Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківська національна академія міського господарства

С. О. Станішевський
Ю. Є. Печеніжський

З А В Д А Н Н Я

З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(Модуль 2)

І П Р И К Л А Д И Ї Х Р О З В ’ Я З А Н Н Я

(для самостійної роботи студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)

ХАРКІВ
ХНАМГ
2011

Завдання з вищої математики (модуль 2) і приклади їх розв’язання (для самостійної роботи студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво») / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 125 с.

Автори: С. О. Станішевський,
Ю. Є. Печеніжський

Рецензент: Архіпова О. С.

Рекомендовано кафедрою Вищої математики,
протокол № 5 від 24.12.2010 р.

ВСТУП

Дані методичні вказівки містять завдання для самостійної роботи з курсу вищої математики, що відповідають другому заліковому модулю робочої програми. З метою полегшення засвоєння курсу вищої математики в методичних вказівках подано рішення типових варіантів завдань за кожною темою. Ступінь труднощів їхнього розв’язання відповідає пропонованим для самостійної роботи завданням. Кожна задача подана у тридцяти варіантах. У кожному модулі нумерація тем прохідна.

Методичні вказівки дозволяють здійснювати перехід від пасивних форм навчання до активних, що виражається у самостійній роботі студента з рекомендованими нижче джерелами і розв’язанні запропонованих задач.

Велика кількість задач може бути використана викладачами для проведення практичних і контрольних робіт в аудиторії з метою поточного контролю засвоєння студентами матеріалу з вищої математики.

Зауваження і пропозиції щодо даних вказівок надсилайте за адресою, яку вказано на останній сторінці.

Змістовий модуль 2.1

Тема 7. ***Невизначений інтеграл***

Знайти невизначені інтеграли (у завданнях 1-5 результати інтегрування перевірити диференціюванням).

1. $\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Рішення. Розділивши чисельник підінтегральної функції на знаменник і використавши правило інтегрування степеневої функції, одержимо:

$$\int \frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx = 3\int x^{-1/4}dx - 2\int x^{15/4}dx + \int x^{5/12}dx =$$

$$= 4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C .$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(4x^{3/4} - \frac{8}{19}x^{19/4} + \frac{12}{17}x^{17/12} + C\right)' = 4\cdot\frac{3}{4}x^{-1/4} - \frac{8}{19}\cdot\frac{19}{4}x^{15/4} +$$

$$+\frac{12}{17}\cdot\frac{17}{12}x^{5/12} = 3x^{-1/4} - 2x^{15/4} + x^{5/12} .$$

Інтегрування виконано вірно.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}$.

Рішення. $$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}} = \int (4-8x)^{-2/5}dx =$$

$$= -\frac{5}{8\cdot 3}(4-8x)^{3/5} + C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4-8x)^3} + C .$$

Виконаємо перевірку результату:

$$\left(-\frac{5}{24}(4-8x)^{3/5} + C\right)' = -\frac{5}{24}\cdot\frac{3}{5}(4-8x)^{-2/5}(-8) = (4-8x)^{-2/5} .$$

Інтегрування виконано вірно.

3. $\int \frac{dx}{6-7x}$.

Рішення. $\int \frac{dx}{6-7x} = -\frac{1}{7}\ln|6-7x| + C$. Застосували таблицю.

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(-\frac{1}{7}ln|6-7x|+C\right)' = -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6-7x}\cdot(-7) = \frac{1}{6-7x}.$$

Інтегрування виконано вірно.

4. $\int cos(2-5x)dx$.

Рішення. $\int cos(2-5x)d = -\frac{1}{5}sin(2-5x)+C$. Застосували таблицю.

Виконаємо перевірку результату:

$$\left(-\frac{1}{5}sin(2-5x)+C\right)' = -\frac{1}{5}cos(2-5x)(-5) = cos(2-5x).$$

Інтегрування виконано вірно.

5. $\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Рішення. $\int\frac{3dx}{\sqrt{4x^2-3}} = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}} = \frac{3}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}\right|+C$.

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(\frac{3}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}\right|+C\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}}}{x+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}} = \frac{3}{2\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{4x^2-3}}.$$

Інтегрування виконано вірно.

6. $\int\frac{7xdx}{3x^2+4}$.

Рішення. Перетворимо підінтегральну функцію таким чином, щоб у чисельнику вийшла похідна знаменника:

$$\int\frac{7xdx}{3x^2+4} = \frac{7}{6}\int\frac{6xdx}{3x^2+4} = \frac{7}{6}ln|3x^2+4|+C.$$

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}$.

Рішення.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{6}{5}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{6}{5}}}+C = \frac{1}{\sqrt{5}}arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}}+C.$$

8. $\int e^{5-4x}dx = \int exp(5-4x)dx$.

Рішення. Заміна змінної і застосування таблиці.

$$\int e^{5-4x}dx=-\frac{1}{4}e^{5-4x}+C \text{ . } \int exp(5-4x)dx=-\frac{1}{4}exp(5-4x)+C \text{ .}$$

9. $\int\frac{\sqrt[7]{ln^3(x+2)}}{x+2}dx$.

Рішення. Заміна змінної і застосування таблиці.

$$\int\frac{\sqrt[7]{ln^3(x+2)}}{x+2}dx=\int ln^{3/7}(x+2)d(ln(x+2))=\frac{7}{10}ln^{10/7}(x+2)+C=$$

$$=\frac{7}{10}\sqrt[7]{ln^{10}(x+2)}+C \text{ .}$$

10. $\int\frac{cos3xdx}{\sqrt[5]{sin3x-4}}$.

Рішення. Заміна змінної і застосування таблиці.

$$\int\frac{cos3xdx}{\sqrt[5]{sin3x-4}}=\frac{1}{3}\int(sin3x-4)^{-1/5}3cos3xdx=$$

$$=\frac{1}{3}\int(sin3x-4)^{-1/5}d(sin3x-4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}(sin3x-4)^{4/5}+C=$$

$$=\frac{5}{12}\sqrt[5]{(sin3x-4)^4}+C \text{ .}$$

11. $\int\frac{dx}{sin^2 4x\sqrt[3]{ctg^2 4x}}$.

Рішення. Заміна змінної і застосування таблиці.

$$\int\frac{dx}{sin^2 4x\sqrt[3]{ctg^2 4x}}=-\frac{1}{4}\int ctg^{-2/3}4x\left(-\frac{4}{sin^2 4x}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\int ctg^{-2/3}4xd(ctg4x)=-\frac{3}{4}ctg^{1/3}4x+C=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{ctg4x}+C \text{ .}$$

12. $\int\frac{\sqrt[3]{arcctg^5 2x}}{1+4x^2}dx$.

Рішення. Заміна змінної і застосування таблиці.

$$\int\frac{\sqrt[3]{arcctg^5 2x}}{1+4x^2}dx=-\frac{1}{2}\int arcctg^{5/3}2x\left(-\frac{2}{1+4x^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int arcctg^{5/3}2xd(arcctg2x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}arcctg^{8/3}2x+C=$$

$$=-\frac{3}{16}\sqrt[3]{arcctg^8 2x}+C.$$

13. $\int e^{3\cos x+2}\sin x dx=\int (exp(3\cos x+2))\sin x dx$.

Рішення. Заміна змінної і застосування таблиці.

$$\int \sin x e^{3\cos x+2}dx=-\frac{1}{3}\int e^{3\cos x+2}d(3\cos x+2)=-\frac{1}{3}e^{3\cos x+2}+C=$$

$$=-\frac{1}{3}exp(3\cos x+2)+C.$$

14. $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx$.

Рішення. Інтеграл розіб'ємо на два інтеграли і застосуємо таблицю.

$$\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx=\int \frac{3xdx}{6x^2-4}+\int \frac{10}{6x^2-4}dx=\frac{1}{4}\int \frac{12xdx}{6x^2-4}+\frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2-2/3}=$$

$$=\frac{1}{4}ln|6x^2-4|+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2/3}}ln\left|\frac{x-\sqrt{2/3}}{x+\sqrt{2/3}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}ln|6x^2-4|+\frac{5}{2\sqrt{6}}ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+C.$$

15. $\int \frac{3-7x}{4x^2+5}dx$.

Рішення. Інтеграл розіб'ємо на два інтеграли і застосуємо таблицю.

$$\int \frac{3-7x}{4x^2+5}dx=\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^2+5/4}-\frac{7}{8}\int \frac{8xdx}{4x^2+5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{5/4}}arctg\frac{x}{\sqrt{5/4}}-$$

$$-\frac{7}{8}ln|4x^2+5|+C=\frac{3}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{7}{8}ln|4x^2+5|+C.$$

16. $\int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}$.

Рішення. Скористаємося підстановкою $u=2-e^{-3x}$, тоді $du=3e^{-3x}dx$.

$$\int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}=\frac{1}{3}\int \frac{3e^{-3x}dx}{2-e^{-3x}}=\frac{1}{3}ln|2-e^{-3x}|+C.$$

17. $\int \frac{3x^5-x}{x^2+1}dx$.

Рішення. Розділивши чисельник підінтегральної функції на знаменник, виділимо цілу частину неправильного дробу, що стоїть під знаком інтеграла. Одержимо інтеграл від алгебраїчної суми:

$$\int \frac{3x^5 - x}{x^2+1}dx = \int \left(3x^2 - 3x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}ln(x^2+1) + C .$$

18. $\int cos^3(7x+2)dx$.

Рішення. Використовуючи тригонометричну тотожність $cos^2(7x + 2) =$ $= 1 - sin^2(7x + 2)$, одержуємо

$$\int cos^3(7x+2)dx = \int cos^2(7x+2)cos(7x+2)dx =$$

$$= \int (1 - sin^2(7x+2))cos(7x+2)dx = \int cos(7x+2)dx -$$

$$- \int sin^2(7x+2)cos(7x+2)dx = \frac{1}{7}sin(7x+2) - \frac{1}{7}\int sin^2(7x+2)\cdot d(sin(7x+2)) =$$

$$= \frac{1}{7}sin(7x+2) - \frac{1}{21}sin^3(7x+2) + C .$$

У останньому інтегралі виконано заміну змінної.

19. $\int ctg^4 5xdx$.

Рішення. Тому що $ctg^2 5x = \frac{1}{sin^2 5x} - 1$, маємо

$$\int ctg^4 5xdx = \int \left(\frac{1}{sin^2 5x} - 1\right)ctg^2 5xdx = \int ctg^2 5x \frac{dx}{sin^2 5x} - \int ctg^2 5xdx =$$

$$= -\frac{1}{5}\int ctg^2 5x\left(\frac{-5dx}{sin^2 5x}\right) - \int\left(\frac{1}{sin^2 5x} - 1\right)dx = -\frac{1}{15}ctg^3 5x + \frac{1}{5}ctg5x + x + C.$$

20. $\int sin\frac{7}{2}x\,sin\frac{3}{2}xdx$.

Рішення. Скористаємося формулою тригонометрії і таблицею.

$$\int sin\frac{7}{2}x\,sin\frac{3}{2}xdx = \frac{1}{2}\int (cos2x - cos5x)dx = \frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{10}sin5x + C .$$

21. $\int \frac{dx}{6x^2 - 3x + 2}$.

Рішення. Виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат і скористаємося таблицею. Тоді:

$$\int \frac{dx}{6x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{16}} =$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{13}{48}}\right)^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{48}}}arctg\frac{x-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{13}{48}}}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}arctg\frac{4\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{13}}+C=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}arctg\frac{(4x-1)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{13}}+C\,.$$

22. $\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx$.

Рішення. Виділивши в чисельнику підінтегральної функції доданок, рівний похідної знаменника, одержимо суму двох інтегралів:

$$\int\frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx=-\int\frac{3x-6}{x^2+5x-2}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{(2x+5)-5-4}{x^2+5x-2}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{2x+5}{x^2+5x-2}dx+\frac{3}{2}\cdot 9\int\frac{dx}{x^2+5x-2}=-\frac{3}{2}ln\,|\,x^2+5x-2\,|+$$

$$+\frac{27}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2}=-\frac{3}{2}ln\,|\,x^2+5x-2\,|+$$

$$+13{,}5\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{33}}{2}}ln\left|\frac{x+2{,}5-\frac{\sqrt{33}}{2}}{x+2{,}5+\frac{\sqrt{33}}{2}}\right|+C=-1{,}5\,ln\,|\,x^2+5x-2\,|+$$

$$+\frac{27}{2\sqrt{33}}ln\left|\frac{2x+5-\sqrt{33}}{2x+5+\sqrt{33}}\right|+C\,.$$

За таблицею інтегралів перший інтеграл дорівнює логарифму знаменника, а другий – логарифму дробу.

23. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}$.

Рішення. Виділимо у знаменнику підінтегральної функції повний квадрат і одержимо табличний інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{36}{25}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\left(x+\frac{1}{5}\right)^2+\sqrt{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{36}{25}}\right|+C\ .$$

24. $\int\frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx$.

Рішення. Представимо даний інтеграл як суму двох табличних інтегралів, попередньо виділивши в чисельнику підінтегральної функції доданок, рівний похідної підкореневого виразу знаменника:

$$\int\frac{2x-7}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{-6x+21-4+4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{-6x-4}{\sqrt{1-4x-3x^2}}dx-$$

$$-\frac{25}{3\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x-x^2}}=-\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2}-\frac{25}{3\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2}-\frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1-4x-3x^2}-\frac{25}{3\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+2}{\sqrt{7}}+C\ .$$

25. $\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.

Рішення. Використаємо тригонометричну підстановку.

$$\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx=\begin{vmatrix} x=4\sin t, & dx=4\cos t\,dt \\ \sin t=\frac{x}{4} & t=\arcsin\frac{x}{4}\end{vmatrix}=$$

$$=\int 16\sin^2 t\cdot\sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cos t\,dt=256\int\sin^2 t\cos^2 t\,dt=64\int\sin^2 2t\,dt=$$

$$=32\int(1-\cos 4t)dt=32t-8\sin 4t+C=32\arcsin\frac{x}{4}-8\sin\left(4\arcsin\frac{x}{4}\right)+C=$$

$$=32\arcsin\frac{x}{4}-\frac{x}{4}(8-x^2)\sqrt{16-x^2}+C\ .$$

26. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ **.**

Рішення. Використаємо заміну змінної і розглянутий вище приклад 23.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}=\left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t}, & t=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} & \end{matrix}\right|=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}}=-ln\left|\left(t+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}\right|+C=$$

$$=C-ln\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{x^2+5x+1}}{x}\right|.$$

27. $\int(x-7)sin5xdx$.

Рішення. Інтегруємо частинами:

$$\int(x-7)sin5xdx=\left|\begin{matrix} u=x-7, & du=dx, \\ dv=sin5xdx, & v=-\frac{1}{5}cos5x \end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{5}(x-7)cos5x+\frac{1}{5}\int cos5xdx=-\frac{1}{5}(x-7)cos5x+\frac{1}{25}sin5x+C.$$

28. $\int arccos4xdx$.

Рішення. Інтегруємо частинами:

$$\int arccos4xdx=\left|\begin{matrix} arccos4x=u, & dv=dx \\ -\frac{4dx}{\sqrt{1-16x^2}}=du, & v=x \end{matrix}\right|=-x\,arccos4x+4\int\frac{xdx}{\sqrt{1-16x^2}}=$$

$$=-x\,arccos4x-\frac{1}{8}\cdot2\sqrt{1-16x^2}+C=-x\,arccos4x-\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2}+C.$$

29. $\int xe^{x-7}dx$.

Рішення. Інтегруємо частинами:

$$\int xe^{x-7}dx=\left|\begin{matrix} x=u, & e^{x-7}dx=dv \\ dx=du, & e^{x-7}=v \end{matrix}\right|=xe^{x-7}-\int e^{x-7}dx=xe^{x-7}-e^{x-7}+C.$$

30. $\int\frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Рішення. Інтегруємо частинами:

$$\int \frac{x\,arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \sqrt{1+x^2} \end{matrix} \right| = \sqrt{1+x^2}\,arctgx -$$

$$-\int \frac{dx}{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}\,arctgx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\,arctgx - ln\,|\,x + \sqrt{1+x^2}\,| + C.$$

31. $\int (x^2 - 4x + 3)e^{-2x}dx$.

Рішення. Інтегруємо частинами:

$$\int (x^2-4x+3)e^{-2x}dx = \left| \begin{matrix} x^2-4x+3 = u, & e^{-2x}dx = dv \\ (2x-4)dx = du, & -\dfrac{1}{2}e^{-2x} = v \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}(x^2-4x+3)e^{-2x} +$$

$$+\int (x-2)e^{-2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x-2, & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx, & v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-4x+3)e^{-2x} - \frac{1}{2}(x-2)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

32. $\int x\,ln\,(x+1)\,dx$.

Рішення. Інтегруємо частинами:

$$\int x\,ln\,(x+1)\,dx = \left| \begin{matrix} u = ln(x+1), & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1+\frac{1}{x+1})dx = \frac{1}{2}((x^2-1)ln(x+1) - \frac{x}{2}(x-2)) + C.$$

33. $\int \dfrac{7x - x^2 - 4}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx$.

Рішення. Підінтегральна функція це раціональний дріб. Розкладемо її знаменник на множники: $(x+1)(x-2)(x-3)$.

У розкладанні правильного дробу на найпростіші кожному лінійному множнику знаменника відповідає доданок $\dfrac{A}{x-a}$. В даному випадку маємо:

$$\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x^2-5x+6)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Привівши праву частину цієї рівності до загального знаменника і порівнявши чисельники дробів, одержимо тотожність

$$7x-x^2-4=A(x-2)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2).$$

Коефіцієнти *A, B, C* визначимо за допомогою визначених значень змінної:

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right| \begin{array}{c} -12=12A \\ 6=-3B \\ 8=4C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-2 \\ C=2. \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в розкладання підінтегральної функції на найпростіші дроби, одержимо:

$$\int\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx=\int\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right)dx=$$

$$=-\ln|x+1|-2\ln|x-2|+2\ln|x-3|+C.$$

Тут використано метод невизначених коефіцієнтів.

34. $\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}dx$.

Рішення. $\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)(x^2+x-2)}dx=\int\frac{15x-x^2-11}{(x-1)^2(x+2)}dx=$

$$=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\right)dx=I$$

$$15x-x^2-11=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 3=3B \\ -5=9C \\ 15=4A+4B+C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ C=-5 \\ A=4 \end{cases}$$

$$I=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-5\ln|x+2|+C.$$

Відзначимо, що для знаходження коефіцієнтів використали комбінований метод: метод визначених значень змінної і метод невизначених коефіцієнтів.

35. $\int\frac{x^4-8x^3+23x^2-43x+27}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$.

Рішення. Тому що підінтегральна функція є неправильним дробом, то шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити її у вигляді суми цілого многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\int\left(x-4+\frac{-2x^2+3x-13}{(x+2)(x^2-2x+5)}\right)dx=\frac{x^2}{2}-4x+$$

$$+\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}\right)dx=I$$

$$-2x^2+3x-13=A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-2)$$

$$\begin{array}{l|l} x=2 & -15=5A \\ x=0 & -2=A+B \\ x=1 & -12=4A-B-C \end{array}\Rightarrow\begin{cases}A=-3\\B=1\\C=-1\end{cases}$$

$$I=\frac{x^2}{2}-4x-3\ln|x-2|+\int\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx=\frac{x^2}{2}-4x-3\ln|x-2|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5|+C.$$

36. $\int\frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}dx$.

Рішення. $\int\frac{2x^3-5x^2+8x-22}{x^4+9x^2+20}dx=\int\frac{2x^3-5x^2+8x-22}{(x^2+4)(x^2+5)}dx=$

$$=\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+5}\right)dx=I$$

$$2x^3-5x^2+8x-22=(Ax+B)(x^2+5)+(Cx+D)(x^2+4)$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 2=A+C \\ x^2 & -5=B+D \\ x^1 & 8=5A+4C \\ x^0 & -22=5B+4D \end{array}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=-2\\C=2\\D=-3\end{cases}$$

$$I=\int\frac{-2}{x^2+4}dx+\int\frac{2x-3}{x^2+5}dx=-arctg\frac{x}{2}+\ln(x^2+5)-\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Тут застосовано метод невизначених коефіцієнтів.

37. $\int\frac{(x+1)dx}{3-\sqrt{x-2}}$.

Рішення. Інтегруємо шляхом уведення нової змінної:

$$\int \frac{(x+1)dx}{3-\sqrt{x-2}} = \left| \begin{array}{c} x-2=t^2 \\ x=t^2+2,\ t=\sqrt{x-2}, \\ dx=2tdt, \end{array} \right| = -2\int \frac{(t^2+3)}{t-3}tdt = -2\int \frac{t^3+3t}{t-3}dt =$$

$$= -2\int \left(t^2+3t+12+\frac{36}{t-3} \right)dt = -\frac{2}{3}t^3-3t^2-24t-72\ln|t-3|+C =$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{x-2})^3-3(x-2)-24\sqrt{x-2}-72\ln|\sqrt{x-2}-3|+C .$$

38. $\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx$.

Рішення. Інтегруємо шляхом уведення нової змінної:

$$\int \frac{4\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt{x-2}+2\sqrt[3]{x-2}}dx = \left| \begin{array}{c} x-2=t^6,\ dx=6t^5dt \\ x=t^6+2 \\ t=\sqrt[6]{x-2} \end{array} \right| = \int \frac{(4t^3-t)6t^5dt}{t^3+2t^2} =$$

$$= 6\int \frac{4t^6-t^4}{t+2}dt = 6\int (4t^5-8t^4+15t^3-30t^2+60t-120+\frac{240}{t+2})dt =$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}t^6-\frac{8}{5}t^5+\frac{15}{4}t^4-10t^3+30t^2-120t+240\ln|t+2| \right)+C ,$$

де $t=\sqrt[6]{x-2}$.

39. $\int \frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1}$.

Рішення. Застосовуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{3\sin x-2\cos x+1} = \left| \begin{array}{c} t=tg\frac{x}{2};\ sinx=\frac{2t}{1+t^2};\ cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};\ x=2arctgt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{6t-2+2t^2+1+t^2} = 2\int \frac{dt}{3t^2+6t-1} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+2t-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+1)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}ln\left| \frac{t+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{t+1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \right| + C =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\left|\frac{\sqrt{3}t+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}t+\sqrt{3}+2}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\left|\frac{\sqrt{3}tg\frac{x}{2}+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}tg\frac{x}{2}+\sqrt{3}+2}\right|+C.$$

40. $\int\frac{dx}{2\sin^2 x-\sin 2x+3\cos^2 x}$.

Рішення. Застосовуємо формули: $2\sin^2 x=1-\cos 2x$; $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, а потім універсальну тригонометричну підстановку.

$$\int\frac{dx}{2\sin^2 x-\sin 2x+3\cos^2 x}=\int\frac{2dx}{5+\cos 2x-2\sin 2x}=I\ .$$

$$\left|t=tgx;\quad x=arctgt;\ dx=\frac{dt}{1+t^2};\right|$$

$$I=\int\frac{dt}{2t^2-2t+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-t+\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2(t-1/2)}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2tgx-1}{\sqrt{5}}+C.$$

41. $\int\frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx$.

Рішення. Застосовуємо тригонометричну підстанову.

$$\int\frac{\cos^3 4x}{\sqrt[5]{\sin 4x}}dx=\left|\begin{matrix}\sin 4x=t\\ dt=4\cos 4xdx\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{(1-t^2)dt}{\sqrt[5]{t}}=\frac{1}{4}(t^{-1/5}-t^{9/5})dt=$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{5}{4}t^{4/5}-\frac{5}{14}t^{14/5})+C=\frac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^4 4x}-\frac{5}{56}\sqrt[5]{\sin^{14} 4x}+C=$$

$$=\frac{5}{8}\sqrt[5]{\sin^4 4x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\sin^2 4x\right)+C\ .$$

Завдання до теми 7

Інтегрування за допомогою таблиці

$\boxed{1}$ Знайти невизначені інтеграли (результат перевірити диференціюванням)

1. $\int \sqrt{3+x}\, dx$

2. $\int \sqrt[3]{1+x}\, dx$

3. $\int \sqrt[3]{(1+x)^2}\, dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$

7. $\int (1-4x)^7\, dx$

8. $\int (1+4x)^5\, dx$

9. $\int (1-3x)^4\, dx$

10. $\int \sqrt{1+3x}\, dx$

11. $\int \sqrt{5-4x}\, dx$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$

16. $\int \sqrt[3]{3-2x}\, dx$

17. $\int \sqrt[4]{1+3x}\, dx$

18. $\int \sqrt[3]{1+3x}\, dx$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2-x)^5}}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+x}}$

21. $\int \frac{dx}{(2+x)^3}$

22. $\int \sqrt[3]{5-2x}\, dx$

23. $\int \sqrt{5-7x}\, dx$

24. $\int \sqrt[5]{(6-5x)^2}\, dx$

25. $\int \sqrt[4]{2-5x}\, dx$

26. $\int \sqrt[3]{4-2x}\, dx$

27. $\int \sqrt{3-4x}\, dx$

28. $\int \sqrt[5]{3+2x}\, dx$

29. $\int \sqrt[4]{(3+5x)^3}\, dx$

30. $\int \sqrt[3]{(2-x)^2}\, dx$

$\boxed{2}$ Знайти невизначені інтеграли (результат перевірити диференціюванням)

1.	$\int \frac{dx}{3-x}$	11.	$\int \frac{dx}{3x+4}$	21.	$\int \frac{dx}{6+5x}$
2.	$\int \frac{dx}{3x+9}$	12.	$\int \frac{dx}{4x-2}$	22.	$\int \frac{dx}{1-7x}$
3.	$\int \frac{dx}{2-3x}$	13.	$\int \frac{dx}{5-3x}$	23.	$\int \frac{dx}{1+6x}$
4.	$\int \frac{dx}{1-4x}$	14.	$\int \frac{dx}{4-7x}$	24.	$\int \frac{dx}{2+7x}$
5.	$\int \frac{dx}{2+3x}$	15.	$\int \frac{dx}{5x-3}$	25.	$\int \frac{dx}{7-3x}$
6.	$\int \frac{dx}{2-5x}$	16.	$\int \frac{dx}{3-2x}$	26.	$\int \frac{dx}{5-2x}$
7.	$\int \frac{dx}{3x-2}$	17.	$\int \frac{dx}{5+3x}$	27.	$\int \frac{dx}{2x+7}$
8.	$\int \frac{dx}{2x+3}$	18.	$\int \frac{dx}{3-5x}$	28.	$\int \frac{dx}{2x+9}$
9.	$\int \frac{dx}{3x-4}$	19.	$\int \frac{dx}{5+4x}$	29.	$\int \frac{dx}{7x-3}$
10.	$\int \frac{dx}{4-3x}$	20.	$\int \frac{dx}{6-3x}$	30.	$\int \frac{dx}{6x+1}$

$\boxed{3}$ Знайти невизначені інтеграли (результат перевірити диференціюванням)

1. $\int sin(2-3x)dx$	2. $\int sin(3-2x)dx$	3. $\int sin(5-3x)dx$
4. $\int cos(2+3x)dx$	5. $\int cos(3+2x)dx$	6. $\int sin(4-2x)dx$

7. $\int cos(5-2x)dx$	8. $\int cos(7x+3)dx$	9. $\int sin(8x-3)dx$
10. $\int sin(3+4x)dx$	11. $\int sin(3-4x)dx$	12. $\int cos(4x+3)dx$
13. $\int cos(3-4x)dx$	14. $\int cos(2+5x)dx$	15. $\int cos(3x+5)dx$
16. $\int sin(5x-3)dx$	17. $\int sin(5-3x)dx$	18. $\int sin(3x+6)dx$
19. $\int cos(5x-8)dx$	20. $\int cos(3x-7)dx$	21. $\int cos(5x-6)dx$
22. $\int sin(7x+1)dx$	23. $\int cos(7x+3)dx$	24. $\int sin(7-4x)dx$
25. $\int cos(3x-7)dx$	26. $\int sin(8x-5)dx$	27. $\int cos(8x-4)dx$
28. $\int sin(9x-1)dx$	29. $\int cos(10x-3)dx$	30. $\int sin(9x+7)dx$

$\boxed{4}$ Знайти невизначені інтеграли (результат перевірити диференціюванням)

1. $\int \frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$	21. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2+3}}$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$	22. $\int \frac{dx}{4x^2+3}$
3. $\int \frac{xdx}{9x^2+3}$	13. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$	23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$
4. $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$	24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{7x^2-4}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-4}}$

8. $\int \frac{dx}{5x^2+3}$

9. $\int \frac{dx}{5x^2-3}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$

15. $\int \frac{dx}{2x^2+7}$

16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$

17. $\int \frac{xdx}{3x^2+2}$

18. $\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{7-2x^2}}$

19. $\int \frac{\sqrt{14}dx}{2x^2-7}$

20. $\int \frac{dx}{8x^2+9}$

25. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$

26. $\int \frac{xdx}{4x^2-3}$

27. $\int \frac{dx}{8x^2-9}$

28. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$

29. $\int \frac{dx}{4+3x^2}$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$

Інтегрування методом заміни змінної

$\boxed{5}$ Знайти невизначені інтеграли (результат перевірити диференціюванням)

1. $\int \frac{dx}{(2x+1)\cdot\sqrt[3]{ln^2(2x+1)}}$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{ln(1-x)}dx}{x-1}$

3. $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[3]{ln^2(1-x)}}$

4. $\int \frac{dx}{(1-x)\cdot\sqrt[2]{ln^3(1-x)}}$

5. $\int \frac{ln^3(1-x)dx}{x-1}$

6. $\int \frac{\sqrt[2]{ln(2x-1)}dx}{2x-1}$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{ln(3x+1)}dx}{3x+1}$

8. $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot ln^2(x+1)}$

9. $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{ln(x+1)}}$

10. $\int \frac{\sqrt[5]{ln^2(1+x)}dx}{x+1}$

11. $\int \frac{cos\,x}{\sqrt{(sin\,x-4)^3}}dx$

12. $\int \frac{sin\,3x}{cos^2 3x}dx$

13. $\int \frac{sin5x}{\sqrt{cos5x}}dx$

14. $\int \frac{cos4x}{sin^3 4x}dx$

15. $\int sin^3 4x \cdot cos4xdx$

16. $\int \sqrt[4]{cos2x} \cdot sin2xdx$

17. $\int \sqrt{cos^3 2x} \cdot sin2xdx$

18. $\int \frac{sin4x}{\sqrt[3]{cos^2 4x}}dx$

19. $\int sin^3 5x \cdot cos5xdx$

20. $\int \frac{cos5x}{\sqrt{sin^3 5x}}dx$

21. $\int \frac{ctg^5 4x}{sin^2 4x}dx$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{tg^5 4x}}{cos^2 4x}dx$

23. $\int \frac{\sqrt[5]{tg^2 3x}}{cos^2 3x}dx$

24. $\int \frac{dx}{cos^2 4x \cdot \sqrt{tg4x}}$

25. $\int \frac{dx}{sin^2 x \cdot \sqrt[5]{ctg^4 x}}$

26. $\int \frac{tg6x}{cos^2 6x}dx$

27. $\int \frac{tg^6 2x}{cos^2 2x}dx$

28. $\int \frac{\sqrt{ctg4x}}{sin^2 4x}dx$

29. $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^2 x}}{sin^2 x}dx$

30. $\int \frac{tg^7 3x}{cos^2 3x}dx$

$\boxed{6}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{\sqrt{arctg^6 3x}}{1+9x^2}dx$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

3. $\int \frac{arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

4. $\int \frac{arc\,tg^3 2x}{1+4x^2}dx$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctg^3 x}$

7. $\int \frac{arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{arc\,tg^2 x}}{1+x^2}dx$

9. $\int \frac{arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\ arcsin^4 x}$

11. $\int e^{5x^2-3}xdx$

12. $\int e^{1-4x^2}xdx$

13. $\int e^{3x^2+4}xdx$

14. $\int e^{sin\,x+1}cos\,xdx$

15. $\int e^{4-x^2}xdx$

16. $\int \frac{e^{tgx}dx}{cos^2 x}$ 17. $\int e^{3cos x+2} sin xdx$ 18. $\int e^{4sin x-1} cos xdx$

19. $\int e^{5x^2-3}xdx$ 20. $\int e^{5-2x^2} xdx$ 21. $\int e^{4-3x^2} xdx$

22. $\int e^{cos 2x} sin 2xdx$ 23. $\int e^{1-6x^2} xdx$ 24. $\int e^{x^3+1}x^2dx$

25. $\int \frac{e^{arctgx}dx}{1+x^2}$ 26. $\int e^{3x^2-2}xdx$ 27. $\int \frac{x^4dx}{e^{x^5+1}}$

28. $\int \frac{xdx}{e^{x^2-3}}$ 29. $\int \frac{xdx}{e^{2x^2+1}}$ 30. $\int e^{4-5x^2} xdx$

$\boxed{7}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{sin 2x}{1+3cos 2x}dx$ 2. $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$ 3. $\int \frac{sin 3x}{3-cos 3x}dx$

4. $\int \frac{e^x}{2e^x+3}dx$ 5. $\int \frac{sin 2x}{cos^2 x-4}dx$ 6. $\int \frac{e^x}{4-3e^x}dx$

7. $\int \frac{x^2}{7-5x^3}dx$ 8. $\int \frac{4x^3}{7+2x^4}dx$ 9. $\int \frac{sin 2x}{3sin^2 x+4}dx$

10. $\int \frac{7x^3}{2x^4-5}dx$ 11. $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}}dx$ 12. $\int \frac{sin 2x}{\sqrt{1+cos^2 x}}dx$

13. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17}dx$ 14. $\int \frac{cos 3x}{\sqrt{sin 3x-2}}dx$ 15. $\int \frac{sin x}{1+3cos x}dx$

16. $\int \frac{sin 2x}{4-sin^2 x}dx$ 17. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}dx$ 18. $\int \frac{x^2}{7+3x^3}dx$

19. $\int \frac{3x+3}{x^2+2x}dx$ 20. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{3+e^{2x}}}dx$ 21. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-10}dx$

22. $\int \frac{x^5}{3x^6-7}dx$

23. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5+3}}dx$

24. $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}dx$

25. $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt{5-\sin 7x}}dx$

26. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x+3}}dx$

27. $\int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5}dx$

28. $\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6-\cos^2 x}}dx$

30. $\int \frac{7x}{\sqrt{5x^2-4}}dx$

Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів

$\boxed{8}$ Знайти невизначені інтеграли попередньо вилучивши цілу частину раціонального дробу

1. $\int \frac{1-2x-x^2}{x^2+1}dx$

2. $\int \frac{7-x}{1-x}dx$

3. $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx$

4. $\int \frac{8x^3-1}{2x+1}dx$

5. $\int \frac{x^5-2}{x^2-4}dx$

6. $\int \frac{2x^4-3}{x^2+1}dx$

7. $\int \frac{x^3-1}{2x+1}dx$

8. $\int \frac{x^5}{1-x^3}dx$

9. $\int \frac{x^2}{x^2+3}dx$

10. $\int \frac{6x^3-2x+1}{2x+1}dx$

11. $\int \frac{x^4}{x^2-3}dx$

12. $\int \frac{2x^2+3}{2x^2-1}dx$

13. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx$

14. $\int \frac{x^3+5x}{x^2+1}dx$

15. $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$

16. $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$

17. $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx$

18. $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}dx$

19. $\int \frac{x^3-3}{x+5}dx$

20. $\int \frac{x^4+2}{x^2-4}dx$

21. $\int \frac{1-2x^4}{x^2+1}dx$

22. $\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

23. $\int \frac{2x^5+5}{x+1}dx$

24. $\int \frac{2x^3-3}{x-2}dx$

25. $\int \frac{x^2+x}{2-x}dx$

26. $\int \frac{x^3+3x+1}{x^2+2}dx$

27. $\int \frac{2x^3+3}{x-1}dx$

28. $\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx$

29. $\int \frac{x^2+4}{x-3}dx$

30. $\int \frac{1-x^4}{x^2+4}dx$

Інтегрування тригонометричних функцій

$\boxed{9}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int sin^2(1-x)dx$
2. $\int sin^3(1-x)dx$
3. $\int \left(1-2\,sin\frac{x}{5}\right)^2 dx$
4. $\int cos^3 5x\, sin 5x\; dx$
5. $\int cos^3(1-x)\; dx$
6. $\int (3-sin\,2x)^2\; dx$
7. $\int sin^2 \frac{3x}{2}\; dx$
8. $\int (cos\,x+3)^2\; dx$
9. $\int cos^3(x+3)\; dx$
10. $\int sin^3 \frac{4x}{5}\; dx$
11. $\int (1-cos\,x)^2\; dx$
12. $\int sin^2(2x-1)dx$
13. $\int sin^3 6x\; dx$
14. $\int sin^2 \frac{x}{2}\; dx$
15. $\int sin^2\left(\frac{x}{2}+1\right)\; dx$
16. $\int cos^2 3{,}5x\; dx$
17. $\int \left(1+2\,cos\frac{x}{2}\right)^2\; dx$
18. $\int cos^2 3x\; dx$
19. $\int sin^4 2x\; dx$
20. $\int sin^2 5x\; dx$
21. $\int (1+cos\,3x)^2\; dx$
22. $\int cos^2 \frac{2x}{5}\; dx$
23. $\int sin^3 5x\; dx$
24. $\int sin^4 2{,}5x\; dx$
25. $\int cos^4 x\; dx$
26. $\int cos^3 3x\; dx$
27. $\int cos^2 7{,}5x\; dx$
28. $\int (sin\,x-5)^2\; dx$
29. $\int sin^3 4x\; dx$
30. $\int sin^2 \frac{3x}{4}\; dx$

$\boxed{10}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int tg^2 x\, dx$
2. $\int ctg^3 (x-6) dx$
3. $\int tg^4 3x\, dx$
4. $\int tg^2 7x\, dx$
5. $\int tg^5 x\, dx$
6. $\int x\, tg^2 x^2 dx$
7. $\int ctg^3 x\, dx$
8. $\int tg^2 3x\, dx$
9. $\int tg^3 \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int tg^2 \frac{x}{3}\, dx$
11. $\int ctg^3 3x\, dx$
12. $\int ctg^2 5x\, dx$
13. $\int tg^3 5x\, dx$
14. $\int (1 - tg\, 2x)^2\, dx$
15. $\int tg^2 2x\, dx$
16. $\int sin\, 4x\, cos\, 2x\, dx$
17. $\int sin\, 3x\, cos\, 2x\, dx$
18. $\int sin^3 7x\, cos\, 7x\, dx$
19. $\int \frac{sin\, 3x}{cos^2 x}\, dx$
20. $\int \frac{cos\, 2x}{sin^4 2x}\, dx$
21. $\int cos\, 2x\, cos\, 5x\, dx$
22. $\int sin^2 2x\, cos\, x\, dx$
23. $\int \frac{cos\, x}{sin^4 x}\, dx$
24. $\int sin\, 2x\, sin\, 3x\, dx$
25. $\int sin\, x\, cos^3 x\, dx$
26. $\int sin\, 5x\, cos\, x\, dx$
27. $\int sin\, x\, cos\, 4x\, dx$
28. $\int cos\, 3x\, cos\, x\, dx$
29. $\int cos^4 2x\, sin\, 2x\, dx$
30. $\int cos\, 7x\, cos\, 5x\, dx$

Інтегрування функцій, які мають многочлен другого ступеня

$\boxed{11}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}$
2. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 10}$
3. $\int \frac{dx}{2x^2 - 7x + 1}$
4. $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 6}$
5. $\int \frac{dx}{5x^2 + 2x + 7}$
6. $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$
7. $\int \frac{dx}{2x^2 - 11x + 2}$
8. $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 2}$
9. $\int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 3}$

10. $\int\frac{dx}{2x^2+3x}$

11. $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

12. $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$

13. $\int\frac{dx}{3x^2-8x-3}$

14. $\int\frac{dx}{8-2x-x^2}$

15. $\int\frac{dx}{5x-x^2-6}$

16. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$

17. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$

18. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

19. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$

20. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$

21. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$

22. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+1}}$

23. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$

24. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$

25. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

26. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$

28. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$

29. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$

30. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

$\boxed{12}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int\frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$

2. $\int\frac{2x-1}{3x^2+x+1}dx$

3. $\int\frac{x+6}{3x^2-2x+6}dx$

4. $\int\frac{xdx}{2x^2+x+5}$

5. $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

6. $\int\frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$

7. $\int\frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx$

8. $\int\frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx$

9. $\int\frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$

10. $\int\frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$

11. $\int\frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$

12. $\int\frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$

13. $\int\frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx$

14. $\int\frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$

15. $\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}$

16. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$ 17. $\int \frac{2x-1}{x^2+4x-3}dx$ 18. $\int \frac{2-x}{x^2+4x-3}dx$

19. $\int \frac{2x-1}{x^2-2x-3}dx$ 20. $\int \frac{3x-1}{3+x-2x^2}dx$ 21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}dx$

22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$ 23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$ 24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$

25. $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx$ 26. $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$ 27. $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$

28. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx$ 29. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$ 30. $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7}dx$

13 Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$ 2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$ 3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$

4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx$ 5. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$ 6. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

7. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$ 8. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$ 9. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$

10. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$ 11. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx$ 12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$

13. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$ 14. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-3}}dx$ 15. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

16. $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$ 17. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$ 18. $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx$

19. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$ 20. $\int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}dx$ 21. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx$

22. $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$ 23. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx$ 24. $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

25. $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx$ 26. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx$ 27. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx$

28. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx$ 29. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$ 30. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$

Інтегрування за допомогою тригонометричних підстановок

$\boxed{14}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$ 2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ 3. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$

4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$ 5. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ 6. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$ 8. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}\,dx$ 11. $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}\,dx$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$ 15. $\int x^3\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx$

16. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$ 17. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}$ 18. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx$

19. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{x^2-1}}$ 20. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}\,dx$ 21. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+9}}$

22. $\int x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}\ dx$

23. $\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\ dx$

24. $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^4}\ dx$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

26. $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}\ dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$

28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

29. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\ dx$

30. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\ dx$

Інтегрування частинами

$\boxed{15}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{ln\left(cos\, x\right)}{cos^2 x} dx$

2. $\int cos\left(ln\, x\right) dx$

3. $\int \frac{ln\, x}{x^2} dx$

4. $\int ln\left(x+2\right) dx$

5. $\int \frac{ln\left(cos\, x\right)}{sin^2 x} dx$

6. $\int \frac{ln\left(ln\, x\right)}{x} dx$

7. $\int ln^2 x\ dx$

8. $\int \frac{ln\, x}{\sqrt{x}} dx$

9. $\int x \cdot ln\frac{1-x}{1+x} dx$

10. $\int ln\left(x+4\right) dx$

11. $\int \frac{ln\left(sin\, x\right)}{sin^2 x} dx$

12. $\int x^2\, ln\left(x+1\right) dx$

13. $\int arcctg 3x\ dx$

14. $\int arcsin 4x\ dx$

15. $\int x^2 \cdot arctg 3x\ dx$

16. $\int x \cdot arctg 3x\ dx$

17. $\int arctg\left(1-x\right)\ dx$

18. $\int x^2 \cdot arcctg x\ dx$

19. $\int x \cdot arctg^2 x\ dx$

20. $\int x^2 \cdot cos\frac{x}{3}\ dx$

21. $\int x \cdot arctg^2 x\ dx$

22. $\int x^2 \cdot sin 2x\ dx$

23. $\left(x^2+4\right) \cdot e^{2x} dx$

24. $\int x^2 \cdot cos 2x\ dx$

25. $\int x \cdot sin^2 x\ dx$

26. $\int x \cdot sin 2x\ dx$

27. $\int x^2 \cdot sin 2x\ dx$

28. $\int x\cdot ctg^2x\,dx$ 29. $\int x^2\cdot e^{-x}\,dx$ 30. $\int \frac{x}{sin^2 x}\,dx$

$\boxed{16}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int ln(x-5)\,dx$ 2. $\int arctg2x\,dx$ 3. $\int x^2e^{-x}\,dx$

4. $\int (x+1)e^{-4x}\,dx$ 5. $\int x^2e^{2x}\,dx$ 6. $\int arctg3x\,dx$

7. $\int x\cdot cos8x\,dx$ 8. $\int arcctg4x\,dx$ 9. $\int arcsin5x\,dx$

10. $\int (x+1)e^{-x}\,dx$ 11. $\int x\cdot arctgx\,dx$ 12. $\int x^2\cdot e^{3x}\,dx$

13. $\int x\cdot cos(x+4)\,dx$ 14. $\int x\cdot cos(x-2)\,dx$ 15. $\int x\cdot cos(x+3)\,dx$

16. $\int x\cdot e^{2+x}\,dx$ 17. $\int x\cdot e^{-7x}\,dx$ 18. $\int arcsin2x\,dx$

19. $\int x\cdot arcsin(x+7)\,dx$ 20. $\int x\cdot cos(x-4)\,dx$ 21. $\int x\cdot arccos(x-4)\,dx$

22. $\int x\cdot cos(x+9)\,dx$ 23. $\int (x+3)e^{-x}\,dx$ 24. $\int arccos\,x\,dx$

25. $\int (x^2-3)e^{x}\,dx$ 26. $\int x\cdot e^{-4x}\,dx$ 27. $\int x\cdot cos(x+7)\,dx$

28. $\int x^2\cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$ 29. $\int x\cdot e^{3+x}\,dx$ 30. $\int x\cdot cos(2-x)\,dx$

$\boxed{17}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int arctg2x\,dx$ 2. $\int x\cdot cos6x\,dx$ 3. $\int arcsin4x\,dx$

4. $\int arccos3x\,dx$ 5. $\int arctg8x\,dx$ 6. $\int x\cdot sin(x-2)\,dx$

7. $\int arcsin7x\,dx$ 8. $\int x\cdot cos(x+3)\,dx$ 9. $\int x\cdot cos(x+4)\,dx$

10. $\int arccos 7x\, dx$

11. $\int x \cdot cos(7-x)\, dx$

12. $\int x \cdot sin(x-5)\, dx$

13. $\int (x-4)e^{x}\, dx$

14. $\int x \cdot e^{-6x}\, dx$

15. $\int arctg \frac{x}{2}\, dx$

16. $\int arcsin \frac{x}{2}\, dx$

17. $\int ln(7-x)\, dx$

18. $\int x \cdot cos(6-x)\, dx$

19. $\int arctg \frac{x}{3}\, dx$

20. $\int ln(x-8)\, dx$

21. $\int arctg \frac{x}{4}\, dx$

22. $\int arccos \frac{x}{5}\, dx$

23. $\int arcsin \frac{x}{4}\, dx$

24. $\int ln(12-x)\, dx$

25. $\int ln(2x+3)\, dx$

26. $\int arccos \frac{x}{7}\, dx$

27. $\int arctg 6x\, dx$

28. $\int arcsin \frac{2}{3} x\, dx$

29. $\int arcctg \frac{2}{3} x\, dx$

30. $\int ln(4-3x)\, dx$

Інтегрування за методом невизначених коефіцієнтів

$\boxed{18}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}\, dx$

2. $\int \frac{12dx}{(x-2)(x^2-2x-3)}$

3. $\int \frac{43x-67}{(x-1)(x^2-x-12)}\, dx$

4. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}\, dx$

5. $\int \frac{8x\, dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}$

6. $\int \frac{2x^4-7x^3+7x^2-8x}{(x^2-5x+6)(x+1)}\, dx$

7. $\int \frac{2x^4+8x^3-45x^2-61}{(x-1)(x^2+5x+6)}\, dx$

8. $\int \frac{2x^4+17x^3+32x^2-7x}{(x^2+4x+3)(x+5)}\, dx$

9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}\, dx$

10. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}\,dx$

11. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}\,dx$

12. $\int \frac{2x^4-7x^3+3x^2+20}{(x-2)(x^2-2x-3)}\,dx$

13. $\int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx$

14. $\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx$

15. $\int \frac{6x\,dx}{x^3+2x^2-x-2}$

16. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$

17. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}\,dx$

18. $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$

19. $\int \frac{1}{x^3+x^2}\,dx$

20. $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2}\,dx$

21. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

22. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}\,dx$

23. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x-1)(x^2-1)}\,dx$

24. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}\,dx$

25. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

26. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x-1)(x^2-x)}\,dx$

27. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}\,dx$

28. $\int \frac{1}{x^3-x^2}\,dx$

29. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

30. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}\,dx$

$\boxed{19}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$

2. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}\,dx$

3. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

4. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$

5. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}\,dx$

6. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}\,dx$

7. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$

8. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

9. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}\,dx$

10. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}\,dx$

11. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}\,dx$

13. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}\,dx$

14. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}\,dx$

15. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}\,dx$

16. $\int \frac{x^3-2x^2+5}{x^4-1}\,dx$

17. $\int \frac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}\,dx$

18. $\int \frac{7x-2}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

19. $\int \frac{4x^2-2}{x^4-x^2}\,dx$

20. $\int \frac{x^3-2x^2+4x-2}{x^4+3x^2-4}\,dx$

21. $\int \frac{2x^3-2x-5}{x^4+3x^2-4}\,dx$

22. $\int \frac{3x-8}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$

23. $\int \frac{x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx$

24. $\int \frac{2-8x}{x^4+4x^2}\,dx$

25. $\int \frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}\,dx$

26. $\int \frac{2x^3-3x^2+8x-27}{x^4+13x^2+36}\,dx$

27. $\int \frac{5x^3-x^2+21x-9}{x^4+10x^2+9}\,dx$

28. $\int \frac{2x^5-2x^3-x^2}{1-x^4}\,dx$

29. $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^4+5x^2+4}\,dx$

30. $\int \frac{2x+3}{(x-1)\left(x^3-x^2+4x-4\right)}\,dx$

Інтегрування ірраціональних виразів

$\boxed{20}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$

2. $\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x+3}}$

3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$

4. $\int \frac{x\cdot dx}{2+\sqrt{x+4}}$

5. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$

6. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx$

7. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$

8. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}\,dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$

11. $\int \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$

13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x-1}}$

14. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$

15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-7}}$

17. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

18. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-7}}$

19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}$

20. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$

21. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}$

22. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+10}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$

24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$

25. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x-2}}$

26. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$

27. $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

28. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+6}}$

29. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$

30. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$

$\boxed{21}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\cdot\sqrt{x+1}}\,dx$

2. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$

3. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}\,dx$

4. $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}+1}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$

5. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$

6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}\,dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,dx$

11. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}\,dx$

12. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\,dx$

13. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}\,dx$

14. $\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}\,dx$

15. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}\,dx$

16. $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$

18. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}\,dx$

19. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}\,dx$

20. $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$

21. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

22. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$

23. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

24. $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

25. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$

26. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}\,dx$

27. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

28. $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

30. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(x+1)\cdot\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}\,dx$

Інтегрування за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$\boxed{22}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$

2. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$

3. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}\,dx$

4. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$

5. $\int \frac{dx}{5\cos x+7\sin x}$

6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$

7. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

8. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

9. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

10. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$

11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$

12. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$

13. $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

14. $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$

15. $\int \frac{dx}{2 + 4\sin x + 3\cos x}$

16. $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$

17. $\int \frac{2 - \sin x + 3\cos x}{1 + \cos x}\, dx$

18. $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3\cos x}$

19. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x + 3\cos x}$

20. $\int \frac{7 + 6\sin x - 5\cos x}{1 + \cos x}\, dx$

21. $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$

22. $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x}\, dx$

23. $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$

24. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$

25. $\int \frac{dx}{4\sin x - 5\cos x}$

26. $\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x}$

27. $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$

28. $\int \frac{dx}{4 - 4\sin x + 3\cos x}$

29. $\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x}$

30. $\int \frac{dx}{2 - 3\cos x + \sin x}$

Інтегрування за допомогою тригонометричних підстановок

$\boxed{23}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x}$

2. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - \sin 2x}$

3. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$

4. $\int \frac{2tg\ x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\, dx$

5. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

6. $\int \frac{tg\ x}{1 - ctg^2 x}\, dx$

7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$

8. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$

9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

11. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 4\sin 2x}$

12. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

13. $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}$

15. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

16. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

18. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$

19. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}\, dx$

20. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$

21. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$

22. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 3}$

23. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$

24. $\int \frac{3tg\, x - 1}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\, dx$

25. $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$

26. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$

27. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx$

28. $\int \frac{dx}{3 - \cos^2 x}$

29. $\int \frac{tgx \cdot dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

30. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x}\, dx$

$\boxed{24}$ Знайти невизначені інтеграли

1. $\int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x\, dx$

2. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x \cdot dx$

3. $\int \cos^3 x \cdot \sin^8 x\, dx$

4. $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x\, dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx$

6. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cdot \cos^3 2x \cdot dx$

7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$

8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$

9. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

10. $\int sin^5 x \cdot cos^4 x\, dx$

11. $\int \frac{sin^3 x}{\sqrt[5]{cos^3 x}} dx$

12. $\int \sqrt[3]{cos^2 x} \cdot sin^3 x\, dx$

13. $\int \sqrt[3]{sin^2 x} \cdot cos^3 x\, dx$

14. $\int \sqrt[5]{cos^3 2x} \cdot sin^3 2x\, dx$

15. $\int \frac{cos^3 x}{\sqrt[5]{sin^3 x}} dx$

16. $\int sin^2 2x \cdot cos^4 2x\, dx$

17. $\int \frac{sin^3 x}{\sqrt[3]{cos^2 x}} dx$

18. $\int \sqrt[5]{cos^4 x} \cdot sin^3 x\, dx$

19. $\int sin^4 2x \cdot cos^2 2x\, dx$

20. $\int \frac{cos^3 2x}{\sqrt[3]{sin^2 2x}} dx$

21. $\int \frac{sin^3 2x}{\sqrt[3]{cos^2 2x}} dx$

22. $\int sin^4 x \cdot cos^3 x\, dx$

23. $\int sin^2 x \cdot cos^4 x\, dx$

24. $\int sin^4 x \cdot cos^2 x\, dx$

25. $\int sin^3 x \cdot cos^8 x\, dx$

26. $\int \frac{3cos^3 x}{sin^4 x} dx$

27. $\int sin^5 x \cdot \sqrt[5]{cos^3 x}\, dx$

28. $\int sin^4 x \cdot cos^5 x\, dx$

29. $\int sin^4 3x \cdot cos^2 3x\, dx$

30. $\int \frac{sin^3 x}{\sqrt[3]{cos^2 x}} dx$

Змістовий модуль 2.2

Тема 8. ***Визначений інтеграл***

Обчислення визначених інтегралів

1. $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x(1+x^2)}$.

Рішення. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів та формулу Ньютона-Лейбніца, обчислюємо інтеграл від дробо-раціональної функції:

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}\right)dx=I$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)x$$

$$\begin{array}{c|c} x=0 & 1=A \\ x^2 & 0=A+B \\ x & 0=C \end{array}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$$

$$I=\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x}-\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{1+x^2}=ln|x|\Big|_1^2-\frac{1}{2}ln|x^2+1|\Big|_1^2=ln2-\frac{1}{2}ln5+\frac{1}{2}ln2=$$

$$=\frac{3}{2}ln2-\frac{1}{2}ln5\approx\frac{3}{2}\cdot 0{,}69-\frac{1}{2}\cdot 1{,}61=0{,}24.$$

2. $\int\limits_{1}^{e}ln^2 xdx$.

Рішення. Двічі застосувавши метод інтегрування частинами, одержимо:

$$\int\limits_{1}^{e}ln^2 xdx=\left|\begin{array}{cc}u=ln^2 x & dv=dx\\ du=\frac{2\ln x}{x}dx & v=x\end{array}\right|=x\,ln^2 x\Big|_1^e-2\int\limits_{1}^{e}ln\,xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{cc}u=ln\,x & du=\frac{dx}{x}\\ dv=dx & v=x\end{array}\right|=e\,ln^2 e-2(x\,ln\,x-x)\Big|_1^e=e-2e+2e-2\approx 0{,}72$$

3. $\int\limits_{3}^{4}\frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx$.

Рішення. Підінтегральна функція являє собою правильний раціональний дріб. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, маємо:

$$\int_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx = \int_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}dx =$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)dx = I$$

$$9x^2-14x+1 = A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1)$$

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 24=6A \\ x=1 & -4=-2B \Rightarrow \\ x=2 & 9=3C \end{array} \begin{cases} A=4 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

$$I = \int_3^4 \left(\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx = (4\ln|x+1|+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|)\Big|_3^4 =$$

$$4\ln 5+2\ln 3+3\ln 2-4\ln 4-4\ln 2 = \ln\frac{11250}{256} \approx 3{,}78\ .$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Рішення. Використовуємо метод заміни змінної.

$$\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t^2; t=1, \quad коли\ x=0 \\ xdx=tdt;\ t=\sqrt{2},\ коли\ x=1 \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)}{t}dt =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}-\frac{1}{3}+1 \approx 0{,}20\,.$$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Рішення. Підінтегральна функція є парною відносно *sinx* і *cosx* (раціонально залежить від $\cos^2 x$ і $\sin^2 x$), тому застосуємо підстановку $t = tgx$.

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x+9\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi/} \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+9tg^2 x\right)} =$$

$$\left| \begin{array}{c} t = tgx, dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, \\ t=0,\ коли\ \ x=0;\ \ t=1,\ коли\ \ x=\pi/4 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{3}\cdot arctg\,(3t)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(arctg3 - arctg0) \approx 0{,}42 \ .$$

6. $\int\limits_0^1 \dfrac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$.

Рішення.

$$\int\limits_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = 2\int\limits_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} - 13\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$$

$$= -2\sqrt{3-2x-x^2}\Big|_0^1 - 13\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{13}{2}\pi + \frac{13}{6}\pi \approx -10{,}15 \ .$$

7. $\int\limits_{2/3}^{10/3} \dfrac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

Рішення. Робимо заміну змінної.

$$\int\limits_{2/3}^{10/3} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left| 3x-1=t^2;\ dx=\frac{2}{3}tdt;\ t=1,\ коли\ x=\frac{2}{3}; \right.$$

$$\left. t=3,\ коли\ x=\frac{10}{3} \right| = \int\limits_1^3 \frac{\dfrac{t^2+1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}tdt}{t^2\cdot t} = \frac{2}{9}\int\limits_1^3 \frac{t^3+t}{t^3}\,dt = \frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^3 \approx 0{,}59 \ .$$

Невласні інтеграли

8. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Рішення.

а) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 \frac{dx}{(x+2)^2+5} +$$

$$+\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{x+2}{\sqrt5}\Bigg|_{\alpha}^{0}+\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{x+2}{\sqrt5}\Bigg|_{0}^{\beta}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{2}{\sqrt5}-\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{\alpha+2}{\sqrt5}+\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{\beta+2}{\sqrt5}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt5}\ ;$$

Застосування визначеного інтеграла у геометрії

9. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу фігури обмеженої лініями $y=ln\,x$, $y=ln^2 x$.

Рішення. Розв’яжемо рівняння $ln^2 x=ln\,x$ і знайдемо точки перетину даних кривих: $M_1(1,0)$; $M_2(e,1)$. Шукана площа (рис.1) знаходиться за формулою: $S=\int_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$.

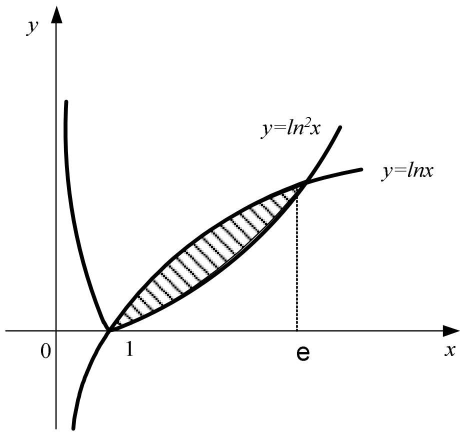

Рис. 1

.

Тут $f_1(x)=ln\,x$, $f_2(x)=ln^2 x$, тобто: $S=\int_1^e(ln\,x-ln^2 x)dx$. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int ln^2 xdx = \begin{vmatrix} u = ln^2 x, & dv = dx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x}dx, & v = x \end{vmatrix} = x\,ln^2 x - 2\int ln\,xdx\,,$$

$$\int ln\,xdx = \begin{vmatrix} ln\,x = u, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{vmatrix} = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C\,.$$

Тоді

$$S = \int_1^e ln\,xdx - \int_1^e ln^2 xdx = (x\,ln\,x - x)\Big|_1^e - (x\,ln^2 x - 2x\,ln\,x + 2x)\Big|_1^e =$$

$$= e\,ln\,e - e + 1 - (e\,ln^2 e - 2e\,ln\,e + 2e - 2) = 3 - e \approx 0{,}28\,.$$

10. Обчислити площу фігури, обмеженої параметрично заданою лінією:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t, \\ y = 2 - 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Рішення. Побудуємо криву. Виберемо достатню кількість значень параметра t_i, обчислимо відповідні значення x_i, y_i і отримаємо точки $M_i(x_i, y_i)$ подані у таблиці у декартових координатах. З'єднаємо їх плавною лінією. Очевидно, що отримана крива є еліпс (рис. 2) із півосями $a = 3$, $b = 2$ і центром у точці $C(1,2)$.

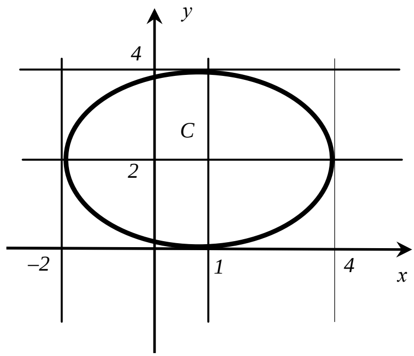

Рис. 2.

t_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
x_i	4	$\approx 3{,}5$	$\approx 3{,}1$	$2{,}5$	1	$\approx -1{,}1$	-2	$\approx 1{,}1$	1	$\approx 3{,}1$	4
y_i	2	1	$\approx 0{,}6$	$\approx 0{,}3$	0	$\approx 0{,}6$	2	$\approx 3{,}4$	4	$\approx 3{,}4$	2

Для строгого доказу того, що дані параметричні рівняння визначають еліпс із зазначеними осями і центром, позбудемося параметра *t*:

$$\frac{x-1}{3}=\cos t\ ,\ \frac{y-2}{-2}=\sin t\text{, відкіля }\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1\ .$$

Площу фігури, рівняння якої задано параметрично, обчислюємо за формулою:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt\text{, де }x=\varphi(t)\ ,\ \ y=\psi(t)\ \text{ і }\ t\in[\alpha,\beta]\,.$$

Тут $S=\int\limits_{0}^{2\pi}2(1-\sin t)(1+3\cos t)'dt=-6\int\limits_{0}^{2\pi}\sin t(1-\sin t)dt=$

$$6(\cos t\Big|_{0}^{2\pi}+\int_{0}^{2\pi}\sin^2+dt)=3\int_{0}^{2\pi}(1-\cos 2t)dt=3(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_{0}^{2\pi}=6\pi\ \text{ од}^2.$$

11. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) довжину дуги лінії

$$\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\ 0\le t\le\pi.\end{cases}$$

Рішення. Скористаємося формулою:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt\ ,$$

$$x'_t=2t\sin t+(t^2-2)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t\ ,$$

$$y'_t=-2t\cos t-(2-t^2)\sin t+2\sin t+2t\cos t=t^2\sin t\ ,$$

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}=t^2\ .$$

Остаточно маємо:

$$l=\int_0^{\pi} t^2 dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}\approx 10{,}32 \text{ од.}$$

12. Обчислити довжину лінії $\rho=4(1-\sin\varphi)$ і площу фігури, яку вона обмежує.

Рішення. Лінію подано у полярній системі координат. Побудуємо дану лінію. Для цього складемо таблицю, у якій приведені відповідні значення полярного кута $\varphi_i\,(i=\overline{1,9})$ і полярного радіусу ρ_i.

φ_i	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ρ_i	0	0,6	1,2	2	4	6	6,8	7,4	8

Побудувавши знайдені точки $M_i(\rho_i,\varphi_i)$ у полярній системі координат та з'єднавши їх плавною лінією, одержимо кардиоіду (рис.3).

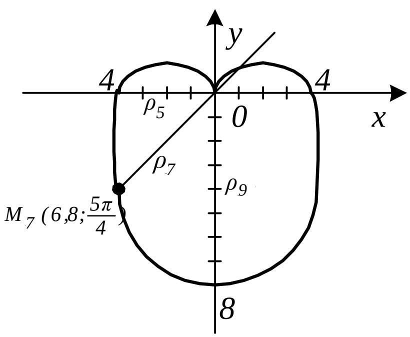

Рис. 3.

Довжину лінії у полярній системі координат знаходимо за формулою:

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,d\varphi .$$ Тут $\rho'=4(1-\sin\varphi)'=-4\cos\varphi$.

Побудована лінія симетрична відносно вісі oy . Отже,

$$L=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-4\cos\varphi)^2+(1-\sin\varphi)^2}\,d\varphi=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\varphi+1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\sin\varphi)}\,d\varphi=8\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2})^2}\,dy=$$

$$=8\sqrt{2}(-2\cos\frac{\varphi}{2}-2\sin\frac{\varphi}{2})\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}=16\sqrt{2}(2\frac{\sqrt{2}}{2})=32 \text{ од.}$$

Площу фігури обчислюємо за формулою:

$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi$, де $\varphi\in[\alpha,\beta]$. За урахуванням симетрії фігури, маємо:

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}(4(1-\sin\varphi))^2 d\varphi=16\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}(1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi)d\varphi=$$

$$=16(\frac{3}{2}\varphi+2\cos\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}=$$

$$=16\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}(\sin 3\pi-\sin\pi)\right)=24\pi \text{ од}^2.$$

13. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі абсцис плоскої фігури, обмеженої параболами: $y=3-x^2$, $y=x^2+1$.

Рішення. Знаходимо точки перетинання парабол: $M_1(-1,2)$, $M_2(1,2)$.

Об'єм V даного тіла одержуємо як різницю об'ємів V_1-V_2 , де

$$V_2 = \pi \int_{-1}^{1} (3 - x^2)^2 dx; \quad V_1 = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2 dx.$$

Таким чином,

$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_{-1}^{1} ((3 - x^2)^2 - (x^2 + 1)^2) dx = \pi \int_{-1}^{1} (8 - 8x^2) dx =$$

$$= 8\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{1} = 16\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) \approx 33{,}50 \text{ од}^3.$$

Рисунок до задачі виконати самостійно!

14. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу поверхні і об'єм тіла, отриманого обертанням кола $\rho = 10sin\varphi$ навколо полярної осі *Ol.*

Рішення. Утворене тіло має назву – тор. Площу поверхні тору у полярній системі координат обчислюємо за формулою:

$$S = 2\pi \int_{\varphi_2}^{\varphi_2} y\sqrt{(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2} d\varphi,$$

де: $y = \rho sin\varphi$; $y = 10sin\varphi = 10sin^2\varphi$; $\rho'_\varphi = 10cos\varphi$;

$$\sqrt{(\rho'_\varphi{}^2 + \rho^2} = \sqrt{100\cos^2\varphi + 100\sin^2\varphi} = 10; \ \varphi_1 = 0; \ \varphi_2 = \pi.$$

Тоді, $S = 2\pi \int_0^\pi 10\sin^2\varphi 10 d\varphi = 200\pi \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = 100\pi \int_0^\pi (1 - \cos 2\varphi) d\varphi =$

$$= 100\pi \left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^\pi \approx 985{,}96 \text{ од}^2.$$

Об'єм тіла обертання обчислюємо за формулою: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Тут тіло обертання утворено двома кривими: $f_1(x) = 5 + \sqrt{25 - x^2}$ і $f_2(x) = 5 - \sqrt{25 - x^2}$, де $x \in [-5; 5]$. Отже, об'єм утвореного тіла дорівнюватиме різниці об'ємів:

$$V_{\text{т.о.}} = 2\pi \int_0^5 (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx =$$

$$= 2\pi\int_0^5 (f_1(x) - f_2(x))(f_1(x) + f_2(x))dx = 2\pi\int_0^5 2\sqrt{25 - x^2} \cdot 10dx =$$

$$= 40\pi\int_0^5 \sqrt{25 - x^2}dx = 40\pi\left(\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}\right)\Bigg|_0^5 =$$

$$= 40\pi\left(\frac{25}{5}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 250\pi^2 \text{ од}^3.$$

При обчисленні об'єму врахована симетрія тіла.
Рисунок до задачі виконати самостійно!

Застосування визначеного інтеграла у фізиці тп механіці

15. Обчислити роботу, яку потрібно затратити, щоб розтягти пружину на *10* см, якщо відомо, що для розтягнення її на *1* см необхідно прикласти силу в *1* кН.

Рішення. Відповідно до закону Гука, сила F, що розтягує пружину, пропорційна її розтяганню, тобто $F = kx$, де x - розтягання пружини (у метрах), k - коефіцієнт пропорційності.
Тому що за умовою задачі при $x = 0{,}01$м сила $F = 1$ кН, то з рівності $1 = 0{,}01k$ одержуємо: $k = 100$ і $F = 100x$. Отже, шукана робота

$$A = \int_0^{0,1} 100xdx = 50x^2\Big|_0^{0,1} = 0{,}5 \text{ кДж}.$$

16. Обчислити силу тиску води на пластину, вертикально занурену у воду, вважаючи, що питома вага води дорівнює $9{,}81 кН/м^3$. Форма, розміри і розташування пластини зазначені на рис.4.

Рішення. Вибираємо систему координат щодо пластини так, як показано на рисунку. Тоді рівняння параболи має вид: $x^2 = -2py$. Тому що парабола проходить через точку $A\left(\frac{1}{2};-1\right)$, то $p = \frac{1}{8}$ і $x^2 = -\frac{1}{4}y$.

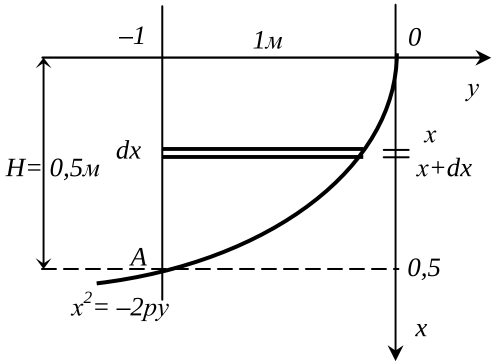

Рис. 4

Виділимо на глибині x горизонтальну смужку шириною dx і площею $ds = (1 - |y|)dx$. Тиск води на цю смужку

$$\Delta P = \gamma x(1 - |y|)dx = \gamma x(1 - 4x^2)dx .$$

Тоді тиск води на всю пластину буде

$$P = \gamma \int_0^H x(1 - 4x^2)dx = \gamma\left(\frac{x^2}{2} - x^4\right)\Bigg|_0^H = \gamma\left(\frac{H^2}{2} - H^4\right).$$

При $H = 0{,}5$ і $\gamma = 9{,}81$ кН/м^3 одержимо

$$P = 9{,}81\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) = \frac{9{,}81}{16} \approx 0{,}61 \text{ кН}.$$

17. Знайти координати центра мас даної однорідної фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

Рішення. Координати центра мас даної фігури обчислюються за формулами:

$$x_C = \frac{\int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx} = \frac{M_y}{m}; \quad y_C = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx}{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx} = \frac{M_x}{m},$$

Тут: $f_2(x) = x^2$; $f_1(x) = \sqrt{x}$; m – маса фігури; M_x, M_y – статичні моменти плоскої фігури вфідносно осей Ox та Oy .

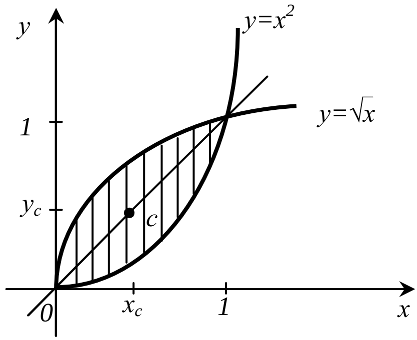

Рис.5

Тому що точки перетинання кривих *O(0,0)* і *B(1,1)*, то $a = 0$; $b=1$. Тоді маємо:

$$m = \int_0^1 (y_2 - y_1)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$M_y = \int_0^1 x(y_2 - y_1)dx = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = \left.\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{20},$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (y_2^2 - y_1^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Відкіля $x_c = y_c = \frac{9}{20}$, тому що фігура симетрична (рис. 5).

Завдання до теми 8

$\boxed{1}$ Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001

1. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

2. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos^2 x}$

3. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+9}}$

4. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\cdot\cos^3 x\,dx$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}\,dx$

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

7. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^8}$

8. $\int_1^{\sqrt{3}} x\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

9. $\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx$

11. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

12. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

13. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

14. $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$

15. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

16. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

17. $\int_0^1 x^2\left(1+e^{x^3}\right)dx$

18. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$

19. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$

21. $\int_1^{\pi/2} \sin x\cdot\cos^2 x\,dx$

22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$

23. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$

25. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$

26. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2}$

27. $\int_{\pi/18}^{\pi/6} ctg 3x\,dx$

28. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

29. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{1+x^2}$

10. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ 20. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{1+x^6}$ 30. $\int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{4+5x^4}\, dx$

$\boxed{2}$ Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001

1. $\int_{-3}^{0} (x-2)e^{-\frac{x}{3}}\, dx$ 11. $\int_0^4 x^3 \cdot \sqrt{x^2+9}\, dx$ 21. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

2. $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \cdot \ln x\, dx$ 12. $\int_0^{\pi/2} (x+3) \cdot \sin x\, dx$ 22. $\int_0^1 \frac{\arcsin x/2}{\sqrt{2-x}}\, dx$

3. $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$ 13. $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}\, dx$ 23. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)dx}{(1+x)^2}$

4. $\int_1^{\sqrt{3}} arctg \frac{1}{x}\, dx$ 14. $\int_0^1 x \cdot arctg x\, dx$ 24. $\int_{-1/2}^{0} x \cdot e^{-2x}\, dx$

5. $\int_0^{\pi/8} x^2 \cdot \sin 4x\, dx$ 15. $\int_0^{\pi/9} \frac{xdx}{\cos^2 3x}$ 25. $\int_{-1}^{0} (x+1) \cdot e^{-2x}\, dx$

6. $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\, dx$ 16. $\int_0^1 arctg\sqrt{x}\, dx$ 26. $\int_1^l x \cdot \ln^2 x\, dx$

7. $\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$ 17. $\int_1^l \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$ 27. $\int_{3/2}^{2} arctg(2x-3)\, dx$

8. $\int_{-1}^{0} x \cdot \ln(1-x)\, dx$ 18. $\int_2^3 x \cdot \ln(x-1)\, dx$ 28. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos x\, dx$

9. $\int_1^2 x^2 \cdot \ln x\, dx$ 19. $\int_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)\, dx$ 29. $\int_0^{\pi/4} x \cdot tg^2 x\, dx$

10. $\int_1^2 (x-1) \cdot \ln x\, dx$ 20. $\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}\, dx$ 30. $\int_1^2 \ln(3x+2)\, dx$

$\boxed{3}$ Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001

1. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{xdx}{x^3-1}$

2. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$

3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}\,dx$

4. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$

5. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^5-2x^2+3}{(x-2)^2}\,dx$

6. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^5dy}{y+2}$

7. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3+1}$

8. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^4+x^2}\,dx$

9. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

10. $\int\limits_{3}^{5} \frac{(x^3-2x^2+4)\,dx}{x^3(x-2)^2}$

11. $\int\limits_{0}^{4} \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\,dx$

12. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^7dx}{1-x^4}$

13. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

14. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$

15. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

16. $\int\limits_{3}^{5} \frac{(x^2+2)dx}{(x+1)^2(x-1)}$

17. $\int\limits_{2}^{3} \frac{(x+2)dx}{x^2(x-1)}$

18. $\int\limits_{7}^{9} \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx$

19. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$

20. $\int\limits_{2}^{3} \frac{3x^2+2x^2-3}{x^3-x}\,dx$

21. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x-1)}$

22. $\int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{x^3+6x^2+x+6}$

23. $\int\limits_{8}^{10} \frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$

24. $\int\limits_{1/3}^{1/2} \frac{xdx}{(x-1)^3}$

25. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}\,dx$

26. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^4-1}$

27. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x+3}{(x-2)^2}\,dx$

28. $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$

29. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{x^2(x-1)}$

30. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4+3x^2-1}{(x+1)^2}\,dx$

4 Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001

1. $\int_{0}^{2} x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}\, dx$

2. $\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx$

3. $\int_{-3}^{3} x^2 \cdot \sqrt{9-x^2}\, dx$

4. $\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$

5. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\, dx$

6. $\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}}$

7. $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx$

8. $\int_{0}^{0,5} \frac{x^4 dx}{\left(1-x^2\right)^3}$

9. $\int_{0}^{\sqrt{7/3}} x^3 \cdot \sqrt{7+x^2}\, dx$

10. $\int_{0}^{3} x^4 \cdot \sqrt{9-x^2}\, dx$

11. $\int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\, dx$

12. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}}\, dx$

13. $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\, dx$

14. $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$

15. $\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

16. $\int_{0,5}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\, dx$

17. $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

18. $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{x^2-3}}$

19. $\int_{4\sqrt{2/3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\, dx$

20. $\int_{0}^{3} \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}\, dx$

21. $\int_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\, dx$

22. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\, dx$

23. $\int_{0}^{1} \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\, dx$

24. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{1,5}}$

25. $\int_{2\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-9}}$

26. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}}$

27. $\int_{0}^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{\left(5-x^2\right)^3}$

28. $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}\, dx$

29. $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5 \cdot \sqrt{x^2-1}}\, dx$

30. $\int_{0}^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}\, dx$

$\boxed{5}$ Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001

1. $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$

2. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

3. $\int_{0}^{\pi/4} \sin^3 2x\, dx$

4. $\int_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2}\, dx$

5. $\int_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \cdot \sin 2x\, dx$

6. $\int_{0}^{\pi/3} tg^2 x \cdot dx$

7. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\, dx$

8. $\int_{0}^{\pi/4} 2\cos x \cdot \sin 3x \cdot dx$

9. $\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3} \cdot dx$

10. $\int_{0}^{\pi/32} \left(2\cos^2 4x - 1\right) dx$

11. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$

12. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^4 x \cdot dx$

13. $\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} \cdot dx$

14. $\int_{0}^{\pi/4} \sin 3x \cdot \cos 5x \cdot dx$

15. $\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$

16. $\int_{0}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^3 x}$

17. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} ctg^3 x \cdot dx$

18. $\int_{0}^{\pi/2} \cos 3x \cdot \cos 5x\, dx$

19. $\int_{0}^{\pi/4} \cos^4 x \cdot \sin^2 x\, dx$

20. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^6 x\, dx$

21. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx$

22. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+tgx}{\sin 2x} \cdot dx$

23. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \cdot dx$

24. $\int_{0}^{\pi/8} \sin x \cdot \sin 3x \cdot dx$

25. $\int_{\pi/4}^{\pi} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x\, dx$

26. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x}$

27. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^5 x \cdot dx$

28. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x\, dx$

29. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$

30. $\int_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} \cdot dx$

6 Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001

1. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$

2. $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

3. $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{2x^2+4x-21}$

4. $\int_{1}^{\sqrt{5}} \frac{x^2dx}{13-6x^3+x^6}$

5. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+x}$

6. $\int_{-0,5}^{0,5} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

7. $\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

8. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+5x+4}$

9. $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

10. $\int_{1}^{2} \frac{x-5}{x^2-2x+2}\,dx$

11. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$

12. $\int_{6}^{8} \frac{dx}{x^2+2x}$

13. $\int_{0,5}^{0,75} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

14. $\int_{-0,5}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$

15. $\int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

16. $\int_{1/6}^{2} \frac{dx}{3x^2-x+1}$

17. $\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-6x+10}$

18. $\int_{3,5}^{5} \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$

19. $\int_{2}^{3} \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$

20. $\int_{-1,5}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$

21. $\int_{4}^{5} \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$

22. $\int_{-0,5}^{1} \frac{x^3dx}{x^2+x+1}$

23. $\int_{7}^{10} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$

24. $\int_{3}^{5} \frac{x\,dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$

25. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

26. $\int_{1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$

27. $\int_{4}^{7} \frac{dx}{x^2+3x-10}$

28. $\int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

29. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

30. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+3}$

$\boxed{7}$ Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001

1. $\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\ dx$

2. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}$

3. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

4. $\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\ dx$

5. $\int_{3}^{8} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx$

6. $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{3+e^x}\ dx$

7. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$

8. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\ dx$

9. $\int_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{3x+2}}$

10. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

11. $\int_{2/3}^{7/3} \frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}$

12. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

13. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(1+x)^4}\ dx$

14. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

15. $\int_{0}^{0,5\cdot\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$

16. $\int_{0}^{\sqrt[3]{7}} \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^3}}$

17. $\int_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$

18. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

19. $\int_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}\ dx$

20. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{4+\sqrt{\sin x}}$

21. $\int_{2}^{5} \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

22. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\cdot\sqrt{1-e^{-2x}}}\ dx$

23. $\int_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}\ dx$

24. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

25. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x\cdot dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\ dx$

26. $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\ dx$

27. $\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^{1,5}}$

28. $\int_{0}^{13} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$

29. $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{4+e^x}}$

30. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

8 Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність

1. $\int_0^{\infty} \frac{x}{16x^4+1}\,dx$

2. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$

3. $\int_1^{\infty} \frac{16x}{16x^4-1}\,dx$

4. $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

5. $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{16x^4+1}}\,dx$

6. $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

7. $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4-1}}\,dx$

8. $\int_1^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$

9. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}\,dx$

10. $\int_{1/3}^{1} \frac{ln(3x-1)}{3x-1}\,dx$

11. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}\,dx$

12. $\int_{0,25}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}$

13. $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{\left(x^2+16\right)^5}}\,dx$

14. $\int_{0,5}^{1} \frac{ln2\cdot dx}{(1-x)\cdot ln^2(1-x)}$

15. $\int_4^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx$

16. $\int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{ln(2-3x)}}{2-3x}\,dx$

17. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

18. $\int_0^{1} \frac{x}{1-x^4}\,dx$

19. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

20. $\int_0^{\pi/6} \frac{cos3x}{\sqrt[6]{(1-sin3x)^5}}\,dx$

21. $\int_0^{\infty} \frac{arctg2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}\,dx$

22. $\int_0^{1} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

23. $\int_{0,5}^{\infty} \frac{16dx}{4x^2+4x+5}$

24. $\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$

25. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$

26. $\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$

27. $\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+4}}$

28.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{tgx}}{cos^2 x}\, dx$$

29.

$$\int_0^{\infty} \frac{\left(3-x^2\right)dx}{x^2+4}$$

30.

$$\int_0^{1} \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}arcsin\,x}}{\pi\cdot\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$\boxed{9}$ Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність

1.

$$\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}\, dx$$

2.

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{arctg\,2x}}{1+4x^2}\, dx$$

3.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{sin\,x}{\sqrt[7]{cos^2 x}}\, dx$$

4.

$$\int_1^{\infty} \frac{4}{x\left(1+ln^2 x\right)}\, dx$$

5.

$$\int_{-0,75}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$$

6.

$$\int_1^{\infty} x\cdot sin\,x\cdot\, dx$$

7.

$$\int_1^{2} \frac{x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}\cdot ln\,2}\, dx$$

8.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{\left(x^2-4x\right)ln\,5}$$

9.

$$\int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$$

10.

$$\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)arctg^2 3x}$$

11.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3sin^2 x}{\sqrt{cos\,x}}\, dx$$

12.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{\left(1+4x^2\right)\sqrt{\pi arctg\,\frac{x}{2}}}$$

13.

$$\int_0^{3} \frac{\sqrt[3]{9}\cdot x}{\sqrt[3]{9-x^2}}\, dx$$

14.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x\right)ln\,3}$$

15.

$$\int_0^{1} \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$$

16.

$$\int_1^{\infty} x\cdot e^{-3x}dx$$

17.

$$\int_0^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$$

18.

$$\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

19.

$$\int_{0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$$

20.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$$

21.

$$\int_1^{5} \frac{x^2dx}{\sqrt{31\left(x^2-1\right)}}$$

22. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$

23. $\int\limits_1^{1,5}\frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

24. $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$

25. $\int\limits_0^{4}\frac{10dx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$

26. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln 0,75}$

27. $\int\limits_0^{0,25}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$

28. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$

29. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{(2x-1)^2}$

30. $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$

$\boxed{10}$ Обчислити (з точністю до 0,001) площу фігури обмеженої зазначеними лініями

1. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$

2. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$

3. $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1.$

4. $y=\cos x\sin^2 x,\ y=0,$ $(0\le x\le \pi/2).$

5. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\ y=0,\ x=1,$ $x=e^3.$

6. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1.$

7. $y=x\sqrt{36-x^2},\ y=0,$ $(0\le x\le 6).$

16. $y=x\sqrt{9-x^2},\ \ y=0,$ $x\ge 0.$

17. $y=\sin x\cos^2 x,\ y=0,$ $(0\le x\le \pi/2).$

18. $y=x^2\sqrt{4-x^2},\ y=0,$ $(0\le x\le 2).$

19. $y=\sqrt{e^x-1},\ y=0,\ x=\ln 2.$

20. $y=\arccos x,\ y=0,\ x=0.$

21. $y=2x-x^2+3$

$y=x^2-4x+3.$

22. $x=\arccos y,\ x=0,\ y=0.$

8. $y = x\,arctg x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.

9. $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = ln 2$.

10. $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.

11. $x = (y-2)^2$, $x = 4y - 8$.

12. $y = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.

13. $y = \dfrac{1}{y\sqrt{1+ln\, y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$.

14. $y = x^2\sqrt{16 - x^2}$, $y = 0$, $(0 \le x \le 4)$.

15. $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.

23. $y = x^2\sqrt{8 - x^2}$, $y = 0$, $\left(0 \le x \le 2\sqrt{2}\right)$.

24. $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $(0 \le x \le 2)$.

25. $y = \dfrac{1}{1+cos\, x}$, $y = 0$, $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$.

26. $y = cos^5 x\, sin 2x$, $y = 0$, $(0 \le x \le \pi/2)$.

27. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.

28. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.

29. $x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

30. $y = x^2 cos\, x$, $y = 0$, $(0 \le x \le \pi/2)$.

11 Обчислити (з точністю до 0,001) площі фігур, обмежених лініями, які задані рівняннями

1. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\, cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\, sin^3 t, \end{cases}$ $(x \ge 2)$.

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\, cos\, t, \\ y = 2\sqrt{2}\, sin\, t, \end{cases}$ $(y \ge 2)$.

3. $\begin{cases} x = 4(t - sin\, t), \\ y = 4(1 - cos\, t), \end{cases}$ $(0 \le x \le 8\pi,\ y \ge 4)$.

4.
$$\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$$
$(x \geq 2)$.

5.
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases}$$
$(y \geq 3)$.

6.
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$$
$(0 \leq x \leq 4\pi,\ y \geq 3)$.

7.
$$\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$$
$(x \geq 6\sqrt{3})$.

8.
$$\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$$
$(y \geq \sqrt{3})$.

9.
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$$
$(0 \leq x \leq 6\pi,\ y \geq 3)$.

10.
$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$$
$(x \geq 4)$.

11.
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$$
$(y \geq 3)$.

12.
$$\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$$
$(0 \leq x \leq 12\pi,\ y \geq 9)$.

13.
$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$$
$(x \geq 4)$.

14.
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$$
$(y \geq 4)$.

15.
$$\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$$
$(0 \leq x \leq 12\pi,\ y \geq 6)$.

16.
$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$$
$(x \geq 3\sqrt{3})$.

17.
$$\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$$
$(y \geq 2\sqrt{3})$.

18.
$$\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$$
$(0 \leq x \leq 20\pi,\ y \geq 15)$.

19.
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$$
$(x \geq 1)$.

20.
$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$$
$(y \geq 4)$.

21.
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$
$(0 \leq x \leq 2\pi,\ y \geq 1)$.

22.
$$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$$
$(x \geq 1)$.

23.
$$\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$$
$(y \geq 2)$.

24.
$$\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$$
$(0 \leq x \leq 16\pi,\ y \geq 12)$.

25.
$$\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$$
$\left(x \ge 9\sqrt{3}\right)$.

26.
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$$
$\left(y \ge 4\sqrt{3}\right)$.

27.
$$\begin{cases} x = 2\left(t - \sin t\right), \\ y = 2\left(1 - \cos t\right), \end{cases}$$
$\left(0 \le x \le 4\pi,\ y \ge 2\right)$.

28.
$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$$
$\left(x \ge 2\right)$.

29.
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$$
$\left(y \ge 5\right)$.

30.
$$\begin{cases} x = 4\left(t - \sin t\right), \\ y = 4\left(1 - \cos t\right), \end{cases}$$
$\left(0 \le x \le 8\pi,\ y \ge 6\right)$.

$\boxed{12}$ Обчислити (з точністю до 0,001) площі фігур, обмежених лініями, які задані рівняннями в полярній системі координат

1. $r = 4\cos 3\varphi,\ r = 2,\ \left(r \ge 2\right)$.

2. $r = \sqrt{3}\cos\varphi,\ r = \sin\varphi,$ $\left(0 \le \varphi \le \pi/2\right)$.

3. $r = 2\cos 3\varphi,\ r = 2\sqrt{3}\sin\varphi,$ $\left(0 \le \varphi \le \pi/2\right)$.

4. $r = 6\sin 3\varphi,\ r = 3,\ \left(r \ge 3\right)$.

5. $r = \cos\varphi,$ $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \pi/4\right),$ $\left(-\pi/4 \le \varphi \le \pi/2\right)$.

6. $r = 6\cos 3\varphi,\ r = 3,\ \left(r \ge 3\right)$.

17. $r = \cos 2\varphi$.

18. $r = 4\sin 3\varphi,\ r = 2,\ \left(r \ge 2\right)$.

19. $r = \sin 3\varphi$.

20. $r = \cos 3\varphi$.

21. $r = \sin\varphi,$ $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \pi/4\right),$ $\left(0 \le \varphi \le 3\pi/4\right)$.

22. $r = 1/2 + \sin\varphi$.

7. $r = \cos\varphi,\ r = \sin\varphi,$ $\left(0 \le \varphi \le \pi/2\right).$

8. $r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi.$

9. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$

10. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi.$

11. $r = \frac{3}{2}\cos\varphi,\ r = \frac{5}{2}\cos\varphi.$

12. $r = \sin 6\varphi.$

13. $r = \cos\varphi + \sin\varphi.$

14. $r = 2\cos 6\varphi.$

16. $r = 3\sin\varphi,\ r = 5\sin\varphi.$

23. $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \pi/4\right),$ $r = \sqrt{2}\sin\left(\varphi - \pi/4\right),$ $\left(-\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4\right).$

24. $r = \sin\varphi,\ r = 2\sin\varphi.$

25. $r = 1/2 + \cos\varphi.$

26. $r = \frac{5}{2}\sin\varphi,\ r = \frac{3}{2}\sin\varphi.$

27. $r = 4\cos 4\varphi.$

28. $r = 2\cos\varphi,\ r = 3\cos\varphi.$

29. $r = 2\sin 4\varphi.$

30. $r = \cos\varphi - \sin\varphi.$

31. $r = 2\sin\varphi,\ r = 4\sin\varphi.$

$\boxed{13}$ Обчислити (з точністю до 0,001) довжини дуг кривих, заданих у прямокутній системі координат

1. $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$

2. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,$ $0 \le x \le 7/9.$

16. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2.$

17. $y = \ln\left(\frac{5}{2x}\right),\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

3. $y = 2 + arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{4} \le x \le 1$.

4. $y = \sqrt{1 - x^2} + arccos\, x$, $0 \le x \le \frac{8}{9}$.

5. $y = 2 + ch\ x$, $0 \le x \le 1$.

6. $y = \mathrm{e}^x + 13$, $ln\sqrt{15} \le x \le ln\sqrt{24}$.

7. $y = 2 - \mathrm{e}^x$, $ln\sqrt{3} \le x \le ln\sqrt{8}$.

8. $y = 1 - ln\, sin\, x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

9. $y = \sqrt{x - x^2} - arccos\sqrt{x} + 5$, $\frac{1}{9} \le x \le 1$.

10. $y = ln\, sin\, x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

11. $y = ch\ x + 3$, $0 \le x \le 1$.

12. $y = ln\, cos\, x + 2$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

18. $y = ln\left(x^2 - 1\right)$, $2 \le x \le 3$.

19. $y = ln\left(1 - x^2\right)$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$.

20. $y = 1 - ln\, cos\, x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

21. $y = -arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$.

22. $y = arcsin\, x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \frac{15}{16}$.

23. $y = 1 - ln\left(x^2 - 1\right)$, $3 \le x \le 4$.

24. $y = -arccos\, x + \sqrt{1 - x^2} + 1$, $0 \le x \le \frac{9}{16}$.

25. $y = ln\left(\frac{7}{x}\right)$, $ln\sqrt{3} \le x \le ln\sqrt{8}$.

26. $y = 1 + arcsin\, x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$.

27. $y = \mathrm{e}^x + 2$, $ln\sqrt{8} \le x \le ln\sqrt{24}$.

13. $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}+3$, $0\le x\le 2$.

14. $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+3}{4}$,
$0\le x\le 2$.

15. $y=chx+3$,
$0\le x\le 1$.

28. $y=arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^{2}}+4$,
$0\le x\le \frac{1}{2}$.

29. $y=e^{x}+e^{-x}$,
$ln\sqrt{3}\le x\le ln\sqrt{15}$.

30. $y=ln\,x$,
$ln3\le x\le ln8$.

$\boxed{14}$ Обчислити (з точністю до 0,001) довжини дуг кривих, які задані параметричними рівняннями

1. $\begin{cases} x=5(t-sin\,t), \\ y=5(1-cos\,t), \end{cases}$ $0\le t\le \pi$.

2. $\begin{cases} x=4(cos\,t+t\,sin\,t), \\ y=4(sin\,t-t\,cos\,t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

3. $\begin{cases} x=10\,cos^{3}t, \\ y=10\,sin^{3}t, \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

4. $\begin{cases} x=3(t-sin\,t), \\ y=3(1-cos\,t), \end{cases}$ $\pi\le t\le 2\pi$.

16. $\begin{cases} x=3(2\,cos\,t-cos\,2t), \\ y=3(2\,sin\,t-sin\,2t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

17. $\begin{cases} x=\left(t^{2}-2\right)sin\,t+2t\,cos\,t, \\ y=\left(2-t^{2}\right)cos\,t+2t\,sin\,t, \end{cases}$ $0\le t\le \pi$.

18. $\begin{cases} x=e^{t}\left(cos\,t+sin\,t\right), \\ y=e^{t}\left(cos\,t-sin\,t\right), \end{cases}$ $0\le t\le \pi$.

19. $\begin{cases} x=2\,cos\,t-cos\,2t \\ y=2\,sin\,t-sin\,2t \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{2\pi}{3}$.

5. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

6. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

7. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi$.

8. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

9. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/6$.

10. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3$.

11. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4$.

20. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

21. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi$.

22. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.

23. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.

24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

25. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$.

26. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

12. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4$.

13. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.

14. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$.

15. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4$.

27. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi/2$.

28. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

29. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi$.

30. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4$

$\boxed{15}$ Обчислити (з точністю до 0,001) довжини дуг кривих, які задані рівняннями в полярній системі координат

1. $r = 3e^{3\varphi/2}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

2. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

3. $r = 6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

4. $r = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

16. $r = 2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

17. $r = 5e^{5\varphi/12}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

18. $r = 3e^{3\varphi/2}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

19. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

5. $r = 5e^{5\varphi/12},\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

6. $r = 1 - \sin\varphi,\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/6.$

7. $r = 3(1 + \sin\varphi),\ -\pi/6 \le \varphi \le 0.$

8. $r = 5(1 - \cos\varphi),\ -\pi/3 \le \varphi \le 0.$

9. $r = 7(1 - \sin\varphi),\ -\pi/6 \le \varphi \le \pi/6.$

10. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 3/4.$

11. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 5/12.$

12. $r = 4\varphi,\ 0 \le \varphi \le 3/4.$

13. $r = 5\varphi,\ 0 \le \varphi \le 12/5.$

14. $r = 8\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4.$

15. $r = 2\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/6.$

20. $r = 12e^{5\varphi/12},\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

21. $r = 2(1 - \cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le -\pi/2.$

22. $r = 4(1 - \sin\varphi),\ 0 \le \varphi \le \pi/6.$

23. $r = 6(1 + \sin\varphi),\ -\pi/2 \le \varphi \le 0.$

24. $r = 8(1 - \cos\varphi),\ -2\pi/3 \le \varphi \le 0.$

25. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 4/3.$

26. $r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 12/5.$

27. $r = 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le 4/3.$

28. $r = 2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/6.$

29. $r = 6\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/3.$

30. $r = 8\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4.$

16 Обчислити (з точністю до 0,001) об’єм тіла, утвореного обертанням фігури Ф навколо зазначеної вісі координат

1. Ф: $y = 4 - x^2,\ x = 0$ – вісь обертання Oy

2. Ф: $\left\{\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2},\ x = 0,\ y = 0\right\}$ – вісь обертання Ox

3. Ф: $\left\{x^2/9 + y^2/4 = 1\right\}$ – вісь обертання Oy

4. Ф: $\left\{y^3 = x^2,\ y = 0\right\}$ – вісь обертання *Ox*

5. Ф: $\left\{x = 6\left(t - sin\,t\right),\ y = 6\left(1 - cos\,t\right)\right\}$ – вісь обертання *Ox*

6. Ф: $\left\{x = 3cos^2 t,\ y = 4\,sin^2 t,\ 0 \le t \pi/2\right\}$ – вісь обертання *Oy*

7. Ф: $\left\{y^2 = x,\ x^2 = y\right\}$ – вісь обертання *Ox*

8. Ф: $\left\{y^2 = \left(x-1\right)^3,\ x = 2\right\}$ – вісь обертання *Ox*

9. Ф: $\left\{x = \sqrt{1 - y^2},\ y = \sqrt{1{,}5}\cdot x,\ y = 0\right\}$ – вісь обертання *Ox*

10. Ф: $\left\{y = sin\,x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi\right\}$ – вісь обертання *Ox*

11. Ф: $\left\{y^2 = 4x,\ x^2 = 4y\right\}$ – вісь обертання *Ox*

12. Ф: $\left\{x = 2\,cos\,t,\ y = 5\,sin\,t\right\}$ – вісь обертання *Oy*

13. Ф: $\left\{y = x^2,\ 8x = y^2\right\}$ – вісь обертання *Oy*

14. Ф: $\left\{y = e^x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 1\right\}$ – вісь обертання *Ox*

15. Ф: $\left\{y^2 = 4/3 \cdot x,\ x = 3\right\}$ – вісь обертання *Ox*

16. Ф: $\left\{y = 2x - x^2,\ y = 0\right\}$ – вісь обертання *Ox*

17. Ф: $\left\{\rho = 2\left(1 + cos\,\varphi\right)\right\}$ – вісь обертання *Ox*

18. Ф: $\left\{x = 7\,cos^3 t,\ y = 7\,sin^3 t\right\}$ – вісь обертання *Oy*

19. Ф: $\left\{x^2/16 + y^2/1 = 1\right\}$ – вісь обертання *Ox*

20. Ф: $\left\{x^3=(y-1)^2,\ x=0,\ y=0\right\}$ − вісь обертання Ox

21. Ф: $\left\{xy=4,\ 2x+y-6=0\right\}$ − вісь обертання Ox

22. Ф: $\left\{x=\sqrt{3}\,cos\,t,\ y=\sqrt{3}\,sin\,t\right\}$ − вісь обертання Oy

23. Ф: $\left\{y=2-x^2,\ y=x^2\right\}$ − вісь обертання Ox

24. Ф: $\left\{y=-x^2+8,\ y=x^2\right\}$ − вісь обертання Ox

25. Ф: $\left\{y=x^3,\ x=0,\ y=8\right\}$ − вісь обертання Oy

26. Ф: $\left\{x=\sqrt{3}\,cos\,t,\ y=2\,sin\,t\right\}$ − вісь обертання Ox

27. Ф: $\left\{2y=x^2,\ 2x+2y-3=0\right\}$ − вісь обертання Ox

28. Ф: $\left\{y=x-x^2,\ y=0\right\}$ − вісь обертання Ox

29. Ф: $\left\{y=-x^2/2+2,\ x+y=2\right\}$ − вісь обертання Oy

30. Ф: $\left\{y^2=(x+4)^3,\ x=0\right\}$ − вісь обертання Ox

17 Обчислити (з точністю до 0,001) площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої L навколо зазначеної вісі координат

1. $L:\ y=x^3/3$, $-0,5\le x\le 0,5$, Ox.

2. $L:\ r=2\,cos\,\varphi$, полярна вісь.

3. $L:\ x=10(t-sin\,t)$, $y=10(1-cos\,t)$, $0\le t\le 2\pi$, Ox.

4. $L:\ y=x^2/2$, $y=1,5$, Oy.

5. $L:\ 3y = x^2$, $0 \le x \le 2$, Ox.

6. $L:\ y = \sqrt{x}$, $y = x$, Ox.

7. $L:\ x = 2(t - sin\,t)$, $y = 2(1 - cos\,t)$, $0 \le t \le 2\pi$, Ox.

8. $L:\ x = cos\,t$, $y = 3 + sin\,t$, Ox.

9. $L:\ 3x = y^2$, $0 \le y \le 2$, Oy.

10. $L:\ y = x^3 / 3$, $-1 \le x \le 1$, Ox.

11. $L:\ x = cos\,t$, $y = 1 + sin\,t$, Ox.

12. $L:\ x^2 = 4 - y$, $y = 2$, Oy.

13. $L:\ x = 3(t - sin\,t)$, $y = 3(1 - cos\,t)$, $0 \le t \le 2\pi$, Ox.

14. $L:\ x = cos^3\,t$, $y = sin^3\,t$, Ox.

15. $L:\ r = \sqrt{cos\,2\varphi}$, полярна вісь.

16. $L:\ y^2 = 4 + x$, $x = 2$, Ox.

17. $L:\ y^2 = 2x$, $2x = 3$, Ox.

18. $L:\ 3y = x^3$, $0 \le x \le 1$, Ox.

19. $L:\ r^2 = 4cos\,2\varphi$, полярна вісь.

20. $L:\ r = 6\,sin\,\varphi$, полярна вісь.

21. $L:\ x = t - sin\,t$, $y = 1 - cos\,t$, $0 \le t \le 2\pi$, Ox.

22. $L:\ r = 2\,sin\,\varphi$, полярна вісь.

23. $L:\ r = {}^2\!/_3\,cos\,\varphi$, полярна вісь.

24. $L:\ x = 3cos^3 t$, $y = 3sin^3 t$, Ox.

25. $L:\ x = 2cos t$, $y = 3 + 2sin t$, Ox.

26. $L:\ r^2 = 9cos 2\varphi$, полярна вісь.

27. $L:\ y = x^3$, $x = \pm 2/3$, Ox.

28. $L:\ x = 2cos^3 t$, $y = 2sin^3 t$, Ox.

29. $L:\ x = cos t$, $y = 2 + sin t$, Ox.

30. $L:\ r = 4sin\varphi$, полярна вісь.

$\boxed{18}$ Знайти координати центра мас однорідної плоскої кривої L

1. L : Півкола $x^2 + y^2 = R$, яке розташоване над віссю Ox.
2. L : Арка циклоїди: $x = a(t - sin t)$, $y = a(1 - cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
3. L : Дуга астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, яка розташована в третьому квадранті.
4. L : Дуга кола радіуса R, яка стягує центральний кут α.
5. L : Дуга ланцюгової лінії $y = ach(x - a)$, $-a \le x \le a$.
6. L : Дуга кардіоїди $r = a(1 + cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$, $a > 0$.
7. L : Дуга логарифмічної спіралі $r = a \cdot e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$, $a > 0$.
8. L : Дуга астроїди: $x = 2cos^3 \dfrac{t}{4}$, $y = 2sin^3 \dfrac{t}{4}$, яка розташована в першому квадранті.
9. L : Арка циклоїди: $x = 3(t - sin t)$, $y = 3(1 - cos t)$.
10. L : Дуга кривої: $x = e^t sin t$, $y = e^t cos t$, $0 \le t \le \pi/2$.
11. L : Дуга кардіоїди $r = 2(1 + cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.

12. L: Дуга кривої: $r = 2\sin\varphi$ від точки A (0,0) до точки B ($\sqrt{2}$, $\pi/4$).

13. L: Дуга розгортки кола: $x = a(\cos t - t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$,

$0 \le t \le \pi$, $a > 0$.

14. L: Дуга кривої: $r = 2\sqrt{3}\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$.

15. L: Дуга кривої: $x = \sqrt{3}\cdot t^2$, $y = t - t^3$, $0 \le t \le 1$.

Знайти координати центра мас плоскої однорідної фігури, обмеженої даними лініями

16. Ф: $\{x + y = a,\ x = 0,\ y = 0\}$.

17. Ф: $\left\{x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ a > 0,\ b > 0\right\}$.

18. Ф: $\left\{x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ y = 0,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a > 0\right\}$.

19. Ф: $\left\{y = x^2,\ y = \sqrt{x},\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$.

20. Ф: $\{y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le t \le \pi\}$.

21. Ф: $\left\{y = \sqrt{R^2 - x^2},\ y \ge 0,\ -R \le x \le R\right\}$.

22. Ф: $\left\{y = b\sqrt{\dfrac{x}{a}},\ a > 0,\ b > 0,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le x \le a\right\}$.

23. Ф: $\left\{x = b\sqrt{\dfrac{y}{a}},\ a > 0,\ b > 0,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le x \le b\right\}$.

24. Ф: $\left\{y^2 = ax^3 - x^4,\ a > 0\right\}$.

25. Ф: $\left\{x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ a > 0\right\}$.

26. Ф: {Сектор кола радіуса R з центральним кутом, який дорівнює $2\alpha\}$.

27. Ф: $\{r = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0\}$.

28. Ф: $\left\{r^2 = a^2 \cos 2\varphi,\ \ x \ge 0,\ \ a > 0\right\}$.

29. Ф: $\left\{\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ a \ge 0\right\}$.

30. Ф: $\left\{ay^2 = x^3,\ \ 0 \le x \le a,\ \ a > 0\right\}$.

$\boxed{19}$ Обчислити силу тиску води на пластину, вертикально занурену у воду, вважая, що густина води дорівнює $9{,}81\,{}^{кН}\!/_{м^3}$. Результат округлити до цілого числа. Рівень води співпадає з віссю Ox, форма та розташування пластини задані системою рівнянь

1. $y = 0;\ y = |x| - 1$.
2. $y = -1;\ x = 0;\ y = -0{,}5x$
3. $y = -2;\ y = 0;\ y = |x| - 4$.
4. $x^2 + (y+3)^2 = 9$.
5. $y = -1;\ y = |x| - 2$.
6. $y = 0;\ y = -0{,}5\sqrt{4 - x^2}$.
7. $y = -1;\ y = -2;\ y = 0{,}5|x| - 3$.
8. $y = -4;\ y = -|x|$.
9. $4x^2 + (y+2)^2 = 4$.
10. $y = -4;\ y = -x^2$.
11. $y = -1;\ y = x^2 - 5$.
16. $x^2 + (y+2)^2 = 1$.
17. $y = -2;\ y = 0;\ y = \pm x + 2$.
18. $y = 0;\ y = -\sqrt{4 - x^2}$.
19. $y = 0;\ x = -1;\ y = 2x$.
20. $y = -1;\ y = -3;\ y = \pm x + 1$.
21. $y = -2;\ y = \pm 0{,}5x - 1$.
22. $y = \pm 2x;\ y = \pm 2x - 4$.
23. $y = -1{,}5x;\ y = -1{,}5x - 3;$
    $y = 3x;\ y = 3x - 3$.
24. $y = 0;\ y = -2;\ y = 2x;$
    $y = 2x - 10$.
25. $y = -\sqrt{1 - x^2};$
    $y = -\sqrt{4 - x^2};\ x \le 0$.
26. $y = -3;\ y = -3 + \sqrt{9 - x^2}$.

12.	$y=-1;\ y=-1\sqrt{1-x^2}$.	27.	$y=-3;\ x=0;\ y=-2x-1$.
13.	$x=0;\ x=-1;\ y=2x-1$.	28.	$y=\pm x;\ y=\pm x-2$
14.	$x=0;\ y=0;\ y=-\sqrt{4-x}$.	29.	$y=0;\ y=-2\sqrt{1-x^2}$.
15.	$y=0;\ y=x^2-4$.	30.	$y=-2;\ y=-2+\sqrt{1-x^2}$.

$\boxed{20}$ Обчислити роботу, яку необхідно витратити на викачування води з резервуара Р. Густина води дорівнює $9{,}81\, кН/м^3$. Результат округлити до цілого числа

1. Р: правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 2 м, а висота – 5 м.
2. Р: правильна чотирикутна піраміда, яка обернена вершиною вниз. Сторона основи піраміди дорівнює 2 м, висота – 6 м.
3. Р: казан, який має форму сферичного сегмента, висота якого дорівнює 1,5 м., а радіус – 1 м.
4. Р: півциліндр, радіус основи якого дорівнює 1 м, довжина – 5 м.
5. Р: зрізаний конус, в якого радіус верхньої основи дорівнює 1 м, нижньої – 2 м, висота – 3 м.
6. Р: жолоб, перпендикулярний перетин якого є парабола, довжина жолоба – 5 м, ширина – 4 м, глибина – 4 м.
7. Р: циліндрична цистерна, радіус основи якої дорівнює 1 м, довжина – 5 м.
8. Р: правильна трикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 2 м, а висота – 6 м.
9. Р: правильна трикутна піраміда, яка обернена вершиною до низу. Сторона основи піраміди дорівнює 4 м, висота – 6 м.
10. Р: конус, обернений вершиною до низу, радіус основи якого дорівнює 3 м, висота – 5 м.

11. P: зрізаний конус, в якого радіус верхньої основи дорівнює 3 м, нижньої – 1 м, висота – 3 м.
12. P: конус з радіусом основи 2 м і висотою – 5 м.
13. P: правильна зрізана чотирикутна піраміда, в якої сторона верхньої основи дорівнює 8 м, нижньої – 4 м, висота – 2 м.
14. P: параболоїд обертання, радіус основи якого дорівнює 2 м, глибина – 4 м.
15. P: половина еліпсоїда обертання, радіус основи якого дорівнює 1 м, глибина – 2 м.
16. P: зрізана чотирикутна піраміда, у якої сторона верхньої основи дорівнює 2 м, нижньої – 4 м, висота – 1 м.
17. P: правильна шестикутна піраміда зі стороною основи 1 м та висотою 2 м.
18. P: правильна шестикутна піраміда, яка обернена вершиною до низу. Сторона основи піраміди дорівнює 2 м, висота – 6 м.
19. P: циліндр з радіусом основи 1 м і висотою 3 м.
20. P: правильна зрізана шестикутна піраміда, в який сторона верхньої основи дорівнює 1 м, нижньої – 2 м, висота – 2 м.
21. P: жолоб, перпендикулярний перетин якого є півкола радіусом 1 м, довжина жолоба – 10 м.
22. P: правильна зрізана шестикутна піраміда, у якої сторона верхньої основи дорівнює 2 м, нижньої – 1 м, висота – 2 м.
23. P: півсфера радіусом 2 м.

Обчислити роботу, яку необхідно витратити на подолання сили тяжіння при забудові спорудження Q із певного матеріала, густина якого γ дорівнює 24 $кН/м^3$. Результат округлити до цілого числа

24. Q: правильна зрізана чотирикутна піраміда, у якої сторона верхньої основи дорівнює 2 м, нижньої – 4 м, висота – 2 м.
25. Q: правильна шестикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 1 м, а висота 2 м.

26. Q: правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 2 м, а висота 4 м.
27. Q: правильна шестикутна піраміда, у якої сторона верхньої основи дорівнює 1 м, нижньої – 2 м, висота – 2 м.
28. Q: правильна трикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 3 м, висота – 6 м.
29. Q: конус, радіус основи якого дорівнює 2 м, а висота – 3 м.
30. Q: зрізаний конус, в якого радіус верхньої основи дорівнює 1 м, нижньої – 2 м, висота – 2 м.

Змістовий модуль 2.3

Тема 9. ***Звичайні диференціальні рівняння***

Диференціальні рівняння першого порядку

1. Знайти загальне рішення (загальний інтеграл) диференціального рівняння:

$$(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0 \text{.}$$

Рішення. Перетворимо дане рівняння $y(1 - x^2)dy = -x(y^2 + 1)dx$.

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні:

$$\frac{ydy}{y^2 + 1} = \frac{-xdx}{1 - x^2} \text{.}$$

Інтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$y^2 + 1 = C\,|\,x^2 - 1\,| \Rightarrow y^2 = |\,x^2 - 1\,| - 1 \text{.}$$

Отже, загальним рішенням рівняння є

$$y = \pm\sqrt{C\,|\,x^2 - 1\,| - 1} \text{.}$$

2. Знайти загальне рішення диференціального рівняння $\dfrac{tgydx}{cos^2 x} + \dfrac{tgxdy}{cos^2 y} = 0$.

Рішення. Дане рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремимо їх і інтегруємо:

$$\frac{dy}{tgy\,cos^2 y} = -\frac{dx}{tgx\,cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{dy}{tgy\,cos^2 y} = -\int \frac{dx}{tgx\,cos^2 x} \Rightarrow$$

$$ln\,|\,tgy\,| = -ln\,|\,tgx\,| + ln\,|\,C\,| \Rightarrow tgy = \frac{C}{tgx} \Rightarrow y = arctg\left(\frac{C}{tgx}\right).$$

3. Знайти загальне рішення диференціального рівняння $y - x\dfrac{dy}{dx} = x + y\dfrac{dy}{dx}$.

Рішення. З даного рівняння знаходимо $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \text{.}$$

Це однорідне рівняння першого порядку. Вирішуємо його за допомогою підстановки $y = xu(x)$.

Далі знаходимо:

$$y' = u'x + u\ ;\ u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux}\ ;\ u'x + u = \frac{u - 1}{u + 1}\ ;$$

$$u'x = \frac{u - 1}{u + 1} - u = \frac{-u^2 - 1}{u + 1}\ ;\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{u + 1}\ .$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{u+1}{u^2+1}du = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{2udu}{u^2+1} + \int\frac{du}{u^2+1} =$$

$$= -ln|x| + ln|C| \Rightarrow \frac{1}{2}ln|u^2+1| + arctgu = ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow arctgu = ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right| \Rightarrow$$

$arctg\dfrac{y}{x} = ln\dfrac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, тобто знайшли загальний інтеграл.

4. Знайти частинне рішення диференціального рівняння

$$dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx,\quad y(0) = ln5\ .$$

Рішення. Перетворимо рівняння, виділивши похідну:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1 - x};\quad \text{або}\quad \frac{dy}{dx} + \frac{1 - x}{1 - x}y = \frac{e^{-x}}{1 - x}\ .$$

Рівняння $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ є лінійне, першого порядку. Вирішуємо його за допомогою підстановки $y = uv$, де $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$. Маємо:

$$y' = u'v + uv'\ ;\ u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x}\ ,\ u'v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\right) = \frac{e^{-x}}{1-x}\ .$$

Знаходимо функцію $v(x)$ з умови $\dfrac{dv}{dx} + v = 0$; $\dfrac{dv}{dx} = -v$; $\dfrac{dv}{v} = -dx$; $\displaystyle\int\frac{dv}{v} = -\int dx$; $ln|v| = -x$; $v = e^{-x}$.

Підставляємо отриманий вираз для v у рівняння (1):

$$\frac{du}{dx}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x}\ ;\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x}\ ;\ du = \frac{dx}{1-x}\ ;\ \int du = \int\frac{dx}{1-x}\ ;$$

$$u = -ln|1-x| + lnC\ ;\ u = ln\frac{C}{|1-x|}\ .$$

Тоді $y = uv = e^{-x}ln\dfrac{C}{|1-x|}$ є загальним рішенням рівняння.

Знаходимо С, використовуючи початкову умову: $y(0) = lnC = ln5$, $C = 5$. Остаточно одержуємо, що частинне рішення має вид:

$$y = e^{-x} \ln \frac{5}{|1-x|}.$$

5. Знайти загальне рішення диференціального рівняння

$$y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}.$$

Рішення. Дане рівняння є рівнянням Бернуллі. Вирішуємо його за допомогою підстановки $y = uv$ де $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$. . Тоді

$$y' = u'v + uv'; \; u'v + uv' + 2e^x uv = 2e^x \sqrt{uv},$$

$$u'v + (u' + 2e^x u)v = 2e^x \sqrt{uv}. \qquad (1)$$

Знаходимо *u(x)* з умови

$$u' + 2e^x u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2e^x u \Rightarrow \frac{du}{u} = -2e^x dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2\int e^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -2e^x, \; u = e^{-2e^x}.$$

Отриманий вираз для *u(x)* підставляємо у рівняння (1):

$$v' e^{-2e^x} = 2e^x \sqrt{e^{-2e^x} v},$$

$$v' e^{-2e^x} = 2e^x e^{-e^x} \sqrt{v},$$

$$v' = 2e^x e^{e^x} \sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2e^{e^x} e^x \sqrt{v} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2e^{e^x} e^x dx,$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = 2\int e^x e^{e^x} dx \Rightarrow 2\sqrt{v} = 2e^{e^x} + 2C \Rightarrow v = (e^{e^x} + C)^2.$$

Остаточно знаходимо, що загальне рішення рівняння визначається формулою

$$y = uv = e^{-2e^x} (e^{e^x} + C)^2.$$

Диференціальні рівняння другого порядку

6. Знайти частинне рішення диференціального рівняння $y''(x+2)^5 = 1$; з початковими умовами $y(-1) = \frac{1}{12}$; $y'(-1) = -\frac{1}{4}$, тобто розвязати задачу Коши.

Обчислити з точністю до двох знаків після коми значення отриманої функції при $x = -3$.

Рішення. Знайдемо загальне рішення даного рівняння:

$$y'' = \frac{1}{(x+2)^5}; \; y' = \int \frac{dx}{(x+2)^5} = -\frac{1}{4(x+2)^4 + C_1};$$

$$y=\int\left(-\frac{1}{4(x+2)^4}+C_1\right)dx=\frac{1}{12(x+2)^3}+C_1x+C_2 .$$

Скориставшись початковими умовами, визначимо значення C_1, C_2:

$$y(-1)=\frac{1}{12}-C_1+C_2=\frac{1}{12}\Rightarrow C_2-C_1=0\Rightarrow C_1=C_2 ,$$

$$y'(-1)=-\frac{1}{4}+C_1=-\frac{1}{4}\Rightarrow C_1=0\Rightarrow C_2=0 .$$

Частинне рішення рівняння, що задовольняє початковим умовам, має вигляд:

$$y=\frac{1}{12(x+2)^3} .$$

Обчислимо значення функції y при $x = -3$:

$$y(-3)=\frac{1}{12(-3+2)^3}=-\frac{1}{12}\approx -0{,}08 .$$

7. Знайти загальне рішення диференціального рівняння $y''(e^x+1)+y'=0$, яке допускає зниження порядку.

Рішення. Зробимо підстановку $y' = z(x)$, тоді $y''=\frac{dz}{dx}$ і

$$\frac{dz}{dx}(e^x+1)+z=0\Rightarrow\frac{dz}{dx}(e^x+1)=-z\Rightarrow\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{e^x+1}\Rightarrow\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{e^x+1} .$$

Шляхом заміни змінної $e^x+1=t$ знаходимо:

$$ln|z|=ln|e^x+1|-ln e^x+lnC_1 ,\ \text{відкіля}\ z=C_1\frac{e^x+1}{e^x} .$$

Тоді $y=C_1\int\frac{e^x+1}{e^x}dx=C_1(x-e^{-x})+C_2$, тобто знайшли загальне рішення рівняння.

8. Знайти частинне рішення диференціального рівняння $y^3y''=-1$, яке допускає зниження порядку, та задовольняє заданим початковим умовам y(1) = 1; $y'(1) = 0$.

Рішення. Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p(y)$.

$$y^3p\frac{dp}{dy}=-1 ;\quad pdp=-\frac{dy}{y^3} ;\ \int pdp=-\int\frac{dy}{y^3} ;\ \frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+C_1 ;$$

$$p=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1}\ ;\ \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1}\ ;\ dx=\pm\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}\ ;$$

$$x=\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{1+2C_1y^2}}=\pm\frac{1}{4C_1}\int(1+2C_1y^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+2C_1y^2)\,;$$

$$x=\pm\frac{1}{2C_1}\cdot\sqrt{1+2C_1y^2}+C_2\,,$$

тобто одержали загальне рішення початкового рівняння.

Визначимо значення C_1 и C_2 використавши початкові умови (при $x = 1, y' = 0$ і $y = 1$). Маємо:

$$\begin{cases} 1=\pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1}+C_2, \\ 0=\pm\sqrt{1+2C_1}\,,\ \text{відкіля}\ C_1=-1/2,\ C_2=1. \end{cases}$$

Отже, шукане рішення має вигляд:

$$x=\pm\sqrt{1-y^2}+1\ \text{ або }\ (x-1)^2+y^2=1\,.$$

Диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

9. Знайти загальне рішення однорідного диференціального рівняння:

а) $4y''-11y'+6y=0$; б) $4y''-4y'+y=0$; в) $y''-2y'+37y=0$.

Рішення. Для кожного з даних рівнянь складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його. Отримані корені характеристичного рівняння визначають загальне рішення диференціального рівняння:

а) $4k^2 - 11k + 6 = 0$, корені $k_1=2$, $k_2=3/4$ - дійсні, різні, тому загальне рішення рівняння

$$y=C_1e^{\frac{3}{4}x}+C_2e^{2x}\,;$$

б) $4k^2 - 4k + 1 = 0$; корені $k_1=k_2=1/2$ - дійсні числа, рівні, отже,

$$y=e^{\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)\,;$$

в) $k_2-2k+37=0$, корені $k_{1,2} = 1 \pm 6i$ - комплексно-сполучені числа, тому

$$y=e^x(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x)\,.$$

10. Знайти загальне рішення неоднорідного диференціального

рівняння $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 3k - 4 = 0$ має корені $k_1 = 4$, $k_2 = -1$. Отже, загальне рішення однорідного рівняння визначається формулою

$$y_0 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

За функцією $f(x) = 6xe^{-x}$, що стоїть у правій частині початкового рівняння, записуємо частинне рішення

$$y_r = (Ax + B)e^{-x}x = (Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Коефіцієнти A і B визначимо методом невизначених коефіцієнтів. Для цього знаходимо:

$$y'_r = (2Ax + B)e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x} \cdot (-1) = (2Ax + B)e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x} =$$

$$= (2Ax + B - Ax^2 Bx)e^{-x}.$$

$$y''_r = (2A - 2Ax - B)e^{-x} - (2Ax + B - Ax^2 - Bx)e^{-x} =$$

$$= (2A - 2Ax - B - 2Ax - B + Ax^2 + Bx)e^{-x} = (2A - 4Ax - 2B + 2Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Знайдені вирази для y'_r, і y''_r підставимо у початкове рівняння і, розділивши обидві його частини на $e^{-x} \neq 0$, дорівнюємо коефіцієнти при x^1 і x^0. Одержимо систему, з якої знайдемо *A* і *B*.

Відповідно до викладеного, маємо:

$$2A + Bx - 4Ax - 2B - 6Ax - 3B + 3Bx - 4Bx = 6x$$

$$\begin{array}{c} x^1 \\ x^0 \end{array}\left\| \begin{array}{c} B - 4A - 6A + 3B - 4B = 6 \\ 2A - 2B - 3B = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5}, \\ B = -\dfrac{6}{25} \end{cases}$$

тоді $y_r = -\left(\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{6}{25}x\right)e^{-x}$ і загальне рішення даного неоднорідного рівняння визначається формулою

$$y = y_0 + y_r = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}.$$

11. Знайти загальне рішення неоднорідного диференціального рівняння $y'' + y' = 5x + \cos 2x$.

Рішення. Знаходимо корені характеристичного рівняння $k^2 + k = 0 : k_1 = 0; k_2 = -1$.

Отже, загальне рішення відповідного однорідного рівняння має вид:

$y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Функція $f(x) = 5x + cos2x$, що стоїть праворуч у рівнянні, являє собою суму функцій $f_1(x) = 5x$ і $f_2(x) = cos5x$. Їм відповідає два частинних рішення:

$$y_{r_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx; \quad y_{r_1} = C\cos 2x + D\sin 2x \text{, тобто}$$

$$y_r = Ax^2 + Bx + C\cos 2x + D\sin 2x.$$

Знаходимо:

$$y_r' = 2Ax + B - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x, \quad y_r'' = 2A - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x.$$

Підставляємо вирази y_r', і y_r'' у початкове рівняння та обчислюємо коефіцієнти *A, B, C, D.*

$$2A - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x + 2Ax + B - 2D\sin 2x + 2C\cos 2x = 5x + 2\cos 2x.$$

$$\begin{array}{l\|c} x^1 & 2A = 5 \\ x^0 & 2A + B = 0 \\ \cos 2x & -4C + 2D = 1 \\ \sin 2x & -2C - 4D = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 5/2, \\ B = -5 \\ C = -1/5 \\ D = 1/10. \end{cases}$$

Таким чином, частинне рішення початкового рівняння має вид

$$y_r = \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x,$$

а його загальне рішення

$$y = y_0 + y_r = C_1 + C_2 e^{-x} + 2{,}5x^2 - 5x - 0{,}5\cos 2x + 0{,}1\sin 2x.$$

12. Знайти частинне рішення диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам, тобто розв'язувати задачу Коши:

$$y'' + 16 = (34x + 13)e^{-x}; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 5.$$

Рішення. Характеристичне рівняння $k^2 + 16 = 0$ має мнимі корені: $k_{1,2} = \pm 4i$. Загальне рішення відповідного однорідного рівняння визначається формулою $y_0 = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$, а його частинне рішення має вид $y_r = (Ax + B)e^{-x}$.

Знаходимо:

$$y_r' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x} = (A - Ax - B)e^{-x}$$

$$y_r'' = -Ae^{-x} - (A - Ax - B)e^{-x} = -e^{-x}(A + A - Ax - B) = -e^{-x}(2A - Ax - B).$$

Підставляємо вирази y_r', і y_r'' у початкове рівняння. З отриманої тотожності: $-2A+Ax+B+16Ax+16B = 34A+13$ знаходимо $A = 2; B = 1.$

Тоді $y_r' = (2x+1)e^{-x}$.

Використовуючи початкові умови $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$, складаємо систему для обчислення значень C_1 і C_2

$$\begin{cases} -1 = C_1 + 1, \\ 5 = 4C_2 + 2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Підставляючи значення C_1 і C_2 у загальне рішення, знаходимо частинне рішення початкового рівняння

$$y = \sin 4x - 2\cos 4x + (2x+1)e^{-x}.$$

13. Визначити і записати структуру частинного рішення y_r, лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 9y = f(x)$ за виглядом функції $f(x)$, якщо:

а) $f(x) = (5-x)e^{3x}$; б) $f(x) = x\sin 2x$.

Рішення: Знаходимо корені характеристичного рівняння $k^2 - 9 = 0$, $k_1 = 3$; $k_2 = -3$.

а) тому що $f(x) = (5-x)e^{3x}$, то частинне рішення має вигляд

$$y_r = (Ax+B)e^{3x}x = (Ax^2 + Bx)e^{3x}x;$$

б) оскільки $f(x) = x\sin 2x$, то частинне рішення має вигляд

$$y_r = (Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x.$$

14. Знайти частинне рішення лінійного однорідного диференціального рівняння, яке відповідає початковим умовам

$$y^{IV} - y = 0;\ y(0) = 5;\ y'(0) = 3;\ y''(0) = y'''(0) = 0.$$

Рішення. Складаємо характеристичне рівняння і вирішуємо його

$$k^4 - 1 = 0 \Rightarrow (k-1)(k+1)(k^2+1) = 0,$$

$$k_1 = 1;\ k_2 = -1;\ k_{3,4} = \pm i.$$

Загальне рішення початкового рівняння має вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Знаходимо:

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x,$$

$$y'' = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x,$$

$$y''' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x.$$

Використовуючи початкові умови, складаємо і вирішуємо систему для визначення значень C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 5, \\ -C_1 + C_2 + C_4 = 3, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ -C_1 + C_2 - C_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0{,}5; \\ C_2 = 2; \\ C_3 = 2{,}5; \\ C_4 = 1{,}5. \end{cases}$$

Частинне рішення початкового рівняння має вид:

$$y = 0{,}5e^{-x} + 2e^{x} + 2{,}5\cos x + 1{,}5\sin x\,.$$

15. Розв'язати двома способами систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = -7x + y,\ x = x(t),\ x' = dx/dt, \\ y' = -2x - 5y,\ y = y(t),\ \ y' = dy/dt, \end{cases}$$

а) зведенням до диференціального рівняння вищого порядку ; б) за допомогою характеристичного рівняння.

Рішення.

а) диференціюємо перше рівняння даної системи: $x'' = -7x' + y'$.

Потім заміняємо y' його виразом із другого рівняння даної системи: $x'' = 7x' - 2x - 5y$, у якому y заміняємо виразом $y = x'+7x$, знайденим з першого рівняння системи. У підсумку приходимо до диференціального рівняння другого порядку щодо невідомої функції $x(t)$:

$$x'' = 7x' - 2x - 5(x' + 7);\quad x'' + 12x' - 37x + 0\,.$$

Розв'язуємо його:

$$k^2 + 12k + 37 = 0\,,\ k_{1,2} = -6 \pm i \Rightarrow x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t)\,.$$

Звідси знаходимо

$$x' = -6e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + 6e^{-6t}(-C_1\sin t + C_2\cos t)\,.$$

Підставляємо отримані вирази для x і x' у рівняння $y = x' + 7x$ і маємо

$$y = -6e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-6t}(-C_1\sin t + C_2\cos t) +$$

$$+7e^{-6t}(-C_1\cos t + C_2\sin t)\,.$$

Отже, шуканим рішенням є функції

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \\ y(t) = e^{-6t}((C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)). \end{cases}$$

б) складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ (7+\lambda)(5+\lambda) + 2 = 0,$$

$$\lambda^2+12\lambda+37=0\,,\quad \lambda_{1,2}=-6\pm i\,.$$

Для $\lambda_1=-6+i$ одержуємо систему:

$$\begin{cases}(-7+6-i)\alpha+\beta=0,\\ -2\alpha+(-5+6-i)\beta=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-(1+i)\alpha+\beta=0,\\ -2\alpha+(1-i)\beta=0.\end{cases}$$

Відкіля α = 1, $\beta=1+i$. Отже перше частинне рішення початкового рівняння

$$x_1=e^{(-6+i)t}\,;\quad y_1=(1+i)e^{(-6+i)t}\,.$$

Для $\lambda_2=-6-i$ маємо систему

$$\begin{cases}(-7+6+i)\alpha+\beta=0,\\ -2\alpha+(-5+6+i)\beta=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-1+i)\alpha+\beta=0,\\ -2\alpha+(1+i)\beta=0.\end{cases}$$

Відкіля α = 1, $\beta=1-i$. Отже друге частинне рішення початкового рівняння

$$x_2=e^{(-6-i)t}\,;\quad y_2=(1-i)e^{(-6-i)t}\,.$$

Переходимо до нової фундаментальної системи рішень за формулами

$$\bar{x}_1=(x_1+x_2)/2\,;\quad \bar{x}_2=(x_1-x_2)/(2i)$$
$$\bar{y}_1=(y_1+y_2)/2\,;\quad \bar{y}_2=(y_1-y_2)/(2i)\,.$$

Використовуючи формулу Ейлера $e^{\alpha+\beta i}=e^{\alpha t}(\cos\beta t\pm i\sin\beta t)$, знаходимо

$$\bar{x}_1=e^{-6t}\cos t\,;\quad \bar{y}_1=e^{-6t}(\cos t-\sin t)\,,$$
$$\bar{x}_2=e^{-6t}\sin t\,;\quad \bar{y}_2=e^{-6t}(\cos t+\sin t)\,,$$

Загальне рішення початкової системи має вид:

$$x=C_1\bar{x}_1+C_2\bar{x}_2\,;\quad y=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2\,,$$

що і дає відповідь, отриману раніше.

16. Розв'язати диференціальне рівняння $y''-y=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ методом варіації довільних сталих.

Рішення. Розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$y''-y=0\,,\quad k^2-1=0\,,\quad k_1=1\,,\quad k_2=-1\,.$$

Його загальним рішенням буде $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$.

Вважаємо, що C_1 , і C_2 функції від *x*, тобто $y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^x$.

Визначаємо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ із системи

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x), \end{cases}$$

яка для даного рівняння має вид

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{x} = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}. \end{cases}$$

Знаходимо з неї $C_2'(x)$, $C_1'(x)$, а потім і $C_2(x)$, $C_1(x)$:

$$2C_2'(x)e^x = \frac{2e^x}{e^x - 1}; \quad C_2'(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1} = ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C_2,$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{2x} = \frac{-e^{2x}}{e^x - 1}, \quad C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1}dx = -e^x - ln|e^x - 1| + C_1.$$

Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у (1), маємо загальне рішення початкового рівняння:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + e^x\, ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| - e^{-x}\, ln|e^x - 1| - 1.$$

Завдання до теми 9

1 Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

1. $e^{x+3y}dy = xdx$
2. $x^{-1}\cdot e^{-x^2}dy + sec^2\, ydx = 0$
3. $y' = (2x-1)\cdot ctgy$
4. $sec^2\, x\cdot tgydy = -sec^2\, y\cdot tgx\cdot dx$
5. $(1+e^x)\cdot ydy - e^y dx = 0$
6. $(y^2+3)dx = e^x\cdot x^{-1}\cdot ydy$
7. $y' = (2y+1)\cdot tgx$
8. $\sin y\cos xdy - \cos y\sin dx = 0$
9. $(1+e^x)\cdot y\cdot y' = e^x$
10. $\sin(x+y)dx + \sec ydy = \sin(y-x)dx$
11. $y' = e^{2x} : \ln y$
12. $3e^x\sin ydx + (1-e^x)\cos ydy = 0$
13. $2^{x^2+y}dy + xdx = 0$
14. $\sin x\cdot tgydx - \cos ecydy = 0$
15. $y' = e^{x^2}\cdot(1+y^2)\cdot x$
16. $\cos(x-2y)y' + \cos(x+2y)y' = \sec x$
17. $1+e^y+e^y\cdot y' = 0$
18. $ctgx\cdot\cos^2 ydx + \sin^2 x\cdot tgydy = 0$
19. $y'ctgx + y = 2$
20. $\sin x\cdot y' = y\cdot\cos x + 2\cos x$
21. $3^{y^2-x^2} = y\cdot y'\cdot x^{-1}$
22. $\cos^3 y\cdot y' - \cos(2x+y) = \cos(2x-y)$
23. $(1+e^{3y})x\cdot dx = e^{3y}dy$
24. $(\sin(2x+y) - \sin(2x-y))dx = \cos ecydy$
25. $y'\sin x = y\ln y$
26. $e^x\cdot tgydx = (1-e^x)\sec^2 ydy$
27. $e^x\cdot\sin ydx + tgy\cdot dy = 0$
28. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$
29. $y'\cdot\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$
30. $\cos ydx = 2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\cdot\sqrt{1+x^2}dy$

2 Знайти загальний розв'язок

1. $(xy+x^3y)y' = 1+y^2$
2. $y^2\ln xdx = (y-1)xdy$
3. $y - xy' = 2(1+x^2y')$
4. $y - xy' = 1+x^2y'$
5. $(x+4)dy - xydx = 0$
6. $(x^2+x)ydx + (y^2+1)dy = 0$
7. $y' : 7^{y-x} = 3$
8. $(x+xy^2)dy + ydx = y^2dx$
9. $y' + y + y^2 = 0$
10. $(xy^3+x)dx + (x^2y^2-y^2)dy = 0$

11. $y' + 2y - y^2 = 0$

12. $(1 + y^2)dx = (y + yx^2)dy$

13. $y' = 2xy + x$

14. $y' - xy' = 3(1 + x^2 y')$

15. $2xyy' = 1 - x^2$

16. $(x^2 - 1)y' - xy = 0$

17. $(y^2 x + y^2)dy + xdx = 0$

18. $(1 + x^3)y^3 dx = (y^2 - 1)x^3 dy$

19. $xy' - y = y^2$

20. $(y + 1)y' = y : \sqrt{1 - x^2} + xy$

21. $2x^2 yy' + y^2 = 2$

22. $(x^2 y - y)^2 y' = x^2 y - y + x^2 - 1$

23. $y' = (1 + y^2) : (1 + x^2)$

24. $y' \cdot \sqrt{1 + y^2} = x^2 : y$

25. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$

26. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$

27. $xyy' = (1 + x^2) : (1 - y^2)$

28. $(xy - x)^2 dy = y(x - 1)dx$

29. $y' - xy^2 = 2xy$

30. $\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$

$\boxed{3}$ Знайти загальний розв’язок

1. $y - xy' = x \cdot sec(y : x)$

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$

3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$

5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

6. $y^2 + x^2 y' = xyy'$

7. $xy' - y = xtg(y : x)$

8. $xy' = y - x \cdot e^{y:x}$

9. $xy' - y = (x + y)ln(x)$

10. $xy' = y \cdot cos(ln\frac{y}{x})$

11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

13. $y = x(y' - e^{\frac{y}{x}})$

14. $y' = y : x - 1$

15. $y' x + x + y = 0$

16. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

18. $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$

19. $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$

20. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

21. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$

22. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$

23. $xy' + y(\ln(y : x) - 1) = 0$

24. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

25. $(y^2 - 2xy)dx - x^2dy = 0$

26. $(x + 2y)dx + xdy = 0$

27. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$

28. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$

29. $x^2y' = y(x + y)$

30. $y' = \dfrac{4x^2 + 3xy + y^2}{4y^2 + 3xy + x^2}$

$\boxed{4}$ Знайти частинний розв’язок (задача Коши)

1. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3,\quad y(0) = 0$

2. $y' + ytgx = \sec x,\quad y(0) = 0$

3. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x},\quad y(0) = 0$

4. $xy' - 2y = 2x^4,\quad y(1) = 0$

5. $y' = 2x(x^2 + y),\quad y(0) = 0$

6. $y' - y = e^x,\quad y(0) = 1$

7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0,\quad y(1) = 0{,}5e$

8. $\cos ydx = (x + 2\cos y)\sin ydy,\quad y(0) = 0{,}25\pi$

9. $x^2y' + xy + 1 = 0,\quad y(1) = 0$

10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2,\quad y(2) = 1$

11. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln ydy,\quad y(0) = 1$

12. $y' = y : (3x - y^2),\quad y(0) = 1$

13. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1),\quad y(0) = 1$

14. $x(y' - y) = e^x,\quad y(1) = 0$

15. $y = x(y' - x\cos x),\quad y(0{,}5\pi) = 0$

16. $(xy' - 1)\ln x = 2y,\quad y(e) = 0$

17. $(2e^y - x)y' = 1,\quad y(0) = 0$

18. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{x}\quad y(1) = 0$

19. $(x + y^2)dy = ydx,\quad y(0) = 1$

20. $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1,\quad y(0) = 0{,}5\pi$

21. $(x+1)y' + y = x^3 + x^2,$ $y(0) = 0$

22. $xy' - 2y + x^2 = 0,$ $y(1) = 0$

23. $xy' + y = \sin x,$ $y(0{,}5\pi) = 2/\pi$

24. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x,$ $y(\sqrt{2}) = 1$

25. $(1 - x^2)y' + xy = 1,$ $y(0) = 1$

26. $y' ctgx - y = 2\cos^2 x \cdot ctgx,$ $y(0) = 0$

27. $x^2 y' = 2xy + 3,$ $y(1) = -1$

28. $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2},$ $y(0) = 0$

29. $y' - 3x^2 y - x^2 \cdot e^{x^3} = 0,$ $y(0) = 0$

30. $xy' + y = \ln x + 1,$ $y(1) = 0$

5 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

1. $y' + y = x\sqrt{y}$
2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 ydy$
3. $y' + 2y = y^2 e^x$
4. $y' = y^4 \cos x + ytgx$
5. $xydy = (y^2 + x)dx$
6. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$
7. $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$
8. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$
9. $2y' = x \cdot y^{-1} + xy : (x^2 - 1)$
10. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
11. $xy^2 y' = x^2 + y^3$
12. $(x+1)(y' + y^2) = -y$
13. $y' x + y = -xy^2$
14. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$
15. $xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y$
16. $y' + xy = x^3 y^3$
17. $y' = x \cdot y^{-1} \cdot e^{2x} + y$
18. $yx' + x = -yx^2$
19. $x(x-1)y' + y^3 = xy$
20. $2x^3 yy' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$
21. $x^{-1} \cdot dx = (y^{-1} - 2x)dy$
22. $y' = -x \cdot \sqrt[3]{y} + 3y$
23. $xy' + y = y^2 \ln x$
24. $xdx = (x^2 \cdot y^{-1} - y^3)dy$
25. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$
26. $y' + y = x \cdot y^{-2}$
27. $y' - y \cdot tgx + y^2 \cos x = 0$
28. $y' + 2y \cdot x^{-1} = 2\sqrt{y} \cdot \sec^2 x$
29. $y' - y + y^2 \cdot \cos x = 0$
30. $y' = x\sqrt{y} + xy : (x^2 - 1)$

6 Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння, яке дозволяє зниження порядку

1. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$
2. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$
3. $x^3y'' + x^2y' = 1$
4. $y'' + y' \cdot tgx = sin 2x$
5. $y'' \cdot x \cdot ln x = y'$
6. $xy'' - y' = x^2 \cdot e^x$
7. $y'' \cdot x \cdot ln x = 2y'$
8. $x^2y'' + xy' = 1$
9. $y'' = -x \cdot y^{-1}$
10. $xy'' = y'$
11. $y'' = y' + x$
12. $-xy'' + y' + x^2 = 0$
13. $xy'' = y' ln(y' : x)$
14. $xy'' + y' = ln x$
15. $y'' tgx = y' + 1$
16. $y'' + 2x(y')^2 = 0$
17. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$
18. $y'' - y' : (x-1) = x(x-1)$
19. $y'' + y' tgx = sec x$
20. $y'' - 2y' ctgx = sin^3 x$
21. $y'' + 4y' = 2x^2$
22. $xy'' - y' = 2x^2e^x$
23. $x(y'' + 1) + y' = 0$
24. $y'' + 4y' = cos 2x$
25. $y'' + y' = sin x$
26. $x^2y'' = (y')^2$
27. $2xy''y' = (y')^2 - 4$
28. $y'' x ln x = y'$
29. $y'' ctgx + y' = 2$
30. $(1+x^2)y'' = 2xy$

7 Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, яке дозволяє зниження порядку

1. $y'' = y' \cdot e^y$, $\quad y(0)=0$, $\quad y'(0)=1$
2. $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$, $\quad y(0)=1$, $\quad y'(0)=1$
3. $yy'' + (y')^2 = 0$, $\quad y(0) = y'(0) = 1$
4. $y'' + 2y(y')^3 = 0$, $\quad y(0)=2$, $\quad y'(0)=1/3$
5. $y'' \cdot tgy = 2(y')^2$, $\quad y(1)=\pi/2$, $\quad y'(1)=2$

6. $2y\cdot y'' = (y')^2,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=1$

7. $yy'' - (y')^2 = y^4,$ $y(0)=y'(0)=1$

8. $y'' = -1:(2y^3),$ $y(0)=0.5,$ $y'(0)=\sqrt{2}$

9. $y'' = 1-(y')^2,$ $y(0)=y'(0)=0$

10. $(y'')^2 = y',$ $y(0)=2/3,$ $y'(0)=1$

11. $2y\cdot y'' = (y')^2+1,$ $y(0)=2,$ $y'(0)=1$

12. $y'' = 2-y,$ $y(0)=2,$ $y'(0)=2$

13. $y'' = y^{-3},$ $y(0)=1,$ $y'(0)=0$

14. $yy'' - 2(y')^2 = 0,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=2$

15. $y'' = y' + (y')^2,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

16. $y'' = y'\cdot e^y,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

17. $y'' = y'\cdot e^y,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

18. $y'' = y'\cdot e^y,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

19. $4\cdot(y'')^2 = 1+(y')^2,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=0$

20. $2(y')^2 = (y-1)\cdot y'',$ $y(0)=2$ $y'(0)=2$

21. $y'' = y'\cdot e^y,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

22. $y'' = y'\cdot e^y,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

23. $yy'' - (y')^2 = 0,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=2$

24. $yy'' - (y')^2 = y^2\cdot \ln y,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=1$

25. $y(1-\ln y)\cdot y'' + (1+\ln y)\cdot(y')^2 = 0,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=1$

26. $y'' = y'\cdot e^y,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

27. $y'' = y' : \sqrt{y},$ $y(0)=1,$ $y'(0)=2$

28. $y'' = \frac{1}{2}\cdot(1+(y')^2),$ $y(0)=0,$ $y'(0)=0$

29. $yy'' - 2yy'\cdot \ln y = (y')^2,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=1$

30. $y'' = y'\cdot e^y,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1$

8 Знайти для а), б) і в) загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

	а)	б)	в)
1.	$y'' + 4y = 0;$	$y'' - 10y' + 25y = 0;$	$y'' + 3y' + 2y = 0$
2.	$y'' - y' - 2y = 0;$	$y'' + 9y = 0;$	$y'' + 4y' + 4y = 0$
3.	$y'' - 4y' = 0;$	$y'' - 4y' + 13y = 0;$	$y'' - 3y' + 2y = 0$
4.	$y'' - 5y' + 6y = 0;$	$y'' + 3y' = 0;$	$y'' + 2y' + 5y = 0$
5.	$y'' - 2y' + 10y = 0;$	$y'' + y' - 2y = 0;$	$y'' - 2y' = 0$
6.	$y'' - 4y = 0;$	$y'' + 2y' + 17y = 0;$	$y'' - y' - 12y = 0$
7.	$y'' + y' - 6y = 0;$	$y'' + 9y' = 0;$	$y'' - 4y' + 20y = 0$
8.	$y'' - 49y = 0;$	$y'' - 4y' + 5y = 0;$	$y'' + 2y' - 3y = 0$
9.	$y'' + 7y' = 0;$	$y'' - 5y' + 4y = 0;$	$y'' + 16y = 0$
10.	$y'' - 6y' + 8y = 0;$	$y'' + 4y' + 5y = 0;$	$y'' + 5y' = 0$
11.	$4y'' - 8y' + 3y = 0;$	$y'' - 3y' = 0;$	$y'' - 2y' + 10y = 0$
12.	$y'' + 4y' + 20y = 0;$	$y'' - 3y' - 10y = 0;$	$y'' - 16y = 0$
13.	$9y'' + 6y' + y = 0;$	$y'' - 4y' - 21y = 0;$	$y'' + y = 0$
14.	$2y'' + 3y' + y = 0;$	$y'' + 4y' + 8y = 0;$	$y'' - 6y' + 9y = 0$
15.	$y'' - 10y' + 21y = 0;$	$y'' - 2y' + 2y = 0;$	$y'' + 4y' = 0$
16.	$y'' + 6y' = 0;$	$y'' + 10y' + 29y = 0;$	$y'' - 8y' + 7y = 0$
17.	$y'' + 25y = 0;$	$y'' + 6y' + 9y = 0;$	$y'' + 2y' + 2y = 0$
18.	$y'' - 3y' = 0;$	$y'' - 7y' - 8y = 0;$	$y'' + 4y' + 13y = 0$
19.	$y'' - 3y' - 4y = 0;$	$y'' + 6y' + 13y = 0;$	$y'' + 2y' = 0$
20.	$y'' + 25y' = 0;$	$y'' - 10y' + 16y = 0;$	$y'' - 8y' + 16y = 0$
21.	$y'' - 3y' - 18y = 0;$	$y'' - 6y' = 0;$	$y'' + 2y' + 5y = 0$
22.	$y'' - 6y' + 13y = 0;$	$y'' - 2y' - 15y = 0;$	$y'' - 8y' = 0$
23.	$y'' + 2y' + y = 0;$	$y'' + 6y' + 25y = 0;$	$y'' - 4y' = 0$
24.	$y'' + 10y' = 0;$	$y'' - 6y' + 8y = 0;$	$4y'' + 4y' + y = 0$
25.	$y'' + 5y = 0;$	$9y'' - 6y' + y = 0;$	$y'' + 6y' + 8y = 0$
26.	$y'' + 6y' + 10y = 0;$	$y'' + 2y' + y = 0;$	$y'' - 5y' + 4y = 0$
27.	$y'' - y = 0;$	$4y'' + 8y' - 5y = 0;$	$y'' - 6y' + 10y = 0$
28.	$y'' + 8y' + 25y = 0;$	$y'' + 9y' = 0;$	$9y'' + 3y' - 2y = 0$
29.	$6y'' + 7y' - 3y = 0;$	$y'' + 16y = 0;$	$4y'' - 4y' + y = 0$
30.	$9y'' - 6y' + y = 0;$	$y'' + 12y' + 37y = 0;$	$y'' - 2y' = 0$

9 Знайти загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння

1. $y'' + y' = 2x - 1$
2. $y'' - 2y' + 5y = 10 \cdot e^{-x} \cdot \cos 2x$
3. $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x$
4. $y'' - 12y' + 36y = 14 \cdot e^{6x}$
5. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x) \cdot e^{-x}$
6. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$
7. $y'' + y = 2\cos x$
8. $y'' + 6y' + 10y = 74 \cdot e^{3x}$
9. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x$
10. $y'' + 6y' + 9y = 48x \cdot e^{x}$
11. $y'' + 5y' = 52e^{2x}$
12. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x$
13. $y'' - 8y' + 12y = 24x^2 + 16x$
14. $y'' + 8y' + 25y = 18 \cdot e^{5x}$
15. $y'' - 9y' + 20y = 126 \cdot e^{-2x}$
16. $y'' + 36y = 36 + 66x$
17. $y'' + y = 4\cos x$
18. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x$
19. $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x$
20. $y'' + 5y' = 39 \cos 3x$
21. $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x$
22. $y'' - 4y' + 5y = 4 \sin x \cdot e^{-2x}$
23. $y'' + 16y = 8\cos 4x$
24. $y'' + 9y = 12x^2 - 27$
25. $y'' - 2y' + 4y = 2e^{6x}$
26. $y'' + 4y' = e^{x} 2 \sin 2x$
27. $y'' + 2y' + y = 6 \cdot e^{-x}$
28. $y'' + 2y' + 3y = 4 - 3x$
29. $6y'' - y' - y = 3 \cdot e^{2x}$
30. $2y'' + 7y' + 3y = 2 \sin 3x$

10 Знайти загальний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння

1. $y'' - 8y' + 17y = 10 \cdot e^{2x}$
2. $y'' - 7y' + 12y = 3 \cdot e^{4x}$
3. $y'' - 6y' + 34y = 18 \cos 5x$

16. $y'' + y' - 6y = 6x \cdot e^{3x}$
17. $y'' - 2y' = 6 + 12x$
18. $y'' - 2y' = (4x + 4) \cdot e^{2x}$

4. $y'' + 2y' + y = 22x - 4$

5. $y'' - 2y' + y = 4 \cdot e^{x}$

6. $y'' - 6y' + 13y = 34 \cdot e^{-3x} \cdot \sin 2x$

7. $y'' + 4y' + 4y = 6 \cdot e^{-2x}$

8. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x$

9. $y'' + 4y' + 5y = 5 - 32x$

10. $y'' - 4y = (-24x) \cdot e^{2x}$

11. $y'' + 16y = 80 \cdot e^{2x}$

12. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$

13. $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$

14. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$

15. $y'' + 4y' + 29y = 26 \cdot e^{-x}$

19. $y'' - 4y' = 8 - 16x$

20. $y'' - 8y' + 20y = 16\sin 2x$

21. $y'' + 2y' - 3y = (6x - 4) \cdot e^{x}$

22. $y'' + 3y' = 10 - 6x$

23. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x$

24. $y'' + 2y' + y = 12x \cdot e^{-x}$

25. $y'' + 6y' + 9y = 72 \cdot e^{3x}$

26. $y'' + 4y' = 15 \cdot e^{x}$

27. $y'' + 2y' + y = 18x \cdot e^{-x}$

28. $y'' + 9y = 10 \cdot e^{3x}$

29. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x$

30. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x$

$\boxed{11}$ Знайти частинний розв'язок диференційного рівняння, який задовольняє початковим умовам (задача Коши)

1. $y'' - 2y' - y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,$ $\quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0$

2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,$ $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$

3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$

4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$

5. $y'' - 14y' + 53y = 42x^2 + 59x - 14,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7$

6. $y'' + 16y = e^{x}(\cos 4x - 8\sin 4x),$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$

9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$

10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x},$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66,$ $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$

12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$

13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin 3x,$ $\quad y(0) = 4, y'(0) = 0$

14. $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x),$ $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$

15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$

16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x},$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x},$ $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$

18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cos 6x,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$

21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3,$ $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 14$

22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18,$ $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$

23. $y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x},$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

24. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3,$ $\quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2$

26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$

27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

28. $y'' + 16y = 32e^{4x},$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

29. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x,$ $\quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2$

30. $y'' - 4y = 8e^{2x},$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -8$

12 Визначити і записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами для двох варіантів функції, які записані праворуч

		а) $f(x)$	б) $f(x)$
1.	$2y''-7y'+3y=f(x)$	$(2x+1)\cdot e^{3x}$	$\cos 3x$
2.	$3y''-7y'+2y=f(x)$	$3x\cdot e^{2x}$	$\sin 2x-3\cos 2x$
3.	$2y''+y'-y=f(x)$	$(x^2-5)\cdot e^{-x}$	$x\cdot\sin x$
4.	$2y''-9y'+4y=f(x)$	$-2e^{4x}$	$e^x\cos 4x$
5.	$y''+49y=f(x)$	x^3+4x	$3\sin 7x$
6.	$3y''+10y'+3y=f(x)$	e^{-3x}	$2\cos 3x-\sin 3x$
7.	$y''-3y'+2y=f(x)$	$x+2\cdot e^x$	$3\cos 4x$
8.	$y''-4y'+4y=f(x)$	$\sin 2x+2e^x$	x^2-4
9.	$y''-y'+y=f(x)$	$e^x\cos x$	$7x+2$
10.	$y''-3y'=f(x)$	$2x^2-5x$	$e^{-x}\sin 2x$
11.	$y''+3y'-4y=f(x)$	$3x\cdot e^{-4x}$	$x\sin x$
12.	$y''+36y=f(x)$	$4x\cdot e^{-x}$	$2\sin 6x$
13.	$y''-6y'+9y=f(x)$	$(x-2)\cdot e^{3x}$	$4\cos x$
14.	$4y''-5y'+y=f(x)$	$(4x+2)\cdot e^x$	$e^x\sin 3x$
15.	$4y''+7y'-2y=f(x)$	$3\cdot e^{-2x}$	$(x-1)\cos 2x$
16.	$y''-y'-6y=f(x)$	$2x\cdot e^{3x}$	$9\cos x-\sin x$
17.	$y''-16y=f(x)$	$-3e^{4x}$	$\cos x-4\sin x$
18.	$y''-4y'=f(x)$	$(x-2)\cdot e^{4x}$	$3\cos 4x$

19.	$y'' - 2y' + 2y = f(x)$	$(2x-3)\cdot e^{4x}$	$e^{x}\sin x$
20.	$5y'' - 6y' + y = f(x)$	$x^{2}\cdot e^{x}$	$\cos x - \sin x$
21.	$5y'' + 9y' - 2y = f(x)$	$x^{3} - 2x$	$2\sin 2x - 3\cos 2x$
22.	$y'' - 2y' - 15y = f(x)$	$4x\cdot e^{3x}$	$x\sin 5x$
23.	$y'' - 3y' = f(x)$	$2x^{3} - 4x$	$2e^{3x}\cos x$
24.	$y'' - 7y' + 12y = f(x)$	$x\cdot e^{3x} + 2e^{x}$	$3x\sin 2x$
25.	$y'' + 9y' = f(x)$	$x^{2} + 4x - 3$	$xe^{2x}\sin x$
26.	$y'' - 4y' + 5y = f(x)$	$-2xe^{x}$	$x\cos 2x - \sin 2x$
27.	$y'' + 3y' + 2y = f(x)$	$(3x-7)\cdot e^{-x}$	$\cos x - 3\sin x$
28.	$y'' - 8y' + 16y = f(x)$	$2x\cdot e^{4x}$	$\cos 4x + 2\sin 4x$
29.	$y'' + y' - 2y = f(x)$	$(2x-1)\cdot e^{-x}$	$3x\cos 2x$
30.	$y'' + 3y' - 4y = f(x)$	$6x\cdot e^{-x}$	$x^{2}\sin 2x$

$\boxed{13}$ Розв’язати систему диференціальних рівнянь методом зведення її до диференціального рівняння вищого порядку

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = -3x + 4y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 4x + 5y \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 7x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 6y \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y \\ y' = -8x + 4y \end{cases}$

14 Розв’язати неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку методом варіації довільних сталих

1. $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^{x+1}}$

2. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$

3. $y'' + 4y = \sec 2x$

4. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} ctgx$

5. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

6. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$

7. $y'' - y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

8. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$

9. $y'' - 9y' = cosec 3x$

10. $y'' + y = tgx$

11. $y'' + 2y' + y = xe^{x} + \dfrac{1}{xe^{x}}$

12. $y'' + 4y = ctg\,2x$

13. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^{x}\cos x}$

14. $y'' + y = ctgx$

15. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x}$

16. $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{xe^{x}}$

17. $y'' + y = \sec x$

18. $y'' + y = \cos ecx$

19. $y'' + 4y = \cos ec2x$

20. $y'' + 4y = tg\,2x$

21. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{e^{2x}x^{3}}$

22. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^{3}}$

23. $y'' + 2y' + y = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{e^{x}}$

24. $y'' + y = -ctg^{2}x$

25. $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^{x})$

26. $y'' - y' = e^{2x}\sin(e^{x})$

27. $y'' + y = tg^{2}x$

28. $y'' + y = 2\cos ec^{2}x$

29. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{1}{e^{x}\sin 2x}$

30. $y'' + 9y = \sec 3x$

15 Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що відповідає початковим умовам (задача Коші)

1. $y'' + y = 6\cdot e^{-t}$
$y(0)=3;\ y'(0)=1$

2. $y'' - y' = t^{2}$
$y(0)=0;\ y'(0)=1$

3. $y'' + y' = t^{2} + 2t$
$y(0)=0;\ y'(0)=-2$

4. $y'' - y = \cos 3t$
$y(0)=1;\ y'(0)=1$

5. $y'' + 2y' + 2y = 7 \cdot e^{2t}$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 4$

6. $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 1$

7. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$
$y(0) = -3;\ y'(0) = 2$

8. $y'' + y' = 2 + e^{t}$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 2$

9. $y'' - y' = \sin 3t$
$y(0) = 2;\ y'(0) = 1$

10. $y'' + 2y' = \sin t$
$y(0) = -2;\ y'(0) = 4$

11. $y'' + y = \sin t$
$y(0) = 2;\ y'(0) = 1$

12. $y'' + 4y' + 29y = e^{-3t}$
$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

13. $y'' - 3y' + 2y = e^{t}$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 0$

14. $y'' + 3y' + 2y = 3 \cdot e^{t}$
$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

15. $y'' - 2y' - 3y = 2t$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 1$

16. $y'' - 4y = \sin 2t$
$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

17. $y'' + 5y' = 29 \cos t$
$y(0) = -1;\ y'(0) = 0$

18. $y'' + 2y' + 2y = t^{2} + 1$
$y(0) = 1;\ y'(0) = -3$

19. $y'' + 4y = 8 \sin 3t$
$y(0) = 3;\ y'(0) = -1$

20. $y'' - y' - 6y = 2$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 0$

21. $y'' + 4y = 4 \cdot e^{2t} + 4t^{2}$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 2$

22. $y'' + 4y' + 4y = e^{2t}$
$y(0) = 1;\ y'(0) = 2$

23. $y'' - 3y' + 2y = 12 \cdot e^{3t}$
$y(0) = 2;\ y'(0) = 6$

24. $y'' + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t$
$y(0) = -2;\ y'(0) = 3$

25. $y'' + 2y' + 10y = 2 \cdot e^{-t}$
$y(0) = 5;\ y'(0) = 1$

26. $y'' + 3y' - 10y = 47 \cos 3t - \sin 3t$
$y(0) = 3;\ y'(0) = -1$

27. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$
$y(0) = -1;\ y'(0) = 0$

28. $y'' - 2y' = e^{t}(t^{2} + t - 3)$
$y(0) = 2;\ y'(0) = 2$

29. $y'' + y = 2 \cos 2t$
$y(0) = 0;\ y'(0) = 1$

30. $y'' - y = 4 \sin t + 5 \cos 2t$
$y(0) = -1;\ y'(0) = -2$

$\boxed{16}$ Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що відповідає початковим умовам (задача Коші)

1. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y + 1 \\ x(0) = -1;\ y(0) = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \\ x(0) = 1;\ y(0) = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -5x - 3y + 2 \\ x(0) = 2;\ y(0) = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1 \\ y' = -1{,}5x + y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 2{,}5x - y + 2 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 4x - y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = 4x - 8y \\ x(0) = 3;\ y(0) = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2 \\ y' = 3x + y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2y + 1 + x \\ y' = 2x + 3 + y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1 \\ y' = 3x + 4y \\ x(0) = 2;\ y(0) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y + 1 \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 3y + 2\ \ x \\ y' = x + 2y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 4x + 2y \\ x(0) = 2;\ y(0) = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 4x + 3\ \ y \\ y' = x + 2y \\ x(0) = -1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = x - y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 3y + 6x \\ y' = -8x - 5y \\ x(0) = 2;\ y(0) = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2 \\ y' = 4y + 1 - x \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = -5x + 4y \\ y' = -2x - 3y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = 4x - 8y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = y + 3x \\ y' = x + 2y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2 \\ y' = x + y + 1 \\ x(0) = 0;\ y(0) = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \\ x(0) = 1;\ y(0) = 0 \end{cases}$

Тема 10. ***Диференціальне числення функцій декількох змінних***

1. Знайти область визначення функції $z = ln(x^2 - 3y + 6)$.

Рішення. Логарифмічна функція визначена тільки при додатному значенні аргументу, тому $x^2 - 3y+6 > 0$ чи $y < \frac{1}{3}(x^2 + 6)$.

Отже, границею області буде лінія $y = \frac{1}{3} x^2 + 2$, тобто парабола. Область визначення даної функції складається з зовнішніх точок параболи (не включаючи параболу, тобто границю!).

2. Знайти частинні похідні і частинні диференціали функції $z = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$.

Рішення. Спочатку знайдемо частинні похідні функції, використавши формулу диференціювання складної функції однієї змінної

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \left(-\frac{1}{3}(x^2 + 5y^2)^{\frac{2}{-3}} 2x \right) = \frac{-2x}{3e^{\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \sqrt[3]{(x^2 + 5y^2)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \left(-\frac{1}{3}(x^2 + 5y^2)^{\frac{-2}{3}} 10y \right) = \frac{-10y}{3e^{\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \sqrt[3]{(x^2 + 5y^2)^2}}.$$

Тепер знаходимо частинні диференціали:

$$d_x z = -\frac{2}{3} xe^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + 5y^2)^2}} dx;$$

$$d_y z = -\frac{10}{3} ye^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + 5y^2)^2}} dy.$$

3. Обчислити з точністю до двох знаків після коми значення частинних похідних $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для даної функції $f(x,y,z) = \sqrt{xy} \cos z$ у точці $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3} \right)$.

Рішення. Знаходимо частинні похідні даної функції, потім обчислюємо їх значення в точці $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3} \right)$:

$$f'_x(x,y,z) = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \cos z\,, \ \ f'_x(M_0) = 0{,}25\,;$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \cos z\,, \ \ f'_y(M_0) = 0{,}25\,;$$

$$f'_z(x,y,z) = -\sqrt{xy}\,\sin z\,, \ \ f'_z(M_0) = -0{,}86\,.$$

4. Знайти повний диференціал функції $z = arctg\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Рішення. Знаходимо частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x+y)}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{\sqrt{x}}{2(x+y)\sqrt{y}}\,,$$

тоді
$$dz = \frac{1}{2(x+y)}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}dx - \sqrt{\frac{x}{y}}dy\right).$$

5. Обчислити з точністю до двох знаків після коми значення похідної складної функції

$$z = arccos\frac{x^2}{y}\,, \text{ де } x = 1 + ln\,t\,,\ \ y = -2e^{-t^2+1}\,, \text{ коли } t_0 = 1\,.$$

Рішення. Використавши формулу $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{2x}{y} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot (-2e^{-t^2+1}) \cdot (-2t)\,.$$

Коли $t_0 = 1$ одержуємо, що $x = 1, y = -2$, тоді

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0=1} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}29\,.$$

6. Обчислити з точністю до двох знаків після коми значення частинних похідних функції *z(x,y)*, заданої рівнянням $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz = 3 - z^2$, у точці *M(0,1,–1)*.

Рішення. У даному випадку $F(x,y,z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3$, тому $F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z$; $F'_y = -9y^2 + 2xz$; $F'_z = 2xy - 4x + 2z$.

Використовуючи формули $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$ маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Обчислюємо значення $\frac{\partial z}{\partial x}$ й $\frac{\partial z}{\partial y}$ у точці $M(0,1,-1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -4{,}5.$$

7. Знайти другі частинні похідні функції $z = e^{x^2 - y^3}$. Переконатися в тім, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Рішення. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 - y^3} \cdot 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 - y^3} \cdot (-3y^2)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2 - y^3} \cdot 4x^2 + e^{x^2 - y^3} \cdot 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2 - y^3} \cdot 9y^4 + e^{x^2 - y^3} \cdot 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2 - y^3} \cdot 2x \cdot (-3y^2) = -6xy^2 e^{x^2 - y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2 - y^3} \cdot 2x \cdot (-3y^2) = -6xy^2 e^{x^2 - y^3}.$$

Змішані частинні похідні z''_{xy} і z''_{yx} рівні.

8. Перевірити, чи задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ функція $z = arctg\frac{y}{x}$.

Рішення. Знаходимо z'_y, z'_x, z''_{xx} і z''_{yy}:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Отримали тотожність. Отже, задовольняє.

9. Дослідити на екстремум функцію $z = xy(x + y - 2)$.

Рішення. Знаходимо перші частинні похідні даної функції:

$$z'_x = 2xy + y^2 - 2y\ ;\ \ z'_y = x^2 + 2xy - 2x\ .$$

Дорівнявши їх нулю, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(2x + y - 2) = 0, \\ x(x + 2y - 2) = 0, \end{cases}$$

з якої визначаємо стаціонарні точки даної функції:

$$M_1(0;0),\ M_2(2;0),\ M_3(0;2),\ M_4(\frac{2}{3};\frac{2}{3}).$$

Знайдемо другі частинні похідні:

$$A = z''_{xx} = 2y\ ;\ B = z''_{xy} = 2x + 2y - 2\ ;\ C = z''_{yy} = 2x\ .$$

Складемо величину $\Delta = AC - B^2 = 4xy - (2x + 2y - 2)^2$.

Для точки M_1 : $\Delta = -4 < 0$, тобто екстремума немає;

для точки M_2 : $\Delta = -4 < 0$, тобто екстремума немає;

для точки M_3 : $\Delta = -4 < 0$, тобто екстремума немає;

для точки M_4 : $\Delta = \frac{12}{9} > 0$, $A = \frac{4}{3} > 0$, тобто маємо точку мінімуму функції, у якій $z_{min} = z\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$.

10. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ в області *D*, обмеженої лініями *x = 0, y = 0, x + y – 1 = 0.*

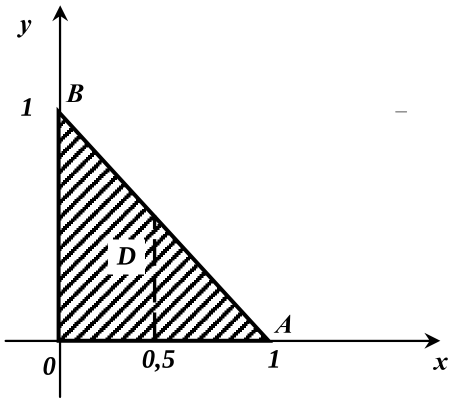

Рис.6

Рішення. Накреслимо дану область *D* (див. рис. 6). Це трикутник *BOA*.

З'ясуємо, чи існують стаціонарні точки, що лежать усередині даної області *D*.
Маємо:

$$\begin{cases} z'_x = y + 3 = 0, \\ z'_y = x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо стаціонарну точку $M(-10,-3)$. Вона лежить поза областю *D*. Отже, при рішенні задачі не враховується.

Досліджуємо значення функції на границі області *D*.

На стороні $OA(y = 0,\ 0 \le x \le 1)$ трикутника функція $z = 3x$. Стаціонарних точок на відрізку *OA* немає, тому що $z' = 3$. У точках *O* і *A* відповідно $z(0,0) = 0$, $z(1,0) = 3$.

На стороні $0B$ $(x = 0,\ 0 \le y \le 1)$ трикутника функція $z = -y^2 + 4y$, $z' = -2y + 4$. Знаходимо стаціонарну точку. З рівняння $-2y + 4 = 0$, одержуємо, що $y = 2$. Таким чином, точка $M_1(0,2)$ не належить області *D*. Значення функції у точці *B* $z(0,1) = 3$.

На стороні AB: $x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$, $z = -2x^2 + 2x + 3$ тоді $z' = -4x + 2$ і з $z' = 0$ випливає $x = 0{,}5$, тобто стаціонарна точка $M_2(0{,}5,0{,}5)$ належить границі області *D*. Значення функції в ній $z(0{,}5,0{,}5) = 3{,}5$.

Порівнюючи всі отримані значення функції, знаходимо її найбільше і найменше значення.

Отже: $z_{найб} = z(0{,}5,0{,}5) = 3{,}5$; $z_{найм} = z(0{,}0) = 0$.

Завдання до теми 10

$\boxed{1}$ Побудувати область визначення функцій

1. $z = 3xy : (2x^2 - 5y)$
2. $z = arcsin(x - y)$
3. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$
4. $z = ln(x^2 + y^2 - 4)$
5. $z = 2 : (6 - x^2 - y^2)$
6. $z = \sqrt{2x^2 - 5y^2}$
7. $z = arccos(x + y)$
8. $z = 3x + y : (2 - x + y)$
9. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
10. $z = ln(3 - x^2 + y^2)$
11. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$
12. $z = 4xy : (x - 3y^2 + 1)$
13. $z = \sqrt{xy} : (x^2 + y^2)$
14. $z = arcsin(x : y)$
15. $z = ln(y^2 - x^2)$
16. $z = x^3 y : (3 + x^2 - y)$
17. $z = arccos(x + 2y)$
18. $z = arcsin(2x - y)$
19. $z = ln(8 - x^2 - y^2)$
20. $z = \sqrt{3 - x^2 + 2y^2}$
21. $z = 1 : \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$
22. $z = 4x + y : (2x - 5y)$
23. $z = \sqrt{3x - 2y} : (4 + x)$
24. $z = 7x^3 y : \sqrt{x - 4y}$
25. $z = 5 : (3 - x^2 - y^2)$
26. $z = \sqrt[4]{x^2 + 2y^2 - 4}$
27. $z = lg(2x - y + 3)$
28. $z = 4xy : (x^2 - y^2)$
29. $z = 1 : (2x^2 + 3y^2 - 6)$
30. $z = \sqrt{1 - x^2 + y}$

$\boxed{2}$ Знайти частинні похідні і частинні диференціали наступних функцій

1. $z = ln(y^2 - e^{-x})$
2. $z = arcsin\sqrt{xy}$
3. $z = arctg(x^2 + y^3)$
4. $z = cos(x^3 - 2xy)$
5. $z = sin\sqrt{y : x^3}$
6. $z = tg(x^3 + y^2)$
7. $z = ctg\sqrt{xy^3}$
8. $z = e^{-x^2 + y^2}$
9. $z = ln(3x^2 - y^4)$
10. $z = arccos(y : x)$

11. $z = arcctg(xy^2)$

12. $z = cos\sqrt{x^2 + y^2}$

13. $z = sin\sqrt{x - y^3}$

14. $z = tg(x^3 y^4)$

15. $z = ctg(3x - 2y)$

16. $z = e^{2x^2 - y^3}$

17. $z = ln(\sqrt{xy} - 1)$

18. $z = arcsin(2x^3 y)$

19. $z = arctg(x^2 : y^3)$

20. $z = cos(x - \sqrt{xy^3})$

21. $z = sin((x + y) : (x - y))$

22. $z = tg((2x - y^2) : x)$

23. $z = ctg\sqrt{x : (x - y)}$

24. $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^3}}$

25. $z = ln(3x^2 - y^2)$

26. $z = arccos(x - y^2)$

27. $z = arctg(x^3 : y)$

28. $z = cos((x - y) : (x^2 + y^2))$

29. $z = sin\sqrt{y : (x + y)}$

30. $z = e^{-\sqrt{x} + y^3}$

$\boxed{3}$ Обчислити з точністю до 0,001 значення частинних похідних від поданої функції у точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

1. $f(x,y,z) = z : \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_o(0,-1,-1)$
2. $f(x,y,z) = ln(x + y : (2z))$, $M_o(1,2,1)$
3. $f(x,y,z) = (sin x)^{yz}$, $M_o(\frac{\pi}{6},1,2)$
4. $f(x,y,z) = ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$, $M_o(2,1,0)$
5. $f(x,y,z) = x : \sqrt{y^2 z^2}$, $M_o(1,0,1)$
6. $f(x,y,z) = ln\,cos(x^2 y^2 + z)$, $M_o(0,0,\frac{\pi}{4})$
7. $f(x,y,z) = 27 \cdot \sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$, $M_o(3,4,2)$
8. $f(x,y,z) = arctg(xy^2 + z)$, $M_o(2,1,0)$
9. $f(x,y,z) = arcsin(x^2 : y - z)$, $M_o(2,5,0)$
10. $f(x,y,z) = \sqrt{x} \cdot sin(y : z)$, $M_o(4,0,2)$
11. $f(x,y,z) = y : \sqrt{x^2 + z^2}$, $M_o(-1,1,0)$
12. $f(x,y,z) = arctg(xz : y^2)$, $M_o(2,1,1)$
13. $f(x,y,z) = ln\,sin(x - 2y + z : 4)$, $M_o(1,1/2,\pi)$

14. $f(x,y,z) = y : x + z : y - x : z,$ $M_o(1,1,2)$

15. $f(x,y,z) = 1 : \sqrt{x^2 + y^2 - z^2},$ $M_o(1,2,2)$

16. $f(x,y,z) = ln(x - y^2) - \sqrt{x^2 - z^2},$ $M_o(5,1,3)$

17. $f(x,y,z) = \sqrt{z} \cdot x^y,$ $M_o(1,2,4)$

18. $f(x,y,z) = -z : \sqrt{x^2 + y^2},$ $M_o(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$

19. $f(x,y,z) = ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z),$ $M_o(2,1,8)$

20. $f(x,y,z) = z : (x^4 + y^2),$ $M_o(2,3,25)$

21. $f(x,y,z) = 8 \cdot \sqrt[5]{x^3 + y^2 + z},$ $M_o(3,2,1)$

22. $f(x,y,z) = ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z),$ $M_o(1,1,1)$

23. $f(x,y,z) = -2x : \sqrt{y^2 + z^2},$ $M_o(3,0,1)$

24. $f(x,y,z) = z \cdot e^{-0,5(x^2+y^2)},$ $M_o(0,0,1)$

25. $f(x,y,z) = (sin(x - y)) : z,$ $M_o(\pi/2, \pi/3, \sqrt{3})$

26. $f(x,y,z) = \sqrt{z} \cdot ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$ $M_o(4,1,4)$

27. $f(x,y,z) = x \cdot z : (x - y),$ $M_o(3,1,1)$

28. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z},$ $M_o(3,4,\pi/2)$

29. $f(x,y,z) = z \cdot e^{-xy},$ $M_o(0,1,1)$

30. $f(x,y,z) = arcsin(x \cdot \sqrt{y}) - yz^2,$ $M_o(0,4,1)$

$\boxed{4}$ Знайти повні диференціал функції

1. $z = 2x^3y - 4xy^5$
2. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$
3. $z = arctgx + \sqrt{y}$
4. $z = 7x - x^3y^2 + y^4$
5. $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$
6. $z = e^{y-x} - ln(xy+2)$
7. $z = ln(3x^2 - 2y^2)$
8. $z = x^2y \cdot \sin x - 3y$
9. $z = arcsin(x + y)$
10. $z = arcsin(xy) - 3xy$
11. $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$
12. $z = cos(x^2 - y^2) + x^3$
13. $z = e^{x+y-4}$
14. $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$
15. $z = tg((x + y) : (x - y))$
16. $z = arctg(2x - y)$
17. $z = ctg(y : x)$
18. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$

19. $z = xy^4 - 3x^2y + 1$ 20. $z = cos(3x + y) - x^2$

21. $z = 2x^2y^2 + x^3 + 1$ 22. $z = ln(x + xy - y^2)$

23. $z = arcsin((x + y) : x)$ 24. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$

25. $z = arctg(x - y)$ 26. $z = y^2 - 3xy - x^4$

27. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$ 28. $z = ln(y^2 - x^2 + 3)$

29. $z = arccos(x + y)$ 30. $z = arctg(2x - y)$

$\boxed{5}$ Обчислити з точністю до 0,001 у точці, де $t = t_0$, значення похідної складної функції $u = u(x,y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$

1. $u = e^{x-2y}$,	$x = sin\,t$,	$y = t^3$,	$t_o = 0$
2. $u = ln(e^x + e^{-y})$,	$x = t^2$,	$y = t^3$,	$t_o = -1$
3. $u = y^x$,	$x = ln(t-1)$,	$y = e^{0,5t}$,	$t_o = 2$
4. $u = e^{y-2x+2}$,	$x = sin\,t$,	$y = cos\,t$,	$t_o = \pi/2$
5. $u = x^2 \cdot e^y$,	$x = cos\,t$,	$y = sin\,t$,	$t_o = \pi$
6. $u = ln(e^x + e^y)$,	$x = t^2$,	$y = t^3$,	$t_o = 1$
7. $u = x^y$,	$x = e^t$	$y = ln\,t$,	$t_o = 1$
8. $u = e^{y-2x}$,	$x = sin\,t$,	$y = t^3$,	$t_o = 0$
9. $u = x^2 \cdot e^{-y}$,	$x = sin\,t$,	$y = sin^2 t$,	$t_o = \pi/2$
10. $u = ln(e^{-x} + e^y)$,	$x = t^2$,	$y = t^3$,	$t_o = -1$
11. $u = e^{y-2x-1}$,	$x = cos\,t$,	$y = sin\,t$,	$t_o = \pi/2$
12. $u = arcsin(x : y)$,	$x = sin\,t$,	$y = cos\,t$,	$t_o = \pi$
13. $u = arccos(2x : y)$,	$x = sin\,t$,	$y = cos\,t$,	$t_o = \pi$
14. $u = x^2 : (y+1)$,	$x = 1 - 2t$,	$y = arctgt$,	$t_o = \pi$
15. $u = x : y$,	$x = e^t$,	$y = 2 - e^{2t}$,	$t_o = 0$
16. $u = ln(e^{-x} + e^{-2y})$,	$x = t^2$,	$y = \frac{1}{3}t^3$,	$t_o = 1$
17. $u = \sqrt{x + y^2 + 3}$,	$x = ln\,t$,	$y = t^2$,	$t_o = 1$
18. $u = arcsin(x^2 : y)$,	$x = sin\,t$,	$y = cos\,t$,	$t_o = \pi$
19. $u = y^2 : x$,	$x = 1 - 2t$,	$y = 1 + arctgt$,	$t_o = 0$

20. $u = y : x - x : y,$ $x = \sin t,$ $y = \cos t,$ $t_o = \pi/4$

21. $u = \sqrt{x^2 + y + 3},$ $x = \ln t,$ $y = t^2,$ $t_o = 1$

22. $u = src\sin(x : (2y)),$ $x = \sin t,$ $y = \cos t,$ $t_o = \pi$

23. $u = x : y - y : x,$ $x = \sin 2t,$ $y = tg^2 t,$ $t_o = \pi/4$

24. $u = \sqrt{x + y + 3},$ $x = \ln t,$ $y = t^2,$ $t_o = 1$

25. $u = y : x,$ $x = e^t,$ $y = 1 - e^{2t},$ $t_o = 0$

26. $u = \arcsin(2x : y),$ $x = \sin t,$ $y = \cos t,$ $t_o = \pi$

27. $u = \ln(e^{2x} + e^y),$ $x = t^2,$ $y = t^4,$ $t_o = 1$

28. $u = arctg(x + y),$ $x = t^2 + 2,$ $y = 4 - t^2,$ $t_o = 1$

29. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3},$ $x = \ln t,$ $y = t^3,$ $t_o = 1$

30. $u = arctg(xy),$ $x = t + 3,$ $y = e^t,$ $t_o = 0$

$\boxed{6}$ Обчислити з точністю до 0,001 значення частинних похідних від уявної функції в точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4,$ $M_o(2,1,1)$
2. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2,$ $M_o(-1,0,1)$
3. $3x + 2y + z = xz + 5,$ $M_o(2,1,-1)$
4. $e^z + x + 2y + z = 4,$ $M_o(1,1,0)$
5. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0,$ $M_o(1,1,-1)$
6. $z^3 + 3xyz + 3y = 7,$ $M_o(1,1,1)$
7. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1{,}5,$ $M_o(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4)$
8. $e^{z-1} = \cos x \cdot \cos y + 1,$ $M_o(0, \pi/2, 1)$
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0,$ $M_o(1,2,1)$
10. $xy = z^2 - 1,$ $M_o(0,1,-1)$
11. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2,$ $M_o(1,1,1)$
12. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5,$ $M_o(0,2,1)$
13. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi/2,$ $M_o(0, \pi/2, \pi)$

14. $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z=4,$ $M_o(2,1,2)$

15. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z+2=0,$ $M_o(1,1,1)$

16. $x+y+z+2=xyz,$ $M_o(2,-1,-1)$

17. $x^2+y^2+z^2-2xz-2=0,$ $M_o(0,1,-1)$

18. $e^z-xyz-x+1=0,$ $M_o(2,1,0)$

19. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y-15=0,$ $M_o(1,-1,2)$

20. $x^2-2xy-3y^2+6x-2y+z^2-8z+20=0,$ $M_o(0,-2,2)$

21. $x^2+y^2+z^2=y-z+3,$ $M_o(1,2,0)$

22. $x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z=0,$ $M_o(1,-1,1)$

23. $x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y+12=0,$ $M_o(0,1,-1)$

24. $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3,$ $M_o(4,3,1)$

25. $x^2+2y^2+3z^2=59,$ $M_o(3,1,4)$

26. $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=17,$ $M_o(-2,-1,2)$

27. $x^3+3xyz-z^3=27,$ $M_o(3,1,3)$

28. $\ln z=x+2y-z+\ln 3,$ $M_o(1,1,3)$

29. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+6=0,$ $M_o(2,1,1)$

30. $z^2=xy-z+x^2-4,$ $M_o(2,1,1)$

$\boxed{7}$ Знайти частинні похідні другого порядку зазначеної функції і перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

1. $z=e^{x^2-y^2}$	2. $z=e^{2x^2+y^2}$	3. $z=tg(x:y)$
4. $z=tg\sqrt{xy}$	5. $z=\sin(x^2-y)$	6. $z=\sin\sqrt{x^3y}$
7. $z=\arcsin(x-y)$	8. $z=\arccos(4x-y)$	9. $z=arctg(x-3y)$
10. $z=arctg(2x-y)$	11. $z=e^{\sqrt{x+y}}$	12. $z=\ln(3x^2-2y^2)$
13. $z=\arccos(x-5y)$	14. $z=ctg(y:x)$	15. $z=\cos(3x^2-y^3)$
16. $z=\cos(x^2y^2-5)$	17. $z=\ln(5x^2-3y^4)$	18. $z=\arcsin(x-2y)$

19. $z = ctg(x+y)$ 20. $z = arctg(5x+2y)$ 21. $z = ln(-3xy-4)$

22. $z = ln(4x^2 - 5y^3)$ 23. $z = cos(xy^2)$ 24. $z = arcsin(4x+y)$

25. $z = arctg(x+y)$ 26. $z = sin\sqrt{xy}$ 27. $z = arccos(2x+y)$

28. $z = arctg(3x+2y)$ 29. $z = arcsin(x-4y)$ 30. $z = ln(3x+4y)$

$\boxed{8}$ Перевірити, чи задовольняє зазначеному рівнянню дана функція u

1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = \frac{y}{x}$

2. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3),$ $\quad u = ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = ln(x^2 + (y+1)^2)$

4. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = (1 + y\,ln\,x)\frac{\partial u}{\partial x},$ $\quad u = x^y$

5. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u,$ $\quad u = \frac{xy}{x+y}$

6. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = e^{xy}$

7. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$ $\quad u = y\sqrt{\frac{y}{x}}$

8. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$ $\quad u = sin^2(x - ay)$

9. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$ $\quad u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-0.5}$

10. $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$ $\quad u = e^{-cos(x+ay)}$

11. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$ $\quad u = (x-y)(y-z)(z-x)$

12. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,$ $\quad u = x\,ln\frac{y}{x}$

13. $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$ $\qquad u=ln(x^2+y^2)$

14. $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0,$ $\qquad u=\frac{y^2}{3x}+arcsin(xy)$

15. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\cdot\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xyu=0,$ $\qquad u=e^{xy}$

16. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$ $\qquad u=arctg\frac{x+y}{1-xy}$

17. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $\qquad u=ln(x^2+y^2+2x+1)$

18. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0,$ $\qquad u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$

19. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1,$ $\qquad u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

20. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u,$ $\qquad u=(x^2+y^2)tg\frac{x}{y}$

21. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $\qquad u=sin(x+3y):e^{x+3y}$

22. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $\qquad u=xe^{\frac{y}{x}}$

23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $\qquad u=arctg\frac{y}{x}$

24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $\qquad u=ln(x^2-y^2)$

25. $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0,$ $\qquad u=(x+e^{-y})$

26. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$ $\qquad u=arcsin\frac{x}{x+y}$

27. $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2},$ $\qquad u=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$

28. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x+y}{x-y},$ $\quad u=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

29. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{u},$ $\quad u=\sqrt{2xy+y^2}$

30. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,$ $\quad u=arctg\dfrac{x}{y}$

9 Дослідити на екстремум наступні функції

1. $z=y\cdot\sqrt{x}-2y^2-x+14y$
2. $z=x^3+8y^3-6xy+5$
3. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$
4. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$
5. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$
6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$
7. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$
8. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$
9. $z=4(x-y)-x^2-y^2$
10. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$
11. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$
12. $z=(x-2)^2+2y^2-10$
13. $z=(x-5)^2+y^2+1$
14. $z=x^3+y^3-3xy$
15. $z=2xy-2x^2-4y^2$
16. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$
17. $z=2xy-5x^2-3y^2+2$
18. $z=xy(12-x-y)$
19. $z=xy-x^2-y^2+9$
20. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$
21. $z=x^3+8y^3-6xy+1$
22. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$
23. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$
24. $z=xy(6-x-y)$
25. $z=x^2+y^2-xy+x+y$
26. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$
27. $z=(x-1)^2+2y^2$
28. $z=xy-3x^2-2y^2$
29. $z=x^2+3(y+2)^2+1$
30. $z=2(x+y)-x^2-y^2-2$

10 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=z(x,y)$ в області D, обмеженої поданими лініями

1. $z=3x+y-xy$ $\quad D: y=x, y=4, x=0$
2. $z=xy-x-2y$ $\quad D: x=3, y=x, y=0$

3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$

4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$

5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\quad D: x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3$

6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$

7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 6, y = 0$

8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$

9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$

10. $z = x^2 + 2xy - 10$ $\quad D: y = 0, y = x^2 - 4$

11. $z = xy - 2x - y$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

12. $z = 0{,}5 \cdot x^2 - xy$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y = 1$

14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ $\quad D: y = \sqrt{9 - 2{,}5 \cdot x^2}, y = 0$

15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ $\quad D: x = -3, x + y + 1 = 0, y = 0$

16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ $\quad D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$

17. $z = 2x^2 + 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$ $\quad D: y = 2x, y = 2, x = 0$

18. $z = x^2 - 2xy + 2{,}5y^2 - 2x$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

19. $z = xy - 3x - 2y$ $\quad D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$

20. $z = x^2 + xy - 2$ $\quad D: y = 4x^2 - 4, y = 0$

21. $z = x^2 y \cdot (4 - x - y)$ $\quad D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$

22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\quad D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$

23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ $\quad D: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0$

24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ $\quad D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$

26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ $\quad D: y = x + 2, y = 0, x = 2$

27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$ $\quad D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$

28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ $\quad D: x = -1, x = 1, y = \pm 1$

29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ $\quad D: x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0$

30. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y = 6$

Список літератури

1. Станішевський С.О., Печеніжський Ю.Є., Тихонович О.Ю. Посібник для розв’язання задач з вищої математики. – Харків.: ХНАМГ, 2003. – 125 с.

2. Печеніжський Ю. Є, Станішевський С. О. і ін. Індивідуальні завдання з вищої математики. Частина 2. – Харків: ХНАМГ, 2007. – 76 с.

3. Печеніжський Ю. Є, Станішевський С. О. і ін. Індивідуальні завдання з вищої математики. Частина 3. – Харків: ХНАМГ, 2007. – 64 с.

4. Станішевський С. О. Вища математика. Конспект лекцій. Модуль 1. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 151 с.

5. Станішевський С. О. Вища математика. Конспект лекцій. Модуль 2. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 107 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

СТАНІШЕВСЬКИЙ Степан Олександрович,
ПЕЧЕНІЖСЬКИЙ Юрій Євгенович

Завдання з вищої математики (модуль 2) і приклади їх розв'язання (для самостійної роботи студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2011, поз. 158 М

Підп. до друку 28.03.2011 р. Формат 60 х 84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 7,3
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №731 від 19.12.2001