’язання. Врахочуючи, що даний інтеграл третього типу, тому:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{4}{cost} \\ dx = \dfrac{4sintdt}{cos^2t} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{4sintdt}{cos^2t}}{\frac{16}{cos^2t}\sqrt{\frac{16}{cos^2t}-16}} = \frac{1}{16}\int \frac{sintdt}{\sqrt{\frac{1-cos^2t}{cos^2t}}} =$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{sintdt}{\frac{sint}{cost}} = \frac{1}{16}\int costdt = \frac{1}{16}sint + C.$$

Оскільки $sint = \sqrt{1-cos^2t} = \sqrt{1-\frac{16}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$, то маємо:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}} = \frac{\sqrt{x^2-16}}{16x} + \mathrm{C}.$$

РОЗДІЛ 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ $(a < b)$ вісі Ox дана неперервна функція $f(x)$. Відрізок $[a, b]$ розіб’ємо на n частин, довжини яких можуть буми довільними.

Кожний такий відрізок будемо називати частковим. Абсциси точок розбиття позначимо через

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Довжину часткового відрізка, рівну різниці $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,2,\dots,n)$, позначимо через Δx_k:

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

На кожному частковому відрізку оберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через θ_k $(k = 1,2,\dots,n)$, обчислимо $f(\theta_k) -$ значення заданої функції $f(x)$ в цій точці. Знайдемо добуток числа $f(\theta_k)$ на довжину Δx_k відрізка, на якому взято точку θ_k, тобто $f(\theta_k)\Delta x_k$. Складемо суму таких добутків:

$$f(\theta_1)\Delta x_1 + f(\theta_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\theta_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\Delta x_k.$$

Така сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

За означенням, границя інтегральної суми, тобто

$$\lim_{\substack{max\Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\Delta x_k$$

якщо вона існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ на часткові, ні від вибору на них точок θ_k, називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким чином

$$\lim_{\substack{max\Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\theta_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

де, як і у невизначеному інтегралі, $f(x) -$ підінтегральна функція, $f(x)dx -$ підінтегральний вираз, $x -$ змінна інтегрування. Умовою існування цієї границі, тобто визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, є неперевність функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Число a називають нижньою межею інтегрування, число b – верхньою межею інтегрування.

Відзначимо, що величина визначеного інтеграла залежить лише від виду підінтегральної функції і від меж інтегрування a і b. Нічого не зміниться, якщо змінну інтегрування позначити іншою буквою, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt.$$

2.2. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ - будь-яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула має назву формули Ньютона-Лейбніца. Вона є основною формулою інтегрального числення. Для зручності її записують у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2.3. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. За означенням

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. За означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Якщо $f(x) \equiv 0$ для $x\epsilon[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0.$$

4. Якщо $f(x) \equiv 1$ для $x\epsilon[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a.$$

5. Якщо $f(x) -$ інтегровна функція на відрізку $[a,b]$ і $c -$ стала, то на цьому відрізку інтегровна і функція $c \cdot f(x)$, причому

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

тобто сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

6. Якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ - інтегровні функції на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку інтегровні і функції $f_1(x) \pm f_2(x)$, причому

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)\ )dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

7. Якщо $f(x) -$ інтегровна функція на відрізку $[a,b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x\epsilon[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ - інтегровні функції на відрізку $[a,b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x\epsilon[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

9. Якщо $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку, то на цьому відрізку інтегровна і функція $|f(x)|$, причому

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

10. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ і $a<c<b$, то ця функція інтегровна і на відрізках $[a,c]$ і $[c,b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають адитивною властивістю визначеного інтеграла.

11. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, де $a<b$, і $m \le f(x) \le M$ для $x\epsilon[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Тут $m-$ найменше, а $M-$ найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Ці нерівності дають змогу оцінити значення визначення інтеграла.

12. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то існує точка $c\epsilon[a,b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

При цьому значення функції $f(x)$ у точці c називають середнім значенням цієї функції на відрізку $[a,b]$.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4}$.

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(10+2x)^{-4}\cdot 2dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(10+2x)^{-3}}{-3}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(10+2x)^3}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{(10+2)^3}-\frac{1}{(10-2)^3}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{1728}-\frac{1}{512}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{8-27}{13824} = \frac{19}{82944}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} dy$.

Розв'язання.

$$\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} dy = \int_4^9 \frac{(\sqrt{y}+1)(\sqrt{y}-1)}{\sqrt{y}+1} dy = \int_4^9 (\sqrt{y}-1) dy =$$

$$= \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y \right)\Bigg|_4^9 = \frac{2 \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3} - 9 - \frac{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} + 4 = 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = arcsin \frac{x-2}{3}\Bigg|_2^5 =$$

$$= arcsin \frac{5-3}{3} - arcsin \frac{2-2}{3} = arcsin 1 - arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2.4. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $x = \varphi(t) -$ функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$ для $\alpha \leq t \leq \beta$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Цю формулу називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Із поданого випливає, що функція $x = \varphi(t)$ на відрізку $[a, b]$ повинна бути монотонною або іншими словами всі значення функції $\varphi(t)$ повинні знаходитися на відрізку $[a, b]$.

Зауважимо, що заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності і обов'язкового виконання усіх перерахованих умов, накладених на функцію $x = \varphi(t)$.

Відзначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності повертатися до початкової змінної, як це робиться при знаходженні невизначеного інтеграла, а досить лише перерахувати межі інтегрування для нової змінної. Для цього до рівності $x = \varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню межу a і верхню межу b інтегрування і розв'язуємо рівняння $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β межами для нової змінної інтегрування. Якщо кожне з рівнянь $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$ задовольняє не одно, а декілька значень t, то за α і β можна прийняти будь-яке з них. Однак вільність вибору обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ не виходили із відрізка $[a, b]$, на якому визначена и неперервна підінтегральна функція $f(x)$.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}} = \left| \begin{array}{ll} & t = 1 + lnx, dt = \dfrac{dx}{x} \\ e^3: & t_{в} = 1 + lne^3 = 1 + 3 = 4 \\ 1: & t_{н} = 1 + ln1 = 1 + 0 = 1 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 =$$

$$= 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 2(2-1) = 2.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \left| \begin{array}{c} x^2 - 1 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ xdx = tdt \\ 1 - 1 = t^2, t_{н} = 0 \\ 4 - 1 = t^2, t_{в} = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \cdot xdx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2+1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = (t - arctgt)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} - arctg\sqrt{3} + arctg0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx} = \left| \begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2}, x = 2arctgt \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_{н} = tg0 = 0, t_{в} = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Приклад 4. Обчислити $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t^2} \\ \quad\frac{1}{t} = 1, t_{н} = 1 \\ \quad\frac{1}{t} = 3, t_{в} = \frac{1}{3} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{1}{3}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} = -\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}}$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}} = ln\left|t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^1 =$$

$$= ln\left|\frac{7}{2} - \sqrt{7}\right| - ln\left|\frac{17}{6} + \sqrt{\frac{25}{9}}\right| = ln\left|\frac{\frac{7-2\sqrt{7}}{2}}{\frac{17+10}{6}}\right| = ln\left|\frac{7-2\sqrt{7}}{9}\right|.$$

2.5. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежимося розв'язанням кількох прикладів.

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot cosxdx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot cosxdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} = (x\cdot sinx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot sin\frac{\pi}{2} - 0 + cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2} - cos0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_1^2 \frac{lnxdx}{x^5}$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{lnxdx}{x^5} = \begin{vmatrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^5}, & v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{vmatrix} = \left(-\frac{lnx}{4x^4}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right)\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{ln2}{64} + \frac{1}{4}\cdot\int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Big|_1^2 = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{16} = \frac{15 - 2ln2}{256}.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_0^1 xarctgxdx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 xarctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \left(arctgx\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot arctg1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{(x - arctgx)}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1 - arctg1}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

2.6. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласними інтегралами називають інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування (інтеграли з нескінченними межами інтегрування) і інтеграли від необмежених функцій (інтеграли від функцій, які мають нескінченний розрив).

2.6.1 Невласні інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a, +\infty)$ і інтегровна на відрізку $[a, b]$ при всякому $b > a$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує при всякому $b \geq a$ і, отже, він є деякою функцією від b, визначеною на проміжку $(a, +\infty)$, тобто

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо функція $I(b)$ при $b \to +\infty$ має скінченну границю A, то цю границю називають невласним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $(a, +\infty)$ і позначають наступним чином:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

При цьому вважають, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається (до числа A).

Якщо ж функція $I(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не має скінченної границі, то в такому разі вважають, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Аналогічно визначається невласний інтеграл вигляду $\int_{-\infty}^b f(x)dx.$ Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, b)$ і інтегровна на відрізку $[a, b]$ при всякому $a < b$, то за означенням

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ називають збіжним, якщо існує скінченна границя, що стоїть у правій частині рівності і розбіжним, якщо такої скінченної границі не існує.

Нарешті , якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, +\infty)$, то за означенням,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

де c $-$ будь-яке стале число, причому невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають збіжним, якщо ябігаються обидва невласних інтеграли, які стоять у правій частині рівності . Якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають розбіжним.

2.6.2. Заміна змінної у невласному інтегралі

Виконується за тим же правилом, що і у визначеному інтегралі. Тільки звернемо увагу на наступне.

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $x \geq a.$ Якщо функція $x = \varphi(t)$, яка визначена на проміжку $\alpha < t < \beta$ (α і β можуть бути і нескінченними), має неперервну похідну $\varphi'(t) \neq 0$ і $\lim_{t\to\alpha+0} \varphi(t) = a,$ $\lim_{t\to\beta-0} \varphi(t) = +\infty$, то

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{xln^4x}$.

Розв'язання.

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{xln^4x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{xln^4x}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3ln^3x}\bigg|_e^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3ln^3b}+\frac{1}{3ln^31}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Отже, за означенням, даний інтеграл збігається.

Приклад 2. Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Розв'язання.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{(x+1)^2+4}=$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\bigg|_a^b\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{b+1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}arctg\frac{a+1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg(+\infty)-\frac{1}{2}arctg(-\infty)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, за означенням, цей інтеграл також збігається.

Приклад 3. Обчислити $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}$.

Розв'язання.

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}=\left|\begin{matrix}t=\ln(x+3)\,,dt=\dfrac{dx}{x+3}\\ t_{в}=\ln(b+3)\\ t_{н}=ln5\end{matrix}\right|$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_{ln5}^{\ln(b+3)}\frac{dt}{t}=\lim_{b\to+\infty}lnt|_{ln5}^{\ln(b+3)}=\lim_{b\to+\infty}(\ln(\ln(b+3))-lnln5)=$$

$$=\infty-ln5=\infty.$$

Отже, за означенням, даний інтеграл розбігається.

2.6.3. Невласні інтеграли від необмежених функцій

Якщо функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі точки c відрізка $[a,b]$ і неперервна при $a\le x<c$ і $c<x\le b$, то за означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,$$

де $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$ змінюються незалежно одне від одного. У випадку $c = b$ або $c = a$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx,$$

або

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

Якщо границі, які стоять у правих частинах рівностей вище наведених рівностей, існують і скінченні, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають збіжним.

Якщо ж границі не існують або дорівнюють нескінченності, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Підкреслимо, що невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ виражений першою рівністю, називають збіжним лише в тому випадку, коли обидві границі правої частини існують и скінченні.

Якщо ж принаймні одна з цих границь не існує або дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Зауважимо, що позначення невласного інтеграла нічим не відрізняється від позначення визначеного інтеграла. Тому, щоб розрізнити, яким буде інтеграл $\int_a^b f(x)dx$: визначеним чи невласним, треба перевірити, чи буде функція $f(x)$ інтегровною на відрізку $[a, b]$.

Якщо $f(x)$ необмежена на проміжку $[a,b)$ або на проміжку $(a,b]$, або в будь-якому околі точки c відрізка $[a, b]$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде невласним.

Відзначимо також, що коли функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі точки c відрізка $[a, b]$ й існує неперервна на $[a, b]$ функція $F(x)$ така, що $F'(x) = f(x)$ при $x \neq c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Зразки розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не визначена в точках $x_1=-1$ і $x_2=1$, причому при $x \to -1$ і $x \to 1$ функція $f(x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ необмежено зростає. Таким чином, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції. За означенням,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1+\varepsilon_1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}arcsinx|_{-1+\varepsilon_1}^{0}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}arcsinx|_{0}^{1-\varepsilon_2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}(arcsin0-\arcsin(-1+\varepsilon_1))+\lim_{\varepsilon_2\to 0}(arcsin(1-\varepsilon_2)-arcsin0)=$$

$$=arcsin1+arcsin1=2arcsin1=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_{1}^{2}\frac{dx}{xlnx}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{xlnx}$ не визначена в точці $x=1$, яка є нижньою межею інтегрування, причому при $x\to 1$ функція $f(x)=\frac{1}{xlnx}$ необмежено зростає. Тому, за означенням,

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{xlnx}=\lim_{\varepsilon\to +0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{xlnx}=\lim_{\varepsilon\to +0}lnlnx|_{1+\varepsilon}^{2}=\lim_{\varepsilon\to +0}\big(lnln2-lnln(1+\varepsilon)\big)=$$

$$=lnln2-ln0=\infty.$$

Таким чином, даний інтеграл розбігається.

Приклад 3. Обчислити $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$ не існує в точках $x=1\epsilon[0,2]$ і $x=3$, яка не належить відрізку $[0,2]$. При $x\to 1$ функція $f(x)\to\infty$. Отже

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^2-1} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2} ln\left|\frac{x-2-1}{x-2+1}\right|\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2} ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(ln\left|\frac{1-\varepsilon-3}{1-\varepsilon-1}\right| - ln3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(ln\left|\frac{-\varepsilon-2}{-\varepsilon}\right| - ln3\right) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(ln\left|1+\frac{2}{\varepsilon}\right| - ln3\right) = \frac{1}{2}(\infty - ln3) = \infty.$$

РОЗДІЛ 3. ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

3.1. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ

1) Випадок прямокутних координат

Нагадаємо, що плоска фігура ,обмежена прямими $y = 0, x = a, x = b$ і графікрм неперервної і невід'мної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ (рис. 1), називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі *Ox,* обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо криволінійна трапеція розташована нижче за вісь *Ox* ($f(x) < 0$), то її площа визначається за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

У загальному випадку $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

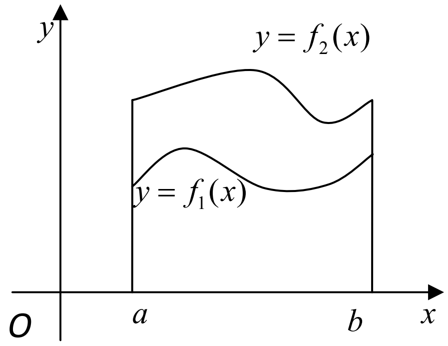


Рис.1

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, причому на відрізку $[a;b]$ $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис.1), то її площу визначають за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx\,.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y = x^2$ і $y = 4$.

Розв'язання. Фігура має вигляд , зображений на (Рис.2), де $y = x^2$ – парабола, а $y = 4$ – пряма лінія:

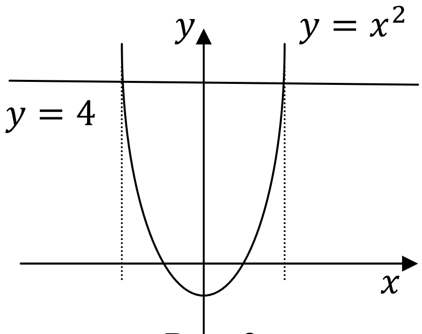


Рис. 2

Знайдемо її площу:

$$S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\ \ (\text{од}^2)$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$.

Розв'язання. Рівняння $y^2 = 2x + 1$ визначає параболу, а рівняння $x - y - 1 = 0$ – пряму лінію (Рис. 3).

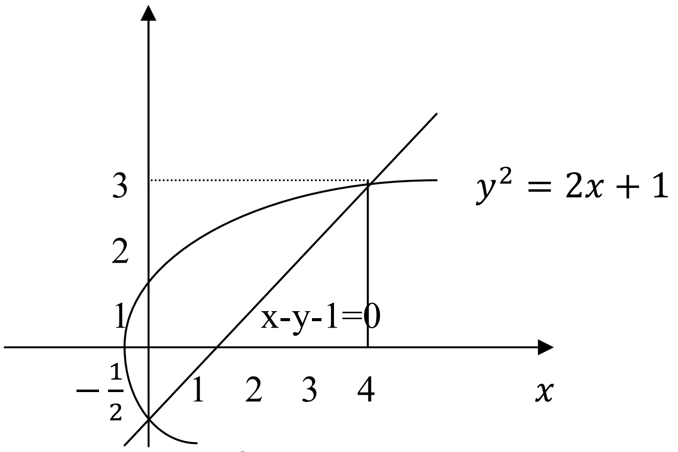


Рис. 3

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

Знайдемо точки перетину прямої і параболи: $A(0; -1)$ і $B(4; 3)$.

Обчислимо площу фігури, скориставшись формулою:

$$S = \int_c^d (x_п - x_л)\, dx\ ,$$

де $x_п = y + 1$ - лінія, що обмежує фігуру справа, $x_л = \frac{y^2 - 1}{2}$ - лінія, що обмежує фігуру зліва і $-1 \le y \le 3$, одержимо:

$$S = \int_{-1}^{3} (y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2})\, dx = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{16}{3}\ (\text{од}^2).$$

2) Випадок параметричного задання функції

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

(де $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$) і ці параметричні рівняння визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Отже,

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt\ .$$

Приклад. Обчислити площу першої арки циклоїди:

$$\begin{cases} x = 3(t - sint), \\ y = 3(1 - cost). \end{cases}$$

Розв'язання. При $t\epsilon[0;2\pi]$ визначається траєкторія руху точки першої арки циклоїди, отже:

$$S=\int_0^{2\pi} 9\,(1-cost)(1-cost)dt = 9\int_0^{2\pi}(1-2cost+cos^2t)\,dt =$$

$$=9\left(\frac{3}{2}t-2sint+\frac{1}{4}sin2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 27\pi\ \ (\text{од}^2).$$

3) Випадок полярної системи координат

Визначимо площу криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $r=r(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ (рис.4).

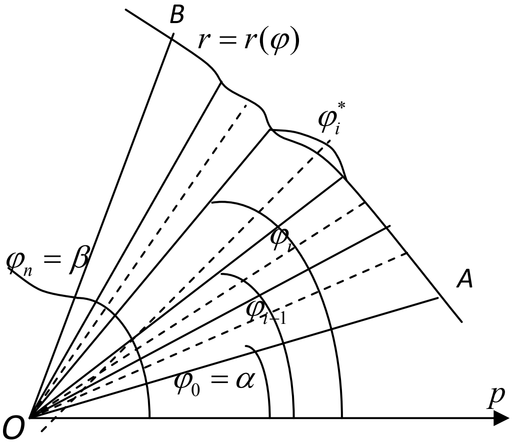


Рис.4

Розіб'ємо криволінійній сектор OAB радіус – векторами $\varphi=\alpha=\varphi_0$, $\varphi=\varphi_1,...,\varphi=\varphi_n$ на n частин довільним чином. Площу сектора ΔS_i ($i=1,2,...,n$), що відповідає проміжку кутів $[\varphi_{i-1};\varphi_i]$, визначимо як площу сектора круга з радіусом $r(\varphi_i^*)$, де $\varphi_i^*\in[\varphi_{i-1};\varphi_i]$, тобто

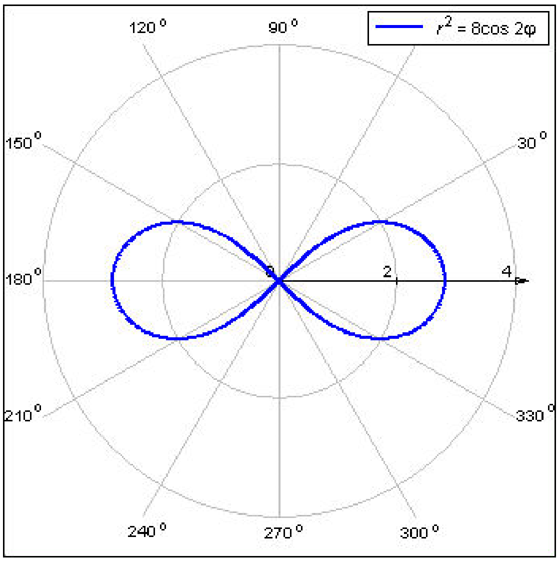
$$\Delta S_i=\frac{1}{2}r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i\quad(\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1})$$

Складемо інтегральну суму $\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i$. Її границя при $\max\Delta\varphi_i\to 0\ (n\to\infty)$ є визначеним інтегралом і дає площу сектора OAB.

Отже, формула площі криволінійного сектора має вигляд

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі $r = 2\sqrt{2cos2\varphi}$.



Розв'язання. Якщо полярний кут змінюється від 0 до $\pi/4$, то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 8cos2\varphi\, d\varphi = 16 \cdot \frac{1}{2} sin2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 8\ (\text{од}^2).$$

3.2. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ

1) Випадок прямокутних координат

Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива AB, рівняння якої $y = f(x)$, де $a \le x \le b$ (рис.5)

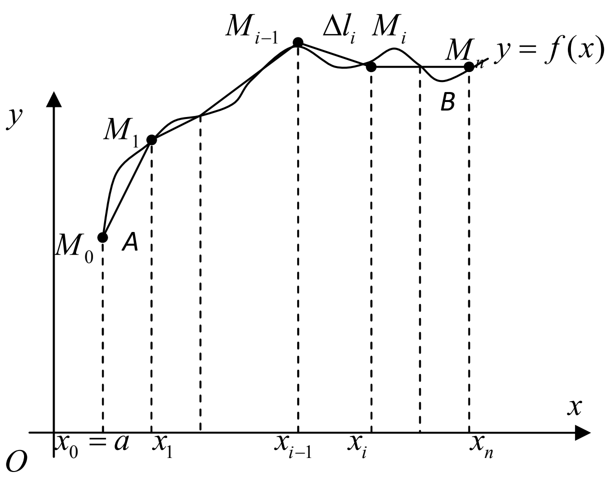


Рис.5

Під довжиною дуги кривої AB розуміють границю, до якої прямує довжина ламаної, що вписана в цю дугу, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай функція $y = f(x)$ та її похідна неперервні на відрізку $[a;b]$. Тоді довжина дуги кривої $y = f(x)$ дорівнює $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

або у скороченому вигляді $l=\int_a^b\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $y=ln\left(\frac{5x}{2}\right)$, якщо $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.

Розв'язання. Довжина дуги:

$$l=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{2}{5x}\cdot\frac{5}{2}\right)^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx=\left|\begin{array}{c}x=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{cos^2t}\\ t_{\text{в}}=arctg\sqrt{8}\\ t_{\text{н}}=\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}\frac{cost}{cost\cdot sint}\cdot\frac{dt}{cos^2t}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}\frac{sintdt}{sin^2tcos^2t}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}\frac{d(cost)dt}{(cos^2t-1)cos^2t}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}\left(\frac{1}{cos^2t-1}-\frac{1}{cos^2t}\right)d(cost)dt=\left(\frac{1}{2}ln\left|\frac{cost-1}{cost+1}\right|+\frac{1}{cost}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}=$$

Звернемо увагу на те, що $cost=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}}$, тобто $\cos(arctg\sqrt{8})=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(arctg\sqrt{8})}}=\frac{1}{3}$, одержимо:

$$l=\frac{1}{2}ln\left|\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}\right|+3-\frac{1}{2}ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|-2=\frac{1}{2}ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ln\frac{1}{3}+1=\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}+1\ (\text{од.}).$$

2) Випадок параметричного задання кривої

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in[\alpha;\beta],$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними і $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тоді довжина l кривої AB визначається за формулою

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Приклад. Обчислити длину дуги лінії $x=3cost,\ y=3sint,\ t\epsilon[0;2\pi]$.

Розв'язання. $x'=-3sint, y'=3cost$, отже:

$$l=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{9sin^2t+9cos^2t}\,dt=3\int_{0}^{2\pi}dt=3t|_0^{2\pi}=6\pi.$$

3) Випадок полярної системи координат

Нехай крива AB задана рівнянням $r=r(\varphi)$ у полярних координатах, де функції $r(\varphi)$ і $r'(\varphi)$ неперервні при $\alpha\le\varphi\le\beta$.

Отже, формула довжини дуги кривої має вигляд

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

Приклад. Знайти довжину дуги кардіоїди $r=a(\cos\varphi+1)$, $\varphi\in[0;2\pi]$.

Розв'язання. За формулою довжини дуги кривої у полярній системі координат маємо:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1+\cos\varphi))^2+(a(-\sin\varphi))^2}d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=2a\int_0^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=4a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a.$$

3.3. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМУ ТІЛА

ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМУ ТІЛА ЗА ПЛОЩАМИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЕРЕРІЗІВ

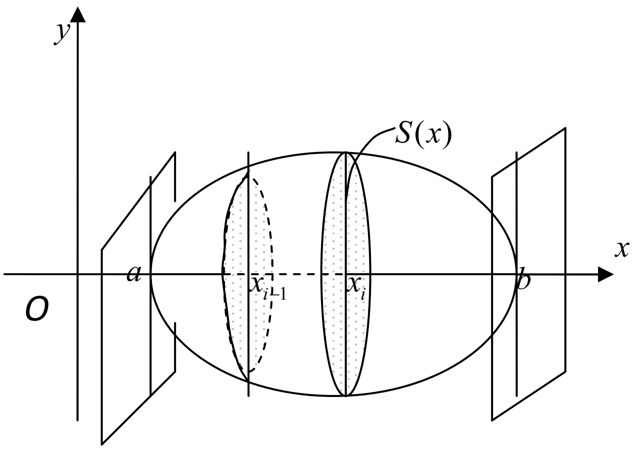


Рис.6

Визначимо об’єм V тіла, якщо відома площа перерізу цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі Ox: $S = S(x),\ a \le x \le b$ (рис.6), як

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

Об’єм тіла обертання

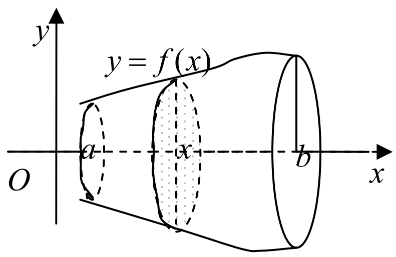


Рис.7

Об’єм тіла обертання навколо осі Ox, обмежену прямими $x = a$, $x = b$:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx .$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y),\ \varphi(y) \ge 0$ і прямими $x = 0,\ y = c,\ y = d\ (c < d)$, то об’єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі Oy, дорівнює:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy .$$

Приклад. Знайти об’єм тіла, яке утворюється обертанням фігури , обмеженої лініями $x = \sqrt{2y}$, $y = 2\sqrt{2}$ навколо осі Oy (рис.8).

Розв’язання.

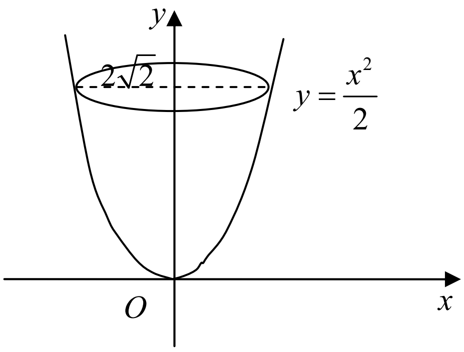


Рис.8

Скористаємось формулою

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy,$$

тобто

$$V_y=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}2ydy=\pi\, y^2\Big|_0^{2\sqrt{2}}=8\pi.$$

РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функція однієї незалежної змінної не охоплює всі залежності, які є в природі. Тому вводять поняття функції декількох змінних.

Більшу увагу будемо приділяти функцію двох змінних, бо всі важливі факти теорії функцій декількох змінних можна проілюструвати на функціях двох змінних. Крім того, для функцій двох змінних можна надати наглядну геометричну інтерпретацію.

4.1. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Зміна z називається функцією двох незалежних змінних x і y, визначеною на множині D, якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом ставиться у відповідність одне і тільки одне значення змінної z і позначають: $z = f(x, y)$.

Множина впорядкованих пар чисел (x, y), для яких функція z визначена, називається областю визначення функції.

Приклад 1. Побудувати область визначення функцій:

$$а)\ z=\sqrt{1-x^2-y^2};$$

$$б)\ z=\ln(x^2-y^2-R^2),\qquad R>0;$$

$$в)\ z=arccos\frac{x}{2}+arcsin\frac{y}{2}.$$

Розв'язання: а) добування квадратного кореня можливе за умовою:

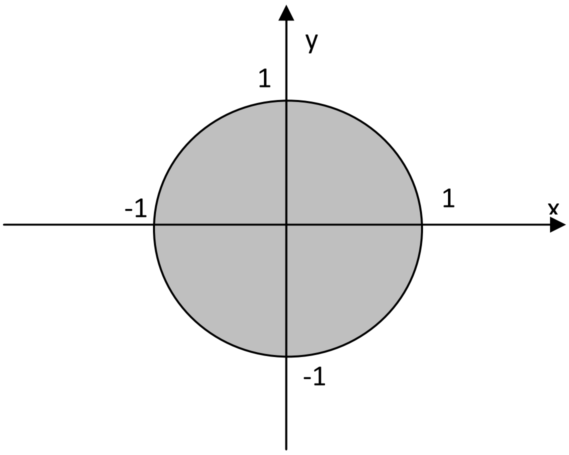


Рис.1

$1 - x^2 - y^2 \geq 0$; маємо $x^2 + y^2 \geq 1$ – це замкнений круг, радіус якого дорівнює 1 з центром в початку координат (0,0).

На рис.1 область визначення заштрихована.

б) за властивістю логарифмічної функції маємо:

$$x^2 - y^2 - R^2 > 0, \quad x^2 - y^2 > R^2, \quad \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} > 1.$$

Відомо, що $\frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2} = 1 -$ це рівняння гіперболи. У даному випадку пів вісі гіперболи: $a = R$, $b = R$. Асимптоти гіперболи $y = \pm x$.

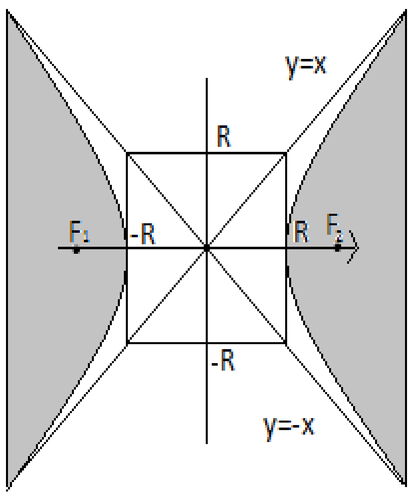
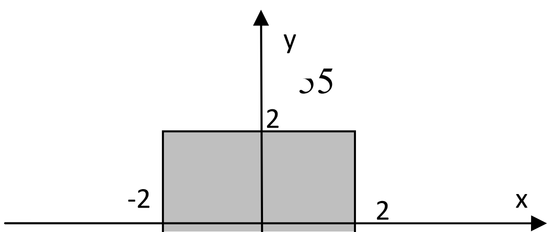


Рис.2

Таким чином область визначення внутрішня частина гіперболи (це частина площини, яка на рис.2 заштрихована).



-2

Рис. 3

в) за властивістю обернених тригонометричних функцій синуса та косинуса маємо: $\left|\frac{x}{2}\right| \leq 1$, $\left|\frac{y}{2}\right| \leq 1$.

Тобто $-2 \leq x \leq 2$ та $-2 \leq y \leq 2$. Маємо внутрішню область, обмежену лініями $x = \pm 2, y = \pm 2$.

На рис.3 область визначення заштрихована.

4.2. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай задана функція $z = f(x, y)$, визначена і неперервна в деякій області *D*. Вважаємо, що точки з координатами $(x, y), (x + \Delta x, y), (x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, де Δx і Δy – приріст аргументів, теж належать області *D*.

Частинними приростами функції $z = f(x, y)$ по незалежним змінним x і y називають:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)\,;$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ називаєть:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\,.$$

Частинними похідними функції $z = f(x, y)$ по змінним x і y називають границі відношення частинних приростів $\Delta_x z$ та $\Delta_y z$ до приросту відповідної змінної при умові, що остання прямує до нуля:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x};\ \ z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}\,.$$

Прийнятні ще такі позначення частинних похідних: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Частинна похідна є звичайною похідною, припускаючи, що змінюється одна змінна, по якій йде диференціювання, а інша змінна залишається сталою.

Приклад 2. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^{lgy}$, б) $z = 3x^2y + 6y - x^9$.

Розв'язання: а) при знаходженні частинної похідної по змінній x вважаємо y постійною і навпаки, при знаходженні частинної похідної по змінній y вважаємо x постійною:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = lgy \cdot x^{lgy-1}$; (диференціюємо як степеневу функцію);

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{lgy} \cdot lnx \cdot \frac{1}{x \cdot ln10}$; (диференціюємо як показникову функцію).

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 9x^8$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 6$.

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці (x, y) якщо повний приріст її в цій точці можна представити так:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

де $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0$, $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$

A та B не залежать від Δx, Δy.

Сума $A \cdot \Delta x + \mathrm{B} \cdot \Delta y$ представляє собою головну частину приросту функції $z = f(x, y)$, називається її повним диференціалом і позначається:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y.$$

Вирази $A\,\Delta x$ і $B\,\Delta y$ називають частинними диференціалами та позначають $d_x z = A\Delta x$ і $d_y z = B\Delta y$.

Отже, повний диференціал функції має вигляд:

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні, частинні диференціали та повний диференціал функції:

$$z = cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right).$$

Розв'язання. Частинні похідні знаходимо від складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x(x^3 + y^3) - 3x^2 \cdot (x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2y(x^3 + y^3) - 3y^2(x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2}.$$

Частинні диференціали функції:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dx;$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dy.$$

Повний диференціал функції:

$$dz = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \left(\frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dx + \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2} \cdot dy\right).$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції

$$U(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Розв'язання. Маємо функцію трьох змінних. При диференціюванні по одній змінній дві другі змінні рахуємо сталими величинами. Отже:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-x}{\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}} \cdot 2y = \frac{-xy}{(y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{-x}{\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}} \cdot 2z = \frac{-xz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Повний диференціал:

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{x(ydy + zdz)}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Приклад 5. Обчислити значення частинних похідних від даної функції у заданій точці $M_0(2,1,1)$.

$$z = f(x, y, z) = arcctg\frac{xz}{y^2}.$$

Розв'язання. Тут $U = f(x, y, z)$. Отже:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{1+\frac{x^2z^2}{y^4}} \cdot \frac{z}{y^2} = \frac{-y^4z}{(y^4+x^2z^2)y^2} = \frac{-y^2z}{y^4+x^2z^2}; \quad f'_x(M_0) = \frac{-1}{5}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{1+\frac{x^2z^2}{y^4}} \cdot \frac{(-xz)}{y^4} \cdot 2y = \frac{2xyz}{y^4+x^2z^2}; \quad f'_y(M_0) = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-1}{1+\frac{x^2z^2}{y^4}} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{-xy^4}{(y^4+x^2z^2)y^2} = \frac{-xy^2}{y^4+x^2z^2}; \quad f'_z(M_0) = \frac{-2}{5}.$$

4.3. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДНОЇ ТА НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЙ

4.3.1. Випадок однієї незалежної змінної

Нехай $z = f(x, y)$ – диференційована функція двох змінних $x, y \in D$, і аргументи x, y є диференційованими функціями деякої змінної t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Тоді $z = f(x(t), y(t)) = \varphi(t)$ – функція однієї змінної.

Похідна дорівнює:

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $z = e^{x^2+y^2}$, якщо $x = a\cos t$; $y = a\sin t$.

Розв'язання. Підставимо в функцію значення x, y:

$$z = e^{a^2cos^2t + a^2sin^2t} = e^{a^2(cos^2t+sin^2t)} = e^{a^2},$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = \left(e^{a^2}\right)'_t = 0.$$

Приклад 7. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^5 + 2xy - y^3$ і, де:

$$x = cos2t;\ \ y = arctg\ t.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка значень x, y в функцію спрощення не дає, тому:

$$\frac{dz}{dx} = 5x^4 + 2y; \quad \frac{dz}{dy} = 2x - 3y^2;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -2cos2t; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Маємо:

$$\frac{dz}{dt} = (5x^4 + 2y) \cdot (-2cos2t) + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

Залишимо відповідь у такому вигляді.

4.3.2. Випадок декількох незалежних змінних

Якщо $z = f(x, y)$ має змінні $x = x(U, V), y = y(U, V)$ – функція двох змінних U, V і мають місце формули:

$$\frac{\partial z}{\partial U} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial U};$$

$$\frac{\partial z}{\partial V} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial V}.$$

Структура цих формул зберігається для більшого числа змінних.

Приклад 8. Знайти $\frac{\partial z}{\partial U}$, $\frac{\partial z}{\partial V}$ якщо $z = 3^{x^2} \cdot arctg\ y$; $x = \frac{U}{V}$; $y = U \cdot V$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2} \cdot ln3 \cdot 2x \cdot arctg\ y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3^{x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial U} = \frac{1}{V}; \ \frac{\partial x}{\partial V} = -\frac{U}{V^2}; \ \frac{\partial y}{\partial U} = V; \ \frac{\partial y}{\partial V} = U.$$

$$\frac{\partial z}{\partial U} = 3^{x^2} \cdot ln3 \cdot 2x \cdot arctg\ y \cdot \frac{1}{V} + \frac{3^{x^2}}{1+y^2} \cdot V;$$

$$\frac{\partial z}{\partial V} = 3^{x^2} \cdot ln3 \cdot 2x \cdot arctg\ y \cdot \left(-\frac{U}{V^2}\right) + \frac{3^{x^2}}{1+y^2} \cdot U.$$

Відповідь можна залишити в такому вигляді, або можна виразити через U, V:

$$\frac{\partial z}{\partial U} = 3^{\frac{U^2}{V^2}} \cdot ln3 \cdot 2\frac{U}{V} \cdot arctg(UV) \cdot \frac{1}{V} + \frac{3^{\frac{U^2}{V^2}} \cdot V}{1 + U^2V^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial V} = 3^{\frac{U^2}{V^2}} \cdot ln3 \cdot 2\frac{U}{V} \cdot arctg(UV) \cdot \left(-\frac{U}{V^2}\right) + \frac{3^{\frac{U^2}{V^2}} \cdot U}{1 + U^2V^2}.$$

4.3.3. Диференціал складної функції

Нехай $z = f(x, y)$ - складна функція, де $x = x(U, V), y = y(U, V)$.

Диференціал складної функції можна одержати за формулами:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad \text{де}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U}dU + \frac{\partial x}{\partial V}dV; \;\; dy = \frac{\partial y}{\partial U}dU + \frac{\partial y}{\partial V}dV.$$

В результаті підстановки і перегрупування, одержуємо формулу:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial U}dU + \frac{\partial z}{\partial V}dV.$$

Приклад 9. Знайти диференціал функції

$$z = \frac{x^2}{y}, \text{якщо } \; x = U - 2V \text{ і } y = 2U + V.$$

Розв'язання. Обчислимо всі частинні похідні та диференціали по відповідним змінним:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}; \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2}; \;\; \frac{\partial x}{\partial U} = 1; \;\; \frac{\partial x}{\partial V} = -2; \;\; \frac{\partial y}{\partial U} = 2; \;\; \frac{\partial y}{\partial V} = 1;$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial U}dU + \frac{\partial x}{\partial V}dV; \;\; dx = dU - 2dV;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial U}dU + \frac{\partial y}{\partial V}dV; \;\; dy = 2dU + dV.$$

Отже, диференціал даної функції матиме вигляд:

$$dz = \frac{2x}{y}(dU - 2dV) - \frac{x^2}{y^2}(2dU + dV) = \left(\frac{2x}{y} - \frac{2x^2}{y^2}\right)dU -$$

$$-\left(\frac{4x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dV = \frac{x}{y}\left[2\left(1 - \frac{x}{y}\right)dU - \left(4 + \frac{x}{y}\right)dV\right] =$$

Переходимо до змінних U, V:

$$dz = \frac{U-2V}{2U+V}\left[2\left(1-\frac{U-2V}{2U+V}\right)dU - \left(4+\frac{U-2V}{2U+V}\right)dV\right] =$$

$$= \frac{U-2V}{(2U+V)^2}[2(U+3V)dU - (9U+2V)dV].$$

4.3.4. Диференціювання функції, яка задана неявно.

Функція $z = f(x, y)$ змінних x, y задана неявно, якщо вона задається рівнянням $F(x,y, z) = 0$, яке відносно z розв'язати неможливо. Тобто, при кожному значенні x_0, y_0 з області визначення неявно заданої функції, вона приймає єдине значення z_0, таке, що $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Якщо $F(x,y, z) = 0$ диференційована по змінним x, y, z в деякій області D і $F_z'(x, y, z) \neq 0$, то рівняння $F(x, y, z) = 0$ визначає однозначну функцію, задану неявно $z(x, y)$, теж диференційовану, і її частинні похідні обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}.$$

Приклад 10. Знайти частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої рівнянням

$$e^z + z - x^2y + 1 = 0$$

Розв'язання. Маємо $F(x, y, z) = e^z + z - x^2y + 1$, тому:

$$F_x' = -2xy; \quad F_y' = -x^2; \quad F_z' = e^z + 1.$$ Отже:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)} = \frac{2xy}{e^z+1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)} = \frac{x^2}{e^z+1}.$$

Приклад 11. Знайти частинні похідні функції, та обчислити їх з точністю 0,001 у точці $M_0(2, 1, 1)$

$$z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0.$$

Розв'язання. $F_x' = 6xy + z - 2$, (y, z вважаємо постійними);

$F_y' = 3x^2 + 2yz^2 + 1$, (x, z вважаємо постійними);

$F_z' = 3z^2 + x + 2y^2 z,$ (x, y вважаємо постійними);

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2 z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2 z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big/_{(2,1,1)} = -\frac{11}{6} \approx -1{,}8333; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\Big/_{(2,1,1)} = -\frac{15}{6} \approx -2{,}500.$$

4.4. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ S

Розглянемо одне з геометричних застосувань частинних похідних функції двох змінних.

Нехай $z = f(x, y)$ диференційована в точці $(x_0, y_0) \in D \in R^2$.

Виділимо фрагмент рис.4 поверхні S, яку утворює дана функція, між площинами: $x = x_0$, $y = y_0$, $x = 0$ та $y = 0$ які перетинають її по лініям $z_0(y)$ та $z_0(x)$ відповідно.

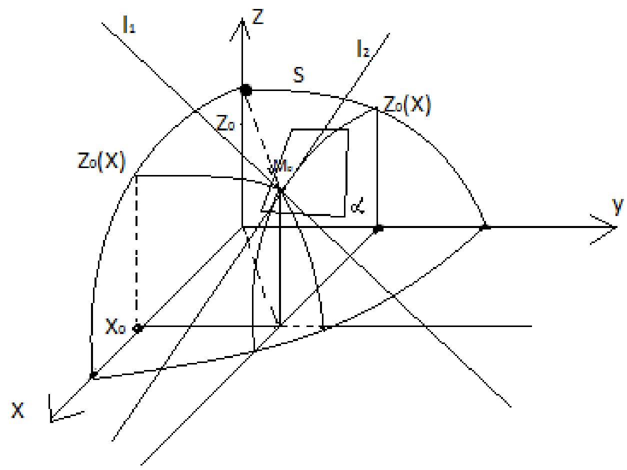


Рис.4

ℓ_1, ℓ_2 – дотичні в точці M_0, які обумовлюють площину α, яка називається дотичною площиною до поверхні S у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Її рівняння має вигляд:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

A і *B* невідомі, які обчислюються за наступним алгоритмом.

Рівняння ℓ_1: $z - z_0 = f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$; $x = x_0$.

Рівняння ℓ_2: $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$; $y = y_0$.

Розв'язавши систему, яку складено із умови $\ell_1 \in \alpha$:

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0); \quad x = x_0 \\ z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \end{cases}.$$

Одержимо: $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Аналогічно, $\ell_2 \in \alpha$

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0); \quad y = y_0 \\ z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) \end{cases}.$$

Одержимо: $A = f'_x(x_0, y_0)$.

Отже, рівняння дотичної площини до поверхні S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Пряма лінія, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна дотичній площині, побудованій в цій точці, називається нормаллю.

Використовуючи умову перпендикулярності прямої і площини у просторі, одержуємо канонічне рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Якщо поверхня S задається функцією $F(x,y,z) = 0$, то відповідні *рівняння дотичної площини і нормалі* мають вигляд:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0)}.$$

Приклад 12. Поверхня S задана функцією $x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0$. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до неї у точці $M_0(3, 2, 1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні: $F'_x = 2x$; $F'_y = 2y$; $F'_z = 2z$.

$$F'_x(M_0) = 2 \cdot 3 = 6; \; F'_y(M_0) = 2 \cdot 2 = 4; \; F'_z(M_0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Рівняння дотичної площини має вигляд:

$$6 \cdot (x - 3) + 4(y - 2) + 2(z - 1) = 0;$$

$$3x + 2y + z - 14 = 0.$$

Рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{2};$$

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

Приклад 13. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2$ у точці $M_0(1, -1, 2)$.

Розв'язання. $z'_x = 2x$; $z'_y = 2y$.

$$z'_x(M_0) = 2 \cdot 1 = 2; \; z'_y(M_0) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Рівняння дотичної площини:

$$z - 2 = 2(x-1) - 2(y+1).$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}.$$

4.5. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Досі ми розглядали частинні похідні першого порядку функції $z = f(x, y)$. Їх можна розглядати як нові функції від x, y і вони теж можуть мати частинні похідні, які називаються частинними похідними другого порядку і позначають так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогічно визначають частинні похідні 3-го, 4-го і більш високого порядку порядку.

Частинні похідні другого або більш високого порядку, знайдені за різними змінними називаються мішаними. Такими є, наприклад, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ $f''_{xy}(x, y)$.

Приклад 14. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 8.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2y^2 + 5y^4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12x^2y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Як виявилось

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Це не випадково. За теоремою Шварца, якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні одного порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ називають також диференціалом першого порядку.

Якщо функція має неперервні частинні похідні другого порядку, то диференціал другого порядку визначається за формулою:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Приклад 15. Знайти d^2z, якщо $z = arctg\,\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Послідовність дій наступна:

1) знаходимо перший диференціал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

2) виписуємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

3) складаємо диференціал другого порядку:

$$d^2z = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2 =$$

$$= \frac{2}{(x^2+y^2)^2}\left(xydx^2 + (y^2-x^2)dxdy - xydy^2\right).$$

Приклад 16. Знайти d^2z, якщо $z = \frac{xy}{x-y}$. Довести, що

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}.$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо перші та другі частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x-y)-xy}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y)+xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2y(x-y)^2 - 2y^2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}.$$

Записуємо другий диференціал:

$$d^2z = \frac{2y^2}{(x-y)^3}dx^2 - \frac{2xy}{(x-y)^3}dxdy + \frac{2x^2}{(x-y)^3}dy^2 =$$

$$= \frac{2}{(x-y)^3}(y^2dx^2 - xydxdy + x^2dy^2).$$

Доведення вірності виразу:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y};$$

$$\frac{2y^2}{(x-y)^3} - \frac{4xy}{(x-y)^3} + \frac{2x^2}{(x-y)^3} = \frac{2}{x-y};$$

$$\frac{2(y^2 - 2xy + x^2)}{(x-y)^3} = \frac{2}{x-y};$$

$$\frac{2(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{2}{x-y};$$

$$\frac{2}{x-y} = \frac{2}{x-y}.$$

Що і потрібно було довести.

Приклад 17. Довести, що функція $z = ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язання. Обчислимо перші і другі частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2(x-x_0)}{2\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} =$$

$$= \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - (x-x_0) \cdot 2(x-x_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} =$$

$$= \frac{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\cdot\frac{1\cdot 2(y-y_0)}{2\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=$$

$$=\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(y-y_0)\cdot 2(y-y_0)}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2}=\frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2}.$$

Підставимо отримані частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2}+\frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2}=0;$$

$$\frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2+(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2}=0;$$

$$0=0.$$

Що і потрібно було довести.

4.6. Екстремуми функції двох змінних

Поняття локального максимуму, мінімуму – екстремумів функції $z=f(x,y)$ – аналогічні поняттям що до функції однієї змінної.

Нехай $z=f(x,y)$ визначена в області D. Точка $N_0(x_0,y_0)\in D$. Точка $N_0(x_0,y_0)$ називається точкою локального максимуму функції $z=f(x,y)$, якщо існує $\mathcal{E}$ – окіл точки (x_0,y_0), що для любої точки (x,y), яка задовольняє нерівність $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\mathcal{E}^2$ та відмінна від (x_0,y_0), виконується нерівність $f(x,y)<f(x_0,y_0)$.

Аналогічно визначається точка локального мінімуму функції, але за тих же умов виконується нерівність $f(x,y)>f(x_0,y_0)$.

Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

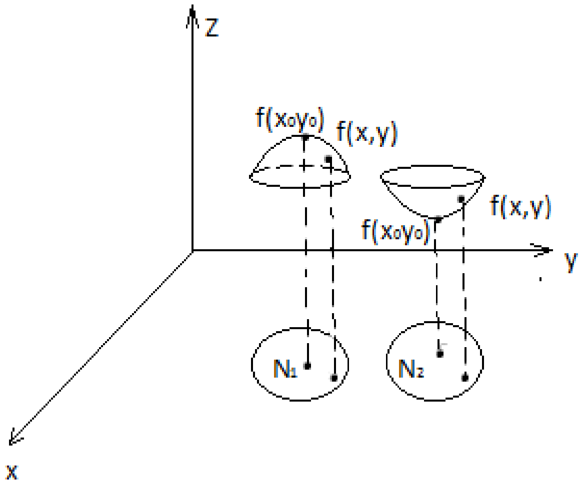


Рис.5

На рис.5: N_1 – точка максимуму, N_2 – точка мінімуму

Відзначимо, що максимум і мінімум мають локальний (місцевий) характер. В області D функція може мати декілька екстремумів, або не мати їх взагалі.

Необхідною умовою існування екстремуму функції є вимога, щоб вона була диференційована в точці (x_0, y_0) і її частинні похідні дорівнювали нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$; $f'_y(x_0, y_0) = 0$, що означає, що дотичні площини в точці (x_0, y_0) до поверхні паралельні площині Oxy . Точки, в яких виконуються вимоги $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ називаються стаціонарними.

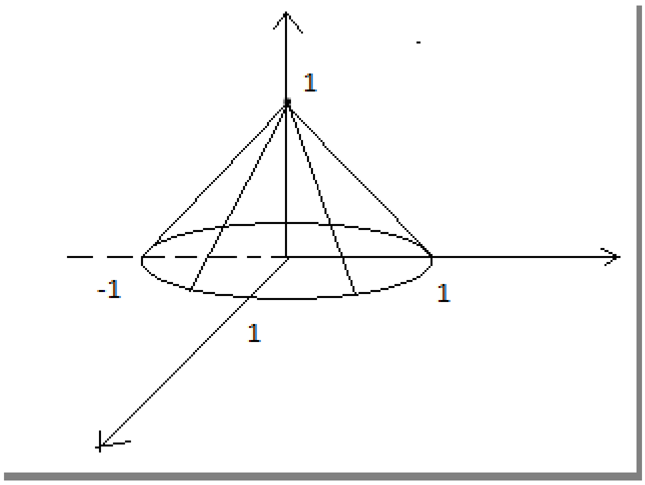


Рис. 6

Функція може мати екстремум в точці, де хоча б одна частинна похідна не існує.

Наприклад, конус $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

В точці (0,0) (рис.6) є максимум, але частинні похідні в цій точці не існують. Такі точки називаються критичними.

В критичних точках теж може бути екстремум, а може і не бути.

Отже, необхідної умови існування екстремуму функції недостатньо.

Достатньою умовою існування екстремуму функції є вимога, щоб в стаціонарній точці (x_0, y_0) і її $\mathcal{E}$ – околі вона мала неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Нехай $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$; $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$; $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$;

Обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$, тоді можливо наступне.

1) $\Delta > 0$ – функція $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) має екстремум:

а) $A > 0$ – мінімум;

б) $A < 0$ – максимум.

2) $\Delta < 0$ –функція $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) екстремуму не має.

3) $\Delta = 0$ – в точці (x_0, y_0) може бути, а може і не бути екстремуму. Потрібні додаткові дослідження.

Приклад 18. Знайти екстремум функції $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції: $x \epsilon R,\ y \epsilon R$.

Знаходимо стаціонарні точки (необхідна умова існування екстремуму)

$f'_x = 6xy - 3x^2$; $f'_y = 3x^2 - 4y^3$.

Виконаємо умову: $f'_x = 0$, $f'_y = 0$.

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Звідси одержуємо $M_1(6,3)$, $M_2(0,0)$ – дві стаціонарні точки

2. Достатня умова існування екстремуму:

$f''_{xx} = 6y - 6x$; $f''_{xy} = 6x$; $f''_{yy} = -12y^2$.

Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках:

$M_1(6,3)$: $A = f''_{xx}$=6· $3 - 6 \cdot 6 = -18$; B =$f''_{xy} = 6 \cdot 6 = 36$;

$C = f''_{yy} = -12 \cdot 9 = -108.$

$\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 20$

$\Delta > 0$; $A < 0 \Rightarrow M_1(6,3)$ – точка максимуму

$z_{max}(6,3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$

$M_2(0,0)$: $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$

Отже $\Delta = 0$.

Проведемо додаткові дослідження:

а) $z(0,0)$= 0.

б) якщо x=0, то функція набуває вигляду: z=$-y^4$; $z < 0$, коли $y \epsilon R$;

якщо y=0 , то функція набуває вигляду: z=$-x^3$; $z > 0$, коли $x < 0$ та

$z < 0$, коли $x > 0$.

Тобто в $\mathcal{E}$ – околі точки (0,0) функція приймає значення різних знаків.

Отже в точці $M_2(0,0)$ екстремуму немає.

4.7. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$. Тоді вона досягає в цій області найбільшого M і найменшого m значень (так званий глобальний екстремум). Ці точки розташовані всередині області, або на її межі.

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$ полягає у наступних діях:

1. Знаходження всіх критичних точок, які належать внутрішній частині області $\overline{D}$ і обчислення значень функції в цих точках;

2. Знаходження всіх критичних точок, які належать межі області $\overline{D}$ і обчислення значень функції в цих точках;

3. Порівняння всіх знайдених значень функції з метою вибору найбільшого та найменшого значень функції.

Приклад 19. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ в замкненій області $\overline{D}$: $\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \le 1$.

Розв'язання. Область визначення функції: $x \epsilon R,\ y \epsilon R$.

1. Досліджуємо функцію на локальний екстремум всередині області $\overline{D}$.

$$\begin{cases} f'_x = -10y^2 + 2x + 10 \\ f'_y = -20xy \end{cases}; \begin{cases} -10y^2 + 2x + 10 = 0 \\ -20xy = 0 \end{cases}.$$

Одержали точки: $M_1(0,1)$, $M_2(0,-1)$, $M_3(-5,0)$, які всі належать області $\overline{D}$. Обчислимо: $z_1(0,1)=1$; $z_2(0,-1)=1$, $z_3(-5,0)=-24$.

2. Досліджуємо функцію на межі області $\overline{D}$:

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} = 1.$$

Межа – це ромб *ABCD* (рис.7).

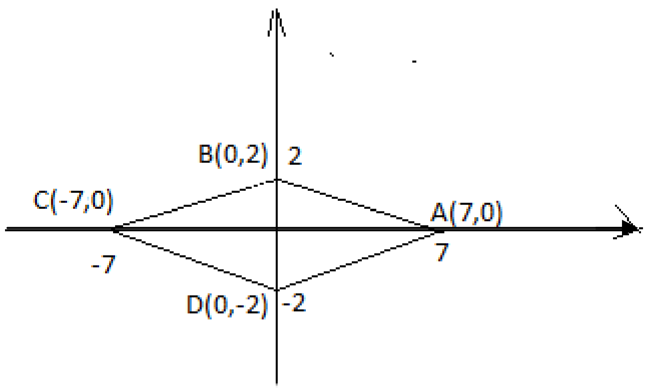


Рис.7.

Обчислимо значення функції у вершинах ромба:

$z_4(A) = -10 \cdot 7 \cdot 0 + 7^2 + 10 \cdot 7 + 1 = 120$;

$z_5(B) = -10 \cdot 0 \cdot 2^2 + 0 + 10 \cdot 2 + 1 = 1$;

$z_6(C) = z(-7,0) = -10 \cdot (-7) \cdot 0 + (-7)^2 - 10 \cdot 7 + 1 = -20$;

$z(D) = z(0,-2) = -10 \cdot 0 \cdot (-2)^2 + 0 + 0 + 1 = 1$.

$z(B) = z(D)$,тобто симетрія відносно осі Ox. Отже, достатньо дослідити $\Delta\, ABC$: рівняння AB

$$\frac{x-7}{0-7} = \frac{y-0}{2-0};\ \frac{x-7}{-7} = \frac{y}{2};\ -7y = 2x - 14;\ y = -\frac{2}{7}x + 2, x \in [0,7];$$

Функція: $z = -10x \cdot \left(-\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{87}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30.$$

$$z'_x = 0; \quad -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30 = 0; \;\; x_1 = \frac{7}{5} \in [0,7]; \;\; y = \frac{8}{5}.$$

$$x_2 = \frac{35}{4} \in [0,7]; \;\; y_2 = -\frac{1}{2}.$$

$z_7\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) = -10 \cdot \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + 10 \cdot \frac{7}{5} + 1 = -18{,}88$

Рівняння BC :

$$\frac{x+7}{0+7} = \frac{y-0}{2-0}; \quad \frac{x+7}{7} = \frac{y}{2}; \;\; y = \frac{2}{7}x + 2, \;\; x\epsilon[-7;0];$$

Функція: $\quad z = -10x \cdot \left(\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{73}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{146}{7}x - 30 = 0; \; -120x^2 + 1022x - 1470 = 0;$$

$$60x^2 - 511x + 735 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{11}{6}; \;\; y = \frac{3}{2}; \;\; M_4\left(-\frac{11}{6}; \frac{3}{2}\right); \; z_8(M_4) = -25{,}9.$$

$$x_2 = -6{,}65; \;\; y_2 = 0{,}1; \;\; M_5(-6{,}65; 0{,}1); \; z_9(M_5) = -22{,}9.$$

Порівняємо z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 , z_6 , z_7 , z_8 , z_9.

Найбільше значення функція приймає в точці $A(7{,}0)$; $max_{(x,y)\epsilon\bar{D}} z(A) = 120.$

Найменше значення – в точці M_4 $\left(-\frac{11}{6}, \frac{3}{2}\right)$; $min_{(x,y)\epsilon\bar{D}} z(M_4) = -25{,}9.$

РОЗДІЛ 5. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Диференційним рівнянням називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

Порядком диференційного рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння. Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференційне рівняння *звичайне*. Загальний вигляд такого рівняння n – го порядку

$$f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1)$$

5.1. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Звичайне диференційне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0, \qquad (2)$$

а якщо вдається знайти рішення відносно похідної, то воно має такий вид

$$y' = F(x, y). \qquad (3)$$

Задача полягає у знаходженні невідомої функції, а процес визначення цієї функції називається розв’язанням, або інтегруванням диференційного рівняння.

Розв’язком, або інтегралом диференційного рівняння (3) називається будь-яка диференційована на деякому інтервалі $x \epsilon (a, b)$ функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє цьому рівняння, тобто така, що після підстановки її у рівняння (3) воно

$$\varphi'(x) = F[x, \varphi(x)].$$

Загальним розв’язком диференційного рівняння (2) або (3) називаються відношення виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{або } \Phi(x, y) = C, \qquad \text{де } C = const \qquad (4)$$

Частинним розв’язком диференційного рівняння (2) або (3) називається такий розв’язок, який одержуємо з загального розв’язку (4) при деякому значенні довільної сталої C. Довільна стала C визначається з початкових умов. Число довільних сталих повинно відповідати порядку диференційного рівняння.

Задача пошуку розв'язку рівняння (2) або (3), що задовольняє початковим умовам $y = y_0$ при $x = x_0$ називається *задачею Коші.*

Розглянемо деякі диференціальні рівняння першого порядку.

5.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Це найпростіший тип диференційних рівнянь першого порядку, але дуже важливий.

Нехай маємо диференційне рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$, яке після розв'язання його відносно похідної y' набуває виду

$$f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0$$

Згадаємо, що $y' = \frac{dy}{dx}$, тому це рівняння можна записати у вигляді:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0.$$

Якщо $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, а $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, то маємо

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) називається диференційним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Відокремлення змінних виконується шляхом ділення рівняння (5) на добуток $\varphi_1(x)\, f_2(y) \neq 0$. Рівняння (5)приймає вигляд:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \qquad (6)$$

а його загальний інтеграл записується так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Слід розглядати випадок, коли рішення рівняння $\varphi_1(x)f_2(y) = 0$ не належить до загального розв'язку. Ці рішення називаються особливими.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xyy' = 1 - x^2$$

Розв'язок. Представимо y' як $y' = \frac{dy}{dx}$.

Маємо:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2, \quad xy\frac{dy}{dx} - (1 - x^2) = 0$$

Приведемо рівняння до виду (6). Для цього помножимо рівняння на дріб $\frac{dx}{x}$, де $x \neq 0$ та отримаємо

$$ydy - \frac{1 - x^2}{x}dx = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл: $\int ydy - \int \frac{1 - x^2}{x}dx = C.$

Маємо: $\frac{y^2}{2} - \ln x + \frac{x^2}{2} = C$ або $y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2C -$ загальний розв′язок диференційного рівняння. Зауважимо, що цей розв'язок має сенс, коли $x > 0$.

Приклад 2.Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$$

Розв'язок. Приведемо рівняння до виду (6). Поділимо його на $\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \neq 0$. Отримаємо:

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}} = \mathrm{C}.$$

Після виконання інтегрування загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$arcsinx - \sqrt{1 - y^2} = C \text{ або } \sqrt{1 - y^2} = arcsinx + C.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y - xy' = 1 + x^2y'.$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у вигляді: $y - xy' - 1 - x^2y' = 0$;

$$y - 1 - (x + x^2)y' = 0.$$

Представимо y' як $y' = \frac{dy}{dx}$. Отримаємо: $(y - 1)dx - (x + x^2)dy = 0.$

Приведемо останнє рівняння до виду (6). Поділимо його на

$(x + x^2)(y - 1) \neq 0$ і будемо мати рівняння:

$$\frac{dx}{x+x^2} - \frac{dy}{y-1} = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x+x^2} - \int \frac{dy}{y-1} = C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння після інтегрування має вигляд:

$$\ln\frac{x}{x+1} - \ln(y-1) = C \text{ або } y = \frac{Cx}{x+1} + 1.$$

5.1.2. Однорідні диференційні рівняння першого порядку

Якщо рівняння виду $y' = F(x,y)$ або $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не змінюються при заміні x на kx, y на ky і відповідно dx на kdy, а dy на kdy, y' на y' то вони називаються *однорідними.* Для рішення використовують *підстановку*:

$$y = U \cdot x \tag{7}$$

де $U(x)$ – нова функція, яка перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціюємо підстановку:

$$y' = U'x + U, \tag{8}$$

Після того, як нове рівняння буде проінтегроване, необхідно U замінити на $\frac{y}{x}$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Розв'язок. Спочатку зробимо перевірку на однорідність. Зробимо заміну x на kx, y на ky, а $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{kdy}{kdx} = y'$, маємо:

$$kxy' - ky = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2};$$

$$k(xy' - y) = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)};$$

$$k(xy' - y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Після ділення обох частин рівняння на k ми отримаємо початкове рівняння, саме це і вказує, що дане рівняння – однорідне, тому використаємо наведену вище підстановку (7) та її похідну (8) і отримуємо рівняння:

$$x(U'x + U) - Ux = \sqrt{x^2 + x^2U^2};$$

$$x(U'x + U - U) = x\sqrt{1 + U^2},$$

розділимо обидві частини рівняння на $x \neq 0$, маємо: $U'x = \sqrt{1 + U^2}$ - це рівняння з відокремлюваними змінними; оскільки $U' = \frac{dU}{dx}$, то отримаємо рівняння виду:

$$\frac{dU}{dx}x = \sqrt{1 + U^2};$$

$$xdU - \sqrt{1 + U^2}dx = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на вираз $x\sqrt{1 + U^2} \neq 0$:

$$\frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримуємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \int \frac{dx}{x} = C,$$

$$\ln\left|U + \sqrt{1 + U^2}\right| - \ln x = \ln C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$U + \sqrt{1 + U^2} = Cx.$$

Так, як $U = \frac{y}{x}$, то маємо: $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$. Після тотожних перетворень отримуємо загальний розв'язок: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

Розв'язок. Виконаємо перевірку на однорідність, використовуючи заміни: x на kx, y на ky і відповідно dx на $kdy,$ а dy на kdy. Маємо:

$$(k^2y^2 - 3k^2x^2)kdy + 2kxkykdx = 0,$$

$$k^3(y^2 - 3x^2)dy + 2k^3xydx = 0.$$

Поділимо весь вираз на k^3 і отримаємо початкове рівняння, отже це рівняння однорідне. Для використання підстановки необхідно розділити рівняння на dx, в результаті отримаємо:

$$(y^2-3x^2)y'+2xy=0.$$

Після відповідних підстановок матимемо:

$$(U^2x^2-3x^2)(U'x+U)+2x^2U=0,$$

$$U'x+U=\frac{-2U}{U^2-3};\quad U'x=\frac{-2U}{U^2-3}-U;\quad U'x=\frac{U-U^3}{U^2-3}.$$

Заміною $U'=\frac{dU}{dx}$, отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dU}{dx}x=\frac{U-U^3}{U^2-3};\quad \frac{U^2-3}{U-U^3}dU=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{U^2-3}{U-U^3}dU-\int\frac{dx}{x}=C.$$

Виконавши інтегрування, маємо загальне рішення:

$$-3\ln U+\ln(1+U)-\ln(1-U)=\ln C+\ln x.$$

Використовуючи властивості логарифмічних функцій отримаємо:

$$\frac{U+1}{U^3(1-U)}=Cx.$$

Виконаємо зворотну підстановку $U=\frac{y}{x}$ і рішення буде мати вигляд:

$$\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y^3}{x^3}\left(1-\frac{y}{x}\right)}=Cx,$$

після виконання тотожних перетворень, остаточно маємо:

$$\frac{(y+x)x^2}{y^3(x-y)}=C.$$

5.1.3. Лінійні диференційні рівняння першого порядку

Диференційне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y'+p(x)y=g(x), \tag{9}$$

де $p(x)$ і $g(x)$ - задані функції, шукана функція y і її похідна y' входять в рівняння в першій степені.

Функції $p(x)$ і $g(x)$ передбачаються неперервними в проміжку (a, b), в якому шукається рішення рівняння (9).

Загальний розв'язок лінійного рівняння (9) шукають підстановкою за методом Бернуллі, яка має вигляд добутку двох функцій:

$$y = U \cdot V, \tag{10}$$

де $U(x), V(x) -$ нові невідомі функції, причому $U(x) \neq 0$ довільна, $V(x) -$ підбирають такою, щоб виконувалась умова $V' + p(x)V = 0$.

Похідна від добутку двох функцій:

$$y' = U'V + UV' \tag{11}$$

Алгоритм розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо на прикладах.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язок. Використовуючи підстановку (10) та її похідну (11), рівняння запишемо у вигляді:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

За умовою знаходження функції $V(x)$, другий доданок останнього рівняння дорівнює нулю, тобто:

$$V' + 2xV = 0\,,$$

а перший доданок буде дорівнювати функції $g(x)$, яка стоїть праворуч, тобто:

$$U'V = xe^{-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' + 2xV = 0$;

$$V' = -2xV; \quad \frac{dV}{dx} = -2xV; \quad \frac{dV}{V} = -2xdx; \quad \ln V = -x^2; \quad V = e^{-x^2}.$$

Вважаємо, що довільна стала тут дорівнює нулю.

Тепер розв'яжемо друге рівняння, але попередньо підставимо в нього знайдену функцію $V = e^{-x^2}$:

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2}; \;\; U' = x; \; \frac{dU}{dx} = x; \;\; dU = xdx; \; U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Знайдені функції записуємо у вигляді добутку і отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші для рівняння:

$$y' - ytgx = secx; \;\; y|_{x=0} = 0.$$

Розв'язок. Використаємо розглянутий вище (приклад 6) алгоритм і в результаті отримаємо:

$$U'V + UV' - UVtgx = \frac{1}{cosx},$$

$$U'V + U(V' \; - Vtgx) = \frac{1}{cosx}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' \; - Vtgx = 0$;

$$V' \; = Vtgx; \;\; \frac{dV}{dx} = Vtgx; \;\; \frac{dV}{V} = tgxdx; \;\; lnV = -ln|cosx|; \;\; lnV = ln\frac{1}{cosx} \; ;$$

$$V = \frac{1}{cosx}.$$

Тепер розв'яжемо рівняння $U'V = \frac{1}{cosx}$, підставимо в нього знайдене $V = \frac{1}{cosx}$:

$$U'\frac{1}{cosx} = \frac{1}{cosx}; \;\; U' = 1; \;\; dU = dx; \;\; U = x + C.$$

Знайдені функції дають загальний розв'язок початкового рівняння: $y = (x + C)\frac{1}{cosx}$.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, використовуючи задані початкові умови, тобто розв'яжемо задачу Коші:

$$(0 + C)\frac{1}{cos0} = 0; \;\; C = 0; \text{ тому частинне рішення буде мати вигляд:}$$

$$y = \frac{x}{cosx}.$$

Лінійними рівняння можуть бути, як відносно y, так і відносно x.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-xcosy + sin2y}.$$

Розв'язок. В такому вигляді важко зрозуміти до якого типу відноситься дане рівняння, тому виконаємо перетворення:

$$dx = (-xcosy + sin2y)dy;$$

$$\frac{dx}{dy} = -xcosy + sin2y;$$

$$x' + xcosy = sin2y\ .$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння відносно x, тому зробимо підстановку: $x = U \cdot V$, де $U(y)$ і $V(y)$. Тут незалежна змінна x є функцією від y. Обчислимо похідну: $x' = U'V + UV'$. Знайдені величини x і x' підставимо в останнє диференціальне рівняння і в результаті отримаємо:

$$U'V + UV' + UVcosy = sin2y;$$

$$U'V + U(V' + Vcosy) = sin2y.$$

Розв'яжемо рівняння $V' + Vcosy = 0;\ V' = -Vcosy;$

$$\frac{dV}{dy} = -Vcosy;\ \frac{dV}{V} = -cosydy;\ lnV = -siny;\ V = e^{-siny}.$$

Тепер перейдемо до розв'язку рівняння $U'V = sin2y$, знаючи що $V = e^{-siny}$: $U'e^{-siny} = sin2y;$ $U'e^{-siny} = 2sinycosy;$

$$U'=2e^{siny}sinycosy; \qquad dU = 2e^{siny}sinycosydy.$$

$$U = 2\int e^{siny}sinycosydy = \begin{vmatrix} t = siny \\ dt = cosydy \end{vmatrix} = 2\int e^{t}tdt =$$

$$=2(te^{t} - \int e^{t}dt) = 2(te^{t} - e^{t} + C) = 2(sinye^{siny} - e^{siny} + C).$$

Загальним розв'язком даного диференційного рівняння є:

$$x = UV = 2\left(sinye^{siny} - e^{siny} + C\right)e^{-siny}.$$

5.1.4. Рівняння Бернуллі

Рівняння виду:

$$y' + p(x)y = g(x)\, y^n, \qquad (n \neq 0, n \neq 1, n \epsilon R\,) \tag{12}$$

називають рівнянням Бернуллі.

Перетворення рівняння Бернуллі в лінійне будемо проводити в такій послідовності:

1) помножимо обидві частини рівняння на y^{-n};
2) введемо підстановку $y^{1-n} = z$. Обидві частини цієї рівності продиференцюємо: $(1-n)\, y^{-n} \mathrm{y}' = \mathrm{z}'$; $y^{-n}\mathrm{y}' = \frac{z'}{1-n}$;
3) отримане рівняння проінтегруємо як лінійне за допомогою підстановки

$$z = U \cdot V, \tag{13}$$

де $U = U(x)$ і $V = V(x)$.

4)обчислимо похідну:

$$z' = U'V + UV' \tag{14}$$

5) після розв'зання лінійного рівняння відносно z повернемося до шуканої функції $z = y^{1-n}$.

Приклад 9. Знайти загальне рішення рівняння

$$xy' + y = y^2 lnx.$$

Розв'язок. Приведемо рівняння до виду:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{lnx}{x} y^2.$$

1) обидві частини рівняння помножимо на y^{-2}:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}\, y^{-1} = \frac{lnx}{x}.$$

2) виконаємо підстановку $y^{-1} = z$. Продиференцюємо цей вираз: $y^{-2}y' = z'$.

Матимемо рівняння:

$$-z' + \frac{1}{x}z = \frac{lnx}{x}; \;\; z' - \frac{1}{x}z = -\frac{lnx}{x},$$

яке є лінійним відносно z і z'. Використаємо підстановку (13) і похідну (14):

$$U'V + UV' - \frac{1}{x}UV = -\frac{lnx}{x},$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{V}{x}\right) = -\frac{lnx}{x}.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$V' - \frac{V}{x} = 0, \qquad V' = \frac{V}{x}, \ \frac{dV}{dx} = \frac{V}{x}, \qquad \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}\ , \qquad lnV = lnx, \qquad V = x.$$

Розв'яжемо рівняння $U'V = -\frac{lnx}{x},$, підставляючи $V = x$:

$$\frac{dU}{dx}x = -\frac{lnx}{x}, \qquad dU = -\frac{lnx}{x^2}dx, \qquad U = -\int\frac{lnx}{x^2}dx.$$

Інтегруючи частинами одержимо:

$$U = -\left(-\frac{lnx}{x} + \int\frac{dx}{x^2}\right) = \frac{lnx}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$z = \left(\frac{lnx}{x} + \frac{1}{x} + C\right)x = lnx + Cx + 1,\ y^{-1} = lnx + Cx + 1.$$

Повертаючись до змінної y, маємо:

$$y = \frac{1}{lnx + Cx + 1} - \text{загальний розв'язок данного}$$

диференційного рівняння.

5.2. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

5.2.1. Рівняння, які містять тільки похідну порядку n і незалежну змінну, тобто рівняння виду $F\left(x, y^{(n)}\right) = 0$

Таке рівняння необхідно перетворити в рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ і потім n разів проінтегрувати.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{1 + x^2}y'' - 1 = 0.$$

Розв'язок.

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Перше інтегрування:

$$y' = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C_1.$$

Друге інтегрування:

$$y = \int (arcsinx + C_1)dx = \int arcsinxdx + C_1 \int dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = arcsinx, & dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dV = dx, & V = x \end{matrix} \right| = xarcsinx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + C_1 x =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = 1 - x^2 \\ dU = -2xdx \\ xdx = \dfrac{-dU}{2} \end{matrix} \right| = xarcsinx + \frac{1}{2} \int \frac{dU}{\sqrt{U}} + C_1 x.$$

Отже, $y = xarcsinx + \sqrt{1-x^2} + C_1 x + C_2 -$ загальний розв'язок данного диференційного рівняння.

Приклад 11. Розв'язати задачу Коші при для рівняння

$$y''' = \frac{1}{x}; \; y(1) = 1; \; y'(1) = 2; \; y''(1) = -2.$$

Розв'язок. Перше інтегрування:

$$y'' = \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C_1.$$

Використовуючи початкову умову $y''(1) = -2$ знайдемо C_1.

$$ln|1| + C_1 = -2, \; C_1 = -2,$$

тому $y'' = ln|x| - 2$. Виконаємо друге інтегрування:

$$y' = \int (ln|x| - 2)\,dx = \int ln|x|dx - 2\int dx = \left| \begin{matrix} U = ln|x|, & dU = \dfrac{dx}{x} \\ V = dx, & V = x \end{matrix} \right| =$$

$$= xln|x| - \int x\frac{dx}{x} - 2x + C_2 =$$

$$= xln|x| - 3x + C_2.$$

Використовуючи початкову умову $y'(1) = 2$ знайдемо C_2.

$$ln1 - 3 + C_2 = 2, \qquad C_2 = 5,$$

тому $y' = xln|x| - 3x + 5$. Виконаємо третє інтегрування:

$$y = \int (xln|x| - 3x + 5)\, dx =$$

$$= \int xln|x|dx - 3\int xdx + 5\int dx = \begin{vmatrix} U = ln|x|, dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = xdx, \qquad V = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} ln|x| - \frac{1}{2}\int xdx - 3\frac{x^2}{2} + 5x = \frac{x^2}{2} ln|x| - \frac{x^2}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + C_3 =$$

$y = \dfrac{x^2}{2} ln|x| - \dfrac{7x^2}{4} + 5x + C_3$ – загальний розв’язок данного диференційного рівняння.

Використовуючи початкову умову $y(1) = 1$ знайдемо C_3.

$$\frac{1}{2}\, ln1 - \frac{7}{4} + 5 + C_3 = 1, \qquad C_3 = -\frac{9}{4}.$$

Остаточно маємо: $y = \dfrac{x^2}{2} ln|x| - \dfrac{7x^2}{4} + 5x - \dfrac{9}{4}$ – частинний розв’язок данного диференційного рівняння.

5.2.2. Рівняння другого порядку, які не містять шукану функцію

Рівняння другого порядку, які не містять шукану функцію, мають такий вид:

$$f(x, y', y'') = 0. \qquad (15)$$

Необхідно понизити порядок диференційного рівняння за допомогою підстановки

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x). \qquad (16)$$

Ця підстановка приводить до рівняння першого порядку

$$f(x, p, p') = 0.$$

Методи розв’язання таких рівнянь були розглянуті в попередньому розділі.

Приклад 12. Розв’язати задачу Коші для рівняння

$$y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$$

Розв'язок. Використаємо (16) і тотожність $p' = \frac{dp}{dx}$.

Рівняння матиме вид: $(x^2+1)\frac{dp}{dx} = 2xp$. Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{x^2+1}.$$

Після інтегрування отримаємо: $lnp = \ln(x^2+1) + lnC_1$,

$$lnp = \ln\big(C_1(x^2+1)\big);\ \ p = C_1(x^2+1).$$

Використаємо початкову умову $p(0) = y'(0) = 3$ для визначення C_1.
$(0+1)C_1 = 3,$ тому $p = 3x^2+3,$ або $y' = 3x^2+3$. Отже,

$$y = \int (3x^2+3)\,dx = x^3+3x+C_2.$$

Визначимо C_2: $y(0) = 1,\ C_2 = 1,$ тому розв'язком задачі Коші буде

$y = x^3+3x+1 -$ частинний розв'язок данного диференційного рівняння.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1-x^2)y'' - xy' = 2.$$

Розв'язок. Якщо $y' = p(x)$, то $y'' = \frac{dp}{dx}$, і рівняння матиме вид:

$$(1-x^2)\frac{dp}{dx} - xp = 2, \qquad (1-x^2)p' - xp = 2.$$

Це рівняння лінійне відносно p і p'. Використаємо підстановку:

$$p = UV\text{ , де } U = U(x) \text{ і } V = V(x),$$

і обчислимо похідну: $p' = U'V + UV'$

Розділимо обидві частини диференціального рівняння на коефіцієнт при p' і отримаємо:

$$p' - \frac{x}{1-x^2}p = \frac{2}{1-x^2}.$$

Тоді: $U'V + UV' - \frac{x}{1-x^2}UV = \frac{2}{1-x^2}$, або

$$U'V + U\left(V' - \frac{x}{1-x^2}V\right) = \frac{2}{1-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$V' - \frac{x}{1-x^2}V = 0, \qquad V' = \frac{x}{1-x^2}V, \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{x}{1-x^2}V,$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{xdx}{1-x^2}, \qquad \int \frac{dV}{V} = \int \frac{xdx}{1-x^2}, \quad \begin{vmatrix} z = 1-x^2 \\ dz = -2xdx \\ xdx = \dfrac{-dz}{2} \end{vmatrix},$$

$$lnV = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2), \qquad lnV = ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad V = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перейдімо до рішення рівняння:

$$U'V = \frac{2}{1-x^2}, \qquad U'\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{1-x^2}, \qquad U' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, dU = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}, U = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}, U = 2arcsinx + C_1.$$

Підставимо отримані вирази у рівняння $p = UV$, маємо:

$$p = \frac{2arcsinx + C_1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Оскільки $p = y'$, то для визначення функції y проінтегруємо отриманий вираз:

$$y = \int \frac{2arcsinx + C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx + C_1\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \begin{vmatrix} z = arcsinx \\ dz = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix} = arcsin^2x + C_1arcsinx + C_2.$$

$y = arcsin^2x + C_1arcsinx + C_2 -$ загальний розв'язок данного диференційного рівняння.

5.2.3. Диференційні рівняння, які не містять незалежну змінну

Рівняння другого порядку, які не містять незалежну змінну, має такий вид:

$$f(y, y', y'') = 0. \qquad (17)$$

Пониження порядку рівняння виконуємо за допомогою підстановки:

$y' = p(y)$, де $p(y)$ – нова шукана функція. В цьому випадку за незалежну змінну приймаємо не x, а y. Тому друга похідна повинна бути перетворена так, щоб незалежною змінною була y:

$$y'' = [p(y)]'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p'p. \tag{18}$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'^2 + 2yy'' = 0.$$

Розв'язок. Застосуємо розглянуту підстановку, і початкове рівняння отримає вид: $p^2 + 2ypp' = 0$, або

$$p\left(p + 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Маємо два рівняння: $p = 0$ і $p + 2y\frac{dp}{dy} = 0$. Перше рівняння дає частинний розв'язок $y' = 0$, тобто $y = C$. Друге рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2y\frac{dp}{dy} = -p; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}; \quad lnp = -\frac{1}{2}lny + lnC_1; \quad lnp = ln\frac{C_1}{\sqrt{y}};$$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Розв'яжемо отримане рівняння, пам'ятаючи що $y' = p$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; \quad \sqrt{y}dy = C_1dx; \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2; \quad y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(C_1x + C_2);$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{9}{4}(C_1x + C_2)^2} - \text{загальний розв'язок данного}$$

диференційного рівняння.

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^3y'' = -1.$$

Розв'язок. Якщо $y' = p$ і $y'' = p'p$, то рівняння матиме вигляд:

$$y^3p'p = -1; \quad p'p = -\frac{1}{y^3}; \; pdp = -\frac{dy}{y^3}; \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{2} + C_1; \quad p = \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1+2C_1y^2}}{y};\;\; \frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}=dx;\;\; \frac{1}{4C_1}\sqrt{1+2C_1y^2}=x+C_2;$$

$$\sqrt{1+2C_1y^2}=4C_1x+C_3, \qquad \text{де } C_3=4C_1C_2.$$

5.2.4. Лінійні однорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференційні рівняння (ДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{19}$$

де a_1 і a_2 сталі.

Частинний розв'язок рівняння (19) будемо шукати у вигляді

$$y=e^{kx},$$

де k - деяке число. Диференціюючи цю функцію двічі і підставляючи отримані значення в рівняння (19) отримаємо:

$$k^2e^{kx}+a_1ke^{kx}+a_2e^{kx}=0,$$

$$e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0, \text{або}$$

$$k^2+a_1k+a_2=0 \quad (e^{kx}\neq 0). \tag{20}$$

Рівняння (20) називається *характеристичним рівнянням* ДР (для його запису достатньо в рівнянні (19) замінити y'', y' і y відповідно на k^2, k і 1).

При розв'язанні характеристичного рівняння (20) можливі три випадки:

Випадок 1. Корені k_1 і k_2 дійсні та різні: $D>0, k_1 \neq k_2$.

В цьому випадку загальне рішення рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}}.$$

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок ДР $y''+5y'+6y=0$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2+5k+6=0;$$

$$D=25-24=1;$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ k_1 = -2;\ k_2 = -3.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

Випадок 2. Корені k_1 і k_2 рівняння (20) дійсні та рівні: $D = 0$,

$$k_1 = k_2 = k.$$

В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = e^{kx}(C_1 x + C_2)}.$$

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - 8y' + 16 = 0$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = e^{4x}(C_1 x + C_2)$.

Випадок 3. Корені k_1 і k_2 рівняння (20) комплексні, нагадаємо, що $i^2 = -1$: $D < 0$, $x_{1,2} = \alpha \pm \beta$i. У цьому випадку загальне рішення рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}.$$

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i; \quad \alpha = 2, \qquad \beta = 3.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Приклад 19. Знайти загальний розв'язок ДР $y'' + 25y = 0$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння даного ДР має вид:

$$k^2 + 25 = 0;$$

$$k^2 = -25; \quad k_{1,2} = \pm 5i; \ \beta = 5.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

5.2.5. Лінійні неоднорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (21)$$

називається лінійним неоднорідним диференційним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = y_o + \overline{y}, \qquad (22)$$

де y_o – загальний розв'язок однорідного рівняння, а $\overline{y}$ – частинне рішення нелінійного ДР, яке залежить від виду правої частини $f(x)$.

Розглянемо декілька типів $f(x)$:

Випадок 1. $f(x) = P_n(x)$,

де $P_n(x)$- многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, тоді частинний розв'язок нелінійного ДР має вигляд:

$$\overline{y} = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n,$$

$\overline{y}$ многочлен степені n, а $B_0, B_1, \ldots, B_n$ - невідомі, які знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння: $$k^2 - 6k + 9 = 0;$$

$$D = 36 - 36 = 0;$$
$$k_{1,2} = 3.$$

Маємо загальний розв’язок однорідного ДР: $y_o = e^{3x}(C_1 x + C_2)$.

Права частина: $f(x) = 2x^2 - x + 3$ –многочлен другої степені, тому

$$\overline{y} = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Знайдемо $\overline{y}'$ та $\overline{y}''$ і підставимо в дане рівняння отримані значення відповідно замість y'', y' та y .

$$\overline{y}' = 2B_0 x + B_1;$$
$$\overline{y}'' = 2B_0.$$
$$2B_0 - 6(2B_0 x + B_1) + 9(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) = 2x^2 - x + 3;$$
$$2B_0 - 12B_1 x - 6B_2 + 9B_0 x^2 + 9B_1 x + 9B_2 = 2x^2 - x + 3.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти B_0, B_1 і B_2 за методом невизначених коефіцієнтів. Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2|\ 9B_0 = 2, \qquad B_0 = \frac{2}{9}.$$
$$x|\ -12B_0 + 9B_1 = -1;\ \ -12 \cdot \frac{2}{9} + 9B_1 = -1;\ \ 9B_1 = -1 + \frac{8}{3};\ \ 9B_1 = \frac{5}{3};$$
$$B_1 = \frac{5}{27}.$$
$$x^0|\ 2B_0 - 6B_1 + 9B_2 = 3;\ \ 2 \cdot \frac{2}{9} - 6 \cdot \frac{5}{27} + 9B_2 = 3;\ \ \frac{4}{9} - \frac{10}{9} + 9B_2 = 3;$$
$$9B_2 = 3 + \frac{2}{3};\ \ 9B_2 = \frac{11}{3};\ \ B_2 = \frac{11}{27}.$$

Отже, маємо частинний розв’язок:

$$\overline{y} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Розв’язок неоднорідного ДР: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{3x}(C_1 x + C_2) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = 0$ і $k_2 \neq 0,$ тоді

$$\overline{y} = (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x,$$

де $B_0, B_1, \ldots, B_n$ - невідомі коефіцієнти.

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$2k^2 + 5k = 0;$$

$$k(2k + 5) = 0;$$

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = -\frac{5}{2}.$$

Отже, маємо загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 + C_2 e^{-\frac{5x}{2}}$.

Права частина $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ – степінь многочлена друга і $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0,$ тому

$$\overline{y} = (B_0x^2 + B_1x + B_2) \cdot x = B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x;$$

$$\overline{y}' = 3B_0x^2 + 2B_1x + B_2;$$

$$\overline{y}'' = 6B_0x + 2B_1.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$2(6B_0x + 2B_1) + 5(3B_0x^2 + 2B_1x + B_2) = 5x^2 - 2x - 1;$$

$$12B_0x + 4B_1 + 15B_0x^2 + 10B_1x + 5B_2 = 5x^2 - 2x - 1.$$

Знайдемо коефіцієнти B_0, B_1 і B_2, як у попередньому прикладі:

$$x^2|\ 15B_0 = 5;\ \ B_0 = \frac{1}{3}.$$

$$x|\ 12B_0 + 10B_1 = -2;\ \ 12 \cdot \frac{1}{3} + 10B_1 = -2;\ \ 10B_1 = -6;\ \ B_1 = -\frac{3}{5}.$$

$$x^0|\ \ 4B_1 + 5B_2 = -1;\ \ 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 5B_2 = -1;\ \ 5B_2 = -1 + \frac{12}{5};\ \ 5B_2 = \frac{7}{5};$$

$$B_2 = \frac{7}{25}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Рішення диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5x}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Випадок 2. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$,

де $e^{\alpha x}$ - показникова функція, а $P^n(x)$- многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha,$ тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n).$$

Приклад 22. Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3); \quad y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k = 0;$$

$$k(k-2) = 0;$$

$$k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 2.$$

Загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$. Тут $\alpha = 1$, $k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$ тому: $\overline{y} = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2)$;

$$\overline{y}' = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) + e^x(2B_0 x + B_1) =$$
$$= e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1) + e^x(2B_0 x + B_1 + 2B_0) =$$
$$= e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0 - 2(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1) =$$
$$= x^2 + x - 3;$$

$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0 - 2B_0 x^2 - 2B_1 x - 2B_2 - 4B_0 x - 2B_1 =$$
$$= x^2 + x - 3;$$

$$-B_0 x^2 - B_1 x - B_2 + 2B_0 = x^2 + x - 3.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x^2| - B_0 = 1; \; B_0 = -1.$$

$$x| \; - B_1 = 1; \; B_1 = -1$$

$$x^0| \; - B_2 + 2B_0 = -3; \quad -B_2 - 2 = -3; \quad -B_2 = -1; \; B_2 = 1.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = e^x(-x^2 - x + 1).$$

Розв'язок диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Знайдемо частинний розв'язок даного ДР, підстановкою початкових умов в y та y' :

$$y' = 2C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ 2C_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}.$$

Задача Коші для даного диференційного рівняння має вид:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x \,.$$

Приклад 23. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3 - 4x).$$

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 3k + 2 = 0;$

$$D = 9 - 8 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}; \; k_1 = 2; \; k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^{2x}(3 - 4x)$. Тут $\alpha = 2, \; k_1 = \alpha,$ $k_2 \neq \alpha.$

Тому $\overline{y}$ має вид: $\overline{y} = e^{2x}(B_0x + B_1) \cdot x = e^{2x}(B_0x^2 + B_1x)$;

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(B_0x^2 + B_1x) + e^{2x}(2B_0x + B_1) = e^{2x}(2B_0x^2 + 2B_1x + 2B_0x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0x^2 + 2B_1x + 2B_0x + B_1) + e^{2x}(4B_0x + 2B_1 + 2B_0) =$$

$$= e^{2x}(4B_0x^2 + 4B_1x + 8B_0x + 2B_0 + 4B_1).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0x^2 + 4B_1x + 8B_0x + 2B_0 + 4B_1 - 3(2B_0x^2 + 2B_1x + 2B_0x + B_1) +$$

$$+2(B_0x^2 + B_1x) = 3 - 4x;$$

$$4B_0x^2 + 4B_1x + 8B_0x + 2B_0 + 4B_1 - 6B_0x^2 - 6B_1x - 6B_0x - 3B_1 +$$

$$+2B_0x^2 + 2B_1x = 3 - 4x;$$

$$2B_0x + 2B_0 + B_1 = 3 - 4x.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x|\ 2B_0 = -4;\ \ B_0 = -2.$$

$$x^0|\ 2B_0 + B_1 = 3;\ -4 + B_1 = 3;\ \ B_1 = 7.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Розв'язок рівняння має вид: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^x + e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

в) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x^2.$$

Приклад 24. Знайти загальний розв'язок ДР: $y'' - 4y' + 4 = 3e^{2x}$.

Розв'язок. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4k + 4 = 0;$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = e^{2x}(C_1x + C_2)$.

Права частина рівняння: $f(x) = 3e^{2x}$. Тут $\alpha = 2$ і $k_1 = k_2 = \alpha$.

Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = B_0e^{2x} \cdot x^2 = B_0x^2 \cdot e^{2x}.$$

Знайдемо першу і другу похідні:

$$\overline{y}' = 2B_0xe^{2x} + 2B_0x^2e^{2x} = e^{2x}(2B_0x + 2B_0x^2);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0x + 2B_0x^2) + e^{2x}(2B_0 + 4B_0x) = e^{2x}(4B_0x^2 + 8B_0x + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0x^2 + 8B_0x + 2B_0 - 4(2B_0x + 2B_0x^2) + 4B_0x^2 = 3;$$

$$4B_0x^2 + 8B_0x + 2B_0 - 8B_0x - 8B_0x^2 + 4B_0x^2 = 3;$$

$$2B_0 = 3; \quad B_0 = \frac{3}{2}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{3}{2}x^2 \cdot e^{2x}.$$

Розв'язок неоднорідного диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{2x}(C_1x + C_2) + \frac{3}{2}x^2e^{2x}.$$

Випадок 3. $f(x) = \mathrm{a}\cos\beta x + b\sin\beta x$,

де a і b - сталі.

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = A\,cos\,\beta x + B\,sin\,\beta x\ ,$$

де A і B - невідомі коефіцієнти.

Приклад 25. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + 4y' + 13 = 5\,sin\,2x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Права частина рівняння: $f(x) = 5 \sin 2x, \quad k_{1,2} \neq \pm 2i$.

$$\overline{y} = A \cos 2x + B \sin 2x;$$

$$\overline{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x;$$

$$\overline{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) +$$

$$+13(A \cos 2x + B \sin 2x) = 5 \sin 2x;$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 8A \sin 2x + 8B \cos 2x +$$

$$+13A \cos 2x + 13B \sin 2x = 5 \sin 2x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти. Для цього порівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ та $\cos 2x$:

$$\sin 2x| \ -4B - 8A + 13B = 5;$$

$$\cos 2x| -4A + 8B + 13A = 0.$$

Отримали систему рівнянь, яку розв'яжемо за правилом Крамера: $\begin{cases} -8A + 9B = 5 \\ 9A + 8B = 0 \end{cases};$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -64 - 81 = -145,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{145} = -\frac{8}{29}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = -\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

б) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm\beta i,$ тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x.$$

Приклад 26. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + y = \cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 1 = 0;$$

$$k^2 = -1;$$

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Права частина рівняння: $f(x) = \cos x$, $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = (A\sin x + B\cos x)\cdot x;$$

$$\overline{y}' = (A\cos x - B\sin x)\cdot x + A\sin x + B\cos x;$$

$$\overline{y}'' = (-A\sin x - B\cos x)\cdot x + A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ у початкове рівняння:

$$-(A\sin x + B\cos x)\cdot x + 2A\cos x - 2B\sin x + (A\sin x + B\cos x)\cdot x =$$

$$= \cos x;$$

$$2A\cos x - 2B\sin x = \cos x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x|\ 2A = 1, \qquad A = \frac{1}{2}.$$

$$\sin x|\ 2B = 0, \qquad B = 0.$$

Отже, знайшли частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Розв’язком даного диференційного рівняння є $y = y_o + \overline{y}$,:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Випадок 4. $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos \beta x + b \sin \beta x)$,

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв’язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Приклад 27. Знайти загальний розв’язок неоднорідного ДУ

$$y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x} \cos x.$$

Розв’язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 7k + 6 = 0;$$

$$D = 49 - 24 = 25;$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2};\ k_1 = 6;\ k_2 = 1.$$

Загальний розв’язок однорідного ДР: $y_o = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = 2e^{2x} \cos x,\ k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i,\ \alpha = 2,$ $\beta = 1,$ тому частинний розв’язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{2x}(A \sin x + B \cos x);$$

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(A \sin x + B \cos x) + e^{2x}(A \cos x - B \sin x) =$$

$$= e^{2x}(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x) +$$

$$+ e^{2x}(2A \cos x - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x) =$$

$$= e^{2x}(4A \sin x + 4B \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x +$$

$$+ 2A \cos x - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$4A\,sin\,x+4B\,cos\,x+2A\,cos\,x-2B\,sin\,x+2A\,cos\,x-$$
$$-2B\,sin\,x-A\,sin\,x-B\,cos\,x-7(2A\,sin\,x+2B\,cos\,x+A\,cos\,x-B\,sin\,x)$$
$$+6(A\,sin\,x+B\,cos\,x)=cos\,x\,;$$

$$4A\,sin\,x+4B\,cos\,x+2A\,cos\,x-2B\,sin\,x+2A\,cos\,x-$$
$$-2B\,sin\,x-A\,sin\,x-B\,cos\,x-14A\,sin\,x-14B\,cos\,x-7A\,cos\,x+$$
$$+7B\,sin\,x+6A\,sin\,x+6B\,cos\,x=cos\,x\,;$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x|\;4B+2A+2A-B-14B-7A+6B=1,$$
$$\sin x|\;4A-2B-2B-A-14A+7B+6A=0,$$

Розв’яжемо отриману систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases}-3A-5B=1\\-5A+3B=0\end{cases};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & -5\\-5 & 3\end{vmatrix}=-9-25=-34;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -5\\0 & 3\end{vmatrix}=3,\qquad A=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{3}{34};$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-3 & 1\\-5 & 0\end{vmatrix}=0+5=5,\qquad B=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{5}{34}.$$

Отже, маємо частинний розв’язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y}=e^{2x}\left(-\frac{3}{34}sin\,x-\frac{5}{34}\cos x\right)=-e^{2x}\left(\frac{3}{34}\sin x+\frac{5}{34}cos\,x\right).$$

Розв’язком даного диференційного рівняння є $y=y_o+\overline{y}$,:

$$y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}-e^{2x}\left(\frac{3}{34}sin\,x+\frac{5}{34}cos\,x\right).$$

б) корені характеристичного рівняння $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, тому частинний розв’язок має вигляд:

$$\overline{y}=e^{\alpha x}(A\,cos\,\beta x+B\,sin\,\beta x)\cdot x$$

Приклад 28. Знайти загальний розв’язок неоднорідного ДУ:

$$y''-2y'+10y=e^{x}\,cos3\,x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 2k + 10 = 0;$$

$$D = 4 - 40 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР: $y_0 = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^x \cos 3x$. Тут $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \alpha = 1$, $\beta = 3$, тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^x(A \sin 3x + B\cos 3x) \cdot x = e^x(Ax \sin 3x + Bx\cos 3x).$$

Обчислимо першу та другу похідні:

$$\overline{y}' = e^x(Ax \sin 3x + Bx\cos 3x) +$$

$$+e^x(A \sin 3x + 3Ax\cos 3x + B\cos 3x - 3B \sin 3x) =$$

$$= e^x\big((Ax + A - 3Bx) \sin 3x + (Bx + 3Ax + B)\cos 3x\big);$$

$$\overline{y}'' = e^x\big((Ax + A - 3Bx) \sin 3x + (Bx + 3Ax + B)\cos 3x\big) +$$

$$+e^x((A - 3B) \sin 3x + 3(Ax + A - 3Bx)\cos 3x +$$

$$+(B + 3A)\cos 3x - 3(Bx + 3Ax + B) \sin 3x) =$$

$$= e^x\big((-8Ax + 2A - 6Bx - 6B) \sin 3x + (-8Bx + 2B + 6Ax + 6A) \cos 3x\big)$$

Підставимо $\overline{y}$ та отримані значення $\overline{y}', \overline{y}''$ у дане рівняння:

$$e^x\big((-8Ax + 2A - 6Bx - 6B) \sin 3x + (-8Bx + 2B + 6Ax + 6A) \cos 3x\big) -$$

$$-2e^x\big((Ax + A - 3Bx) \sin 3x + (Bx + 3Ax + B)\cos 3x\big) +$$

$$+10e^x(Ax \sin 3x + Bx \cos 3x) = e^x\cos 3x;$$

$$(-8Ax + 2A - 6Bx - 6B) \sin 3x + (-8Bx + 2B + 6Ax + 6A) \cos 3x -$$

$$-(2Ax + 2A - 6Bx) \sin 3x + (2Bx + 6Ax + 2B)\cos 3x +$$

$$+10Ax \sin 3x + 10Bx\cos 3x = \cos 3x;$$

$$(-8Ax + 2A - 6Bx - 6B + 2Ax + 2A - 6Bx + 10Ax)\sin 3x +$$
$$+(-8Bx + 2B + 6Ax + 6A2Bx + 6Ax + 2B + 10Bx)\cos 3x = cos3x;$$

$$-6B\,sin\,3x + 6Acos3x = cos3x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $sin\,3x$ та $cos3x$:

$$cos3x|\ 6A = 1;\ \ A = \frac{1}{6};$$
$$sin\,3x| - 6B = 0;\ \ B = 0.$$

Отже, маємо частинний розв’язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = \frac{1}{6}xe^{x}\,sin\,3x.$$

Розв’язком даного диференційного рівняння є $y = y_o + \overline{y}$,:

$$y = e^{x}(C_1\,sin\,3x + C_2 cos3x) + \frac{1}{6}xe^{x}\,sin\,3x.$$

5.3. РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Правило розв’язання систем лінійних диференційних рівнянь
зі сталими коефіцієнтами:

1. Приводимо систему до нормального виду (всі рівняння системи є рівняннями першого порядку і розв’язані відносно похідних шуканих функцій.)
2. Приводимо систему *n* – рівнянь першого порядку до одного диференційного рівняння *n*-го порядку.
3. Знаходимо загальний розв’язок отриманого рівняння.
4. Знаходимо інші невідомі функції.
5. Якщо необхідно знайти частинний розв’язок, знаходимо значення довільних сталих за початковими умовами і підставляємо в загальний розв’язок.

Приклад 29. Знайти частинний розв’язок системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y + 3x = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0; \end{cases}$$

якщо $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

Розв'язок. Невідомими функціями системи є x і y, а незалежною змінною – t. Приведемо систему до нормального виду, для цього розв'яжемо кожне рівняння системи відносно похідних

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - 3x, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи зводиться до розв'язку одного диференційного рівняння, порядок якого дорівнює числу рівнянь, які входять в систему. Для отримання цього рівняння продиференціюємо будь-яке рівняння системи по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} - 3\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо замість $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dx}{dt}$ відповідні вирази:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(x - y) - 3(-y - 3x);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 8x + 4y.$$

З першого рівняння системи отримаємо $y = -3x - \frac{dx}{dt}$. Підставимо в отримане вище рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 8x + 4\left(-3x - \frac{dx}{dt}\right);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0;$$

$$x'' + 4x' + 4x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння :

$$k^2 + 4k + 4 = 0;$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $x = e^{-2t}(C_1 t + C_2)$.

$$y = -3x - \frac{dx}{dt}.$$

Знайдемо $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t}(C_1 t + C_2) + e^{-2t}C_1 = e^{-2t}(-2C_1 t - 2C_2 + C_1).$$

Тоді:

$$y = -3x - \frac{dx}{dt};$$

$$y = -3e^{-2t}(C_1 t + C_2) - e^{-2t}(-2C_1 t - 2C_2 + C_1) = e^{-2t}(-C_1 t - C_2 - C_1).$$

Отже, маємо загальний розв'язок системи:

$$x = e^{-2t}(C_1 t + C_2);$$

$$y = -e^{-2t}(C_1 t + C_2 + C_1).$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо значення довільних сталих C_1 і C_2: $\begin{cases} e^0(C_1 \cdot 0 + C_2) = 1 \\ -e^0(C_1 \cdot 0 + C_2 + C_1) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = 1 \\ -C_2 - C_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -2 \end{cases}$.

Частинне рішення системи має вид:

$$x = e^{-2t}(-2t + 1);$$

$$y = -e^{-2t}(-2t + 1 - 2) = e^{-2t}(2t + 1).$$

Приклад 30. Знайти загальний розв'язок системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}.$$

Розв'язок. Продиференціюємо будь-яке рівняння системи по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt}.$$

Підставимо замість $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dx}{dt}$ відповідні вирази:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 3y - 3(3x + y);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 3y - 9x - 3y;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6y.$$

З першого рівняння системи отримаємо:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо отримане значення y в рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6y$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\right);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 2x + 2\frac{dx}{dt};$$

$$x'' + 2x' + 10x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння :

$$k^2 - 2k + 10 = 0;$$

$$D = 4 - 40 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i;$$

Загальний розв'язок даного ДР: $x = e^t(C_1cos3t + C_2sin3t)$.

Для знаходження невідомої функції y використаємо рівняння:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

Знайдемо $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = e^t(C_1cos3t + C_2sin3t) + e^t(-3C_1sin3t + 3C_2cos3t) =$$

$$= e^t(C_1cos3t + C_2sin3t - 3C_1sin3t + 3C_2cos3x).$$

$$y = \frac{1}{3}e^t(C_1cos3t + C_2sin3t) -$$

$$-\frac{1}{3}e^t(C_1cos3t + C_2sin3t - 3C_1sin3t + 3C_2cos3t) =$$

$$= \frac{1}{3}e^t(3C_1sin3t - 3C_2cos3t) = e^t(C_1sin3t - C_2cos3t).$$

Отже, маємо загальний розв'язок системи:

$$x = e^t(C_1cos3t + C_2sin3t);$$

$$y = e^t(C_1sin3t - C_2cos3t).$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2 – 810 с., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. Р. Курант Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., 1970, 672 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления , т.1: Учебное пособие для втузов. -13-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. -432 с.
4. Бермант А.Ф., Арамович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. Учебник для высших технических учебных заведений. – 6-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969.-736 с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975 . – 416 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для самостійної роботи студентів 1 курсу всіх спеціальностей

Частина 2

Укладачі: **Шульгіна** Світлана Сергіївна,
Вороновська Лариса Петрівна,
Пахомова Євгенія Серафимівна

Відповідальний за випуск *С.О. Станішевський*

Редактор *З. І. Зайцева*

Комп'ютерний набір *С.С. Шульгіна, Л.П. Вороновська*

Комп'ютерне верстання *Н. В. Зражевська*

План 2010, поз. 141-М

Підп. до друку 18.03.11 Формат 60х84 /16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,8
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК № 4064 від 12. 05. 2011