Міністерство освіти і науки України
Харківська національна академія міського господарства

С. О. Станішевський,

Ю. Є. Печеніжський

З А В Д А Н Н Я

З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(Модуль 1)

І П Р И К Л А Д И Ї Х Р О З В ' Я З А Н Н Я

(для самостійної роботи студентів 1-го курсу денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)

Харків
ХНАМГ
2010

Завдання з вищої математики (Модуль 1) і приклади їх розв’язання (для самостійної роботи студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 87 с.

Укладачі: С. О. Станішевський,
Ю. Є. Печеніжський

Рецензент: к.т.н., доц. О. С. Архіпова

Рекомендовано кафедрою Вищої математики,
протокол № 4 від 04.11.2010 р.

ВСТУП

Дані методичні вказівки містять завдання для самостійної роботи з курсу вищої математики, що відповідають першому заліковому модулю робочої програми. З метою полегшення засвоєння курсу вищої математики в методичних вказівках подано рішення типових варіантів завдань по кожній темі. Ступінь труднощів їхнього розв'язання відповідає пропонованим для самостійної роботи завданням. Кожна задача завдання подана у тридцяти варіантах.

Методичні вказівки дозволяють здійснювати перехід від пасивних форм навчання до активних, що виражається у самостійній роботі студента з рекомендованими нижче книгами і розбором рішень запропонованих задач.

Велика кількість задач може бути використана викладачами для проведення практичних і контрольних робіт в аудиторії з метою поточного контролю засвоєння студентами матеріала з вищої математики, який поділено на три модулі, що відповідає трьом семестрам. Кожний модуль розбито на змістові модулі, які містять відповідні теми.

Завдання за модулем два і модулем три вийдуть окремими книгами, але нумерація тем буде прохідна і відповідатиме затвердженій програмі з курсу вищої математики за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво».

Зауваження і пропозиції щодо даних вказівок надсилайте за адресою, яку вказано на останній сторінці.

Змістовий модуль 1.1

Тема 1. ***Елементи лінійної алгебри***

ВИЗНАЧНИКИ

1. Для даного визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

знайти мінори й алгебраїчні доповнення елементів a_{12}, a_{32}. Обчислити визначник Д: а) розклавши його за елементами першого рядка; б) розклавши його за елементами другого стовпця; в) одержавши попередньо нулі в першому рядку.

Рішення.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 - 6 + 12 + 4 - 16 = -18\ ,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 - 8 = -20\ ;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot (-18) = 18,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -1 \cdot (-20) = 20;$$

а) обчислимо Д за елементами першого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}\,;$$

$$= -3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & \Delta -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3(8 + 2 + 4 - 4) - 2 \times$$

$$(-8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16) + (16 - 12 - 4 + 32) = -30 + 36 + 32 = 38;$$

б) обчислимо за елементами другого стовпця:

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}\,;$$

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-8+6-16+12+4-16) - 2(12+6-6-16) + (-6+16-12-4) =$$
$$= 36+8-6 = 38;$$

в) обчислимо Д, одержавши попередньо нулі в першому рядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

Домножили третій стовпець на 3 і склали з першим стовпцем. Домножили третій стовпець на –2 і склали з другим стовпцем. У першому рядку всі елементи, крім третього, дорівнюють нулю. Розклавши останній визначник по елементах першого рядка, одержали визначник третього порядку:

$$= \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -14 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56+18) = 38.$$

Помножили другий рядок на 5 і відняли його з першого. Одержали в першому стовпці всі елементи, крім другого, рівними нулю.

МАТРИЦІ

2. Дано дві матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$.

Рішення.

а) добуток AB має сенс, тому що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Знаходимо матрицю С = AB, елементи якої

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Маємо:

$$C = AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix};$$

б) обчислимо BA

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4+4-0 & 0-2-6 & 1+6-6\\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2\\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & -8 & 1\\ -5 & 2 & 4\\ 19 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $AB \neq BA;$

в) обернена матриця A^{-1} має вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

$$\text{де } \Delta_A=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$

отже матриця A невироджена, і має обернену матрицю A^{-1}. Знаходимо:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8; \quad A_{21}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2; \quad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5; \quad A_{22}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8; \quad A_{33}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4.$$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix};$$

г) маємо:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E;$$

д) маємо:

$$A^{-1}A=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\ ,$$

отже обернена матриця знайдена вірно.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3. Дано систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ 3x_1-\ \ x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

Перевірити її сумісність; у випадку сумісності розв'язати її:

а) за формулами Крамера;

б) за допомогою оберненої матриці (матричним методом);

в) за методом Гаусса.

Рішення. Сумісність даної системи перевіримо за теоремою Кронекера-Капеллі. За допомогою елементарних перетворень знайдемо ранг матриці A даної системи і ранг розширеної матриці $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right).$$

Для цього помножимо перший рядок матриці $\tilde{A}$ на -2 і складемо з другим, потім помножимо перший рядок на -3 і складемо з третім, поміняємо місцями другий і третій стовпці. Одержимо:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right)\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right)\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right)$$

Отже, $rang\ A = rang\ \tilde{A} = 3$ (тобто числу невідомих). Виходить**,** вихідна система сумісна і має єдине рішення;

а) за формулами Крамера: $x_1=\dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2=\dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$, $x_3=\dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$.

Тут: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=-16$, $\Delta x_1=\begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -7 & -1 & -3\end{vmatrix}=64,$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16, \ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32,.$$

Знаходимо $x_1 = \dfrac{64}{-16} = -4$, $\quad x_2 = \dfrac{-16}{-16} = 1$, $\quad x_3 = \dfrac{32}{-16} = -2$;

б) за допомогою оберненої матриці. Запишемо систему рівнянь у матричній формі $AX = B$. Рішення системи в матричній формі має вид

$$X = A^{-1}B.$$

Тут $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матриця невідомих і $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ - матриця вільних членів.

Знаходимо обернену матрицю A^{-1} (вона існує, тому що $\Delta_A = det \ (A) = -16 \neq 0$). Спочатку обчислюємо алгебраїчні доповнення A_{ij}, потім формуємо транспоновану приєднану матрицю, яку ділимо на Δ_A. Маємо:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & 11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Рішення системи:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & 11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-45+32+77)/(-16) \\ (-9-7)/(-16) \\ (-42+32+42)/(-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

в) за методом Гаусса. Виключимо x_1 із другого і третього рівнянь. Для цього перше рівняння помножимо на 2 і віднімемо з другого, потім перше рівняння помножимо на 3 і віднімемо з третього:

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3, \\ \quad -6x_2-x_3=-4, \\ \; -16x_2=-16. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_2=1$; з передостаннього знаходимо $x_3=-2$ і з першого рівняння знаходимо $x_1=-4$.

4. Дано систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2, \\ 3x_1+x_2-3x_3=1, \\ 5x_1-2x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

Перевірити її на сумісність і, у випадку сумісності, вирішити її так само, як і систему в задачі *3*.

Рішення. Перевіряємо сумісність системи за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. У розширеній матриці $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

міняємо третій і перший стовпці місцями, множимо перший рядок на *3* і додаємо до другого, множимо перший рядок на *2* і додаємо до третього, із другого рядка віднімаємо третій:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 9 & 7 \\ 0 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, бачимо, що $rang\ A = 2$, $rang\ \tilde{A} = 3$. За теоремою Кронекера-Капеллі, з того що $rang\ A \neq rang\ \tilde{A}$, випливає несумісність даної системи.

5. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3=0, \\ \ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-\ x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

Рішення. Визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=11\neq 0,$$

тому $Rg(A) = 3$ і за теоремою Кронекера-Капеллі система має єдине рішення $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

6. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Рішення. Тут

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

тому за теоремою Кронекера-Капеллі система має безліч розв'язків. Оскільки *rang A = 2, n = 3* візьмемо будь-які два рівняння системи (наприклад перше і друге) і знайдемо її рішення.

Маємо:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Тому що визначник з коефіцієнтів при невідомих x_1, і x_2 не дорівнює нулю, то за базисні невідомі візьмемо x_1 і x_2 (хоча можна брати й інші пари невідомих) і перемістимо праворуч члени з x_3.

Розв'язуємо останню систему за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},$$

де $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3$;

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -15x_3 - x_3 = -16x_3.$$

Звідси знаходимо, що $x_1 = -\frac{17}{13}x_3$, $x_2 = \frac{16}{13}x_3$.

Поклавши $x_3 = 13k$, де $k \in R$, маємо рішення даної системи: $x_1 = -17k$; $x_2 = 16k$; $x_3 = 13k$. Тут k – коефіцієнт пропорційності.

Завдання до теми 1

1 Для даного визначника знайти мінори та алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}. Обчислити визначник: а) розкладаючи його по елементам i-того рядка; б) розкладаючи його по елементам j-того стовпця; в) отримав попередньо нулі в i-тому рядку

1.
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$i=4, j=3$

2.
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$
$i=3, j=4$

3.
$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$
$i=1, j=3$

4.
$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$
$i=3, j=4$

5.
$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$i=2, j=4$

6.
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$i=2, j=3$

7.
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$
$i=3, j=3$

8.
$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$
$i=4, j=3$

9.
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$i=3, j=2$

10.
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$i=4, j=4$

11.
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$i=2, j=2$

12.
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$i=2, j=3$

13.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$i=2, j=4$

14.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=1, j=2$

15.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=1, j=2$

16.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=2, j=4$

17.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$i=1, j=2$

18.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=2, j=3$

19.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=4, j=1$

20.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$i=3, j=1$

21.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=4, j=2$

22.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=2, j=1$

23.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=3, j=2$

24.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=4, j=1$

25.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$i=2, j=1$

26.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$i=3, j=2$

27.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$i=3, j=2$

28.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$i=4, j=4$

29.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$i=1, j=2$

30.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=1, j=4$

2 Перевірити на сумісність систему рівнянь і, у випадку сумісності, розв’язати її: а) за формулами Крамера; б) за допомогою оберненої матриці (матричним методом); в) за методом Гауса

1.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

14.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

23.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 30 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = -8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

30.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

3 Перевірити на сумісність систему рівнянь і, у випадку сумісності, розв’язати її.

1.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4 \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2 \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

23.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_3 - 5x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

30.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

14.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

23.

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

1.
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

23.

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

30.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

Тема 2. ***Аналітична геометрія на площині***

ЛІНІЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. Задані вершини *ΔABC: A(4,3), B(–3,–3), C(2,7).*

Знайти: а) рівняння сторони *AB*; б) рівняння висоти *CH;* в) рівняння медіани *AM*; г) точку *N* перетинання медіани *AM* і висоти *CH;* д) рівняння прямої, що проходить через вершину *C* паралельно стороні *AB;* е) відстань від точки *C* до прямої *AB;* ж) площу *ΔABC.*

Рішення. а) скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки, одержимо рівняння сторони *AB:*

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},$$

відкіля $6(x-4)=7(y-3)$ або $6x-7y-3=0;$

б) кутовий коефіцієнт прямої *AB* $k_1=\frac{6}{7}$. Тому що прямі *AB* і *CH* перпендикулярні, то кутовий коефіцієнт висоти *CH* $k_2=\frac{-7}{6}$ $(k_1k_2=-1)$.

По точці *C(2,7)* і кутовому коефіцієнту $k_2=\frac{-7}{6}$ складаємо рівняння висоти *CH*

$$y-7=-7/6(x-2) \text{ чи } 7x+6y-56=0;$$

в) координати *x,y* середини *M* відрізка *BC:*

$$x=\frac{-3+2}{2}=\frac{1}{2};\quad y=\frac{-3+7}{2}=2\,.$$

Тепер за двома відомими точками *A* і *M* складаємо рівняння медіани *AM*:

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}=\frac{y-3}{2-3} \text{ чи } 2x-9y+19=0;$$

г) для знаходження координат точки *N* перетину медіани *AM* і висоти *CH* складемо систему рівнянь

$$\begin{cases}7x+6y-56=0,\\2x-9y+19=0.\end{cases}$$

Після її розв'язку, одержимо $x=\frac{26}{5}$; $y=\frac{49}{15}$. $N(\frac{26}{5};\frac{49}{15})$;

д) тому що пряма, яка проходить через вершину *C*, паралельна стороні *AB*, то їхні кутові коефіцієнти рівні $k_1=\frac{6}{7}$. Тоді по точці *C* і кутовому коефіцієнту k_1, складаємо рівняння прямої *CD:*

$$y-7=\frac{6}{7}(x-2) \quad \text{чи} \qquad 6x-7y+37=0;$$

е) відстань від точки *C* до прямої *AB* обчислюємо за формулою:

$$d=|CH|=\frac{|6\cdot 2-7\cdot 7-3|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{48}{\sqrt{85}};$$

ж) площу ΔABC обчислюємо по координатах точок *A(4,3), B(–3,–3), C(2,7)* за допомогою визначника

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|-12+6-21+6+9-28|=\frac{1}{2}\cdot 40=20 \text{ од. кв.}$$

Рисунок трикутника і шуканих ліній зробити самостійно.

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2. Скласти канонічні рівняння: а) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 3, а фокус знаходиться у точці $F(\sqrt{5},0)$;

б) гіперболи з уявною піввіссю, рівної 2, і фокусом $F(-\sqrt{13},0)$;

в) параболи, що має директрису $x = -3$.

Рішення.

а) канонічне рівняння еліпса має вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.За умовою задачі $a = 3$, $c=\sqrt{5}$. Для еліпса виконується рівність $b^2=a^2-c^2$.

Підставивши в неї значення *a* і *c*, знайдемо $b^2=3^2-(\sqrt{5})^2=4$. Шукане рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$$

б) канонічне рівняння гіперболи має вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. За умовою задачі $b = 2$, $c=\sqrt{13}$. Для гіперболи справедлива рівність $b^2=c^2-a^2$. Тому $a^2=c^2-b^2=(\sqrt{13})^2-2^2=9$. Записуємо шукане рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$$

в) канонічне рівняння параболи у даному випадку повинне мати вид

$y^2 = 2px$, а рівняння її директриси $x = -\frac{p}{2}$.Але за умовою задачі рівняння директриси $x = -3$.Отже $-\frac{p}{2} = -3$. Відкіля $p = 6$. Шукане рівняння має вигляд $y^2 = 12x$.

3. Скласти рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ і має центр у його верхній вершині.

Рішення. Для даного еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ верхня вершина $A(0,1)$, $a = 2$, $b = 1$. Тому $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ і фокуси знаходяться у точках $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$. Радіус R шуканого кола обчислюємо за формулою відстані між двома точками:

$$R = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{(\pm\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2 .$$

Відповідно до канонічного рівняння кола радіуса R з центром у точці $A(a,b)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$,

записуємо шукане рівняння кола

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \quad \text{або} \quad x^2 + (y - 1)^2 = 4 .$$

4. Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої відстоїть від точки $A(3,2)$ на відстані, у три рази більшою, ніж від точки $B(-1,0)$.

Рішення. Нехай $M(x,y)$ - будь-яка точка шуканої лінії. Тоді за умовою задачі $|AM| = 3|BM|$.

Тому що $|AM| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$, $|BM| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$, то рівняння шуканої лінії $\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 3\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$.

Перетворимо його, звівши обидві частини до другого степеня.

Маємо: $$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2 ,$$

$$8x^2 + 24x + 8y^2 + 4y - 4 = 0 .$$

Виділивши повні квадрати, прийдемо до рівняння виду:

$$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = (\frac{3\sqrt{5}}{4})^2 .$$

Це рівняння кола з центром у точці $C(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ і радіусом $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Завдання до теми 2

1 Дани вершини A, B, C трикутника. Побудувати ці трикутники. Знайти:

1) довжину сторони;
2) рівняння сторони;
3) площу трикутника;
4) кут трикутника;
5) рівняння висоти;
6) довжину висоти;
7) рівняння медіани;
8) точку перетину медіани і висоти.

	A	B	C		A	B	C
1	(−2, 4)	(3, 1)	(10, 7)	16	(−3, −2)	(14, 4)	(6, 8)
2	(1, 7)	(−3, −1)	(11, −3)	17	(1, 0)	(−1, 4)	(9, 5)
3	(1, −2)	(7, 1)	(3, 7)	18	(−2, −3)	(1, 6)	(6, 1)
4	(−4, 2)	(−6, 6)	(6, 2)	19	(4, −3)	(7, 3)	(1, 10)
5	(4, −4)	(8, 2)	(3, 8)	20	(−3, −3)	(5, −7)	(7, 7)
6	(1, −6)	(3, 4)	(−3, 3)	21	(−4, 2)	(8, −6)	(2, 6)
7	(−5, 2)	(0, −4)	(5, 7)	22	(4, −4)	(6, 2)	(−1, 8)
8	(−3, 8)	(−6, 2)	(0, −5)	23	(6, −9)	(10, −1)	(−4, 1)
9	(4, 1)	(−3, −1)	(7, −3)	24	(−4, 2)	(6, −4)	(4, 10)
10	(3, −1)	(11, 3)	(−6, 2)	25	(−7, −2)	(−7, 4)	(5, −5)
11	(−1, −4)	(9, 6)	(−5, 4)	26	(10, −2)	(4, −5)	(−3, 1)
12	(−3, −1)	(−4, −5)	(8, 1)	27	(−2, −6)	(−3, 5)	(4, 0)
13	(−7, −2)	(3, −8)	(−4, 6)	28	(0, 2)	(−7, −4)	(3, 2)
14	(7, 0)	(1, 4)	(−8, −4)	29	(1, −3)	(0, 7)	(−2, 4)
15	(−5, 1)	(8, −2)	(1, 4)	30	(2, 5)	(−3, 1)	(0, 4)

2 Скласти канонічні рівняння: а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи. Тут: A, B − точки, які лежать на кривій; F − фокус; a − більша (дійсна) піввісь; b − менша (уявна) піввісь; ε − ексцентриситет; k − кутовий коефіцієнт у рівнянні асимптоти гіперболи; D − директриса кривої; $2c$ − міжфокусна відстань; $x=a$ або $y=b$ − рівняння директриси

	а)	б)	в)
1	$a=15$; $F(-10, 0)$	$a=13$; $\varepsilon=14/13$	D; $x=-4$
2	$A(3, 0)$; $B(2, \sqrt{5}/3)$	$A(-3, 4)$; $B(-5, 4\sqrt{5})$	$D: y=1$
3	$\varepsilon=\sqrt{21}/5$; $A(-5, 0)$	$A(\sqrt{80}, 3)$; $B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$	$D: x=5$

4	$b=2;\ F(4\sqrt{2},\ 0)$	$a=7;\ \varepsilon=\sqrt{85}/7$	$D: y=-2$
5	$a=11;\ \varepsilon=\sqrt{57}/11$	$k=2/3;\ C=5\sqrt{13}$	$D: x=-2$
6	$b=\sqrt{15};\ \varepsilon=\sqrt{10}/5$	$k=3/4;\ a=8$	$D: y=2$
7	$a=4;\ F(3, 0)$	$A(4, -6);\ B(6,\ 4\sqrt{6})$	$D: x=3$
8	$b=4;\ F(9, 0)$	$b=2\sqrt{10};\ F(-11, 0)$	$D: y=-4$
9	$A(0,\ \sqrt{3});\ B(\sqrt{14}/3, 1)$	$a=5;\ \varepsilon=7/5$	$D: x=-1$
10	$A(4, -2);\ B(2,\ \sqrt{7})$	$\varepsilon=8/7;\ A(-7, 0)$	$D: y=4$
11	$a=12;\ \varepsilon=\sqrt{22}/6$	$k=4/3;\ c=5$	$D: x=4$
12	$b=2;\ \varepsilon=5\sqrt{29}/29$	$A(-4, -3);\ B(8, 9)$	$D: y=-1$
13	$b=7;\ F=(5, 0)$	$k=12/13;\ a=13$	$D: x=-3$
14	$a=6;\ F=(-4, 0)$	$b=3;\ F=(7, 0)$	$D: y=3$
15	$A(0, 2),\ B(\sqrt{32}/3,1)$	$a=11;\ \varepsilon=12/11$	$D: x=2$
16	$\varepsilon=3/5;\ A(0, 8)$	$A(\sqrt{6}, 0);\ B(-2\sqrt{2}, 1)$	$D: y=-3$
17	$a=11;\ \varepsilon=10/11$	$A(8, 12);\ B(-6, 2\sqrt{15})$	$D: x=-5$
18	$b=5;\ \varepsilon=12/13$	$k=\sqrt{11}/5;\ c=6$	$D: y=5$
19	$a=9;\ F(7, 0)$	$b=6;\ F(12, 0)$	$D: x=1$
20	$b=5;\ F(-10, 0)$	$a=9;\ \varepsilon=4/3$	$D: y=-5$
21	$A(0, -2);\ B(\sqrt{15}/2, 1)$	$k=\sqrt{29}/14;\ c=15$	$D: x=-1/4$
22	$\varepsilon=2/3;\ A(-6, 0)$	$A(8, 6);\ B(10,\ -3\sqrt{10})$	$D: y=1/4$
23	$a=25;\ \varepsilon=3/5$	$A(\sqrt{2}, 0);\ B(\sqrt{20}/3, 2)$	$D: x=1/2$
24	$b=2\sqrt{15};\ \varepsilon=7/8$	$k=5/6;\ a=6$	$D: y=-1/3$
25	$a=13;\ F(-5, 0)$	$b=4;\ F(-7, 0)$	$D: x=-1/2$
26	$b=7;\ F(13, 0)$	$A(\sqrt{32}/3, 1);\ B(\sqrt{8}, 0)$	$D: y=1/3$
27	$A(-3; 0);\ B(1,\ \sqrt{40}/3)$	$A(10,\ -3\sqrt{3});\ k=3/5$	$D: x=1/3$

28	$\varepsilon = 5/6$; $A(0,\ -\sqrt{11})$	$b = 4$; $F(-11, 0)$	$D: y = -1/2$
29	$a = 15$; $\varepsilon = 15/17$	$k = \sqrt{17}/8$; $c = 9$	$D: x = -1/3$
30	$b = 2\sqrt{2}$; $\varepsilon = 7/9$	$k = \sqrt{2}/2$; $a = 6$	$D: y = 1/2$

3 Записати рівняння кола, яке проходить через зазначені точки і має центр у точці A. Зробити рисунок

1. Вершини гіперболи $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0,\ -2)$.
2. Вершини гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0, 4)$.
3. Фокуси гіперболи $25x^2 - 24y^2 = 600$, $A(0,\ -8)$.
4. $B(-2, 5)$, A − вершина параболи $x^2 = 3y$.
5. Фокуси еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$, $A(0, 6)$.
6. Фокуси еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A − його верхня вершина.
7. Фокус гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0,\ -3)$.
8. Вершини гіперболи $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0,\ -2)$.
9. Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0,\ -4)$.
10. $B(1, 2)$, A − вершина параболи $y^2 = -3x$.
11. Фокус еліпса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(0, 7)$.
12. Фокус гіперболи $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0, 6)$.
13. Фокуси еліпса $16x^2 + 41y^2 = 656$, A − його верхня частина.
14. Вершини гіперболи $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0, 4)$.
15. Фокуси гіперболи $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0, 5)$.
16. $B(1, 4)$, A − вершина параболи $x^2 = -2y$.
17. Фокус еліпса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1,\ -3)$.
18. Вершина гіперболи $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0,\ -6)$.
19. Фокуси еліпса $24x^2 + 25y^2 = 600$, A − його верхня вершина.
20. Вершина гіперболи $3x^2 - 16y^2 = 48$, $A(1, 3)$.
21. Фокус гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1,\ -2)$.
22. $B(2,\ -5)$, A − вершина параболи $y^2 = 2x$.
23. Фокус еліпса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2,\ -7)$.
24. Вершина гіперболи $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2, 5)$.
25. Фокуси еліпса $x^2 + 10y^2 = 90$, A − його нижня вершина.
26. Вершина гіперболи $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5,\ -2)$.

27. Фокуси гіперболи $4x^2-5y^2=20$, $A(0,-6)$.

28. $B(3, 4)$, A − вершина параболи $x^2=-4y$.

29. Фокус еліпса $13x^2+49y^2=637$, $A(1, 8)$.

30. Фокус гіперболи $57x^2-64y^2=3648$, $A(2, 8)$.

4	Скласти рівняння лінії, кожна точка M якої відповідає заданим умовам. Зробити рисунок

1. Відстоїть від прямої $x=-6$ на відстані, у два рази більшій, ніж від точки $A(1, 3)$.

2. Відстоїть від прямої $x=-2$ на відстані, у два рази більшій, ніж від точки $A(4, 0)$.

3. Відстоїть від прямої $y=-2$ на відстані, у три рази більшій, ніж від точки $A(5, 0)$.

4. Відношення відстаней від точки M до точок $A(2, 3)$ і $B(-1, 2)$ дорівнює $3/4$.

5. Сума квадратів відстаней від точки M до точок А (4, 0) і $B(-2, 2)$ дорівнює 28.

6. Відстоїть від точки $A(1, 0)$ на відстані, в п'ять разів меншій, ніж від прямої $x=8$.

7. Відстоїть від точки $A(4, 1)$ на відстані, в чотири рази більшій, ніж від точки $B(-2, -1)$.

8. Відстоїть від прямої $x=-5$ на відстані, у три рази більшій, ніж від точки $A(6, 1)$.

9. Відстоїть від прямої $y=7$ на відстані, в п'ять разів більшій, ніж від точки $A(4, -3)$.

10. Відношення відстаней від точки M до точок $A(-3, 5)$ і $B(4, 2)$ дорівнює $1/3$.

11. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-5, -1)$ і $B(3, 2)$ дорівнює 40,5.

12. Відстоїть від точки $A(2, 1)$ на відстані, у три рази більшій, ніж від прямої $x=-5$.

13. Відстоїть від точки $A(-3, 3)$ на відстані, у три рази більшій, ніж від точки $B(5, 1)$.

14. Відстоїть від прямої $x=8$ на відстані, у два рази більшій, ніж від точки $A(-1, 7)$.

15. Відстоїть від прямої $x=9$ на відстані, в чотири рази меншій, ніж від точки $A(-1, 2)$.

16. Відношення відстаней від точки M до точок $A(2, -4)$ і $B(3, 5)$ дорівнює $2/3$.

17. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-3, 3)$ і $B(4, 1)$ дорівнює 31.

18. Відстоїть від точки $A(0,\ -5)$ на відстані, в два рази меншій, ніж від прямої $x=3$.

19. Відстоїть від точки $A(4,\ -2)$ на відстані, в два рази меншій, ніж від точки $B(1, 6)$.

20. Відстоїть від точки $A(1, 4)$ на відстані, у три рази більшій, ніж від прямої $x=-7$.

21. Відстоїть від прямої $x=14$ на відстані, у два рази меншій, ніж від точок $A(2, 3)$.

22. Відношення відстаней від точки M до точок $A(3,\ -2)$ і $B(4,\ 6)$ дорівнює $3/5$.

23. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-5, 3)$ і $B(2, 1)$ дорівнює 31.

24. Відстоїть від точки $A(3,\ -4)$ на відстані, в два рази більшій, ніж від прямої $x=5$.

25. Відстоїть від точки $A(5, 7)$ на відстані, в чотири рази більшій, ніж від точки $B(-2, 1)$.

26. Відстоїть від прямої $x=2$ на відстані, в п'ять разів більшій, ніж від точки $B(-2, 1)$.

27. Відстоїть від прямої $x=-7$ на відстані, в три рази меншій, ніж від точки $A(3, 1)$.

28. Відношення відстаней від точки M до точок $A(3,\ -5)$ і $B(4,\ 1)$ дорівнює $1/4$.

29. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-1, 2)$ і $B(3, -1)$ дорівнює 18,5.

30. Відстоїть від точки $A(1, 5)$ на відстані, в чотири рази меншій, ніж від прямої $x=-1$.

Змістовий модуль 1.2

Тема 3. *Елементи векторної алгебри*

1. По координатах точок *A(-5;1;6), B(1;4;3)* і *C(6;3;9)* знайти:
а) модуль вектора $\overline{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC}$,
б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b} = \overline{BC}$;
в) проекцію вектора $\overline{c} = \overline{b}$ на вектор $\overline{d} = \overline{AB}$;
г) координати точки *M*, що поділяє відрізок *AB* у відношенні 1:3.
Рішення:
а) послідовно знаходимо $\overline{AB} = (6,3,-3)$, $\overline{BC} = (5,-1,6)$, $\overline{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC} = (29,11,-6)$, $|\overline{a}| = |4\overline{AB} + \overline{BC}| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}$;
б) маємо $\overline{a} = (29,11,-6)$, $\overline{b} = (5,-1,6)$.
Тоді $\overline{a} \cdot \overline{b} = 29 \cdot 5 + 11(-1) + (-6)6 = 98$.
в) тому що $Пр_{\overline{d}}\overline{c} = \dfrac{\overline{c} \cdot \overline{d}}{|\overline{d}|}$, де $\overline{d} = (6,3,-3)$ $\overline{c} = \overline{b} = \overline{BC}$;
$\overline{c} \cdot \overline{d} = 30 - 3 - 18 = 9$; $|\overline{d}| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54}$, тоді $Пр_{\overline{d}}\overline{c} = \dfrac{9}{\sqrt{54}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$;
г) маємо: $\lambda = 1/3$, $\overline{r}_M = \dfrac{\overline{r}_A + \lambda \overline{r}_B}{1 + \lambda}$. Отже, $x_M = \dfrac{-5 + 1/3 \cdot 1}{1 + 1/3} = -\dfrac{7}{2}$;
$y_M = \dfrac{1 + 1/3 \cdot 4}{1 + 1/3} = \dfrac{7}{4}$; $z_M = \dfrac{6 + 1/3 \cdot 3}{1 + 1/3} = \dfrac{21}{4}$; $M(-\dfrac{7}{2};\dfrac{7}{4};\dfrac{21}{4})$.

2. Довести, що вектори $\overline{a} = (3,-1,0)$, $\overline{b} = (2,3,1)$ і $\overline{c} = (-1,4,3)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\overline{d} = (2,3,7)$ у цьому базисі.
Рішення.

Обчислюємо $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$.

Отже, вектори $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють базис, і вектор $\overline{d}$ є лінійною комбінацією базисних векторів:

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}.$$

В координатній формі

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta-\gamma=2, \\ -\alpha+3\beta+4\gamma=3, \\ \qquad \beta+3\gamma=7. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за формулами Крамера. Визначник системи $Д = 22$. Обчислюємо допоміжні визначники:

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=18+56-3+21-18-8=66,$$

$$\Delta_\beta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}=27+7+6-84=-44,$$

$$\Delta_\gamma=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}=63-2+14-9=66,$$

Маємо: $\alpha=\dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta}=3$; $\beta=\dfrac{\Delta_\beta}{\Delta}=-2$; $\gamma=\dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta}=3$,

тому $\bar{d}=(3,-2,3)=3\bar{a}-2\bar{d}+3\bar{c}$.

3. Дано вектори $\bar{a}=4\bar{i}+4\bar{k}$, $\bar{b}=-\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$ і $\bar{c}=3\bar{i}+5\bar{j}$. Необхідно: а) обчислити мішаний добуток векторів $\bar{a},\bar{b}$ і $5\bar{c}$; б) знайти модуль векторного добутку векторів $3\bar{c}$ і $\bar{b}$; в) обчислити скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $3\bar{b}$; г) перевірити, чи будуть паралельні або перпендикулярні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$; д) перевірити, чи будуть належать одній площині вектори: $\bar{a},\bar{b}$ і $5\bar{c}$.

Рішення.

а) тому що $5\bar{c}=15\bar{i}+25\bar{j}$, маємо

$$\bar{a}\text{x}\bar{b}\cdot 5\bar{c}=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix}=-100-180-200=-480;$$

б) оскільки $3\bar{c}=9\bar{i}+15\bar{j}$, маємо

$$3\bar{c}\text{x}\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=30\bar{i}+27\bar{k}+15\bar{k}-18\bar{j}=30\bar{i}-18\bar{j}+42\bar{k},$$

$$|3\overline{c}\text{x}\overline{b}|=\sqrt{30^2+(-18)^2+42^2}=\sqrt{2988}\ ;$$

в) знаходимо: $3\overline{b}=-3\overline{i}+9\overline{j}+6\overline{k}$,

$$\overline{a}\cdot 3\overline{b}=4(-3)+(0\cdot 9)+4\cdot 6=12\ ;$$

г) маємо $\overline{a}=(4{,}0{,}4)$, $\overline{b}=(-1{,}3{,}2)$ і $\dfrac{4}{-1}\neq\dfrac{0}{3}\neq\dfrac{4}{2}$, отже вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ не паралельні. Оскільки $\overline{a}\cdot\overline{b}=4(-1)+0\cdot 3+4\cdot 2=4\neq 0$, то вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ не перпендикулярні;

д) вектори $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$ компланарні, якщо $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=0$. Обчислюємо

$\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}4 & 0 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=-20-36-40\neq 0$, тобто вектори $\overline{a},\overline{b}$ і $\overline{c}$ не належать одній площині.

4. Сила $\vec{F}=(2{,}3{,}-5)$ прикладена до точки $A(1{,}-2{,}2)$. Обчислити:

а) роботу сили $\vec{F}$ у випадку, коли точка її дотику, рухаючись прямолінійно, переміщається з положення *A* в положення *B(1,4,0)*;

б) модуль моменту сили $\vec{F}$ щодо точки *B*.

Рішення.

а) робота (позначаємо її А), це скалярний добуток $\vec{F}\cdot\vec{s}$, де $\vec{s}=\overline{AB}$ і $\vec{s}=(0{,}6{,}-2)$, тоді $A=\vec{F}\cdot\vec{s}=2\cdot 0+3\cdot 6+(-5)\cdot(-2)=28$, отже $A=28$;

б) момент сили, це векторний добуток:

$$\overrightarrow{M}=\overline{BA}\text{x}\vec{F}\text{ , де }\overline{BA}=(0{,}-6{,}2)\ ;$$

$$\overline{BA}\text{x}\vec{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & -6 & 2\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=24\overline{i}+4\overline{j}+12\overline{k}\ .$$

Отже, $|\overrightarrow{M}|=\sqrt{24^2+4^2+12^2}=4\sqrt{36+1+9}=4\sqrt{46}$.

Завдання до теми 3

1

За даними координатами точок A, B і C для зазначених векторів знайти: а) модуль (довжину) вектора $\overline{a}$; б) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$; в) проекцію вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$

	A	B	C	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{d}$
1	(5, 4, 4)	(-5, 2, 3)	(4, 2, -5)	$11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
2	(6, 5, -4)	(-5, 2,2)	(3, 3, 2)	$6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$
3	(2, 4, 3)	(3, 1, -4)	(-1, 2, 2)	$2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AB}$
4	(-2, -3, -4)	(2, -4, 0)	(1, 4, 5)	$4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
5	(2, 4, 6)	(-3, 5, 1)	(4, -5, -4)	$-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$
6	(-5, 4, 3)	(4, 5, 2)	(2, 7, -4)	$3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{AB}$
7	(3, 5, 4)	(4, 2, -3)	(-2, 4, 7)	$3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
8	(-2, 3, -4)	(3, -1, 2)	(4, 2, 4)	$7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
9	(3, 4, 1)	(5, -2, 6)	(4, 2, -7)	$-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
10	(4, 6, 7)	(2, -4, 1)	(-3, -4, 2)	$5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
11	(1, 3, 2)	(-2, 4, -1)	(1, 3, -2)	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
12	(10, 6, 3)	(-2, 4, 5)	(3, -4, -6)	$5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
13	(3, 4, 6)	(-4, 6, 4)	(5, -2, -3)	$-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BC}$
14	(-3, -5, 6)	(3, 5, -4)	(2, 6, 4)	$4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
15	(2, 4, 5)	(1, -2, 3)	(-1, -2, 4)	$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
16	(-2, -3, -2)	(1, 4, 2)	(1, -3, 3)	$2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
17	(-4, -2, -5)	(3, 7, 2)	(4, 6, -3)	$9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
18	(6, 4, 5)	(-7, 1,8)	(2, -2, -7)	$5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
19	(-2, -2, 4)	(1, 3, -2)	(1, 4, 2)	$2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
20	(0, 2, 5)	(2, -3, 4)	(3, 2, -5)	$-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$

21	(4, 5, 3)	(-4, 2, 3)	(5, -6, -2)	$9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
22	(4, 3, 2)	(-4, -3, 5)	(6, 4, -3)	$8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
23	(4, 6, 3)	(-5, 2, 6)	(4, -4, -3)	$4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
24	(2, -4, 3)	(-3, -2, 4)	(0, 0, -2)	$3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
25	(3, 2, 4)	(-2, 1, 3)	(2, -2, 1)	$4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
26	(-5, -2, -6)	(3, 4, 5)	(2, -5, 4)	$8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
27	(1, 3, 2)	(-2, 4, -1)	(1, 3, -2)	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
28	(-1, -2, 4)	(-1, 3, 5)	(1, 4, 2)	$3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
29	(5, 6, 1)	(-2, 4, -1)	(3, -3, 3)	$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
30	(4, 3,-2)	(-3, -1, 4)	(2, 2, 1)	$-5\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$

2 Довести, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\overline{d}$ у цьому базисі

	$\overline{a}=$	$\overline{b}=$	$\overline{c}=$	$\overline{d}=$
1	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	(-5, 11, -15)
2	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	(19, 33, 0)
3	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(13, -5, -4)
4	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-9, 34, -20)
5	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	(6, -9, 22)
6	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(14, 14, 20)
7	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	(0, 11, -14)
8	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	(-19, -5, -4)
9	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(-2, 17, 5)
10	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	(-4, 11, 20)
11	(-1, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	(6, 20, -3)
12	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(-16, 33, 13)
13	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-12, 14, -31)
14	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	(-10, -13, 8)

15	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(-8, -10, 13)
16	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(-15, -10, 5)
17	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	(1, 12, -20)
18	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(36, 1, 15)
19	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-5, 11, 1)
20	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(28, -19, -7)
21	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)
22	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	(26, 11, 1)
23	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	(-4, 22, -13)
24	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	(7, 23, 4)
25	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	(15, -15, 24)
26	(-2, 1, 3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	(31, -6, 22)
27	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	(-1, 18, -16)
28	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	(14, 9, -1)
29	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	(16, 6, 15)
30	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	(15, 6, -17)

3 Відомі вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Необхідно: а) обчислити мішаний добуток трьох векторів і перевірити їх на компланарність; б) знайти модуль векторного добутку двох векторів і перевірити їх на колініарність; в) обчислити скалярний добуток двох векторів і перевірити їх на ортогональність

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	а)	б)	в)
1	(-9, 4, -5)	(1, -2, 4)	(-5, 10, -20)	$-2\vec{a}$, $7\vec{b}$, $5\vec{c}$	$-6\vec{b}$, $7\vec{c}$	$9\vec{a}$, $4\vec{c}$
2	(3, -1, 5)	(2, -4, 6)	(1, -2, 3)	$-3\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-5\vec{c}$	$6\vec{b}$, $3\vec{c}$	$\vec{a}$, $4\vec{c}$
3	(-7, 0, 2)	(2, -6, 4)	(1, -3, 2)	$\vec{a}$, $-2\vec{b}$, $-7\vec{c}$	$4\vec{b}$, $3\vec{c}$	$2\vec{a}$, $-7\vec{c}$
4	(5, -3, 4)	(2, -4, -2)	(3, 5, -7)	$\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$	$-2\vec{b}$, $4\vec{c}$	$-3\vec{a}$, $6\vec{c}$
5	(9, -3, 1)	(-3, -15, 21)	(1, -5, 7)	$2\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $3\vec{c}$	$-6\vec{a}$, $4\vec{c}$	$5\vec{b}$, $7\vec{a}$
6	(-3, -1, -5)	(2, -4, 8)	(3, 7, -1)	$2\vec{a}$, $-\vec{b}$, $3\vec{c}$	$-9\vec{a}$, $4\vec{c}$	$5\vec{b}$, $-7\vec{a}$

7	(3, 4, 1)	(1, -2, 7)	(3, -6, 21)	$5\vec{a}$, $2\vec{b}$, $\vec{c}$	$4\vec{b}$, $2\vec{c}$	$\vec{a}$, $\vec{c}$
8	(-1, 0, 5)	(-3, 2, 2)	(-2, -4, 1)	$3\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$	$7\vec{a}$, $-3\vec{c}$	$2\vec{b}$, $3\vec{a}$
9	(-3, 8, 0)	(2, 3, -2)	(8, 12, -8)	$4\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $5\vec{c}$	$-7\vec{a}$, $9\vec{c}$	$3\vec{b}$, $-8\vec{c}$
10	(4, -6, -2)	(-2, 3, 1)	(3, -5, 7)	$6\vec{a}$, $3\vec{b}$, $8\vec{c}$	$-7\vec{b}$, $6\vec{a}$	$-5\vec{a}$, $4\vec{c}$
11	(5, -6, -4)	(4, 8, -7)	(0, 3, -4)	$5\vec{a}$, $3\vec{b}$, $-4\vec{c}$	$4\vec{b}$, $\vec{a}$	$7\vec{a}$, $-2\vec{c}$
12	(4, -1, 3)	(2, 3, -5)	(7, 2, 4)	$7\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $2\vec{c}$	$3\vec{a}$, $5\vec{c}$	$2\vec{b}$, $4\vec{c}$
13	(-4, -6, 2)	(2, 3, -1)	(-1, 5, -3)	$5\vec{a}$, $7\vec{b}$, $2\vec{c}$	$-4\vec{b}$, $11\vec{a}$	$3\vec{a}$, $-7\vec{c}$
14	(2, -7, 5)	(-1, 2, -6)	(3, 2, -4)	$-3\vec{a}$, $6\vec{b}$, $-\vec{c}$	$5\vec{b}$, $3\vec{c}$	$7\vec{a}$, $-4\vec{b}$
15	(4, -5, -4)	(5, -1, 0)	(2, 4, -3)	$\vec{a}$, $7\vec{b}$, $-2\vec{c}$	$-5\vec{a}$, $4\vec{b}$	$8\vec{c}$, $-3\vec{a}$
16	(-4, 2, -1)	(3, 5, -2)	(0, 1, 5)	$\vec{a}$, $6\vec{b}$, $3\vec{c}$	$2\vec{b}$, $\vec{a}$	$\vec{a}$, $4\vec{c}$
17	(-4, 3, -7)	(4, 6, -2)	(6, 9, -3)	$-2\vec{a}$, $\vec{b}$, $-2\vec{c}$	$4\vec{b}$, $7\vec{c}$	$5\vec{a}$, $-3\vec{b}$
18	(-2, 4, -3)	(5, 1, -2)	(7, 4, -1)	$\vec{a}$, $-6\vec{b}$, $2\vec{c}$	$-8\vec{b}$, $5\vec{c}$	$-9\vec{a}$, $7\vec{c}$
19	(-3, 2, 7)	(1, 0, -5)	(6, 4, -1)	$-2\vec{a}$, $\vec{b}$, $7\vec{c}$	$5\vec{a}$, $-2\vec{c}$	$3\vec{b}$, $\vec{c}$
20	(2, -4, -2)	(7, 3, 0)	(3, 5, -7)	$\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$	$3\vec{a}$, $-7\vec{b}$	$\vec{c}$, $-2\vec{a}$
21	(6, -4, 6)	(9, -6, 9)	(1, 0, -8)	$2\vec{a}$, $-4\vec{b}$, $3\vec{c}$	$3\vec{b}$, $-9\vec{c}$	$3\vec{a}$, $-5\vec{c}$
22	(2, -4, -2)	(-9, 0, 2)	(3, 5, -7)	$7\vec{a}$, $5\vec{b}$, $-\vec{c}$	$-5\vec{a}$, $4\vec{b}$	$3\vec{b}$, $-8\vec{c}$
23	(3, -1, 2)	(-1, 5, -4)	(6, -2, 4)	$4\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $-2\vec{c}$	$6\vec{a}$, $-4\vec{c}$	$2\vec{a}$, $5\vec{b}$
24	(2, -3, 1)	(0, 1, 4)	(5, 2, -3)	$\vec{a}$, $3\vec{b}$, $\vec{c}$	$3\vec{a}$, $2\vec{c}$	$\vec{b}$, $-4\vec{c}$
25	(4, 2, -3)	(2, 0, 1)	(-12, -6, 9)	$2\vec{a}$, $3\vec{b}$, $\vec{c}$	$4\vec{a}$, $3\vec{b}$	$\vec{b}$, $-4\vec{c}$
26	(-4, 2, -3)	(0, -3, 5)	(6, 6, -4)	$5\vec{a}$, $-\vec{b}$, $3\vec{c}$	$-7\vec{a}$, $4\vec{c}$	$3\vec{a}$, $9\vec{b}$
27	(7, -4, -5)	(1, -11, 3)	(5, 5, 3)	$3\vec{a}$, $-7\vec{b}$, $2\vec{c}$	$2\vec{b}$, $6\vec{c}$	$-4\vec{a}$, $5\vec{c}$
28	(-9, 0, 4)	(2, -4, 6)	(3, -6, 9)	$3\vec{a}$, $-5\vec{b}$, $-4\vec{c}$	$6\vec{b}$, $2\vec{c}$	$-2\vec{a}$, $8\vec{c}$
29	(3, -2, 1)	(0, 2, -3)	(-3, 2, -1)	$\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{c}$	$5\vec{a}$, $3\vec{c}$	$-2\vec{a}$, $4\vec{b}$
30	(-5, 2, -2)	(7, 0, -5)	(2, 3, -2)	$2\vec{a}$, $4\vec{b}$, $-5\vec{c}$	$-3\vec{b}$, $11\vec{c}$	$8\vec{a}$, $-6\vec{c}$

4 Дани три сили $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, прикладені до точки A.

Обчислити: а) роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка A, рухаючись прямолінійно, перемістилась у точку B; б) величину моменту рівнодійної цих сил відносно точки B

	$\vec{P}$	$\vec{Q}$	$\vec{R}$	A	B
1	(9, -3, 4)	(5, 6, -2)	(-4, -2, 7)	(-5, 4, -2)	(4, 6, -5)
2	(5, -2, 3)	(4, 5, -3)	(-1, -3, 6)	(7, 1, -5)	(2, -3, -6)
3	(3, -5, 4)	(5, 6, -3)	(-7, -1, 8)	(-3, 5, 9)	(5, 6, -3)
4	(-10, 6, 5)	(4, -9, 7)	(5, 3, -3)	(4, -5, 9)	(4, 7, -5)
5	(5, -3, 1)	(4, 2, -6)	(-5, -3, 7)	(-5, 3, 7)	(3, 8, -5)
6	(-5, 8, 4)	(6, -7, 3)	(3, 1, -5)	(2, -4, 7)	(0, 7, 4)
7	(7, -5, 2)	(3, 4, -8)	(-2, -4, 3)	(-3, 2, 0)	(6, 4, -3)
8	(3, -4, 2)	(2, 3, -5)	(-3, -2, 4)	(5, 3, -7)	(4, -1, -4)
9	(4, -2, -5)	(5, 1, -3)	(-6, 2, 5)	(-3, 2, -6)	(4, 5, -3)
10	(7, 3, -4)	(9, -4, 2)	(-6, 1, 4)	(-7, 2, 5)	(4, -2, 11)
11	(9, -4, 4)	(-4, 6, -3)	(3, 4, 2)	(5, -4, 3)	(4, -5, 9)
12	(6, -4, 5)	(-4, 7, 8)	(5, 1, -3)	(-5, -4, 2)	(7, -3, 6)
13	(5, 5, -6)	(7, -6, 6)	(-4, 3, 4)	(-9, 4, 7)	(8, -1, 7)
14	(7, -6, 2)	(-6, 2, -1)	(1, 6, 4)	(3, -6, 1)	(6, -2, 7)
15	(4, -2, 3)	(-2, 5, 6)	(7, 3, -1)	(-3, -2, 5)	(9, -5, 4)
16	(7, 3, -4)	(3, -2, 2)	(-5, 4, 3)	(-5, 0, 4)	(4, -3, 5)
17	(3, -2, 4)	(-4, 4,-3)	(3, 4, 2)	(1, -4, 3)	(4, 0, -2)
18	(2, -1, -3)	(3, 2, -1)	(-4, 1, 3)	(-1, 4, -2)	(2, 3, -1)
19	(4, 5, 1)	(1, 3, -1)	(-3, -6, 7)	(2, -1, 0)	(3, 3, -4)
20	(1, -3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(1, 1, -3)	(2, 4, -1)
21	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-1, -3, 5)	(4, 5, -2)
22	(3, -2, 1)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)
23	(-1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)
24	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)
25	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-3, 4, 5)	(-2, 5, 1)
26	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)
27	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)
28	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(2, -1, 3)	(5, 1, 2)
29	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)
30	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(-2, 3, -4)	(3, -6, 2)

Тема 4. ***Аналітична геометрія у просторі***

1. Дано чотири точки $A_1\,(4,7,8)$, $A_2\,(-1,13,0)$, $A_3\,(2,4,9)$, $A_4\,(1,8,9)$. Скласти рівняння: а) площини $A_1\ A_2\ A_3$;

б) прямої $A_1\ A_2$;

в) прямої $A_4\,M$, перпендикулярної до площини $A_1\ A_2\ A_3$;

г) прямої $A_4\,N$, паралельної прямої $A_1\ A_2$.

Обчислити:

д) синус кута між прямою $A_1\ A_4$ і площиною $A_1\ A_2\ A_3$;

е) косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною $A_1\ A_2\ A_3$.

Рішення.

а) використовуючи рівняння площини, яке визначається по трьох точках, складаємо рівняння площини $A_1\ A_2\ A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкривши визначник по елементах першого рядка (див. тему 1) і виконавши відповідні обчислення, маємо:

$$6x - 7y - 9z + 97 = 0;$$

б) рівняння прямої, що проходить через дві точки $A_1\left(4,7,8\right)$ і $A_2\left(-1,13,0\right)$, записуємо у вигляді:

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8} ;$$

в) з умови перпендикулярності прямої $A_4\,M$ і площини $A_1\ A_2\ A_3$ випливає, що направляючим вектором шуканої прямої буде нормальний вектор $\vec{n} = (6,-7,-9)$ площини $A_1\ A_2\ A_3$.

Тоді рівняння прямої $A_4\,M$ запишеться у вигляді $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-8}{-7} = \dfrac{z-9}{-9}$;

г) тому що пряма $A_4\,N$ паралельна прямій $A_1\ A_2$, то їхні направляючі вектори $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$ можна вважати співпадаючими: $\overrightarrow{s_1} = \overrightarrow{s_2} = (5,-6,8)$.

Отже, рівняння прямої $A_4\,N$ має вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8} ;$$

д) величина синуса кута φ між прямою $A_1\ A_4$ і площиною $A_1\ A_2\ A_3$

обчислюється за формулою

$$sin\varphi = \frac{|6(-3)+(-7)1+(-9)1|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}} = \frac{34}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{166}} \approx 0{,}8 \ ,$$

де пряма $A_1\ A_4$ має рівняння

$$\frac{x-4}{1-4} = \frac{y-7}{8-7} = \frac{z-8}{9-8} \text{ або } \frac{x-4}{-3} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-8}{1} \ .$$

Таким чином, кут $\varphi \approx 37^0 17'$;

е) косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною $A_1\ A_2\ A_3$ обчислюємо за формулою

$$cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \frac{0\cdot 6+0(-7)+1(-9)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}} = \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0{,}7 \ .$$

2. Скласти рівняння площини, якій належать точки $M(4,3,1)$ і $N(-2,0,-1)$, і яка паралельна прямій, що проходить через точки $A(1,1,-1)$ і $B(-3,1,0)$.

Рішення. Рівняння прямої, що проходить через дві точки, має вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} . \quad \text{Відкіля} \quad \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1} .$$

Якщо площина проходить через точку $M(4,3,1)$, то її рівняння можна записати у вигляді

$$A(x-4)+B(y-3)+C(z-1) = 0.$$

Тому що ця площина проходить і через точку $N(-2,0,-1)$, то виконується умова

$$A(-2-4)+B(0-3)+C(-1-1) = 0, \text{ або } 6A+3B+2C = 0.$$

Оскільки шукана площина паралельна знайденій прямій AB, то з урахуванням умови паралельності $Am + Bn + Cp = 0$ маємо

$$-4A+0B+1C = 0, \text{ чи } 4A - C = 0.$$

Вирішуючи систему

$$\begin{cases} 6A+3B+2C=0, \\ 4A-C=0, \end{cases}$$

знаходимо, що $C = 4A$, $B = -14/3A$. Підставивши отримані значення C і B у рівняння шуканої площини, маємо

$$A(x-4) - \frac{14}{3}A(y-3) + 4A(z-1) = 0 \ .$$

Тому що $A \neq 0$, то отримане рівняння еквівалентне рівнянню

$$3(x-4) - 14(y-3) + 12(z-1) = 0 \text{ чи } 3x - 14y + 12z + 18 = 0.$$

3. Знайти координати x_2, y_2, z_2 точки M_2, яка симетрична точці $M_1(6,-4,-2)$ щодо площини $x + y + z - 3 = 0$.

Рішення. Запишемо параметричні рівняння прямої M_1M_2, перпендикулярної до даної площини: $x = 6+t$, $y = -4+t$, $z = -2+t$. Підставимо вирази відносно x, y, і z у рівняння даної площини, знайдемо $t = 1$ і, отже, точку M перетинання прямої M_1M_2, з даною площиною: $M(7,-3,-1)$. Тому що точка M є серединою відрізка M_1M_2, то вірні рівності:

$$7=\frac{6+x_2}{2}\,;\;\; -3=\frac{-2+y_2}{2}\,;\;\; -1=\frac{-2+z_2}{2}\,,$$

з яких знаходимо координати точки M_2: $x_2=8$; $y_2=-2$; $z_2=0$.

4. Вершини піраміди знаходяться у точках: $A(2,3,4)$, $B\ (4,7,3)$, $C(1,2,2)$ і $D(-2,0,-1)$. Обчислити: а) площу грані ABC; б) площу перетину, що проходить через середину ребер AB, AC і AD; в) об'єм піраміди $ABCD$.

Рішення.

а) відомо, що $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\text{x}\overline{AC}|$. Тут: $\overline{AB}=(2{,}4{,}-1)$, $\overline{AC}=(-1{,}-1{,}-2)$.

Знаходимо $|\overline{AB}\text{x}\overline{AC}|=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{vmatrix}=-9\bar{i}+5\bar{j}+2\bar{k}.$

$$|\overline{AB}\text{x}\overline{AC}|=\sqrt{(-9)^2+5^2+2^2}=\sqrt{81+25+4}=\sqrt{110}\ .$$

Остаточно маємо: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{110}$ од. кв.;

б) середини ребер AB, AC, AD знаходяться у точках $K(3;5;3{,}5)$, $M(1{,}5;2{,}5;3)$, $N\ (0;1{,}5;1{,}5)$. Далі маємо:

$S_{\Delta KMN}=\frac{1}{2}|\overline{KM}\text{x}\overline{KN}|$, де $\overline{KM}=(-1{,}5;-2{,}5;-0{,}5)$; $\overline{KN}=(-3;-3{,}5;-2)$.

$$\overline{KM}\text{x}\overline{KN}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5\\ -3 & -3{,}5 & -2\end{vmatrix}=3{,}25\bar{i}-1{,}5\bar{j}-2{,}25\bar{k}\ ,$$

$$S_{\Delta KMN}=\frac{1}{2}\sqrt{3{,}25^2+(-1{,}5)^2+(-2{,}25)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{17{,}875}\ \text{од. кв.;}$$

в) оскільки

$$V_{nip}=\frac{1}{6}|(\overline{AB}\text{x}\overline{AC})\overline{AD}|,\ \text{де}\ \overline{AD}=(-4{,}-3{,}-5),\ \text{маємо}$$

$$V_{nip}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ -1 & -1 & -2\\ -4 & -3 & -5\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 11=\frac{11}{6}\ \text{од. куб.}$$

Завдання до теми 4.

| 1 | Маємо координати точок: A, B, C і D. Знайти:

1) довжину ребра ;
2) кут між двома ребрами;
3) кут між ребром і гранню, який воно не належить;
4) площу грані;
5) об'єм піраміди;
6) рівняння ребра;
7) рівняння грані;
8) рівняння висоти піраміди

	A	B	C	D
1	(3, 1, 4)	(−1, 6, 1)	(−1, 1, 6)	(0, 4, −1)
2	(3, −1, 2)	(−1, 0, 1)	(1, 7, 3)	(8, 5, 8)
3	(3, 5, 4)	(5, 8, 3)	(1, 2, −2)	(−1, 0, 2)
4	(2, 4, 3)	(1, 1, 5)	(4, 9, 3)	(3, 6, 7)
5	(9, 5, 5)	(−3, 7, 1)	(5, 7, 8)	(6, 9, 2)
6	(0, 7, 1)	(2, −1, 5)	(1, 6, 3)	(3, −9, 8)
7	(5, 5, 4)	(1, −1, 4)	(3, 5, 1)	(5, 8, −1)
8	(6, 1, 1)	(4, 6, 6)	(4, 2, 0)	(1, 2, 6)
9	(7, 5, 3)	(9, 4, 4)	(4, 5, 7)	(7, 9, 6)
10	(6, 8, 2)	(5, 4, 7)	(2, 4, 7)	(7, 3, 7)
11	(4, 2, 5)	(0, 7, 1)	(0, 2, 7)	(1, 5, 0)
12	(4, 4, 10)	(7, 10, 2)	(2, 8, 4)	(9, 6, 9)
13	(4, 6, 5)	(6, 9, 4)	(2, 10, 10)	(7, 5, 9)
14	(3, 5, 4)	(8, 7, 4)	(5, 10, 4)	(4, 7, 8)
15	(10, 9, 6)	(2, 8, 2)	(9, 8, 9)	(7, 10, 3)
16	(1, 8, 2)	(5, 2, 6)	(5, 7, 4)	(4, 10, 9)
17	(6, 6, 5)	(4, 9, 5)	(4, 6, 11)	(6, 9, 3)
18	(7, 2, 2)	(−5, 7, −7)	(5, −3, 1)	(2, 3, 7)
19	(8, −6, 4)	(10, 5, −5)	(5, 6, 8)	(8, 10, 7)
20	(1, −1, 3)	(6, 5, 8)	(3, 5, 8)	(8, 4, 1)
21	(1, −2, 7)	(4, 2, 10)	(2, 3, 5)	(5, 3, 7)
22	(4, 2, 10)	(1, 2, 0)	(3, 5, 7)	(2, −3, 5)
23	(2, 3, 5)	(5, 3, −7)	(1, 2, 7)	(4, 2, 0)
24	(5, 3, 7)	(−2, 3, 5)	(4, 2, 10)	(1, 2, 7)
25	(4, 3, 5)	(1, 9, 7)	(0, 2, 0)	(5, 3, 10)
26	(3, 2, 5)	(4, 0, 6)	(2, 6, 5)	(6, 4, −1)
27	(2, 1, 6)	(1, 4, 9)	(2, −5, 8)	(5, 4, 2)
28	(2, 1, 7)	(3, 3, 6)	(2, −3, 9)	(1, 2, 5)
29	(2, −1, 7)	(6, 3, 1)	(3, 2, 8)	(2, −3, 7)
30	(0, 4, 5)	(3, −2, 1)	(4, 5, 6)	(3, 3, 2)

$\boxed{2}$ Розв'язати наступні задачі

1. Знайти величини відрізків, які відсікає на вісях координат площина, що проведена через точку M $(-2,\ 7,\ 3)$ паралельно площині $x-4y+5z-1=0$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через середину відрізка M_1, M_2, перпендикулярно цьому відрізку, якщо $M_1(1,\ 5,\ 6)$, $M_2(-1,\ 7,\ 10)$.

3. Знайти відстань від точки $M(2,\ 0,\ -0{,}5)$ до площини $4x-4y+2z+17=0$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\ -3,\ 5)$ паралельно площині Oxy.

5. Скласти рівняння площини, якій належить вісь Ox і точка A $(2,\ 5,\ -1)$.

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2,\ 5,\ -1)$, $B(-3,\ 1,\ 3)$ паралельно вісі Oy.

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\ 5,\ -1)$ і пряму $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

8. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ і $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

9. Скласти загальне рівняння прямої, утвореної перетином площини $x-y-7z+9=0$ з площиною, яка проходить через вісь Ox і точку A $(3,\ 2,\ -5)$.

10. Скласти рівняння площини «у відрізках», якщо вона проходить через точку M $(6,\ -10,\ 1)$ і відсікає на вісі Ox відрізок $a=-3$, а на вісі Oz − відрізок $c=2$.

11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\ 3,\ -4)$ паралельно двум векторам $\vec{a}=(4,\ 1,\ -1)$ і $\vec{b}=(2,\ -1,\ 2)$.

12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(1,\ 1,\ 0)$ і $B(2,\ -1,\ -1)$ перпендикулярно до площини $5x+2y+3z-7=0$.

13. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин: $2x-3y+z-1=0$ і $x-y+5z+3=0$.

14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(3,\ -1,\ 2)$ і $B(2,\ 1,\ 4)$ паралельно вектору $\vec{a}=(5,\ -2,\ -1)$.

15. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(5,\ -2,\ 3)$, $B(1,\ -3,\ 5)$.

16. Знайти величини відрізків, які відсікає на вісях координат площина, що проведена через точку M $(-2,\ 7,\ 3)$ паралельно площині $x-4y+5z-1=0$.

17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M $(1,\ -1,\ 2)$, перпендикулярно відрізку $M_1\,M_2$, якщо $M_1(2,\ 3,\ -4)$, $M_2(-1,\ 2,\ -3)$.

18. Показати, що пряма $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-1}{-9}$ паралельна площині $x+3y-2z-1=0$, а пряма $\{x=t,\ y=t-2,\ z=2t+1\}$ лежить у цій площині.

19. Скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку $A(3,\ -4,\ 1)$ паралельно координатній площині Oxy.

20. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку M (3, −5, 2).

21. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки M (3, −1, 2), N (2, 1, 4) паралельно вісі Oz.

22. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M (2, 3, −1), і пряму $\{x=t-3,\ y=2t+5,\ z=-3t+1\}$.

23. Знайти проекцію точки M (4, −3, 1) на площину $x-2y-z-15=0$.

24. Визначити при якому значенні B площини $x-4y+z-1=0$ і $2x+By+10z-3=0$ будуть перпендикулярні.

25. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M (2, −3, −4) і відсікає на вісях координат відрізки однакової величини.

26. При яких значеннях A і n пряма $x:3=(y-5):n=(z+5):6$ перпендикулярна до площини $Ax+2y-2z-7=0$?

27. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2,\ 3,\ -1)$ і $B(1,\ 1,\ 4)$ перпендикулярно до площини $x-4y+3z+2=0$.

28. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин: $x+5y-z+7=0$ і $3x-y+2z-3=0$.

29. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(2,\ 3,\ -5)$ і $B(-1,\ 1,\ -6)$ паралельно вектору $\overline{a}=(4,\ 4,\ 3)$.

30. З’ясувати, при якому значенні C площини $3x-5y+Cz-3=0$ і $x-3y+3z+5=0$ будуть перпендикулярні.

$\boxed{3}$ Розв’язати наступні задачі

1. Довести паралельність прямих

$$(x-1):6=(y+2):2=z:(-1) \text{ і } \begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x+6z-6=0 \end{cases}.$$

2. Довести, що пряма $(x+1):2=(y+1):(-1)=(z-3):3$ паралельна площині $2x+y-z=0$, а пряма $(x-2):2=y:(-1)=(z-4):3$ лежить у цій площині.

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1,\ -3,\ 3)$ і утворює з вісями координат кути у 60°, 45° і 120° відповідно.

4. Довести, що пряма $(x-1):2=(y+1):3=(z-1):6$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$.

5. Скласти параметричні рівняння медіани трикутника з вершинами: $A(3,\ 6,\ -7)$, $B(-5,\ 1,\ -4)$ і $C(0,\ 2,\ 3)$, яка проведена з вершини C.

6. При якому значенні n пряма $(x+2):3=(y+1):n=z:1$ буде паралельна прямій $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$.

7. Знайти точку перетину прямої $(x-1):1=(y+1):(-2)=z:6$ з площиною $2x+3y+z-1=0$.

8. Знайти проекцію точки $A(3,\ 1,\ -1)$ на площину $x+2y+3z-30=0$.

9. При якому значенні C площини: $3x-5y+Cz-3=0$ і $x+3y+2z+5=0$ будуть перпендикулярні?

10. При якому значенні A площина $Ax+3y-5z+1=0$ паралельна прямій $(x-1):4=(y+2):3=z:1$?

11. При яких значеннях n і C пряма $(x-1):n=(y+1):4=(z-5):(-1)$ перпендикулярна площині $3x-2y+Cz+1=0$?

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат паралельно прямій $\{x=2t+5,\ y=-3t+1,\ z=-7t-4\}$.

13. Перевірити, чи належать точки $A(0,\ 0,\ 2)$, $B(4,\ 2,\ 5)$ і $C(12,\ 6,\ 11)$ одній прямій.

14. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,\ -5,\ 3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$.

15. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,\ -3,\ 4)$ і перпендикулярна до прямих: $(x+2):1=(y-3):(-1)=(z+1):1$ і $(x+4):2=y:1=(z-4):(-3)$.

16. При яких значеннях A і B площина $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна до прямої $(x-2):2=(y+5):(-4)=(z+1):3$?

17. Показати, що пряма $x:6=(y-3):(-8)=(z-1):(-9)$ паралельна площині $x+3y-2z+1=0$, а пряма $(x=t+7,\ y=t-2,\ z=2t+1)$ лежить у цій площині.

18. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і точку $A(-3,\ 1,\ -2)$.

19. Показати, що прямі $x:1=(y-1):(-2)=z:3$ і $\{3x+y-5z+1=0,\ 2x+3y-8z+3=0\}$ перпендикулярні.

20. При якому значенні D пряма $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$ перетинає вісь Oz.

21. При якому значенні p прямі: $\{x = 2t + 5,\ y = -t + 2,\ z = pt - 7\}$ і $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$ паралельні?

22. Знайти точку перетину прямої $(x-7):5 = (y-1):1 = (z-5):4$ і площини $3x - y + 2z - 8 = 0$.

23. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\ -5,\ 3)$ паралельно площині Oxz.

24. Скласти загальні рівняння прямої, утвореної перетином площини $x + 2y - z + 5 = 0$ і площини, яка проходить через вісь O_y і точку M (5, 3, 2).

25. При яких значеннях B і D пряма $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0, \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ лежить у площині Oxy?

26. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(2,\ 3,\ 3)$ паралельно двом векторам $\overline{a} = (-1,\ -3,\ 1)$ і $\overline{b} = (4,\ 1,\ 6)$.

27. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3,\ 4,\ 5)$ паралельно вісі Ox.

28. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,\ 3,\ 1)$ перпендикулярно до прямої $(x+1):2 = y:(-1) = (z-2):3$.

29. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1,\ -5,\ 3)$ перпендикулярно до прямих $x:2 = (y-2):3 = (z+1):(-1)$ і $\{x = 3t + 1,\ y = -t - 25,\ z = 2t + 3\}$.

30. Знайти точку, яка симетрична точці $A(4,\ 3,\ 10)$ відносно прямої $(x-1):2 = (y-2):4 = (z-3):5$.

Змістовий модуль 1.3

Тема 5. ***Границі. Функції. Безперервність функцій***

ГРАНИЦІ

1. Знайти зазначені границі:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x+3}{3x-4}=\dfrac{7}{10}=0{,}7$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}=\dfrac{3\cdot 16-10\cdot 4-8}{4\cdot 16+6\cdot 4-64}=\dfrac{0}{24}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^3-7x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4\left(7+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}\right)}=\dfrac{7}{6}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x(10x-3)}{x^3\left(2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\dfrac{10}{\infty}=0$;

д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}\right)}{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{-\infty}{3}=-\infty.$;

е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{21+x-25}{(x-4)(x^2+x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)(x^2+x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)} = \frac{1}{480};$$

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x}{2x-3}\right)^{\frac{2-5x}{3}}\right)^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2-5x)}{2x-3}} = e^{-\frac{15}{2}};$$

з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{1+7x} = 2^{-\infty} = 0;$

и) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\pi^2-x^2} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi-x}{4}\right)}{(\pi-x)(\pi+x)} =$

$$= \lim_{x\to p}\frac{2\sin\left(\frac{p-x}{4}\right)\sin\left(\frac{p-x}{4}\right)}{4\left(\frac{p-x}{4}\right)(p+x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to p}\frac{\sin\left(\frac{p-x}{4}\right)}{(p+x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2p} = 0.$$

ФУНКЦІЇ

2. Довести, що функції $f(x) = \cos 2x - \cos^3 2x$ і $f(x) = 3x^2 - 5x^3$ коли $x \to 0$ є нескінченно малими одного порядку.

Рішення. Знаходимо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2-5x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2(3-5x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cos 2x \sin^2 2x}{2x2x(3-5x)}\right) = \frac{4}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Границя відношення функцій $f(x)$ і ц(x) відмінна від нуля і одиниці, отже (у відповідності з визначенням) дані функції нескінченно малі одного порядку.

3. Знайти границю, використовуючи еквівалентні нескінченно малі функції:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x} = 2.$$

Тут $\arcsin 8x \sim 8x$ і $\ln(1+4x) \sim 4x$, коли $x \to 0$.

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

4. Перевірити дану функцію на безперервність:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty < x \le 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x \le 2, \\ 5-x, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$

Рішення. Функція *f(x)* визначена і неперервна на інтервалах *(–∞;0]*, *(0;2]* і *(2;∞)*, де вона задана неперервними елементарними функціями. Отже, розрив можливий тільки у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Для точки $x_1 = 0$ маємо:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x^2 = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x-1)^2 = 1,$$

$f(0) = x^2\Big|_{x\to 0} = 0$, тобто функція *f(x)* у точці $x_1 = 0$ має розрив першого роду.

Для точки $x_2 = 2$ знаходимо:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (x-1)^2 = 1,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} (5-x) = 3, \quad f(2) = (x-1)^2\Big|_{x=2} = 1$$

тобто у точці $x_2 = 2$ функція *f(x)* також має розрив першого роду. Графік даної функції побудуйте самостійно.

5. Перевірити функцію $f(x) = 8^{\frac{1}{x-3}} + 1$ на неперервність у точках $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Рішення. Для точки $x_1 = 3$ маємо:

$$\lim_{x\to 3-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}} + 1\right) = 8^{-\infty} + 1 = 1, \quad \lim_{x\to 3+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}} + 1\right) = 8^{\infty} + 1 = \infty,$$

тобто у точці $x_1 = 3$ функція *f(x)* має нескінченний розрив ($x_1 = 3$ – точка розриву другого роду). Для точки $x_2 = 4$ маємо:

$$\lim_{x\to 4-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}} + 1\right) = 9, \quad \lim_{x\to 4+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}} + 1\right) = 9, \quad f(4) = 8^{\frac{1}{4-3}} + 1 = 9.$$

Отже, у точці $x_2 = 4$ функція *f(x)* неперервна.

Завдання до теми 5

1 Знайти зазначені границі

1. $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-x-12}$$

2. $$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$$

3. $$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$$

4. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$$

5. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{3x^2+x-2}$$

6. $$\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$$

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$$

8. $$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$$

9. $$\lim_{x\to -2}\frac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$$

10. $$\lim_{x\to 2}\frac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$$

11. $$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$$

12. $$\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$$

13. $$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$$

14. $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$$

15. $$\lim_{x\to -8}\frac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$$

16. $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{x^2-5x+6}$$

17. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$$

18. $$\lim_{x\to -1}\frac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$$

19. $$\lim_{x\to -3}\frac{4x^2+7x-15}{x^2-6x-27}$$

20. $$\lim_{x\to 3}\frac{6+x-x^2}{x^3-27}$$

21. $$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$$

22. $$\lim_{x\to -1}\frac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$$

23. $$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$$

24. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$$

25.
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$$

26.
$$\lim_{x\to 3} \frac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$$

27.
$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$$

28.
$$\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$$

29.
$$\lim_{x\to 3} \frac{12-x-x^2}{x^3-27}$$

30.
$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2+x-20}$$

$\boxed{2}$ Знайти зазначені границі

1.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$$

2.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$$

3.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$$

4.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$$

5.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$$

6.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$$

7.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$$

8.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$$

9.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$$

10.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3+7x^2-8}{6x^3-4x+3}$$

11.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2+7x+1}{3x^2+x-5}$$

12.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$$

13.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$$

14.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$$

15.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$$

16.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$$

17.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$$

18.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$$

19.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^4-2x-7}{3x^4+3x+5}$$

20.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$$

21.
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x+-2}{3x^3-x-4}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

$\boxed{3}$ Знайти зазначені границі

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^6-13}{x^7-3x^5-4x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x+10}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-5x+3}{3x^4+2x^2+x}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$

$\boxed{4}$ Знайти зазначені границі

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$

7. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

8. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$

9. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-8}$

12. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^3}{\sqrt{8+x}-3}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{x\sqrt{7}}$

18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{x^2+2x-15}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

21. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$

22. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$

23. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

25. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{5}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$\boxed{5}$ Знайти зазначені границі

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^{-3x}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$

$\boxed{6}$ Знайти зазначені границі

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{2\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{3x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\sin 2x}{x^3}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot tgx}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{\sin x}\right)\cdot\dfrac{1}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{\sin x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{tg3x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{2x^3}$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-ctg2x\right)\cdot\dfrac{1}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\arcsin x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x}$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi/2-x)\cdot tgx$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 7x+\sin x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$

$\boxed{7}$ Довести, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x \to 0$ нескінченно малі одного порядку

№	$f(x)$	$\varphi(x)$	№	$f(x)$	$\varphi(x)$
1	$tg\,2x$	$arcsin\,x$	16	$2x:(3-x)$	$2x-x^2$
2	$1-cos\,x$	$3x^2$	17	$x^2:(7+x)$	$3x^3-x^2$
3	$arctg^2\,3x$	$4x^2$	18	$sin\left(x^2+5x\right)$	x^3-25x
4	$sin\,3x-sin\,x$	$5x$	19	$cos\,x-cos^3\,x$	$6x^2$
5	$cos\,3x-cos\,x$	$7x^2$	20	$arc\,sin\,2x$	$8x$
6	$x^2-sin\,2x$	$6x$	21	$1-cos\,4x$	$x\,sin\,2x$
7	$\sqrt{1+x}-1$	$2x$	22	$\sqrt{9-x}-3$	$2x$
8	$sin\,x+sin\,5x$	$10x$	23	$cos\,3x-cos\,5x$	x^2
9	$cos\,7x-cos\,x$	$2x^2$	24	$3x:(1-x)$	$x:(4+x)$
10	$1-cos\,2x$	$8x^2$	25	$3x^2:(2+x)$	$7x^2$
11	$3\,sin^2\,4x$	x^2+2x	26	$2x^3$	$5x^3:(4-x)$
12	$arc\,sin\left(x^2-x\right)$	$7x^2+x$	27	$tg\left(x^2+2x\right)$	x^2+2x
13	$arc\,sin\,7x+sin\,x$	$4x$	28	$x^2:(5+x)$	$4x^2:(x-1)$
14	$\sqrt{4+x}-2$	$3x$	29	$sin\,8x$	$arcsin\,5x$
15	$sin\left(x^2-2x\right)$	x^4-8x	30	$sin\,3x+sin\,x$	$10x$

$\boxed{2}$ Знайти границі, використовуючи еквівалентні нескінченно малі функції

1	2	3
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(1+3x^2\right)}{x^3-5x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,5x}{tg\,3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,7x}{tg\,2x}$

4

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$$

5

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg\,6x}{2x^2-3x}$$

6

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin\,3x}{2x}$$

7

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin\,5x}{arctg\,2x}$$

8

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+3x)}{sin\,2x}$$

9

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{tg\,3x}$$

10

$$\lim_{x\to 3} \frac{sin(x-3)}{x^2-5x+6}$$

11

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos\,3x-cos\,x}{2x^2}$$

12

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,6x}{4x^2}$$

13

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg\,3x}{ln(1+2x)}$$

14

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin\,4x}{tg\,5x}$$

15

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{sin\,2x}$$

16

$$\lim_{x\to -2} \frac{tg(x+2)}{x^2-4x}$$

17

$$\lim_{x\to -2} \frac{sin(x+2)}{x^3+8}$$

18

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin\,2x}{tg\,4x}$$

19

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-64}{tg(x-4)}$$

20

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos\,2x-cos\,4x}{3x^2}$$

21

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+4x^2)}{2x^2}$$

22

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg\,5x}{tg\,2x}$$

23

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin\,3x}{ln(1+2x)}$$

24

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin\,8x}{tg\,4x}$$

25

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{tg\,2x}$$

26

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+4x)}{sin\,2x}$$

27

$$\lim_{x\to 3} \frac{sin(x-3)}{x^3-27}$$

28

$$\lim_{x\to -5} \frac{tg(x+5)}{x^2-25}$$

29

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,8x}{2x^2}$$

30

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+5x)}{sin\,3x}$$

$\boxed{9}$ Дослідити на неперервність функції і побудувати їх графіки

1. $$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

2. $$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & 1<x\le 1 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$$

3. $$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2 \\ -x+4, & x>2 \end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0 \\ x+1, & 0\le x\le 4 \\ 3+x, & x>4 \end{cases}$$

5. $$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x^2+1, & -1<x\le 1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$$

6. $$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0 \\ 0, & 0<x\le 2 \\ x-2, & x>2 \end{cases}$$

7. $$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ -(x-1)^2, & 0<x<2 \\ x-3, & x\ge 2 \end{cases}$$

8. $$f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 1 \\ 2+x, & x>1 \end{cases}$$

9. $$f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1 \\ (x+1)^3, & -1<x<0 \\ x, & x\ge 0 \end{cases}$$

10. $$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$$

11. $$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

12. $$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \pi/2 \\ 0, & \pi/2<x<\pi \\ 2, & x\ge \pi \end{cases}$$

13. $$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 2x, & x\ge 2 \end{cases}$$

14. $$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x^2-1, & 0\le x<1 \\ -x, & x\ge 1 \end{cases}$$

15. $$f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ 2^x, & 0<x\le 2 \\ x+3, & x>2 \end{cases}$$

16. $$f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2+1, & 0\le x<2 \\ x+1, & x\ge 2 \end{cases}$$

17. $$f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2 \\ x^3, & -2<x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$$

18. $$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ 1, & 0<x\le 2 \\ x^2-2, & x>2 \end{cases}$$

19. $$f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1 \\ x^2-2, & -1<x<2 \\ x, & x\ge 2 \end{cases}$$

20. $$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ sin\,x, & 0\le x<\pi \\ 3, & x\ge \pi \end{cases}$$

21. $$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ (x-2)^2, & 1<x<3 \\ -x+6, & x\ge 3 \end{cases}$$

22. $$f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<-1 \\ x^2+1, & -1\le x\le 2 \\ 2x, & x>2 \end{cases}$$

23. $$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ x^2+2, & 1\le x\le 2 \\ -2x, & x>2 \end{cases}$$

24. $$f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1 \\ x-1, & -1\le x\le 3 \\ -x+5, & x>3 \end{cases}$$

25. $$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ -x^2+4, & 0<x<2 \\ x-2, & x\ge 2 \end{cases}$$

26. $$f(x)=\begin{cases} x, & x<-2 \\ -x+1, & -2\le x\le 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$$

27. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ x^2-1, & -1<x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$$

28. $$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ \cos x, & 0\le x\le \pi\\ 1-x, & x>\pi\end{cases}$$

29. $$f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1\le x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$$

30. $$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases}$$

$\boxed{10}$ Дослідити на неперервність функції в зазначених точках

№	$f(x)$	x_1	x_2	№	$f(x)$	x_1	x_2
1	$2^{\frac{1}{x-3}}+1$	3	4	16	$8^{\frac{4}{2-x}}-1$	0	2
2	$5^{\frac{1}{x-2}}-1$	2	4	17	$5^{\frac{4}{3-x}}+1$	2	3
3	$(x+7):(x-2)$	2	3	18	$3x:(x-4)$	4	5
4	$(x-5):(x+3)$	–2	–3	19	$2x:(x^2-1)$	1	2
5	$4^{\frac{1}{3-x}}+2$	2	3	20	$2^{\frac{3}{x+2}}+1$	–2	–1
6	$9^{\frac{1}{2-x}}+1$	0	2	21	$4^{\frac{3}{x-2}}+2$	3	2
7	$2^{\frac{1}{x-5}}+1$	4	5	22	$3^{\frac{2}{1+x}}-2$	0	–1
8	$5^{\frac{1}{x-4}}-2$	3	4	23	$5^{\frac{3}{4-x}}+1$	5	4
9	$6^{\frac{1}{3-x}}+3$	3	4	24	$(x-4):(x+2)$	–2	–1
10	$7^{\frac{1}{5-x}}+1$	4	5	25	$(x-4):(x+3)$	–3	–2
11	$(x-3):(x+4)$	–5	–4	26	$(x+5):(x-3)$	3	4
12	$(x+5):(x-2)$	3	2	27	$3^{\frac{4}{1-x}}+1$	1	2
13	$5^{\frac{2}{x-3}}$	3	4	28	$4x:(x+5)$	–5	–4
14	$4^{\frac{2}{x-1}}-3$	1	2	29	$6^{\frac{2}{4-x}}$	3	4
15	$2^{\frac{1}{2-x}}-1$	2	0	30	$(x+1):(x-2)$	2	3

Тема 6. ***Диференціальне числення функцій однієї змінної та його застосування***

ПОХІДНА

1. Знайти похідну даної функції:

а) $y=9x^5-4x^{-3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4$;

$$y'=9\cdot 5x^4-4\cdot(-3)x^{-4}+\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-3=45x^4+12x^{-4}+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-3;$$

б) $y=\sqrt[4]{(2x^2-3x+1)^3}-6(x+1)^{-3}$;

$$y'=\frac{3}{4}(2x^2-3x+1)^{-\frac{1}{4}}\cdot(4x-3)-6(-3)(x+1)^{-4}=$$

$$=\frac{3(4x-3)}{4\sqrt[4]{2x^2-3x+1}}+\frac{18}{(x+1)^4};$$

в) $y=tg^5(x+2)arccos3x^2$;

$$y'=5tg^4(x+2)\cdot\frac{1}{cos^2(x+2)}\cdot arccos3x^2+tg^5(x+2)\cdot\frac{6x}{-\sqrt{1-9x^4}};$$

г) $y=arcsin^5 4x\cdot log_2(x-5)$;

$$y'=5\,arcsin^4 4x\cdot\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}\cdot log_2(x-5)+arcsin^5 4x\cdot\frac{1}{(x-5)ln2};$$

д) $y=3^{-x^4}ctg7x^3$;

$$y'=3^{-x^4}(ln3)(-4x^3)ctg7x^3+3^{-x^4}\cdot\frac{1}{-sin^2 7x^3}21x^2=$$

$$=-3^{-x^4}x^2\left(4x(ln3)ctg7x^3+\frac{21}{sin^2 7x^3}\right);$$

е) $y=cth^2 3x\cdot arctg\sqrt{x}$;

$$y' = 2cth3x \cdot \left(-\frac{1}{sh^2 3x}\right) 3arctg\sqrt{x} + \frac{cth^2 3x}{2(1+x)\sqrt{x}} =$$

$$= cth3x\left(-\frac{6arctg\sqrt{x}}{sh^2 3x} + \frac{cth^2 3x}{2(1+x)\sqrt{x}}\right);$$

ж) $y = \sqrt{3x^2 - 7x + 5} \cdot e^{x^4}$;

$$y' = \frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2 - 7x + 5}} + 4x^3 e^{x^4}\sqrt{3x^2 - 7x + 5} \;;$$

з) $y = (lg(x^2 - 3x + 5))/\,arcctg^2 5x$;

$$y' = \left(\frac{(2x-3)arcctg^2 5x}{(x^2 - 3x + 5)ln10} + \frac{10\,lg(x^2 - 3x + 5)arcctg5x}{1 + 25x^2}\right) arcctg^{-4} 5x \;;$$

и) $y = \sqrt{arcsin3x} \cdot sh^{-2} x$;

$$y' = \frac{3sh^{-2} x}{2\sqrt{arcsin3x} \cdot \sqrt{1 - 9x^2}} - 2chxsh^{-3} x\sqrt{arcsin3x} \;;$$

к) $y = \left(3\,ln\left(x^2 - 5\right)\right) / (x+3)^7$;

$$y' = 3\left(\frac{2x(x+3)}{x^2 - 5} - 7\,ln\left(x^2 - 5\right)\right)(x+3)^{-8} \;;$$

л) $y = \sqrt[7]{(x+5)/(x-5)} \cdot ctg(3x-4)$;

$$y' = \frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}} \cdot \frac{(x-5)-(x+5)}{(x-5)^2} ctg(3x-4) - \frac{3}{sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}} =$$

$$= \frac{10}{7}\frac{ctg(3x-4)\sqrt[7]{(x-5)^6}}{\sqrt[7]{(x+5)^6}} - \frac{3}{sin^2(3x-4)} \cdot \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}} \;;$$

м) $y = \left(th\sqrt{x+2}\right)^{ln(3x+2)}$.

Логарифмуємо дану функцію:

$$\ln y=\ln(3x+2)\ln(th\sqrt{x+2}).$$

Тоді

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{3x+2}\ln(th\sqrt{x+2})+\frac{\ln(3x+2)}{2th\sqrt{x+2}ch^2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x+2}}.$$

Звідси виразимо y':

$$y'=(th\sqrt{x+2})^{\ln(3x+2)}\cdot\left(\frac{3\ln(th\sqrt{x+2})}{3x+2}+\frac{\ln(3x+2)}{2\sqrt{x+2}sh\sqrt{x+2}ch\sqrt{x+2}}\right);$$

н) $y=(\sin 7x)^{arctg(3x-5)}$.

Знайшовши $\ln y = arctg(3x-5)\ln(\sin 7x)$, маємо:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+(3x-5)^2}\cdot 3\cdot\ln(\sin 7x)+arctg(3x-5)\cdot\frac{7\cos 7x}{\sin 7x}.$$

Звідси

$$y'=(\sin 7x)^{arctg(3x-5)}\cdot\left(\frac{3\ln(\sin 7x)}{1+(3x-5)^2}+\frac{7(arctg(3x-5))\cos 7x}{\sin 7x}\right);$$

о) $y=\sqrt[7]{(x+5)^6}\,/((x-1)^2(x+3)^5)$.

Застосовуючи метод логарифмічного диференціювання (див. попередні два приклади), послідовно знаходимо:

$$\ln y=\frac{6}{7}\ln(x+5)-2\ln(x-1)-5\ln(x+3),$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{x+5}-2\cdot\frac{1}{x-1}-5\cdot\frac{1}{x+3},$$

$$y'=\frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}\left(\frac{6}{7(x+5)}-\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+3}\right).$$

Тотожне перетворення останнього виразу виконайте самостійно.

2. Знайти y' і y'' якщо $x^3y-y^2=6x$.

Рішення. Диференціюємо обидві частини з урахуванням того, що $y=y(x)$. Маємо рівність $3x^2y+x^3y'-2yy'=6$, відкіля

$y' = (6 - 3x^2 y)/(x^3 - 2y)$.

Взявши похідну від обох частин попередньої рівності, одержимо:

$$6xy + 3x^2 y' + 3x^2 y' + x^3 y'' - 2y'^2 - 2yy'' = 0 ,$$

$$\text{відкіля } y''(x^3 - 2y) = 2y'^2 - 6x^2 y' - 6xy .$$

Отже, $$y'' = 2\frac{(6 - 3x^2 y)^2}{(x^3 - 2y)^3} - 6x^2 \frac{6 - 3x^2 y}{(x^3 - 2y)^2} - \frac{6xy}{x^3 - 2y} .$$

3. Знайти y' і y'', якщо

$$\begin{cases} x = 3t^4 - t^2 , \\ y = t^3 - 5. \end{cases}$$

Рішення. Тут

$$\begin{cases} x'_t = 12t^3 - 2t, \\ y'_t = 3t^2 , \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x''_{tt} = 36t^2 - 2, \\ y''_{tt} = 6t, \end{cases}$$

тому $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{12t^2 - 2t} = \frac{3t}{12t^2 - 2} ,$$

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{6t(12t^3 - 2t) - (36t^2 - 2)3t^2}{12t^2 - 2t} =$$

$$= \frac{72t^4 - 12t^2 - 108t^4 + 6t^2}{8t^3(6t^2 - 1)} = -\frac{3(6t^2 + 1)}{4t(6t^2 - 1)} .$$

4. Знайти $y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)$, якщо $y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos^2 x$.

Рішення. Послідовно знаходимо:

$$y' = \frac{1}{2}\cos x \sin x = \frac{1}{4}\sin 2x , \quad y'' = \frac{1}{2}\cos 2x , \quad y''' = -\sin 2x ,$$

$$y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 .$$

5. Записати формулу для похідної *n*-го порядку, якщо $y = xe^x$.

Рішення. Маємо:

$$y' = e^x + xe^x, \qquad y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x,$$

$$y''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$$

Порівнявши отримані вирази, запишемо:

$$y^{(n)} = ne^x + xe^x.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

6. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 9x - 4$ в точці з абсцисою $x = -1$.

Рішення. Ордината точки дотику $y(-1)=1+9-4=6$. У будь-якій точці $y' = 2x - 9$. У точці дотику $y'(-1) = -2 - 9 = -11$. Тому маємо рівняння дотичної (по точці $(-1,6)$ і кутовому коефіцієнту –11):

$$y - 6 = -11(x+1) \text{ або } y = -11x - 5.$$

7. Вздовж осі Ox рухаються дві матеріальні точки, закони руху яких

$x_1 = \dfrac{t^3}{3} - 4$ і $x_2 = \dfrac{7}{2}t^2 - 12t + 3$ (x - у метрах, t - у секундах).

У який момент часу їхні швидкості будуть рівними?

Рішення. Знаходимо швидкості обох точок: $x_1' = t^2, x_2' = 7t - 12$. Так як $x_1' = x_2'$, тому $t^2 = 7t - 12$. Або $t^2 - 7t + 12 = 0$. Відкіля: $t_1 = 3c$, $t_2 = 4c$.

8. Знайти значення границь, використовуючи правило Лопіталя:

а)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x^2+1)}{\sqrt[5]{3x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\sqrt[5]{(3x-1)^4}}{3(x^2+1)} = \frac{2}{3}\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[5]{(3x-1)^4}}{x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^4} + \frac{12}{5}x(3x-1)^{\frac{2}{5}}}{2x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to\infty} \frac{15x - 5 + 12x}{10x\sqrt[5]{3x-1}} =$$

$$= \frac{1}{15}\lim_{x\to\infty} \frac{27x-5}{x\sqrt[5]{3x-1}} = \frac{1}{15}\lim_{x\to\infty} \frac{27 - 5/x}{\sqrt[5]{3x-1}} = 0;$$

б) $$\lim_{x\to\frac{p}{2}} \frac{1 - \sin x}{tg^2 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{p}{2}} \frac{-\cos x}{2tg2x\dfrac{2}{\cos^2 2x}} = \lim_{x\to\frac{p}{2}} \frac{-\cos^3 2x\cos x}{4\sin 2x} =$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\cos^3 2x)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 4x}{e^{5x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{(1+16x^2)5e^{5x}}=\frac{4}{5};$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2-\sqrt{4+x^2}}-\frac{3}{\sqrt{16+x}-4}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{16+x}-4-3(2-\sqrt{4+x^2})}{(2-\sqrt{4+x^2})(\sqrt{16+x}-4)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{16+x}}+\frac{3x}{\sqrt{4+x^2}}}{-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}(\sqrt{16+x}-4)+\frac{1}{2\sqrt{16+x}}(2-\sqrt{4+x^2})}=\frac{1/8}{0}=\infty;$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)^x=1^\infty$. Позначимо $y=\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)^x$. Тоді

$$\ln y=x\ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right),\quad \lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x+3}\right)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^2-x-3}{x^2+3x-4}\right)\cdot\frac{(2x+3)(x^2-x-3)-(2x-1)(x^2+x-4)}{(x^2-x-3)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2(2x^3-2x^2-6x+3x^2-3x-9-2x^3-6x^2+8x+x^2+3x-4)}{(x^2+3x-4)(x^2-x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2(-4x^2+2x-13)}{(x^2+3x-4)(x^2-x-3)}=4.$$

Отже $\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x=4$, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{x^2-x-3}\right)^x=e^4$.

ДИФЕРЕНЦІАЛ

9. За допомогою диференціала обчислити дані величини й

оцінити відносну похибку (з точністю до двох знаків після коми):
а) $\sqrt[3]{84}$; б) *arctg 0,98.*
Рішення.

а) представимо дану величину у вигляді $\sqrt[3]{84}=\sqrt[3]{4^3+20}$ і введемо функцію $y=\sqrt[3]{x}$, де $x=x_0+\Delta x$; $x_0=64$; $\Delta x=20$. Скористаємося формулою $y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0)+y'(x_0)\Delta x$. Одержимо:

$$y(x_0)=\sqrt[3]{64}=4,\quad y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\quad y'(64)=\frac{1}{3\cdot 16}=\frac{1}{48}.$$

Обчислюємо $\sqrt[3]{84}\approx 4+\frac{20}{48}=4{,}42$.

Відносна похибка

$$\partial=\left|\frac{4{,}42-4{,}38}{4{,}420}\right|\cdot 100\%=0{,}905\%.$$

Більш точне значення $\sqrt[3]{84}\approx 4{,}38$;

б) скористаємося тією же схемою:

$$y=arctgx,\ x_0=1,\ \Delta x=-0{,}02,\ y(x_0)=\pi/4,\ \ y'=\frac{1}{1+x^2};\ \ y'(1)=0{,}5.$$

Тоді $arctg\ 0{,}98\approx\frac{p}{4}-0{,}5\cdot 0{,}02=0{,}7854-0{,}01=0{,}7754$,

$$\delta=\left|\frac{0{,}7754-0{,}7753}{0{,}7754}\right|\cdot 100\%=\frac{0{,}001}{0{,}7754}\cdot 100\%=0{,}13\%.$$

Тут *0,7753* - значення *arctg 0,98* з точністю до чотирьох знаків.

10. Провести повне дослідження функції $y=(x+3)^2/(x-4)$ і зробити ескіз її графіка.

Рішення. Для повного дослідження функції рекомендуємо наступну схему:

1) знайти області визначення і значень функції;

2) знайти точки розриву функції, точки перетину її графіка з осями координат і вертикальні асимптоти (якщо вони існують) ;

3) установити наявність чи відсутність парності, непарності, періодичності функції;

4) визначити критичні точки, інтервали монотонності і екстремуми функції;

5) визначити інтервали опуклості й увігнутості, точки перегину графіка функції;

6) знайти похилі асимптоти графіка функції;

7) зробити необхідні додаткові обчислення, наприклад, знайти точки перетину графіка з осями координат;

8) зробити ескіз графіка функції.

Отже:

1) областю визначення даної функції є множина $x \in (-\infty;4) \cup (4;\infty)$; $y \in (-\infty;0) \cup (28;\infty)$;

2) лінія $x = 4$ - вертикальна асимптота, причому

$$\lim_{x \to 4-0} y = \lim_{x \to 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x \to 4+0} = \lim_{x \to 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = \infty.$$

Точки перетину графіка з осями координат: $(0,-\frac{4}{9})$ і $(-3,0)$;

3) функція загального положення, тобто не є ні парною, ні непарною, ні періодичною;

4) знаходимо похідну:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4)-(x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-2x-24-x^2-6x-9}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2},$$

визначаємо інтервали монотонності і локальні екстремуми.

З $y'=0$ випливає $x^2-8x-33=0$, відкіля $x_1=11$, $x_2=-3$. В інтервалі $(-\infty;-3)$ похідна $y' > 0$, отже, функція зростає; в інтервалі $(-3;4)$ похідна $y' < 0$, тобто функція спадає; в точці $x = -3$ функція має локальний максимум: $y(-3)= 0$. В інтервалі $(4;11)$ похідна $y' < 0$, отже, функція спадає; в інтервалі $(11;\infty)$ похідна $y' > 0$, тобто функція зростає. У точці $x = 11$ функція має локальний мінімум: $y(11) = 28$;

5) досліджуємо функцію на опуклість, увігнутість і визначимо точки перегину. Для цього знайдемо y'':

$$y'' = \left(\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2}\right)' = \frac{(2x-8)(x-4)^2-(x^2-8x-33)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

Очевидно, що в інтервалі $(-\infty;4)$ друга похідна $y''<0$, і в цьому інтервалі крива опукла; у інтервалі $(4;\infty)$ друга похідна $y''>0$, тобто в цьому інтервалі крива увігнута. Тому що при $x = 4$ функція не визначена, то точка перегину відсутня;

6) знаходимо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+3)^2}{x-4} - x \right) =$$

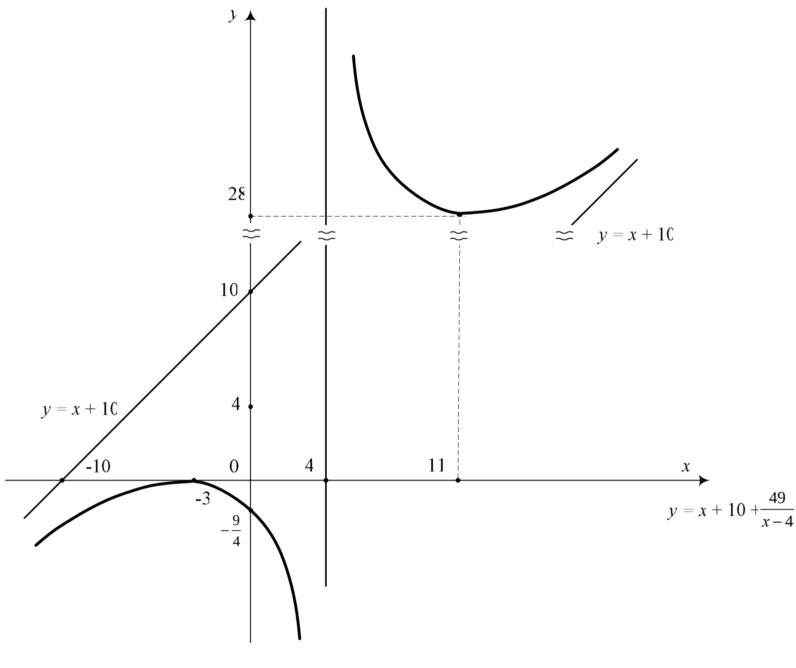
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10x+9}{x-4} = 10 .$$

Таким чином, існує похила асимптота $y = x+10$;

7) додаткові обчислення при $x = 0$ дають $y = \frac{-9}{4}$;

8) ескіз графіка функції зображено на рисунку.

Тут для збереження масштабу виконано розрив вісі oy.



11. Знайти найменше і найбільше значення функції $y = 2\,sin\,x + cos\,2x$ на відрізку [*0;p/2*].

Рішення. Знаходимо критичні точки: $y' = 2\,cos\,x - 2\,sin\,2x$, якщо $y' = 0$, то *2cosx – 4sinxcosx = 0*; *2cosx(1 – 2sinx) = 0.*
Якщо *cosx = 0,* то $x = \pi / 2 + \pi k$, якщо ж *sinx = 1/2,* то $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, k, n \in Z$.

З усіх знайдених критичних точок тільки *x = p/6* і *x = p/2* належать відрізку [*0;p/2*]. Обчислимо значення даної функції при *x = 0, x = p/6* і *x = p/2*:

$$y(0) = 1;\; y(\frac{\pi}{6}) = 2\,sin\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5\;;$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 2\,sin\frac{\pi}{2} + cos\,\pi = 2 - 1 = 1\;.$$

Отже, найбільшого значення на відрізку [*0;p/2*] функція досягає у точці $x = \frac{p}{6}:\quad y(\frac{p}{6}) = 1{,}5$, а найменшого - у точках *x = 0* і $x = \frac{p}{2}:\quad y(0) = y(\frac{p}{2}) = 1$.

Завдання до теми 6

$\boxed{1}$ Знайти похідну зазначеної функції

1. $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$

2. $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$

3. $y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$

4. $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$

5. $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$

6. $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$

7. $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$

8. $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}+\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$

9. $y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$

10. $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$

11. $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}-\sqrt[3]{5x^2+4x+3}$

12. $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}-\dfrac{4}{(x-4)^4}$

16. $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$

17. $y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$

18. $y=\dfrac{2}{(x-1)^{3/2}}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$

19. $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$

20. $y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$

21. $y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\dfrac{7}{(x-5)^2}$

22. $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\dfrac{4}{(x-7)^5}$

23. $y=\sqrt{(x-3)^7}+\dfrac{9}{7x^2-5x-8}$

24. $y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\dfrac{2}{1+3x-4x^2}$

25. $y=\dfrac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$

26. $y=\dfrac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$

27. $y=\dfrac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$

13. $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$

28. $y=\sqrt{(x-4)^7}-\dfrac{10}{(3x^2-5x+1)}$

14. $y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$

29. $y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$

15. $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$

30. $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}-\dfrac{5}{2x^2-4x+7}$

$\boxed{2}$ Знайти похідну зазначеної функції

1. $y=sin^3(2x)\cdot cos(8x^5)$

2. $y=cos^5(3x)\cdot tg(4x+1)^3$

3. $y=tg^4x\cdot arcsin(4x^5)$

4. $y=arcsin^3(2x)\cdot ctg(7x^4)$

5. $y=ctgx\cdot arccos(3x^2)$

6. $y=arccos^2(4x)\cdot ln(x-3)$

7. $y=ln^5x\cdot arctg(5x^3)$

8. $y=arctg^3(4x)\cdot 3^{sin\,x}$

9. $y=3^{tgx}\cdot arcsin(7x^4)$

10. $y=4^{-x}\cdot ln^5(x+2)$

11. $y=sin^4(3x)\cdot arctg(2x^3)$

12. $y=5^{x^2}\cdot arccos(2x^2)$

13. $y=2^{cos\,x}\cdot arcctg(5x^3)$

14. $y=cos^3(4x)\cdot arcctg\sqrt{x}$

15. $y=tg^3(2x)\cdot arcsin(x^5)$

16. $y=ctg^7x\cdot arccos(2x^3)$

17. $y=e^{-x}\cdot tg(7x^6)$

18. $y=e^{cos\,x}\cdot ctg8x^3$

19. $y=cos^5x\cdot arccos(4x)$

20. $y=sin^3(7x)\cdot arcctg(5x^2)$

21. $y=sin^2(3x)\cdot arctg(3x^5)$

22. $y=cos\sqrt[5]{x}\cdot arctg(x^4)$

23. $y=tg^6(2x)\cdot cos(7x^2)$

24. $y=ctg^3(4x)\cdot arcsin\sqrt{x}$

25. $y=ctgx\cdot arccos(x^4)$

26. $y=tg\sqrt{x}\cdot arcctg(3x^5)$

27. $y=tg^3(2x)\cdot arccos(2x^3)$

28. $y=2^{tgx}\cdot arctg^5(3x)$

29. $y=sin^5(3x)\cdot arctg\sqrt{x}$

30. $y=cos^4(3x)\cdot arcsin(3x^2)$

$\boxed{3}$ Знайти похідну зазначеної функції

1. $$y=\frac{log_5(3x-7)}{ctg(7x^2)}$$

2. $$y=\frac{ln(5x-3)}{4tg(3x^4)}$$

3. $$y=\frac{ln(7x+2)}{5cos^4(2x)}$$

4. $$y=\frac{sin^3(5x)}{ln(2x-3)}$$

5. $$y=\frac{cos^2(3x)}{lg(3x-4)}$$

6. $$y=\frac{tg^3(2x)}{lg(5x+1)}$$

7. $$y=\frac{log_3(4x+5)}{2ctg\sqrt{x}}$$

8. $$y=\frac{ln(7x-3)}{3tg^2(4x)}$$

9. $$y=\frac{lg(11x+3)}{cos^2(5x)}$$

10. $$y=\frac{ctg^2(5x)}{ln(7x-2)}$$

11. $$y=\frac{lg^2(x-2)}{lg(x+3)}$$

12. $$y=\frac{sin^3(5x+1)}{lg(3x-2)}$$

13. $$y=\frac{cos^4(7x-1)}{lg(x+5)}$$

14. $$y=\frac{sin^3(4x+3)}{ln(7x+1)}$$

15. $$y=\frac{ctg^3(2x-3)}{log_3(x+2)}$$

16. $$y=\frac{lg^3x}{sin(5x^2)}$$

17. $$y=\frac{ln^2(x+1)}{cos(3x^4)}$$

18. $$y=\frac{log_2(7x-5)}{tg\sqrt{x}}$$

19. $$y=\frac{log_3(4x-2)}{ctg2x}$$

20. $$y=\frac{lg^3(x-5)}{tg(x^{-2})}$$

21. $$y=\frac{ln(x+2)}{sin(2x^5)}$$

22. $$y=\frac{tg^3(7x)}{ln(3x+2)}$$

23. $$y=\frac{ctg\sqrt{x}}{lg(3x+5)}$$

24. $$y=\frac{tg(3x-5)}{ln^2(x+3)}$$

25. $$y=\frac{cos^2x}{lg(x^2-2x+2)}$$

26. $$y=\frac{log_2(3x+7)}{tg(3x)}$$

27. $$y=\frac{ln^3x}{ctg(x-3)}$$

28. $$y=\frac{tg^4(5x)}{ln(x+7)}$$

29. $$y=\frac{log_3(x+4)}{cos^5x}$$

30. $$y=\frac{tg^4(3x)}{lg(x^2-x+4)}$$

$\boxed{4}$ Знайти похідну зазначеної функції

1.	2.	3.
$y=(lg\,x)^{ln\,x}$	$y=(ln\,x)^{lg\,x}$	$y=(ln\,x)^{sin\,x}$
4.	5.	6.
$y=(ln\,x)^{cos\,x}$	$y=(lg\,x)^{cos\,x}$	$y=(lg\,x)^{sin\,x}$
7.	8.	9.
$y=(ln\,x)^{tg\,x}$	$y=(ln\,x)^{ctg\,x}$	$y=(ctg\,x)^{lg\,x}$
10.	11.	12.
$y=(tg\,x)^{ln\,x}$	$y=(cos\,x)^{lg\,x}$	$y=(sin\,x)^{ln\,x}$
13.	14.	15.
$y=(sin\,x)^{ln\,x}$	$y=(cos\,x)^{ln\,x}$	$y=\left(\sqrt{x}\right)^{sin\,x}$
16.	17.	18.
$y=\left(\sqrt{x}\right)^{cos\,x}$	$y=(cos\,x)^{\sqrt{x}}$	$y=(sin\,x)^{\sqrt{x}}$
19.	20.	21.
$y=(cos\,x)^{\frac{1}{x}}$	$y=(sin\,x)^{\frac{2}{x}}$	$y=(tg\,x)^{\sqrt{x}}$
22.	23.	24.
$y=(ctg\,x)^{\sqrt{x}}$	$y=\left(\sqrt{x}\right)^{tg\,x}$	$y=\left(\sqrt{x}\right)^{ctg\,x}$
25.	26.	27.
$y=\left(\sqrt{x}\right)^{arcsin\,x}$	$y=\left(\sqrt{x}\right)^{arctg\,x}$	$y=(arctg\,x)^{\sqrt{x}}$
28.	29.	30.
$y=(arcsin\,x)^{\sqrt{x}}$	$y=(arccos\,x)^{ln\,x}$	$y=(arc\,sin\,x)^{lg\,x}$

5 Знайти y' і y'' функції заданої наявно

1. $y^2 = 8x + \sin y$

2. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$

3. $y = x + arctg\, y^2$

4. $\frac{x^2}{5} + \sin y = 2$

5. $y^2 = 25x - 4\ln y$

6. $arctg\, y = 4x^2 + 5y$

7. $y^2 - x = \cos y$

8. $3x + \sin y^2 = 5y$

9. $tgy = 3x + 5y^3$

10. $xy^2 = ctg\, y$

11. $y = e^y + 4x$

12. $\ln y = y / x + 7$

13. $y^2 + x^2 = \sin y$

14. $e^y = 7x - 4y^2$

15. $4\sin^2(x + y) = x$

16. $\sin x = 7x + 3y^2$

17. $tgy = 4y^2 - 5x$

18. $y = 7x + ctg\, y^2$

19. $xy^2 - 6 = \cos y$

20. $3y = 7 + xy^3$

21. $y^2 = x + \ln(y / x)$

22. $xy^2 - y^3 = 4x - 5$

23. $x^2y^2 + x = 5y$

24. $x^4 + x^2y^2 + y = 4$

25. $\sin y = xy^2 + 5$

26. $x^3 + y^3 = 5x + y$

27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7} + y^2$

28. $y^2 = (x - y) : (x + y)$

29. $\sin^2(3x + y^2) = 5 + y$

30. $ctg^2(x + y) = 5x + y$

6 Знайти y' і y'' функції заданої параметрично

1. $\begin{cases} x = (2t + 3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = (t + 2)^{-1} \\ y = t^2 : (t + 2)^2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = 2t : (1+t^3) \\ y = t^2 : (t^2 - 1) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1} \\ y = (t+1) : \sqrt{t^2 - 1} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 4t + 2t^2 \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = ln t : t \\ y = t\, ln t \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = e^{t} cos t \\ y = e^{t} sin t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = t^4 \\ y = ln t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 5 cos t \\ y = 4e^{2t} \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 5 cos^2 t \\ y = 3 sin t \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = arctg t \\ y = ln(1+t^2) \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 3(t - sin t) \\ y = 3(1 - cos t) \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 3(sin t - t cos t) \\ y = 3(cos t + t sin t) \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = sin 2t \\ y = cos^2 t \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-3t} t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = ln t : t \\ y = t^2 ln t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 4 cos^3 t \\ y = 2 sin t \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t + t^{-1} \\ y = e^t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = e^{2t} t \\ y = e^{-2t} t \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2} \\ y = \sqrt{t-1} \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = ln^2 t \\ y = t + ln t \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = te^t \\ y = t : e^t \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 6t^2 + e^t \\ y = 6t^2 - e^t \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = arcsin t \\ y = ln t \end{cases}$

$\boxed{7}$ Розв’язати наступні задачі

1. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 7x + 3$ у точці з абсцисою $x = 1$.

2. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 - 16x + 7$ у точці з абсцисою $x = 1$.

3. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x-4}$ у точці з абсцисою $x = 8$.

4. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x+4}$ у точці з абсцисою $x = -3$.

5. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ у точці з абсцисою $x = 2$.

6. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ у точці з абсцисою $x = 1$.

7. Визначити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ у точці M (3, 2).

8. У якій точці кривої $y^2 = 4x^3$ її дотична перпендикулярна до прямої $x + 3y - 1 = 0$?

9. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x + 2$ у точці з абсцисою $x = 2$

10. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 / 4 - x + 5$ у точці з абсцисою $x = 4$.

11. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^4 / 4 - 27x + 60$ у точці з абсцисою $x = 2$.

12. Записати рівняння дотичної до кривої $y = -2x^2 + 7x - 8$ у точці з абсцисою $x = 3$.

13. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3tg(2x) + 1$ у точці з абсцисою $x = \pi / 2$.

14. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 4tg(3x)$ у точці з абсцисою $x = \pi / 9$.

15. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 6tg(5x)$ у точці з абсцисою $x = \pi / 20$.

16. Записати рівняння дотичної до кривої $y = sin(6x)$ у точці з абсцисою $x = \pi / 18$.

17. З'ясувати, в яких точках кривої $y = sin(2x)$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi / 4$.

18. З'ясувати, в яких точках кривої $y = 2x^3 - 1$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi / 3$.

19. З'ясувати, в яких точках кривої $y = x^3 / 3 - x^2 / 2 - 7x + 9$ її дотична утворює з віссю Ox кут $-\pi / 4$.

20. З'ясувати, в яких точках кривої $y = x^3 / 3 - 5x^2 / 2 + 7x + 4$ її дотична утворює з віссю Ox кут $\pi / 4$.

21. Знайти точки на кривій $y = x^3 / 3 - 9x^2 / 2 + 20x - 7$, в яких її дотична паралельна вісі Ox.

22. Знайти точку на кривій $y = x^4 / 4 - 7$, в якій її дотична паралельна прямій $y = 8x - 4$.

23. Знайти точку на кривій $y = -3x^2 + 4x + 7$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x - 20y + 5 = 0$.

24. Знайти точку на кривій $y = 5x^2 - 4x + 1$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x + 6y + 15 = 0$.

25. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 4x + 6$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $8x - y - 5 = 0$.

26. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 5x - 11$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $x - y + 10 = 0$.

27. Знайти точку на кривій $y = -x^2 + 7x + 16$, в якій її дотична перпендикулярна до прямої $y = 3x + 4$.

28. З'ясувати, в якій точці кривої $y = 4x^2 - 10x - 13$, її дотична паралельна прямій $y = 6x - 7$.

29. З'ясувати, в якій точці кривої $y = 7x^2 - 5x + 4$, її дотична

перпендикулярна до прямої $x+23y-1=0$.

30. З'ясувати, в якій точці кривої $y=x^2/4-7x+5$, її дотична перпендикулярна до прямої $y=2x+5$.

$\boxed{8}$ Розв'язати наступні задачі.

1. Траєкторія руху тіла – кубічна парабола $12y=x^3$. У яких точках на кривій швидкості зростання абсциси і ординати будуть однакові?

2. Закон руху матеріальної точки $S=\frac{3}{4}t^2-3t+7$. В який момент часу швидкість її буде дорівнювати 2 м/с?

3. Дві матеріальні точки рухаються за законами: $x=4t^2-7$ і $x=3t^2-4t+38$. З якою швидкістю ці точки віддаляються друг від друга у момент зустрічі?

4. Матеріальна точка рухається по гіперболі $xy=12$ так, що її абсциса x рівномірно зростає зі швидкістю 1 м/с. З якою швидкістю змінюється її ордината, коли вона проходить точку M (6, 2)?

5. У якій точці параболи $y^2=4x$ ордината зростає вдвічі швидше, ніж абсциса?

6. Закон руху матеріальної точки $S=t^4-3t^2+2t-4$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t=2$ с.

7. Закон руху матеріальної точки $S=3t^4-t^3+4t^2+6$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t=2$ с.

8. Закон руху матеріальної точки $S=4cos\left(\frac{1}{4}t+\frac{\pi}{4}\right)+6$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t=\pi$ с.

9. Закон руху матеріальної точки $S=4sin\left(\frac{1}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)-8$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t=\pi/2$ с.

10. Закон руху матеріальної точки $S = -3cos\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{12}\right) + 10$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t = \pi / 3$ с.

11. Закон руху матеріальної точки $S = \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 7$. В який момент часу її швидкість буде дорівнювати $V = 42$ м/с.

12. Закон руху матеріальної точки $S = 4t^3 - 2t^2 + 11$. В який момент часу її швидкість буде дорівнювати $V = 190$ м/с.

13. Закон руху матеріальної точки $S = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t = 2$ с.

14. Закон руху матеріальної точки $S = 2t^5 - 6t^3 - 58$. Знайти швидкість руху точки в момент часу $t = 4$ с.

15. Дві матеріальні точки рухаються за законами: $x = 3t^2 - 8$ і $x = 2t^2 + 5t + 6$. З якою швидкістю ці точки віддаляються друг від друга в момент зустрічі?

16. Дві матеріальні точки рухаються за законами: $x = 5t^2 - t + 6$ і $x = 4t^2 + 18$. В який момент часу їх швидкості будуть рівними?

17. Дві матеріальні точки рухаються за законами: $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ і $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В який момент часу їх швидкості будуть рівними?

18. Закон руху матеріальної точки $S = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 11t + 275$. В який момент часу її швидкість буде дорівнювати $V = 10$ м/с?

19. Матеріальна точка рухається по гіперболі $xy = 20$ так, що її абсциса x рівномірно зростає зі швидкістю 1 м/с. З якою швидкістю змінюється її ордината, коли вона проходить точку M (4, 5)?

20. У якій точці параболи $y^2 = 8x$ ордината зростає вдвічі швидше, ніж абсциса?

21. Дві матеріальні точки рухаються за законами: $x=5t^2+2t+6$ і $x=4t^2+3t+18$. З якою швидкістю ці точки віддаляються друг від друга в момент зустрічі?

22. У якій точці кривої $y^2=16x$ її ордината зростає у чотири раза швидше, ніж її абсциса?

23. У якій точці параболи $x^2=9y$ її абсциса зростає вдвічі швидше, ніж її ордината?

24. Дві матеріальні точки рухаються за законами: $x=2t^3-2t^2+6t-7$ і $x=\frac{5}{3}t^3-t^2+14t+4$. В який момент часу їх швидкості будуть рівними?

25. У якій точці параболи $x^2=10y$ її абсциса зростає в п'ять разів швидше, ніж її ордината?

26. Закон руху матеріальної точки $S=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2-30t+18$. В який момент часу швидкість її буде дорівнювати 0 м/с?

27. Тіло рухається по прямій за законом $S=\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+10t-16$. Визначити швидкість і прискорення руху тіла. В які моменти часу воно змінює напрямок руху?

28. Залежність між масою x речовини, яку отримають в якійсь хімічній реакції, і часом t_x визначається рівнянням $x=7\left(1-e^{-4t}\right)$. Знайти швидкість реакції у випадку, коли $t=0$ с.

29. Матеріальна точка рухається прямолінійно так, що $V^2=6S$, де V − швидкість, S − подоланий шлях. Визначити прискорення точки в момент, коли швидкість дорівнює 6 м/с.

30. Закон руху матеріальної точки $S=t^3+3t-1$. Знайти її швидкість в момент часу $t=2$ с.

9 Знайти границю за правилом Лопіталя

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{\ln(x+1)}-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx-x}{x-\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\arcsin((x-2)/2)}{tg(x-2)}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\pi-2arctgx)\ln x$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin(\pi x:2)}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(4^{1/x}-1\right)x$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{1-\cos x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx-x}{2\sin x+x}$

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x-2tgx}{1+\cos 4x}$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tgx}{tg(5x)}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

17. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)ctgx$

23. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{3}{x}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x+\sin x}{1-e^{2x}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x^2}{\sin x-\sin(4x)}$

28. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx-\sin x}{4x-\sin x}$

29. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx-tg(3x)}{1-\cos x}$

$\boxed{10}$ Знайти границю за правилом Лопіталя

1. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi-x)tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-arctgx}{x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2a}} \dfrac{1-\sin ax}{(2ax-\pi)^2}$

8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{4^x-1}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x^3}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{ctgx}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)}$

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^5-32}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin(2x)}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} (x\ln x)$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1-e^{2x}\right)ctgx$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-4^x}{x\sqrt{1-x^2}}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{\sin^2(2x)}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin(4x)}}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos(3x)-e^{-x}}$

22. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{3x^4}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$

24. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi/x}{ctg(2{,}5x)}$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{tg(4x)}$

27. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2\sin\left(\dfrac{4}{x^2}\right)\right)$

28. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-x}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(4x)}{1-e^{-x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

$\boxed{11}$ Знайти границю за правилом Лопіталя

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)^{ctgx}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+x))^{\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{ctg^2 x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{\frac{1}{x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(ctg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$

20. $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

21. $\lim\limits_{x\to \infty}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$

22. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

23. $\lim\limits_{x\to \infty}(x-1)^{\frac{1}{\ln(2x-2)}}$

24. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\frac{4}{x}\right)^{x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}(ctg 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

26. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{5}{x^2-x-20}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x^3\sin\frac{4}{x^3}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{e^x-e}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$

$\boxed{12}$ Знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку [a; b]

1.	$y = ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$,	[0; 3]	2.	$y = 3x : \left(x^2 + 1\right)$,	[0; 5]
3.	$y = (2x-1) : (x-1)^2$,	[−0,5; 0]	4.	$y = (x+2) \cdot e^{1-x}$,	[−2; 2]
5.	$y = ln\left(x^2 - 2x + 4\right)$,	[−1; 1,5]	6.	$y = \left((x+1) : x\right)^3$,	[1; 2]
7.	$y = x^3 : \left(x^2 - x + 1\right)$,	[−1; 1]	8.	$y = \sqrt{x - x^3}$,	[−2; −1]
9.	$y = \left(x^3 + 4\right) : x^2$,	[1; 2]	10.	$y = 4 - e^{-x^2}$,	[0; 1]
11.	$y = (x-2) \cdot e^x$,	[−2; 1]	12.	$y = x \cdot e^x$,	[−2; 0]
13.	$y = x : \left(9 - x^2\right)$,	[−2; 2]	14.	$y = (x-1) \cdot e^{-x}$,	[0; 3]
15.	$y = (1 + ln\,x) : x$,	$[e^{-1};\ e]$	16.	$y = e^{4x - x^2}$,	[1; 3]
17.	$y = \left(x^5 - 8\right) : x^4$,	[−3; −1]	18.	$y = x \cdot ln\,x$,	$[e^{-2}; 1]$
19.	$y = \left(e^{2x} + 1\right) : e^x$,	[−1; 2]	20.	$y = x^3 \cdot e^{x+1}$,	[−4; 0]
21.	$y = x^2 - 2x + 2 \cdot (x-1)^{-1}$,	$[\frac{3}{2}; 4]$	22.	$y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$,	[−4/5; 3]
23.	$y = 3x^4 - 16x^3 + 2$,	[−3; 1]	24.	$y = ln\,x : x$,	[1; 4]
25.	$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$,	[−1; 2]	26.	$y = (3-x) \cdot e^{-x}$,	[0; 5]
27.	$y = \sqrt{3}/2 + cos\,x$,	$[0; \frac{\pi}{2}]$	28.	$y = 108x - x^4$,	[−1; 4]
29.	$y = 0{,}25 \cdot x^4 - 6x^3 + 7$,	[16; 20]	30.	$y = e^{6x - x^2}$,	[−3; 3]

13 Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки

1	2	3
1) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ 2) $y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$ 3) $y=x^2\sqrt{x+1}$	1) $y=\frac{x^3-8}{2x^2}$ 2) $y=\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$ 3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$	1) $y=\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$ 2) $y=3ln\left(\frac{x}{x-3}\right)-1$ 3) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$
4	**5**	**6**
1) $y=\frac{x^2+1}{2x^2}$ 2) $y=(3-x)e^{x-2}$ 3) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	1) $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$ 2) $y=\frac{e^{2-x}}{2-x}$ 3) $y=\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$	1) $y=\frac{(x+3)^2}{x+4}$ 2) $y=ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+1$ 3) $y=(x^2-1)\sqrt{x+1}$
7	**8**	**9**
1) $y=\left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2$ 2) $y=(x-2)\cdot e^{3-x}$ 3) $y=x\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$	1) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ 2) $y=\frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$ 3) $y=-\frac{8+x^2}{\sqrt{x^2-4}}$	1) $y=\frac{x^2-2x+2}{x+3}$ 2) $y=3-3ln\left(\frac{x}{x+4}\right)$ 3) $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$
10	**11**	**12**
1) $y=\frac{2(x-1)^2}{x^2}$ 2) $y=-(2x+1)\cdot e^{2(x+1)}$ 3) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$	1) $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$ 2) $y=\frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$ 3) $y=\frac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}}$	1) $y=\frac{3x^2-10}{3-2x}$ 2) $y=ln\left(\frac{x}{x-2}\right)-2$ 3) $y=x\cdot\sqrt{(x+1)^3}$

13	14	15
1) $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ 2) $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$ 3) $y=\sqrt[3]{(x+3)\cdot x^2}$	1) $y=\frac{x^3-32}{x^2}$ 2) $y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$ 3) $y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$	1) $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$ 2) $y=2ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-1$ 3) $y=\sqrt[3]{(x^2-4)^2}$
16	17	18
1) $y=\frac{12-3x^2}{x^2+12}$ 2) $y=(4-x)\cdot e^{x-3}$ 3) $y=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$	1) $y=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$ 2) $y=-\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}$ 3) $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$	1) $y=\frac{(x+3)^2}{x-4}$ 2) $y=2ln\left(\frac{x-3}{x}\right)-3$ 3) $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$
19	20	21
1) $y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ 2) $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$ 3) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$	1) $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$ 2) $y=-\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$ 3) $y=\frac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$	1) $y=x-2+\frac{4}{x-2}$ 2) $y=2ln\left(\frac{x}{x-4}\right)-3$ 3) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
22	23	24
1) $y=\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$ 2) $y=-(x+1)\cdot e^{x+2}$ 3) $y=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2-x}$	1) $y=\frac{x^3-5x}{5-3x^2}$ 2) $y=\frac{e^{x+3}}{x+3}$ 3) $y=\frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$	1) $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$ 2) $y=ln\left(\frac{x}{x+5}\right)-1$ 3) $y=x^3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$

25	26	27
1) $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ 2) $y=-(2x+3)e^{2(x+2)}$ 3) $y=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$	1) $y=\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$ 2) $y=-\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$ 3) $y=\frac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}$	1) $y=\frac{-x^2-4x+13}{4x+3}$ 2) $y=ln\left(\frac{x-5}{x}\right)+2$ 3) $y=\sqrt[3]{x^3-4x}$
28	**29**	**30**
1) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ 2) $y=(4+x)\cdot e^{-(x+3)}$ 3) $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$	1) $y=\frac{x^3-4x}{3x^2-4}$ 2) $y=\frac{e^{x-3}}{x-3}$ 3) $y=\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$	1) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ 2) $y=ln\left(\frac{x+6}{x}\right)-1$ 3) $y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Станішевський С. О. Посібник для розв'язання задач з вищої математики. – Харків.: ХНАМГ, 2003. – 125 с.
2. Печеніжський Ю. Є, Станішевський С. О. і ін. Індивідуальні завдання з вищої математики. Частина 1. – Харків: ХНАМГ, 2007. – 87 с.
3. Станішевський С. О. Вища математика. Конспект лекцій. Модуль 1. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 151 с.

З М І С Т

Навчальне видання

СТАНІШЕВСЬКИЙ Степан Олександрович,
ПЕЧЕНІЖСЬКИЙ Юрій Євгенович

Завдання з вищої математики
(Модуль 1)
і приклади їх розв'язання

(для самостійної роботи студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво»)

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2010, поз. 142 М

Підп. до друку 14.12.2010 р. Формат 60×84 1/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 5,2
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 731 від 19.12.2001