МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ (ЧАСТИНА 2)

з дисципліни

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

(для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»)

Харків ХНАМГ 2010

Методичні вказівки до проведення практичних занять і виконання самостійної роботи (частина 2) з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.030504 «Економіка підприємства») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: М. І. Самойленко, О. М. Штельма, Г. В. Білогурова. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 62 с.

Укладачі: М. І. Самойленко,
О. М. Штельма,
Г. В. Білогурова

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу й узгоджені з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів економічних спеціальностей.

Рецензент: доцент фізико-математичних наук О. Б. Костенко

Затверджено кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 1 від 27.08.2009 р.

Задача лінійного програмування і методи її розв'язування

Транспортна задача

Постановка, методи розв'язання та аналізу

Транспортна задача є однією з найпоширеніших спеціальних задач лінійного програмування. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення надмірно дальніх, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час просування товарів, зменшує витрати підприємств, пов'язані із здійсненням процесів забезпечення сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням і т.д.

У загальному вигляді транспортну задачу можна подати наступним чином: у m пунктах виробництва $A_1, A_2, .., A_m$ роблять деякий однорідний продукт у кількостях, відповідно, $a_1, a_2 .... a_m$. Цей продукт споживають у n пунктах $B_1, ..., B_n$ у кількостях, відповідно, $b_1, b_2 ..... b_n$. Припустимо, що з кожного пункту виробництва можливе транспортування продукту в будь-який пункт споживання. Транспортні витрати з перевезення з пункту A_i у пункт B_j одиниці продукції рівні c_{ij} ($i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$).

Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, при якому запити всіх споживачів повністю задоволені, весь продукт із пунктів виробництва вивезений і сумарні транспортні витрати мінімальні.

У залежності від співвідношення між сумарним обсягом виробництва (запасами вантажу) і сумарним споживанням, транспортні задачі бувають *закриті й відкриті.*

Закрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то транспортна задача називається закритою.

Відкрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва не дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то транспортна задача називається відкритою.

Розглянемо ***закриту транспортну задачу.*** Умови транспортної задачі зручно подати у вигляді :

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**					
		B_1	B_2	…	B_j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Для складання математичної моделі задачі введемо змінні $x_{ij} \geq 0$ ($i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$), що позначають кількість вантажу, перевезеного з і-го пункту виробництва в j-й пункт споживання.

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega} \tag{1.1}$$

$$\Omega : \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (\mathrm{i} = 1,\ 2,\ ..., \mathrm{m};) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (\mathrm{j} = 1,\ 2,\ ..., \mathrm{n};) \\ x_{ij} \geq 0; i = \overline{1, \mathrm{m}},\ j = \overline{1, \mathrm{n}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Умови (1.2) гарантують повне вивезення продукту з усіх пунктів виробництва й повне задоволення попиту у всіх пунктах споживання.

Транспортна задача являє собою задачу лінійного программування із ($m \times n$) числом змінних x_{ij}, і ($m+n$) числом обмежень-рівностей.

Змінні x_{ij} нумерують за допомогою двох індексів і тому записують у вигляді матриці:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n} \\ . & . & . & . \\ x_{m1} & x_{m2} & . & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрицю X називають планом перевезень транспортної задачі, а змінні x_{ij} — перевезеннями.

Матриця C = || c_{ij}|| називається матрицею транспортних витрат. Оптимальним рішенням задачі є матриця

$$X_{opt} = (x_{ij})_{m \times n},$$

яка задовольняє системі обмежень і надає мінімум цільовій функції. Існують ручні й машинні методи рішення транспортної задачі. До ручних відносяться розподільний метод, метод потенціалів, до машинних – угорський метод, метод диференціальних стрічок.

Розв’язання транспортної задачі за допомогою ручних методів складається з наступних етапів:

- визначення початкового опорного рішення задачі;
- перевірка цього рішення на оптимальність;
- перехід від одного опорного рішення до другого.

Розглянемо рішення транспортної задачі на прикладі.

Приклад 1

Три постачальники A_1, A_2, A_3 мають запаси продукції в кількостях 60, 50, 50 т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3, B_4 повинні отримати цю продукцію в кількостях 40, 40, 30, 50 т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення

постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{(грош.од.)}$$

Розв'язання

Позначимо через x_{ij} – кількість продукції, яку щомісячно слід доставляти на *j–й* завод з *i–го* складу. Тоді математична модель задачі має вигляд

$$L(X) = 3x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23} + 4x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + \\ + 3x_{33} + 4x_{34} \to \min_{x_{ij} \in \Omega},$$

$$\Omega: \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

*1- й крок***.** *1-й етап.* Найбільш поширеним методом побудови вихідного опорного плану є метод північно-західного кута. Він полягає в послідовному розподілі продукції споживачам з урахуванням можливостей постачальників, починаючи з лівого верхнього квадрата (клітинки) й закінчуючи правим нижнім квадратом (клітинкою).

Використовуючи метод північно-західного кута, знайдемо опорне рішення транспортної задачі. Згідно з цим методом заповнюємо таблицю, починаючи з лівого верхнього кута. Порівнюємо запас вантажу в першому пункті відправлення 60 од. з потребою першого пункту призначення 40 од. Вибираємо меншу величину (40) і записуємо її в даний квадрат (табл.1). Перший постачальник, маючи 60 од. вантажу, відправляє першому споживачеві 40 од.

вантажу. Оскільки першому споживачеві не потрібен більше груз, то з подальшого розгляду виключаємо перший стовпець.

Таблиця 1

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3	2	2
A_2	**50**	3	4	2	4
A_3	**50**	2	4	3	4

Тепер на першому пункті відправлення залишилося 60-40=20 од. продукції. Порівнюємо залишок 20 од. і потребу 40 од., які перший постачальник поставляє другому споживачеві. Вибираємо меншу величину (20) і записуємо її в сусідню клітинку (табл.2). Оскільки весь запас в першому пункті відправлення вичерпаний, то з подальшого розгляду виключаємо перший рядок і переходимо в сусідню клітинку, яка знаходиться нижче заповненої.

Таблиця 2

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3 **20**	2	2
A_2	**50**	3	4	2	4
A_3	**50**	2	4	3	4

У новій клітинці другий постачальник залишає 20 од. вантажу для другого споживача і другий стовпець заповнений, оскільки другому споживачеві не потрібен більше вантаж (див табл.3).

Таблиця 3

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3 **20**	2	2
A_2	**50**	3	4 **20**	2	4
A_3	**50**	2	4	3	4

Тепер на другому пункті відправлення залишилося 50-20 = 30 од. продукції, які другий постачальник віддає третьому споживачеві. Другий рядок і третій стовпець з подальшого розгляду виключаємо, оскільки запаси другого постачальника вичерпані і потреби третього споживача задоволені.

Остання права нижня клітинка заповнюється механічно – в неї записується залишкова потреба останнього пункту призначення або залишковий запас останнього пункту відправлення. В умовах задачі це величина 50. Всі результати із знаходження початкового опорного плану наведені в табл.4. Вони в таблиці виділені жирним шрифтом.

Таблиця 4

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3 **20**	2	2 **0**
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4
A_3	**50**	2	4	3	4 **50**

Таким чином, ми одержали перший початковий опорний план. $X_0=\begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$.

Обчислюємо значення цільової функції: $L(X)=3\cdot 40+3\cdot 20+4\cdot 20+2\cdot 30+4\cdot 50=520$. Це значення буде використано на подальших кроках для контролю просування до оптимуму. Значення цільової функції повинне послідовно зменшуватися з кожним кроком.

Тепер необхідно перевірити умову *невиродженості* . План

$$X=(x_{ij})_{m\times n},(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}),$$

є невиродженим, якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює $m+n-1$, а якщо менше – то виродженим.

Число зайнятих кліток в таблиці дорівнює 5, $m+n-1=3+4-1=6$,тобто умова *невиродженості* не виконана. Зробимо його невиродженим, помістивши базисні нулі в клітку з координатами (i, j):(1,4).

2- й етап. Знайдений опорний план перевіряємо на оптимальність методом потенціалів за наступним критерієм: якщо опорне рішення транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система дійсних чисел α_i $(i=\overline{1,m})$ і β_j $(j=\overline{1,n})$ задовольняючих умовам:

$\beta_j+\alpha_i=c_{ij}$ при $x_{ij}>0$ (для зайнятих кліток);

$\beta_j+\alpha_i\le c_{ij}$ при $x_{ij}=0$ (для вільних кліток).

Числа α_i $(i=\overline{1,m})$ і β_j $(j=\overline{1,n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення. У зв'язку з цим знаходимо потенціали пунктів відправлення і призначення з системи:

$\beta_1+\alpha_1=3$, $\beta_2+\alpha_2=4$, $\beta_4+\alpha_1=2$,

$\beta_2+\alpha_1=3$, $\beta_3+\alpha_2=2$, $\beta_4+\alpha_3=4$,

що містить шість рівнянь з сім'ю невідомими. Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$. Записуємо знайдені потенціали в табл.5.

*3-й етап.Ви*значимо величину $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$, яку називають *оцінкою вільних кліток*. Якщо всі *оцінки вільних кліток* $\Delta_{ij} \le 0$, то опорне рішення є оптимальним. Якщо хоч би одна з оцінок $\Delta_{ij} > 0$, то опорне рішення не є оптимальним і необхідно перейти до нового опорного рішення .

Таблиця 5

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3 - **40**	3 **20**	2	2 +	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 +	4	3	4 - **50**	2
β_j		3	3	1	2	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки: $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{21} = 1, \Delta_{24} = -1$ $\Delta_{31} = 3$, $\Delta_{32} = 1$, $\Delta_{33} = 0$. Оскільки серед оцінок Δ_{ij} є позитивні, то опорний план X_0 не є оптимальним.

Серед позитивних оцінок вибираємо максимальний тариф : $\Delta_{31} = 3$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл і перерозподіляємо потоки продукції, а саму клітку позначаємо знаком «+». Потім, рухаючись по зайнятих клітках, по черзі відзначаємо їх знаками «–» і «+». При цьому напрям руху може змінюватися тільки під прямим кутом і замикатися на початковій клітці. У результаті побудови циклу у відповідних рядках і стовпцях має бути парна кількість знаків «–», «+». У табл.5 зайняті клітки, складові циклу, виділені сірим фоном.

Потім з вершин зі знаком «–» обирають мінімальний вантаж, його додають до вантажів, що стоять у вершин зі знаком «+», і віднімають від вантажів у вершин із знаком «–». В результаті перерозподілу вантажу отримаємо нове опорне рішення (опорний план).

Найменшим з чисел x_{ij} в «мінусових» клітках є $x_{11} = 40$ (мінімальний вантаж). Ця клітка стає вільною, а решта кліток циклу міняють свої значення таким чином $x_{14} = 0 + 40 = 40;\ x_{31} = 0 + 40 = 40;\ x_{34} = 50 - 40 = 10;$

У результаті виконаних перетворень отримуємо новий опорний план $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані цільова функція стає рівною 400, що менше початкового значення 520.

На цьому закінчується 1-й крок оптимізації. На наступному кроці процедура 1-го кроку повторюється, але без 1-го етапу.

2- й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.6) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо систему рівнянь і вважаючи $\alpha_1 = 0$ вирішуємо її: $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$, $\alpha_3 = 2$.

Таблиця 6

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 **20**	2	2 **40**	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**	2
β_j		0	3	1	20	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки: $\Delta_{11} = -3$, $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{21} = -2$, $\Delta_{24} = -1$, $\Delta_{32} = 1$, $\Delta_{33} = 0$.

Оскільки серед оцінок $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$ є позитивна ($\Delta_{32} = 1$), то опорний план X_1 не є оптимальним.

Позитивна оцінка ($\Delta_{32} = 1$) відповідає клітці (3,2). Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.7 зайняті клітки, складові циклу, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «–» і «+».

Таблиця 7

Пункти відправ.	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 - **20**	2	2 + **40**	
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	
A_3	**50**	2 **40**	4 +	3	4 - **10**	
β_j						

Найменшим з чисел x_{ij} в «мінусових» клітках є $x_{34} = 10$. Дана клітка стає вільною, а решта кліток циклу міняють свої значення таким чином: $x_{12} = 20 - 10 = 10$, $x_{14} = 40 + 10 = 50$, $x_{34} = 0 + 10 = 10$

Новий опорний план $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція мети стає рівною 390, що менше попереднього значення 400.

3- й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.8) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо систему рівнянь і вирішуємо її.

$\beta_2 + \alpha_1 = 3$, $\beta_2 + \alpha_2 = 4$, $\beta_1 + \alpha_3 = 2$,

$\beta_4 + \alpha_1 = 2$, $\beta_3 + \alpha_2 = 2$, $\beta_2 + \alpha_3 = 4$,

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$, $\alpha_3 = 1$. Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{11} = -2$, $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{21} = -1$, $\Delta_{24} = -1$, $\Delta_{33} = -1$, $\Delta_{34} = -1$. Оскільки всі оцінки негативні, то опорний план X_2 є оптимальним.

Таблиця 8

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 **10**	2	2 **50**	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 **40**	4 **10**	3	4	1
β_j		1	3	1	2	

Таким чином, знайдено оптимальний план $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Цільова функція набуває оптимального значення $L(X) = 390$.

Знаходження початкового опорного плану методом мінімальної вартості

Згідно з цим методом вантажі розподіляються насамперед в ті клітки, в яких знаходиться мінімальний тариф перевезень. Далі постачання розподіляються в незайняті клітки з найменшими тарифами з урахуванням запасів, що залишилися у постачальників і задоволення попиту споживачів. Процес розподілу продовжується до тих пір, поки всі вантажі від постачальників не будуть вивезені, а споживачі не будуть задоволені.

Приклад 2

Використовуючи умови ***прикладу 1*** *визначити початковий опорний план методом мінімальної вартості й знайти оптимальне рішення задачі методом потенціалів.*

Розв'язання.

Всі результати по знаходженню початкового опорного плану *методом мінімальної вартості* наведені в табл.9.

Таблиця 9

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3	3	2 **30**	2 **30**
A_2	**50**	3	4 **40**	2	4 **10**
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**

Ми одержали перший початковий опорний план. $X_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & 30 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. Обчислюємо значення цільової функції:

$L(X)=2\cdot 30+2\cdot 30+4\cdot 40+4\cdot 10+2\cdot 40+4\cdot 10=440$.

У наступних таблицях наведено рішення задачі методом *потенціалів.*

Таблиця 10

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3	2 **30** -	2 **30** +	0
A_2	**50**	3	4 **40**	2 +	4 **10** -	2
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**	2
β_j		0	2	2	2	

Таблиця 11

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3	2 **20** -	2 **40** +	0
A_2	**50**	3	4 **40** -	2 **10** +	4	0
A_3	**50**	2 **40**	4 +	3	4 **10** -	2
β_j		0	4	2	2	

$$X_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \qquad L(X)=420$$

Таблиця 12

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 +	2 **10** -	2 **50**	0
A_2	**50**	3	4 **30** -	2 **20** +	4	0
A_3	**50**	2 **40**	4 **10**	3	4	0
β_j		2	4	2	2	

$$X_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \qquad L(X)=400$$

Таблиця 13

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 **10**	2	2 **50**	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 **40**	4 **10**	3	4	1
β_j		1	3	1	2	

Таким чином, знайдено оптимальний план $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Цільова функція набуває оптимального значення $L(X) = 390$

Застосування транспортних задач в економіці

Алгоритм і методи рішення транспортної задачі можуть бути використані при вирішенні деяких економічних задач, що не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу. В цьому випадку величини тарифів c_{ij} мають різний сенс залежно від конкретної економічної задачі, до таких задач відносяться:

- оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. У них c_{ij} є таким економічним показником, як продуктивність. Задача дозволяє визначити, скільки часу і на якій операції повинен використовуватися кожен з верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Оскільки транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з негативним знаком;
- оптимальне призначення або проблема вибору. Є m механізмів, які можуть виконувати n різних робіт з продуктивністю c_{ij}. Задача дозволяє

визначити, який механізм і на яку роботу треба призначити, щоб добитися максимальної продуктивності;

- задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції;
- збільшення продуктивності автомобільного траспорта за рахунок мінімізації порожнього пробігу. Зменшення порожнього пробігу скоротить кількість автомобілів для перевезень, збільшивши їх продуктивність;
- вирішення задач за допомогою методу заборони перевезень. Використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника по якихось причинах не може бути направлений одному із споживачів. Дане обмеження можна врахувати, привласнивши відповідній клітці достатньо велике значення вартості, тим самим в цю клітку не проводитимуться перевезення.

Приклад 3

На підприємстві є три групи верстатів, кожна з яких може виконувати п'ять операцій з обробки деталей (операції можуть виконуватися у будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів, відповідно, дорівнює 100, 250, 180 год. Кожна операція повинна виконуватися, відповідно, 100, 120, 70, 130, 110 год. Визначити, скільки часу на яку операцію потрібно використовувати кожній групі верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожну операцію задана матрицею C

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Скористаємося алгоритмом рішення закритої транспортної задачі, при цьому під тарифом розуміємо продуктивність верстатів по операціях.

Оскільки в задачі потрібно знайти максимум, а згідно алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на (-1).

Таблиця 1

a_i \ b_j		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	α_i
		100	**120**	**70**	**110**	**130**	
1	**100**	-3 **40**	-5	-11	-10 +	-5 **60** -	0
2	**250**	-5 **60**	-10 **120**	-15 **70**	-3	-2	-2
3	**180**	-4	-8	-6	-12 **110** -	-10 **70** +	-5
β_j		-3	-8	-13	-7	-5	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{14} = 3$, $\Delta_{24} = -6$, $\Delta_{25} = -5$, $\Delta_{31} = -4$, $\Delta_{32} = -5$, $\Delta_{33} = -12$.

Оскільки $\Delta_{14} = 3 > 0$, перерозподіливши верстати, отримаємо нову таблицю.

Таблиця 2

a_i \ b_j		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	α_i
		100	**120**	**70**	**110**	**130**	
1	**100**	-3 **40**	-5	-11	-10 **60**	-5	0
2	**250**	-5 **60**	-10 **120**	-15 **70**	-3	-2	-2
3	**180**	-4	-8	-6	-12 **50**	-10 **130**	-2
β_j		-3	-8	-13	-10	-8	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{15} = -3$, $\Delta_{24} = -9$, $\Delta_{25} = -8$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{32} = -2$, $\Delta_{33} = -9$.

Оскільки всі оцінки негативні, то знайдене рішення є оптимальним.

$$X_{опт} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{bmatrix}$$

Першій групі верстатів доцільно виконувати операції 1 і 4 тривалістю 40 і 60 годин відповідно, другій групі – операції 1,2 і 3 тривалістю 60, 120 і 70 годин відповідно, третій групі – операції 4 і 5 тривалістю 50 і 130 годин відповідно, при цьому максимальне число оброблених деталей складе 5170 од.

Цілочислове програмування

У деяких економічних задачах (наприклад, при визначенні оптимального випуску машин, агрегатів, розміщення обладнання) змінні характеризують фізично неподільні одиниці і тому повинні набувати тільки цілих значень. У загальному вигляді математична модель задачі цілочислового програмування матиме вигляд:

$$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \underset{x \in \Omega}{\text{opt}} \qquad (2.1)$$

$$\Omega: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, \ j = \text{int}, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Методи розв’язання задач лінійного програмування не гарантують цілочисловості рішення.

Іноді задачі цілочислового програмування розв’язують приблизно. Відкинувши умову цілочисловості, розв’язують задачу методом лінійного програмування, потім в отриманому оптимальному рішенні округляють змінні до цілих чисел. Такий прийом можна використовувати, якщо значення змінних достатньо великі і погрішністю округлення можна нехтувати. Якщо значення змінних невеликі, то округлення може привести до значної розбіжності з оптимальним рішенням. Існує аналітичний метод розв’язання повністю цілочислових задач - метод Гоморі.

Метод Гоморі

Симплекс-методом знаходять оптимальне рішення задачі. Якщо рішення виходить цілочисловим, то задача вирішена, якщо ні, то до задачі приєднують нове додаткове обмеження, яке називають перетином. Отримують нову задачу, для якої безліч допустимих рішень буде менша, ніж для початкової задачі, але міститиме всі допустимі цілочислові рішення.

Додаткове обмеження відсікає частину області, що містить нецілочислове оптимальне рішення.

Отриману задачу розв’язують методом лінійного програмування. Процес побудови перетинів і розв’язання задачі повторюється до отримання цілочислового оптимального рішення.

Алгоритм метода Гоморі.

1. Відкинувши умову цілочисловості, вирішуємо початкову задачу сімплексним методом. Якщо вийде цілочислове оптимальне рішення, то задача розв’язана. Якщо в оптимальному рішенні не всі змінні цілочислові, то будуємо перетини.

2. Хай в оптимальному рішенні змінна x_t - дробове число, тобто $x_t = f_t$. Розглянемо рівняння, в якому x_t - базисна змінна.

$$x_t + \sum_{j \in J} h_{tj} x_j = f_t \qquad (2.3)$$

де j – безліч індексів вільних змінних. Розіб'ємо всі коефіцієнти і вільний член на два доданки: цілу і дробову частину. Цілою частиною числа *a* називається найбільше ціле число, що не перевищує *a*. Дробовою частиною числа *a* називається різниця між числом *a* і його цілою частиною. Цілу частину числа позначимо [a], а дробову частину – $\{a\}$, тобто $a = [a] + \{a\}$.Тоді рівняння набуде вигляду

$$x_t + \sum_{j \in J} \left(\left| h_{tj} \right| + \{h_{tj}\} \right) x_j = [f_t] + \{f_t\} \qquad (2.4)$$

або

$$x_t + \sum_{j \in J} \left| h_{tj} \right| x_j - [f_t] = \{f_t\} - \sum_{j \in J} \{h_{tj}\} x_j$$

Для будь-якого цілочислового рішення задачі ліва частина рівняння є ціле число, отже, і права частина також буде цілим числом.

Нерівність

$$\{f_t\} - \sum_{j \in J} \{h_{tj}\} x_j \le 0 \qquad (2.5)$$

є перерізом Гоморі.

3. Приєднуючи отриману нерівність до раніше вирішеної задачі, отримаємо нову задачу лінійного програмування, яку знову розв'язуємо сімплексним методом; якщо її оптимальне рішення виявиться цілочисловим, то воно і буде оптимальним рішенням початкової задачі. Якщо знову вийде нецілочислове рішення, то будуємо новий перетин, і так далі.

Зауваження. Якщо в оптимальному рішенні декілька змінних нецілочислові, то перетин будують по базисній змінній, що має найбільшу дробову частину.

Розглянемо алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування на конкретному прикладі.

Приклад 4

Для поліпшення фінансового положення фірма ухвалила рішення про збільшення випуску конкурентоздатної продукції, для чого в одному з цехів необхідно встановити додаткове обладнання, що вимагає 19/3 м^2 площі. На придбання додаткового обладнання фірма виділила 10 тис. грош. од., при цьому вона може купити обладнання двох видів. Придбання одного комплекту обладнання 1-го виду коштує 1 тис. грош.од., 2-го виду – 3 тис. грош.од. Придбання одного комплекту обладнання 1-го виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 грош.од., а одного комплекту обладнання 2-го виду – на 4 грош. од. Знаючи, що для установки одного комплекту обладнання 1-го виду вимагається 2 м^2 площі, а для обладнання 2-го виду – 1 м^2 площі, визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язання

Позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2)$ – кількість комплектів додаткового обладнання 1-го та 2-го виду. Математична модель задачі матиме вигляд:

$$L\left(\overline{x}\right) = 2x_1 + 4x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_j \ge 0, x_j = \text{int}, j = 1,4 \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми. Введемо дві додаткові змінні x_3, x_4.

$$L\left(\bar{x}\right) = 2x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0, x_j = \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Розв'язання задачі сімплексним методом наведено в наступних таблицях.

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	$19/3$	2	1	1	0	19/3
x_4	0	10	1	3	0	1	10/3
Δ_j		0	-2	-4	0	0	

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	3	$5/3$	0	1	$-1/3$	9/5
x_2	4	$10/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	10
Δ_j		$40/3$	$-2/3$	0	0	$4/3$	

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	2	$9/5$	1	0	$3/5$	$-1/5$	
x_2	4	$41/15$	0	1	$-1/5$	$2/5$	
Δ_j		$218/15$	0	0	$2/5$	$6/5$	

$\bar{x}_{on}^{T} = \left[9/5 \quad 41/15 \right]$ $\quad L\left(\bar{x}\right) = 218/5$

Рішення нецілочислове, тому будуємо переріз Гоморі.

Знайдемо дробові частини чисел $9/5, 41/15$ (1та 2 рядки 3-го кроку) *:*

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}; \qquad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15};$$

Візьмемо перше рівняння з останньої сімплексної таблиці, оскільки

$\frac{4}{5}=\frac{12}{15}\rangle\frac{11}{15}$;

Отримаємо такий вираз $-\frac{3}{5}x_3-\left(-\frac{1}{5}x_4\right)+\frac{9}{5}\le 0$ (2.6)

Врахуємо дробові частини чисел $3/5, -1/5$:

$$\left\{\frac{3}{5}\right\}=\frac{3}{5}-0=\frac{3}{5};\qquad \left\{-\frac{1}{5}\right\}=\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5};$$

Вираз (2.6) отримає наступний вигляд $-\frac{3}{5}x_3-\frac{4}{5}x_4+\frac{4}{5}\le 0$ або $-\frac{3}{5}x_3-\frac{4}{5}x_4\le-\frac{4}{5}$

Додаткове обмеження цілочисловості для 1-го рядка 3-го кроку:

$$3/5\,x_3+4/5\,x_4\ge 4/5 \quad \text{або} \quad 3/5\,x_3+4/5\,x_4-x_5=4/5.$$

Подальші розрахунки проводимо в наступних таблицях.

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1=2$	$C_2=4$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	$9/5$	1	0	$3/5$	$-1/5$	0	
x_2	4	$41/15$	0	1	$-1/5$	$2/5$	0	
		$4/5$	0	0	$3/5$	$4/5$	-1	
Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1=2$	$C_2=4$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	1	1	0	0	-1	1	
x_2	4	3	0	1	0	$2/3$	$-1/3$	
x_3	0	$4/3$	0	0	1	$4/3$	$-5/3$	
		14	0	0	0	$2/3$	$2/3$	

$$\overline{x}^{T}_{цел}=[1\quad 3]\qquad L(\overline{x})=14$$

Порівнюючи значення цільової функції цілочислового рішення із значенням при оптимальному рішенні, слід відмітити, що знаходження цілочислового рішення приводить до зменшення її екстремального значення.

Необхідно встановити один комплект обладнання 1-го виду й три комплекти обладнання 2-го виду.

Приклад 5. *Знайти оптимальне рішення задачі цілочислового програмування:*

$$L(\overline{x}) = 2x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 7; \\ -x_1 + 2x_2 \le 3; \\ x_j \ge 0, x_j = \text{int}, \ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо задачу сімплексним методом без урахування цілочисловості, для цього приведемо її до канонічного виду:

$$L(\overline{x}) = 2x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 3; \\ x_j \ge 0, x_j = \text{int}, \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 2$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	7	2	-1	1	0	$7/2$
x_4	0	3	-1	2	0	1	
Δ_j		0	-2	-2	0	0	

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 2$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	2	$7/2$	1	$-1/2$	$1/2$	0	
x_4	0	$13/2$	0	$3/2$	$1/2$	1	$13/3$
Δ_j		7	0	-3	1	0	

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	2	$17/3$	1	0	$2/3$	$1/3$	
x_2	2	$13/3$	0	1	$1/3$	$2/3$	
Δ_j		20	0	0	2	2	

$$\bar{x}_{оп}^{T} = \left[17/3 \quad 13/3 \right] \qquad L\left(\bar{x}\right) = 20$$

Рішення нецілочислове, тому будуємо перетин Гоморі.

Знайдемо дробові частини чисел $17/3, 13/3$ (1 та 2 рядки 3-го кроку) *:*

$$\left\{\frac{17}{3}\right\} = \frac{17}{3} - 5 = \frac{2}{3}; \qquad \left\{\frac{13}{3}\right\} = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3};$$

Візьмемо перше рівняння з останньої сімплексної таблиці, оскільки

$\frac{2}{3} \rangle \frac{1}{3}$;

Отримаємо такий вираз $-\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \le 0$ або $-\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \le -\frac{2}{3}$

Додаткове обмеження цілочисловості для 1-го рядка 3-го кроку*:*

$$2/3\, x_3 + 1/3\, x_4 \ge 2/3 \quad \text{або} \quad 2/3\, x_3 + 1/3\, x_4 - x_5 = 2/3$$

Подальші розрахунки проводимо в наступних таблицях.

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	$17/3$	1	0	$2/3$	$1/3$	0	
x_2	2	$13/3$	0	1	$1/3$	$2/3$	0	
		$2/3$	0	0	$2/3$	$1/3$	-1	
Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	5	1	0	0	0	1	
x_2	2	4	0	1	0	$1/2$	$1/2$	
x_3	0	1	0	0	1	$1/2$	$-3/2$	
		18	0	0	0	1	3	

$$\bar{x}_{цел}^{T} = \left[5 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right] \qquad L\left(\bar{x}\right) = 18$$

Це рішення цілочислове, отже початкова задача вирішена.

$$\bar{x}_{цел}^{T} = \left[5 \quad 4 \right] \qquad L\left(\bar{x}\right) = 18$$

Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

Безумовна оптимізація

Нелінійність в економіці виникає, коли результати діяльності підприємств зростають або спадають непропорційно зміні масштабів використання ресурсів, наприклад, через насичення ринку товарами, коли кожний наступний товар продати складніше, ніж попередній.

Задачі нелінійної оптимізації можна поділити на два великих класи:

- безумовна оптимізація (областю припустимих рішень є увесь евклідів простір) ;
- умовна оптимізація (наявність області Ω).

Задачу пошуку безумовного глобального оптимуму можна сформулювати таким чином: знайти оптимум функції $y(\overline{x})$, заданої в n-мірному евклідовому просторі R^n. Аналітичний запис цієї задачі має вигляд

$$y\left(\overline{x}\right) \to \underset{\overline{x}\in \mathbf{R}^n}{\text{opt}}, \qquad (3.1)$$

Необхідні умови точки локального оптимуму мають вигляд

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^* = 0 \ . \qquad (3.2)$$

Точки, в яких виконуються необхідні умови називаються стаціонарними. Стаціонарна точка може бути як точкою екстремуму, так і точкою перегину.

Для визначення достатніх умов існування локального оптимуму розглянемо матрицю Гесса. H – матриця Гесса, що містить другі похідні функції $y(\overline{x})$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix};$$

Достатні умови для точки локального мінімуму полягають у додатній визначеності матриці Гесса H, що обчислена в точці мінімуму.

Зауваження: якщо в деякій точці при виконанні необхідних умов матриця Гесса від′ємно визначена, то ця точка є локальним максимумом.

Класичні й прямі методи оптимізації

Усі методи оптимізації можна поділити на класичні (непрямі, посередні, точні) та розшукові (прямі, безпосередні, наближені, ітераційні).

Класичні методи дозволяють знайти точку оптимуму посереднім шляхом – через розв′язання системи рівнянь. Завдяки цьому отриманий розв′язок є точним, якщо вирішення системи рівнянь здійснювалось не наближеними методами.

Прямими методами вирішують задачу оптимізації шляхом ітераційного наближення до точки мінімуму. Розв′язок отримають наближеним, але із забезпеченням наперед заданої точності. На відміну від класичних існує відносно багато прямих методів.

Метод Ейлера

Метод Ейлера належить до класичних методів. Він базуєтьсь на необхідних та достатніх умовах точки локального мінімуму.

Приклад 6

Методом Ейлера знайти мінімум функції

$$y(\overline{x}) = -x_1^3 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 18x_2 \to \min_{\overline{x}\in R^2}$$

Розв'язання

Задачу розв'язують в три етапи.

- *Перший* – полягає в розв'язанні системи *n* рівнянь:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

  продиктованих необхідними умовами для точки локального мінімуму та знаходженні усіх стаціонарних точок.

- *другий* – у формуванні матриці других часткових похідних для кожної стаціонарної точки;

- *третій* – в перевірці отриманих матриць на додатну визначеність згідно з критерієм Сильвестра та знаходженням точки мінімуму, як цього вимагають достатні умови.

Для визначення характеру квадратичної форми використаємо критерій Сільвестра, який полягає в обчисленні головних визначників матриці квадратичної форми A :

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Якщо всі головні визначники додатні, то квадратична форма додатно визначена;
- якщо всі непарні головні визначники від'ємні, а парні - додатні, то квадратична форма від'ємно визначена;
- у решті випадків - не визначена або напіввизначена.

Перший етап. Для нашого прикладу отримаємо систему рівняннь:

$$\begin{cases} -3x_1^2 + 6x_2 + 6 = 0; \\ 6x_1 + 6x_2 - 18 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є стаціонарні точки $\bar{x}_A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\bar{x}_B^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Другий етап. Визначимо елементи матриць других похідних $H_A^{(0)}$, $H_B^{(0)}$ відповідно в точках $\bar{x}_A^{(0)}$ і $\bar{x}_B^{(0)}$:

в точці $\bar{x}_A^{(0)}$ $\quad h_{11} = \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)_A^{(0)} = (-6x_1)_A^{(0)} = -12;$

в точці $\bar{x}_B^{(0)}$ $\quad h_{11} = \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)_B^{(0)} = (-6x_1)_B^{(0)} = 24;$

$$h_{22} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)_A^{(0)} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)_B^{(0)} = 6;$$

$$h_{12} = h_{21} = \left(\frac{\partial \quad {}^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^{(0)} = \left(\frac{\partial \quad {}^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^{(0)} = 6;$$

Складемо матриці $H_A^{(0)} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$; $H_B^{(0)} = \begin{bmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$.

Третій етап. Згідно з критерієм Сильвестра матриця $H_A^{(0)}$ не визначена; матриця $H_B^{(0)}$ додатно визначена. Отже , $\bar{x}_B^{(0)}$ - точка локального мінімуму (при від'ємній визначеності матриці других похідних в стаціонарній точці має місце максимум функції).

У точці $\bar{x}^* = \bar{x}_B^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ задана функція $y^* = -107,$ що і потрібно знайти.

Метод дихотомії

Метод дихотомії належить до прямих методів одномірної оптимізації.

Метод дихотомії використовується з припущенням, що функція унімодальна (функція з одним ектремумом) і задана на певному відрізку $x^+ \le x \le x^{++}$.

Приклад 7

Визначити мінімум функції $y(\bar{x}) = x^3 + 1/x^3,$ *заданої на інтервалі [0,2; 2] з точністю обчислень* $\varepsilon = 0{,}2$ *методом дихотомії.*

Розв'язання

Метод *дихотомії* - метод послідовного ділення інтервалу навпіл.

На кожному кроці визначаємо значення функції

$$y_1^{(k)} = y\left(x_1^{(k)}\right); \quad y_2^{(k)} = y\left(x_2^{(k)}\right),$$

де k - індекс кроку; $x_1^{(k)} = \tilde{x}^{(k)} - \dfrac{\varepsilon}{2}$ $x_2^{(k)} = \tilde{x}^{(k)} + \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{x}^{(k)} = \dfrac{x^{+(k)} + x^{++(k)}}{2}$; $x^{+(k)}$ -нижня межа інтервалу; $x^{++(k)}$ - верхня межа інтервалу.

Якщо $y_1^{(k)} < y_2^{(k)}$, тоді вихідний інтервал, скорочений вдвоє, матиме нові значення меж $x^{+(k+1)} = x^{+(k)}$; $x^{++(k+1)} = \tilde{x}^{(k)}$. Якщо $y_1^{(k)} > y_2^{(k)}$, тоді новими межами інтервалу будуть $x^{+(k+1)} = \tilde{x}^{(k)}$; $x^{++(k+1)} = x^{++(k)}$.

Довжину одержаного інтервалу $\Delta x^{(k+1)} = x^{++(k+1)} - x^{+(k+1)}$ порівнюють з точністю обчислень ε. Якщо $\Delta x^{(k+1)} > \varepsilon$, то необхідно перейти до наступного кроку мінімізації, аналогічного попередньому. Якщо $\Delta x^{(k+1)} < \varepsilon$,то

$$x^* = \frac{x^{+(k+1)} + x^{+(k+1)}}{2}; \qquad y^* = y(x^*).$$

Початкові значення $x^{+(0)}$ і $x^{++(0)}$ беруть з умови. Усі розрахунки зводять в таблицю, яка має такий вигляд :

k	$x^{+}(k)$	$x^{++}(k)$	$\Delta x(k)$	$\tilde{x}^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$
0	0,2	2	1,8	1,1	1	1,2	2	2,3067
1	0,2	1,1	0,9	0,65	0,55	0,75	6,1769	2,7922
2	0,65	1,1	0,45	0,875	0,775	0,975	2,6138	2,0058
3	0,875	1,1	0,225	0,9875	0,8875	1,0875	2,1296	2,0637
4	0,9875	1,1	0,1125	1,04375				

$$\Delta x^{(4)} = 0{,}1125 < \varepsilon = 0{,}2; \qquad \tilde{x}^{(4)} = 1{,}04375 = x^{*}.$$

Шуканий мінімум функції y^{*}=2,0165.

Метод покоординатного спуску

Метод покоординатного спуску належить до прямих методів багатовимірної оптимізації.

Приклад 8.

Методом покоординатного спуску знайти мінімум функції цілі $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ *з точністю* $\varepsilon = 0.12$, *взяти за початкову точку наближення точку* $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

Розв'язання

У методі покоординатного спуску, який ще зветься методом Гаусса-Зейделя, на кожному кроці змінюється тільки одна змінна. Тому рекурентне співвідношення між попередньою точкою наближення до мінімуму і наступною має вигляд

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \lambda_r^{(k)} \Delta x_r^{(k)}, \qquad (3.3)$$

де $\Delta x_r^{(k)} = -\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}$, а $\lambda_r^{(k)} = \dfrac{1}{\left|\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}$. (3.4)

тобто

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}. \qquad (3.5)$$

Зауважимо, що друга похідна обов′язково повинна братися за модулем, інакше при її від′ємному значенні процес мінімізіції піде у зворотному напрямку.

Варіювання змінних здійснюють послідовно: спочатку – першу, потім – другу і т.д. Цикл, що складається з n послідовних кроків, створює одну ітерацію. Пошук мінімуму закінчують, як тільки на черговому кроці абсолютне значення усіх складових вектора перших часткових похідних функції цілі будуть менш, ніж задана точність обчислень

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^{(k)}\right| < \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (3.6)$$

Нульова ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)} = 3.48 > \varepsilon; \qquad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)} = 14.4$

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ визначається відповідно до (3.5):

$$x_1^{(1)} = 2.4 - \frac{3.48}{14.4} = 2.1589.$$

Тепер формується нова проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

2-й крок. Нове значення змінної x_2 визначається також відповідно виразу (35). Треба пам’ятати, що до відповідних похідних підставляється нова проміжна точка $\bar{x}^{(1.0)}$.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1,0)} = 2.92 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(1,0)} = 13.8; \ x_2^{(1)} = 2.3 - \frac{2.92}{13.8} = 2.088.$$

У результаті нульової ітерації отримали точку $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.088 \end{bmatrix}$.

Необхідно пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті нульової ітерації: $y^{(1)} = -7.882 < -7.129 = y^{(0)}$.

Перевіремо виконання співвідношення (3.6)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1)} = 0.131 > \varepsilon;$$

Співвідношення (3.6) не виконується. Тому переходимо до першої ітерації.

Перша ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(1)} = 12.948; \quad x_1^{(2)} = 2.158 - \frac{1.442}{12.948} = 2.047;$

$$\bar{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.088 \end{bmatrix}.$$

2-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2,1)} = 0.7972 > \varepsilon; \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(2,1)} = 12.528; \; x_2^{(2)} = 2.088 - \frac{0.7972}{12.528} = 2.0243.$

У результаті першої ітерації отримаємо $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$

Треба пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті першої ітерації: $y^{(2)} = -7.99004 < -7.882 = y^{(1)}$.

Перевіремо виконання співвідношення (3.6)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2)} = |-0.008| < \varepsilon;$$

Співвідношення (3.6) не виконується по змінній x_1, переходимо до другої ітерації .

Друга ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(2)} = 12.282; \quad x_1^{(3)} = 2.047 - \frac{0.4243}{12.282} = = 2.0124;$

$$\bar{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$$

2-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3,2)} = 0.219 > \varepsilon; \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(3,2)} = 12.1458; \quad x_2^{(3)} = 2.0243 - \frac{0.219}{12.1458} = 2.0061;$

$$\bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix};$$

$$y^{(3)} = -7.9993 < -7.9904 = y^{(2)}.$$

Перевіримо виконання співвідношення (3.6)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(3)} = 0.113 < \varepsilon; \qquad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3)}\right| = |-0.001| < \varepsilon;$$

Співвідношення (3.6) виконується.

$$\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix}; \qquad y^* = -7.9993$$

Багатовимірні оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей

Математична модель багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівностей має вигляд

$$y(\overline{x}) \to \underset{\overline{x}\in\Omega}{opt} \qquad (3.7)$$

$$\Omega:\ f_i\left(\overline{x}\right)=0, \quad i=\overline{1,m,n} \qquad (3.8)$$

Розгляд цієї теми грунтується на концепції залежних й незалежних змінних, що полягає у розбитті усіх змінних задачі на два підвектори: $\overline{x}=\begin{bmatrix}\overline{s}\\ \overline{t}\end{bmatrix}$,

де $\overline{s}$ – підвектор залежних змінних; $\overline{t}$ – підвектор незалежних змінних.

Необхідні умови локального умовного оптимуму мають вигляд

$$\boxed{\left(\frac{\delta\ y}{\delta\ \overline{t}}\right)^{*} = 0}$$

де $\left(\frac{\delta\, y}{\delta\, \overline{t}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial y}{\partial\, \overline{t}}\right)^{T} - \left(\frac{\partial y}{\partial\, \overline{s}}\right)^{T} (\mathbf{W})^{-1}\mathbf{C}$;

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{bmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_{21}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_p} \end{bmatrix}.$$

Достатні умови точки локального мінімуму полягають у додатній визначеності в точці локального мінімуму матриці других умовних похідних функції цілі $\mathbf{S}=\left[\frac{\delta^{2} y}{\delta t_i \delta t_j}\right]$.

Матриця має розмір *(p×p)* і визначається за формулою

$$\mathbf{S}=\mathbf{P}_{tt}-\mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}-\left(\mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{ss}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\ ,$$

де $\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{C}$ – вже знайомі обернена матриця Якобі і матриця керування; $\mathbf{P}_{tt}$, $\mathbf{P}_{ts}$, $\mathbf{P}_{ss}$ – підматриці матриці

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{st} \\ \mathbf{P}_{ts} & \mathbf{P}_{tt} \end{bmatrix} = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{H}_i \ .$$

Тут $\mathbf{H}$ – вже знайома матриця других похідних функції цілі; $\mathbf{H}_i$ – матриця других похідних *i*-го обмеження задачі, визначається як

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \ i = \overline{1, m};$$

λ_i – *коефіцієнти чутливості*, складові вектора $\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{-1}$.

Метод підстановки

Найпростішим методом розв′язання задачі з обмеженнями у вигляді рівностей є метод підстановки.

Задача з обмеженнями у вигляді рівностей з урахуванням розбиття змінних на залежні й незалежні набуває *виду*

$$y(\bar{s}, \bar{t}) \to \min_{\bar{s}, \bar{t} \in \Omega} , \tag{3.9}$$

$$\Omega: \ f_i(\bar{s}, \bar{t}) = 0, \quad i = \overline{1, m} \ . \tag{3.10}$$

Метод підстановки полягає в перетворенні системи рівностей (3.10) у систему

$$\bar{s} = \bar{\varphi} \ (\bar{t}) \tag{3.11}$$

та підстановці в (3.9) замість $\bar{s}$ його виразу через $\bar{t}$, тобто (3.11). Така процедура підстановки призводить до того, що складна задача умовної мінімізації (3.9), (3.10) перетворюється в задачу безумовної мінімізації

$$y(\bar{t}) \to \min_{\bar{t} \in R^{n-m}} \tag{3.12}$$

з числом змінних меншим, ніж у початковій задачі.

Приклад 9

Методом підстановки розв'язати задачу мінімізації функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \to \min_{\bar{x}\in\Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0; \\ x_1 \cdot x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Дану задачу можна розв'язувати методом підстановки, оскільки обмеження на змінні задачі дозволяють легко виразити *m залежних змінних* (m=2) через залишені *p незалежних* змінних (p=1):

$$x_2 = \frac{1}{x_1^2}; \qquad x_3 = \frac{2}{x_1};$$

Необхідно підставити у функцію $y(\bar{x})$ замість залежних змінних x_2, x_3 їх вираз через незалежну змінну x_1, ми зведемо задачу мінімізації з обмеженнями до задачі безумовної мінімізації функції:

$$y(x_1) = 2x_1^2 - 2x_1 \to \min_{x_1\in R^1}.$$

Розв'язуючи цю задачу методом Ейлера, отримаємо:

$$\bar{x}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad y^* = -\frac{1}{2}.$$

Метод Лагранжа.

Цей метод полягає у заміні функції цілі функцією Лагранжа і подальшому визначенні її стаціонарних точок, що співпадають з стаціонарними точками початкової функції цілі.

Приклад 10.

Методом Лагранжа знайти екстремум функції

$$y(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} \to \min_{\bar{x}\in\Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0; \\ x_1 \cdot x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Спочатку побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(\bar{x}, \quad \bar{\lambda}) = y(\bar{x}) - \bar{\lambda} \cdot \bar{f}(\bar{x}),$$

де $\bar{\lambda}$ - вектор коефіцієнтів чутливості або невизначених множників Лагранжа.

Далі розв'язання задачі полягає у визначенні стаціонарних точок функції Лагранжа, при цьому $\bar{\lambda}$ розглядається як вектор додаткових змінних, а сама функція Лагранжа як функція без обмежень. Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються як рішення системи рівнянь

$$\begin{cases} \partial L(\bar{x}, \quad \bar{\lambda}) = 0; \\ \dfrac{\partial L(\bar{x}, \quad \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = -\bar{f}(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Для нашого прикладу функція Лагранжа має вигляд

$$\partial L(\bar{x}, \quad \bar{\lambda}) = 2x_1^2 - \frac{x_3}{x_2} - \lambda_1(x_1^2 x_2 - 1) - \lambda_2(x_1 x_3 - 2),$$

а сама система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} 4x_1 - \lambda_1 \cdot 2x_1 x_2 - \lambda_2 x_3 = 0; \\ \dfrac{x_3}{x_2^2} - \lambda_1 x_1^2 = 0; \\ -\dfrac{1}{x_2} - \lambda_2 x_1 = 0; \\ x_1^2 x_2 - 1 = 0; \\ x_1 x_3 - 2 = 0. \end{cases}$$

Звідки знаходимо стаціонарну точку $\bar{x}^{(0)'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Застосування методу Лагранжа в економіці

Розглянемо застосування методу на прикладі вирішення задачі оптимальної реалізації продукції.

Приклад 11

Борошномельний комбінат реалізує борошно двома способами: уроздріб через магазин і оптом через торгових агентів. При продажі x_1 *кг борошна через магазин витрати на реалізацію складають* x_1^2 *грош.од., а при продажі* x_2 *кг борошна за допомогою торгових агентів –* x_2^2 *грош.од. Визначити,*

скільки кг борошна слід продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо в добу для продажу виділяється 5000 кг борошна.

Розв'язання.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 = 5000 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Функція Лагранжа матиме вигляд

$$\partial L\left(\bar{x},\quad \bar{\lambda}\right) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda\left(x_1 + x_2 - 5000\right).$$

а сама система рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0; \\ 2x_2 - \lambda = 0; \\ -x_1 - x_2 + 5000 = 0. \end{cases}$$

Звідки знаходимо стаціонарну точку $\bar{x}^{(0)\,'} = \left[2500 \quad 2500\right]$; $y(\bar{x}) = 12500000$

Надаючи x_1 значення більше і менше 2500 знаходимо $y(\bar{x})$ і з визначення екстремуму функції отримуємо, що $y(\bar{x})$ при $x_1 = x_2 = 2500$ досягає мінімуму.

Для отримання мінімальніх витрат необхідно реалізувати в добу через магазин і торгових агентів по 2500кг борошна, при цьому витрати на реалізацію складуть 12500 тис. грош.од.

.

Завдання для контрольних робіт

Завдання для контрольної роботи з теми “Транспортна задача. Постановка, методи розв’язання та аналізу”

Три постачальники A_1, A_2, A_3.....A_m мають запаси продукції в кількостях $a_1, a_2....a_m$. т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3..... B_n повинні отримати цю продукцію в кількостях $b_1, b_2.....b_n$. т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані в таблиці:

Варіант № 1

a_i \ b_j	80	140	110
60	4	3	5
150	10	1	2
80	3	8	6
40	6	4	9

Варіант № 2

a_i \ b_j	70	120	105	125	110
120	14	8	17	5	3
180	21	10	7	11	6
230	3	5	8	4	9

Варіант № 3

a_i \ b_j	80	60	30	90
70	3	7	5	2
45	5	3	4	7
90	2	1	8	5
55	5	7	2	8

Варіант № 4

a_i \ b_j	120	150	130
140	5	8	4
110	3	1	8
50	7	3	6
100	4	9	6

Варіант № 5

b_j / a_i	150	130	120
125	6	3	4
115	4	7	2
130	8	5	9
120	3	7	2

Варіант № 6

b_j / a_i	80	70	90	60	70
120	7	4	15	9	14
150	11	2	7	3	10
100	4	5	12	8	17

Варіант № 7

b_j / a_i	112	105	108
107	7	5	4
103	4	9	5
35	8	6	2
80	3	5	1

Варіант № 8

b_j / a_i	110	135	120
120	7	2	4
125	3	8	9
80	1	3	9
40	6	4	2

Варіант № 9

b_j / a_i	140	145	45
70	7	4	1
145	5	9	8
55	3	8	3
60	3	1	4

Варіант № 10

b_j / a_i	120	170	110
90	6	4	2
100	3	5	7
80	1	4	6
130	5	6	8

Варіант № 11

a_i \ b_j	16	14	10
17	2	1	3
11	4	2	4
5	1	3	5
7	4	7	1

Варіант № 12

a_i \ b_j	10	16	14
8	3	7	3
10	2	1	5
7	2	5	1
15	4	2	7

Варіант № 13

a_i \ b_j	300	280	330	290	100
370	21	18	14	3	4
450	7	11	10	5	12
480	4	8	16	9	13

Варіант № 14

a_i \ b_j	7	8	15	10
16	2	5	5	4
18	4	7	2	9
6	3	2	1	2

Варіант № 15

a_i \ b_j	19	13	18
17	3	1	2
10	4	2	6
12	2	3	4
11	3	7	1

Варіант № 16

a_i \ b_j	11	10	19
6	9	5	3
13	4	1	9
12	3	2	1
9	4	5	6

Варіант № 17

a_i \ b_j	10	17	18
10	3	5	2
9	2	6	9
14	5	2	8
12	4	1	3

Варіант № 18

a_i \ b_j	115	119	111
117	2	1	6
50	1	7	4
110	4	2	8
68	3	1	2

Варіант № 19

a_i \ b_j	120	130	140
115	3	2	6
125	8	7	2
50	4	1	7
100	3	5	1

Варіант № 20

a_i \ b_j	120	130	140
115	6	7	5
100	3	7	1
125	2	3	4
50	8	2	1

Варіант № 21

a_i \ b_j	130	230	190	160	120
260	2	4	11	5	3
300	8	17	13	7	6
270	14	10	5	8	9

Варіант № 22

a_i \ b_j	90	120	110	130	70
175	12	9	7	11	6
165	4	3	12	2	8
180	5	17	9	4	11

Варіант № 23

a_i \ b_j	20	25	35	40
25	12	15	14	10
50	16	20	28	17
45	19	21	16	13

Варіант № 24

a_i \ b_j	120	50	190	110
160	7	8	1	2
140	4	5	9	8
170	9	2	3	6

Варіант № 25

a_i \ b_j	100	90	160	150	80
150	2	10	15	14	4
170	3	7	12	5	8
260	1	18	6	13	16

Варіант № 26

a_i \ b_j	100	110	80	210
120	11	4	15	7
130	9	7	14	5
150	8	3	6	10

Варіант № 27

a_i \ b_j	100	110	120	130
220	11	2	3	9
150	12	4	10	20
90	18	5	1	6

Варіант № 28

a_i \ b_j	45	55	75	85
120	4	5	2	6
60	1	4	8	3
80	5	6	1	9

Варіант № 29

a_i \ b_j	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

Варіант № 30

a_i \ b_j	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

Завдання для контрольної роботи з теми

“Цілочислове програмування. Метод Гоморі”

Варіант № 1

Розв’язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_2 \leq 5 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int},\ j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 2

Розв’язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$\mathrm{y}(\overline{\mathrm{x}}) = 3\mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2 \to \min_{\overline{\mathrm{x}}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4\mathrm{x}_1 + 5\mathrm{x}_2 \geq 20 \\ 6\mathrm{x}_1 + 7\mathrm{x}_2 \leq 42 \\ \mathrm{x}_2 \leq 6 \\ \mathrm{x}_\mathrm{j} \geq 0,\ \ \mathrm{x}_\mathrm{j} - \text{int},\ \mathrm{j} = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 3

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 5x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq 3 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int},\ j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 4

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + 3x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ x_2 \leq 4 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int},\ j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 5

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_2 \leq 5 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int},\ j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 6

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + 5x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_2 \leq 4 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int},\ j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 7

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 5x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_2 \geq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int},\ j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 8

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 5x_1 + 2x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ x_2 \geq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 9

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 6x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_2 \geq 3 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 10

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 6x_1 + 4x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ x_2 \geq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 11

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 5x_1 + 4x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ x_2 \geq 4 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 12

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 4x_1 + 5x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 42 \\ x_2 \geq 3 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 13

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 5x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ x_2 \geq 4 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 14

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 5x_1 + 6x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 3 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 15

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 7x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ x_2 \geq 1 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 16

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 7x_1 + 2x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ x_2 \geq 4 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 17

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 7x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_2 \geq 1 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 18

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 7x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_2 \geq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 19

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 6x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 \leq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 20

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 6x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 5 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 21

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 8x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 22

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 8x_1 + 3x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ x_1 \leq 6 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 23

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 8x_1 + 4x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 7 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 24

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 5x_1 + 8x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 1 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 25

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 8x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 1 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 26

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 5x_1 + 8x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 27

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\overline{x}) = 9x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 2 \\ x_j \geq 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 28

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 9x_1 + 3x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 29

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 9x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Варіант № 30

Розв'язати задачу цілочислового програмування методом Гоморі;

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 9x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 1 \\ x_j \ge 0,\ \ x_j - \text{int}, j = 1,2 \end{cases}$$

Завдання для контрольної роботи з теми "Безумовна оптимізація. Класичні методи"

Варіант № 1

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1^2 x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{4}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 2

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 3x_2 + \frac{2x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1^2 x_2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 3

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1 x_2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 4

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 + \frac{3}{x_1 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 5

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = \frac{1}{4} x_1^2 x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{2}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 6

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y\left(\bar{x}\right) = 2\sqrt{x_1} + 3x_2 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2^3} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 7

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1 x_2 + \frac{3}{x_2} + \frac{27}{x_1^2 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 8

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + \frac{2}{x_1 \sqrt{x_2}} + x_2 \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 9

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 3x_1^3 + 3x_2^3 + \frac{9}{x_1 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 10

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4x_2 \sqrt{x_1} + \frac{4}{x_2} + \frac{4}{\sqrt{x_1}} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 11

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 + \frac{2}{x_1^4 x_2^2} + \frac{2}{x_2^2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 12

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 3 \cdot x_2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 13

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 + \frac{2}{x_2} + \frac{2}{x_1^2 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 14

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1^2 x_2 + \frac{4x_1^2}{x_2} + \frac{8}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 15

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 + \frac{2x_2}{\sqrt{x_1}} + \frac{2}{x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 16

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = \sqrt{x_1 x_2} + \frac{9}{x_2} + \frac{36}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 17

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = \frac{2}{9} x_1 x_2^4 + \frac{8}{x_1} + \frac{16}{3x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 18

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x^2 x_2 + \frac{3}{x_2} + \frac{2x_2}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 19

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_2 + \frac{2x_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{2}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 20

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_2 \sqrt{x_1} + \frac{4}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 21

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_2 \sqrt{x_1} + \frac{1}{2x_1} + \frac{8}{x_1 x_2^4} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 22

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2\sqrt{x_2} + \frac{x_1}{4x_2^2} + \frac{1}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 23

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 + \frac{4}{x_2 \sqrt{x_1}} + \frac{2}{\sqrt{x_1}} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант № 24

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4\frac{x_2}{x_1^2} + x_1 + \frac{2}{\sqrt{x_2}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 25

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2\sqrt{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{16}{x_1 x_2^2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 26

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4x_1 x_2^2 + \frac{1}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 27

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4x_1^2 x_2 + \frac{2}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 28

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 + \frac{6}{x_1\sqrt{x_2}} + 9x_1 x_2 \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 29

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1 x_2 + \frac{25}{x_1\sqrt{x_2}} + \frac{20}{\sqrt{x_2}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант № 30

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 5x_1 x_2 + \frac{1}{5x_2\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Завдання для контрольної роботи з теми

“Безумовна оптимізація. Прямі методи”

Варіант № 1

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1 x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $e = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}3 \quad 0{,}3]$.

Варіант № 2

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $e = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}2 \quad 0{,}1]$.

Варіант № 3

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $e = 0.02$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}3 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 4

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $e = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}1 \quad 0{,}3]$.

Варіант № 5

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$ з точністю $e = 0.002$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}2 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 6

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}9 \quad 0{,}8]$.

Варіант № 7

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}1 \quad 1{,}2]$.

Варіант № 8

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}3 \quad 1{,}1]$.

Варіант № 9

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}7 \quad 0{,}8]$.

Варіант № 10

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}8 \quad 0{,}8]$.

Варіант № 11

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $e = 0.02$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}9 \quad 0{,}1]$.

Варіант № 12

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $e = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}1 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 13

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [0{,}8 \quad 0{,}2]$.

Варіант № 14

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $e = 0.01$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}2 \quad -0{,}1]$.

Варіант № 15

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}2 \quad 0{,}3]$.

Варіант № 16

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}8 \quad 1{,}8]$.

Варіант № 17

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}9 \quad 1{,}8]$.

Варіант № 18

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $e = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [1{,}7 \quad 1{,}9]$.

Варіант № 19

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $e = 0.05$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [2{,}1 \quad 1{,}9]$.

Варіант № 20

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [2{,}1 \quad 2{,}2]$.

Варіант № 21

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [2{,}8 \quad 2{,}9]$.

Варіант № 22

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $e = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [2{,}8 \quad 3{,}1]$.

Варіант № 23

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $e = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}2 \quad 2{,}8]$.

Варіант № 24

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $e = 0.1$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}1 \quad 3{,}1]$.

Варіант № 25

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ з точністю $e = 0.4$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [2{,}9 \quad 3{,}2]$.

Варіант № 26

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $e = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [4{,}1 \quad 3{,}8]$.

Варіант № 27

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $e = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [4{,}1 \quad 3{,}7]$.

Варіант № 28

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $e = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}9 \quad 4{,}1]$.

Варіант № 29

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $e = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}7 \quad 4{,}2]$.

Варіант № 30

Методом покоординатного спуска знайти мінімум функції $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2$ з точністю $e = 0.2$, приймаючи як початкову точку $\bar{x}^{(0)\prime} = [3{,}8 \quad 3{,}8]$.

Завдання для контрольної роботи з теми

“Багатовимірні оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей”

Варіант № 1

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 2

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_2^2 + 2x_1x_3 - x_1 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 3

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = \frac{3}{x_1^2} + \frac{3}{x_2^2} + 6x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 4

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 + 9x_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_1x_2x_3 - 1 = 0$$

Варіант № 5

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = x_1x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$$

Варіант № 6

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 7

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1 x_2 x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

Варіант № 8

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + 2x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 9

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 10

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y(\overline{x}) = x_1^2 + x_3^2 - x_1 - 2x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$$

Варіант № 11

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 12

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1 x_2 = 0$$

Варіант № 13

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = \frac{36}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - \sqrt{x_1 x_2} = 0$$

Варіант № 14

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=\frac{2}{x_1^4}+\frac{2}{x_2^4}+x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0$$

Варіант № 15

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-15x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0$$

Варіант № 16

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-21x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1=x_3-x_1x_2+5=0$$

Варіант № 17

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-12x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0$$

Варіант № 18

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1x_2-4x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega:\begin{cases} f_1=3x_1-x_2+2=0 \\ f_2=x_3-2x_1=0 \end{cases}$$

Варіант № 19

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1x_2-4\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega:\left\{ f_1=3x_1-x_2+2=0\right.$$

Варіант № 20

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-24x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0$$

Варіант № 21

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\bar{x}\right)=x_1^3+x_2^3-7x_3\to\min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1=x_3-x_1x_2=0$$

Варіант № 22

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 - x_2 = 0 \\ f_2 = x_3 - x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 23

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 24

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = 2x_1x_3 + 7x_2^2 - x_1 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Варіант № 25

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 27

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1x_2 - 4 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0$$

Варіант № 28

Методом підстановки знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Варіант № 29

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = e^{x_1x_2} \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \{ f_1 = x_1 + x_2 - a = 0$$

Варіант № 30

Методом Лагранжа знайти мінімум функції

$$y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 27x_3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$$

Список літератури

1. Самойленко М.І. Математичне програмування. – Х.: Основа, 2002. – 424 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Уч. пособие для студентов вузов. – К.: Вища школа, 1989. – 392 с.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1980.
4. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2001.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Уч. пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.: ил.
6. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Долгопятов Т.Г., Суворов Б.Г. Математическое моделирование экономических процессов МГУ, 1990. – 262 с.
8. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. – К.: Вища школа, 1990. – 239 с.
9. Плис А.И., Сливина Н.А. Математический практикум для экономистов и инженеров: Уч. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999.
10. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
11. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Питер, 2002.
12. Самойленко М.І., Білогурова Г.В., Штельма О.М., Гавриленко І.О. Методичні вказівки до самостійного вирішення задач та виконання розрахункових завдань з курсу «Математичного програмування». – ХДАМГ, 2006.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до проведення практичних занять і виконання самостійної роботи (частина 2) з дисципліни **«Економіко-математичне моделювання»** (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»).

Укладачі: Самойленко Микола Іванович,
Штельма Ольга Миколаївна,
Білогурова Ганна Вікторівна

Редактор *З. І. Зайцева*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2010, поз. 392 М

Підп. до друку 30.03.2010 р. Формат 60х84 1/16

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,7

Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 731 від 19.12.2001