

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

**В. Г. Ягуп**

# ***МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ***

## ***КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ***

(для студентів за напрямом підготовки  
6.050701 – «Електротехніка та електротехнології»  
спеціальності «Електричні системи електроспоживання»)

**Харків  
ХНАМГ  
2009**

**Ягуп В.Г.** Математичні задачі електроенергетики. Конспект лекцій (для студентів за напрямом підготовки 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» спеціальності «Електричні системи електроспоживання») / В.Г Ягуп; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. –Х.: ХНАМГ, 2009. - 98 с.

Укладач: проф., д. т. н. .В.Г.Ягуп

Рецензент: проф., д. т. н. О.Г.Гриб

Рекомендовано кафедрою електропостачання міст,  
протокол № 8 від 12.06.2009 р.

## ЗМІСТ

	Стор.
Вступ.....	4
1. Загальні відомості.....	5
2. Графи електричних систем.....	10
3. Матриця інцидентів та її рівняння.....	13
4. Дерево графа.....	16
5. Матриця особливих контурів.....	20
6. Матриця особливих перетинів.....	23
7. Топологічна матриця “контур-вітка”.....	27
8. Компонентні рівняння електричних систем.....	31
9. Метод змінних стану.....	34
10. Чисельні методи розв’язання рівнянь за методом змінних стану...	39
11. Стійкість чисельних методів інтегрування рівнянь стану.....	44
12. Системна матриця та її характеристичне рівняння.....	51
13. Власні значення системної матриці.....	59
14. Стійкі методи інтегрування рівнянь динаміки.....	70
15. Дискретні схеми зміщення.....	77
16. Матрична експонента та її застосування для розв’язання рівнянь стану.....	83
17. Розкладання Паде і його застосування для обчислення матричної експоненти.	88
18. Розрахунок ustalених режимів електричних мереж.....	92
Список літератури.....	98

## ВСТУП

Математичні задачі електроенергетики – одна з фундаментальних дисциплін в системі освіти спеціалістів в галузі електроенергетики. Вона розглядає основні концепції математичної постановки задач в галузі генерування, передачі, перетворення та споживання електричної енергії, а також математичні методи та обчислювальні алгоритми для розв’язування цих задач. Електроенергетичні системи являють собою надзвичайно складні системи, які мають різноманітне обладнання, що складається з генераторів електричної енергії, перетворювачів параметрів цієї енергії, передавальних пристроїв, а також споживачів, номенклатура яких відрізняється великим різноманіттям. У той же час основними завданнями при проектуванні та дослідженні цих систем є такі, що базуються в будь-якому разі на обчисленні режимів роботи цих систем, тобто на обчисленні величин струмів і напруг, що діють в системах. На основі даних аналізу режиму знаходять співвідношення, що стосуються розподілу потужностей в системі. Ці результати дозволяють обрати необхідні параметри електричного обладнання, оптимізувати режими за заданими цілями, виявити умови електромагнітної сумісності обладнання, що входить до складу електроенергетичної системи. Вже такий перелік завдань дисципліни доводить її важливість і користь від її належного вивчення.

Класичними підручниками з математичних задач електроенергетики є книги, написані В.С.Перхачем [1] і В.А.Веніковим [2]. Ці підручники вийшли в світ ще до інтенсивного впровадження обчислювальної техніки завдяки появі персональних комп’ютерів. Тому питання практичного застосування обчислювальної техніки в цих книгах не знайшли такого ретельного розгляду, який потрібний з огляду на сьогоdnішній стан справ. У зв’язку з цим в запропонованому посібнику належна увага приділяється викладенню питань математичних задач електроенергетики з орієнтацією на застосування сучасної обчислювальної техніки і програмного забезпечення, що може використовуватися для розв’язання цих завдань.

Автор сподівається, що посібник сприятиме засвоєнню студентами основних питань постановки математичних задач електроенергетики та методів їх розв’язанні і з вдячністю сприйме будь-які зауваження щодо змісту посібника.

## 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Під *системою* розуміють сукупність елементів, які зв'язані між собою таким чином, що при їх взаємодії досягається задана мета. Таким чином, система, по-перше, характеризується конкретним складом елементів, що її створюють, і, по-друге, способом з'єднання, тобто зв'язку елементів між собою. Об'єднана в систему сукупність елементів набуває особливих якостей, яких позбавлений кожний окремий елемент. Саме ці нові набуті системою якості дозволяють їй виконувати функції заради досягнення поставлених цілей.

Електроенергетичні системи являють собою складні розгалужені електричні ланцюги, що складаються з великої кількості одиниць обладнання самого різноманітного призначення. Ці складові елементи працюють над перетворенням енергії з одного виду в другий (наприклад, механічної енергії в електричну, хімічної в електричну, світлової в електричну). Вони здатні перетворювати параметри електричної енергії, змінюючи амплітуду й частоту змінного струму за допомогою трансформаторів та напівпровідникових перетворювачів електроенергії. Найпростішими можна визнати, скажімо, лінії електропередачі, що принципово являють собою елементарні провідники з міді чи алюмінію. Але при доскональному дослідженні навіть в цих відносно простих пристроях можна виявити досить складну картину протікання електромагнітних процесів. Тому електроенергетичні системи з повною підставою можна віднести до розряду *складних систем*. Складні системи класифікуються в дисципліні „системотехніка” за декількома ознаками – за кількістю елементів, що входять до складу системи (ця кількість може досягати  $10^{15} \div 10^{25}$ ), або за різноманітністю процесів, що мають місце при роботі системи (а в електроенергетичних системах можна знайти і теплові, і хімічні, і електромагнітні, і електромеханічні процеси, не говорячи вже про складні інформаційні процеси в системах керування), чи то за складністю режимів, у яких працює система (а в електроенергетичних системах різноманітні збурення можуть виникати навіть непередбаченими шляхами і приводити до складних умов роботи системи, особливо в аварійних режимах).

Слід також врахувати, що електроенергетичні системи (ЕЕС) є відповідальними за забезпечення виробничої діяльності та соціальної сфери суспільства. Вони є найбільш енергоспоживаючими і забезпечення безперебійної та економічної роботи цих систем є дуже важливим завданням. Тому щодо ЕЕС ставляться дуже високі вимоги з надійності, екологічності та ефективності роботи в цілому. Питання проектування ЕЕС і керування їх роботою постійно пов'язані з прийняттям оптимальних рішень, які можуть бути знайдені лише на основі детальних розрахунків режимів роботи ЕЕС.

Оскільки ЕЕС є складними, вони описуються великими системами рівнянь, які мають відповідно велику кількість невідомих змінних, в якості яких виступають струми й напруги в ЕЕС. У загальному випадку, рівняння ЕЕС являють собою системи інтегро-диференціальних рівнянь великого порядку. Наявність нелінійних елементів - напівпровідникових діодів, резисторів, розрядників, трансформаторів і реакторів з феромагнітними осердями, а також виникнення дугових розрядів – все це робить системи рівнянь нелінійними. Крім того, велика протяжність ліній електропередач вимагає брати до уваги не тільки часові, але й просторові координати. Це призводить до необхідності розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних. Розв'язання таких складних систем нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, навіть у спрощеному вигляді, неможливо без застосування сучасної високопродуктивної обчислювальної техніки і програмних засобів моделювання.

*Математичні моделі* можуть являти собою деякі абстракції, поведінка яких подібна до поведінки фізичного об'єкту. Їх застосування дозволяє вивчити і запрогнозувати процеси, параметри та характеристики об'єктів, що моделюються. Звичайно, річ не йде про абсолютно повне відображення моделлю усіх властивостей початкового об'єкту (оскільки ними володіє лише сам об'єкт). Модель вважається корисною навіть в тому разі, якщо вона відображає тільки ті властивості, які цікавлять дослідника. З розвитком науки і техніки з'явилась необхідність і можливість в проведенні складних розрахунків їх режимів на моделях.

Спочатку використовували так звані *фізичні моделі*. Вони являють собою копію реального об'єкта, що виконана в іншому масштабі. Наприклад, при будівництві архітектурних комплексів і тепер використовують макети відповідних районів, що дають загальне уявлення про характер забудови і гармонійне сполучення її з ландшафтом і тими забудовами, що вже існують.

Відомими є фізичні моделі сонячної системи із зображенням у вигляді макету планет і траєкторій їх руху. Глобус уявляє собою зменшену модель земної кулі. У хімії застосовують макетні моделі молекул. Відомі моделі гідроспоруд, що дають уявлення про підтоплення району при будівництві запруд. Існують зменшені копії літаків, залізниць та ін. В електроенергетиці при навчанні застосовують лабораторні фізичні моделі зменшеної потужності, поведінка яких дає уявлення про процеси, що можуть відбуватися у реальних ЕЕС, потужність яких на декілька порядків більша, ніж лабораторних макетів.

Із розвитком математики опис характеру процесів у системах починає здійснюватися у вигляді математичних виразів. Початково відомі задачі з математики, фізики, механіки розв'язуються у вигляді символічних виразів, тобто математичних формул. Такі *символьні методи* дають наочне уявлення про характер поведінки об'єкта і дозволяють дослідити поведінку системи на основі

аналізу отриманих формул. Яскравим прикладом могутності символічних моделей є відомі рівняння Максвелла, які описують поведінку електромагнітного поля. Геніальність відкриття Максвеллом цих рівнянь полягає ще в тому, що вчений отримав ці рівняння на основі абстрактних уявлень, навіть не маючи будь-якої апаратури для проведення експериментів. Такі експерименти були проведені лише через декілька десятиліть поспіль і повністю підтвердили математичні моделі Максвелла, щодо поведінки електромагнітного поля.

Однак використання символічних методів обмежується при ускладненні системи, коли її порядок збільшується. Навіть коли можна отримати символічні вирази, вони можуть стати такими громіздкими, що без засобів обчислювальної техніки неможливе їх застосування. Але більш важливіше, що при збільшенні розмірів системи може стати неможливим взагалі отримання символічного виразу для розв'язування системи. Типовою ситуацією є така, коли розв'язується диференціальне рівняння, порядок якого більше чотирьох. У такому випадку треба розв'язувати характеристичне рівняння. Воно являє собою алгебраїчне рівняння, корені якого дають уявлення про характер поведінки величин в динамічному режимі залежно від співвідношень між дійсними і уявними частинами коренів. Характеристичне рівняння потрібно розв'язувати при застосуванні класичного методу для розв'язування диференціальних рівнянь, коли за визначеними коренями характеристичного рівняння далі конструюється вид розв'язання. Коли задача розв'язується операторним методом, теж треба знаходити корені характеристичного рівняння. Воно являє собою алгебраїчне рівняння того порядку, який відповідає порядку диференціального рівняння або еквівалентної системи диференціальних рівнянь. З курсу шкільної математики відомі розв'язання алгебраїчного рівняння другого ступеня (квадратного) за формулами Вієтта. У довідниках з математики можна знайти досить громіздкі формули Кардано для розв'язання алгебраїчного рівняння третього ступеня (кубічного). Щодо алгебраїчного рівняння четвертого ступеня, то легко розв'язуються лише так звані біквадратні алгебраїчні рівняння четвертого ступеня (коли відсутні члени, відповідні до першого і третього ступеня). Повне алгебраїчне рівняння вище четвертого ступеня через радикали не може бути розв'язане, що довів видатний норвезький математик Абель своєю теоремою. Це означає що алгебраїчні рівняння вище четвертого ступеня не можуть бути розв'язані за допомогою відомих функцій і представлені в символічному вигляді.

Зазначені обставини суттєво обмежують значення символічних методів, цінність яких має, таким чином, теоретичне, навчальне значення. На практиці реальні системи мають порядки, які обчислюються десятками, сотнями (і більшими показниками), і отримання символічних розв'язань не тільки втрачає сенс у зв'язку з громіздкістю, а, враховуючи теорему Абеля, взагалі стає неможливим. Це в

повній мірі відноситься і до ЕЕС, де теоретично кожна котушка індуктивності і кожний конденсатор на одиницю збільшують порядок системи. Для розв'язання рівнянь, де неможливо отримати символьні вирази, застосовують так звані *чисельні методи*, які, таким чином, є більш загальними, бо можуть застосовуватися для розв'язання систем скільки завгодно високого порядку. Чисельні методи є наближеними, вони не можуть надати абсолютно точний результат, як це роблять символьні методи. Але тут втішним слід вважати, що похибка в „нормально діючих” чисельних методах з відпрацьованими алгоритмами може бути зменшена до скільки завгодно малої величини. Цього можна досягти за рахунок збільшення кількості комп'ютерного часу, який витрачається для розв'язування задачі.

У чисельних методах, як це вже можна зрозуміти, відсутній кінцевий вираз для розв'язання (це присутнє в символьних методах). Хід розв'язування визначається *обчислювальним алгоритмом*. Останній являє собою послідовність обчислювальних операцій, виконання яких призводить, нарешті, до отримання результату розв'язання із заданою точністю. Як вже зазначалося, чим вища потрібна точність, тим більше потрібно витратити комп'ютерного часу. Років двадцять тому, коли комп'ютери діяли досить повільно, для отримання деяких результатів обчислювальні машини повинні були працювати десятки й сотні часів безперервно. Тепер, коли швидкість роботи комп'ютерів зросла у тисячі разів, відповідно скоротились і витрати комп'ютерного часу. Інтенсивно розвиваються так звані багатопроцесорні обчислювальні комплекси, які дозволяють розділити в часі обчислення й виконати їх паралельно, що ще більше підвищує швидкість проведення розрахунків на комп'ютерах. Таким чином, чисельні методи реалізуються алгоритмами і відповідними комп'ютерними програмами, які добре налаштовані, відтестовані й накопичені у математичних інтегрованих пакетах. Чисельні методи отримують чисельні значення початкових даних, обробляють їх за відповідними алгоритмами і віддають отримані результати також у вигляді чисел. Яскравим прикладом могутності чисельних методів стало відкриття в 1846 р. планети Нептун французьким астрономом Левер'є і англійським математиком Адамсом, яке вони кожний окремо здійснили шляхом теоретичних розрахунків, виходячи з факту відхилень траєкторій відомих планет сонячної системи. До речі, саме цей науковий подвиг спонукав і Максвелла повірити в могутність математичних моделей і обумовив його геніальні відкриття в теорії електромагнітного поля шляхом створення своїх моделей.

Майже єдиним обмеженням чисельних методів є обмеження оперативної пам'яті комп'ютера. Але вже сьогодні середній розмір пам'яті комп'ютера сягає (512 – 1024)МБ, що дозволяє розв'язувати навіть на персональних комп'ютерах досить серйозні задачі.



Для опису і відображення чисельних методів існують декілька способів. Найпростіший полягає в тому, що чисельні дії описуються словесно. Більш наочним є спосіб опису за допомогою *графічних структурних схем*, де операції позначаються у вигляді обчислювальних блоків, а лінії сполучення зі стрілками вказують послідовність обчислень та умови переходу від одного блоку до другого. Нарешті, з огляду на необхідність „порозуміння” комп’ютером обчислювальних процесів були запропоновані так звані *алгоритмічні мови програмування* (Фортран у 1956 р., Алгол у 1960 р., Паскаль у 1971 р., Бейсік у 1964 р., Сі у 1978р.). За допомогою службових слів алгоритмічної мови спочатку визначають дані, необхідні для розв’язання задачі, а далі описують обчислювальні алгоритми, які забезпечують необхідні перетворення і обробку даних для отримання необхідних результатів.

Застосування програм на алгоритмічних мовах для комп’ютерної реалізації потребує спеціальних програм, що називаються *компіляторами*. Вони на основі тексту програми на алгоритмічній мові генерують двійковий код програми, який може виконувати комп’ютер. Найбільш поширеними є компілятори таких фірм, як Microsoft (MS Visual C++, MS Visual Basic) і Borland (Turbo Pascal, Delphi, Turbo C++, C++Builder).

Більш простими для розв’язання технічних задач, в тому числі і задач електроенергетики, представляються відомі *математичні обчислювальні пакети*, як MS Excel, MathCAD, MATLAB. Коротко характеризуючи ці пакети, можна зауважити, що всі ці програмні засоби забезпечені засобами програмування і готовими функціями та підпрограмами, а способи вживлення їх у систему дозволяють реалізувати обчислювальні алгоритми досить економічними і оригінальними способами. Розширення MATLAB, яке називається Simulink, дозволяє взагалі провести візуалізацію обчислювальних процесів і легко розв’язувати складні системи алгебраїчних і диференціальних рівнянь. Крім того у складі самого Simulink є засіб SimPowerSystem, що дозволяє створювати моделі електричних систем, максимально наближених до реальних систем електроенергетики. З урахуванням цього, при вивченні математичних задач електроенергетики, слід прагнути до якомога найширшого використання зазначених програмних засобів.

## 2. ГРАФИ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ

Взагалі під графом розуміють сукупність вузлів, які на рисунку позначаються точками, що сполучені між собою за допомогою ребер, які на рисунку відображаються у вигляді відрізків ліній.

Граф є фігура топологічна, тому несуттєві розміри й форма вузлів та ребер. Важливо лише, яким чином вони сполучаються між собою, тобто суттєво, до яких вузлів належить ребро. Простим прикладом графа є, наприклад, карта метро, де станції позначаються вузлами графа, а шляхи між станціями являють собою ребра.

Якщо ребра графа мають напрями, позначені звичайно стрілками, то такий граф називають орієнтованим, або скорочено – оргграфом. Для електричної системи оргграф фактично є скороченим зображенням принципової схеми. Для цього треба кожний двополюсник замінити ребром, напрямком якого співпадає з прийнятим позитивним напрямком струму в цьому елементі. Вузли оргграфа електричної системи відповідають точкам сполучення хоча б двох елементів.

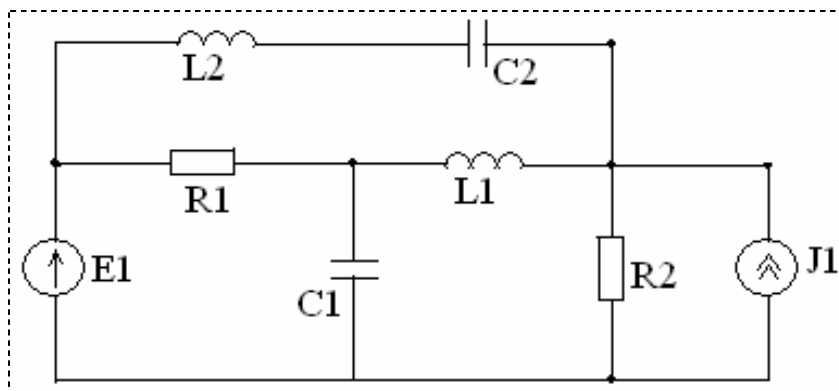
Розглянемо формування оргграфа електричної системи, що зображена на рис.2.1,а.

Позначимо вузли системи й позитивні напрямки струму в кожному елементі. При цьому в кожному елементі будемо вважати струм спрямованим від вузла з більш високим потенціалом до вузла з меншим потенціалом, як це показано на рис.2.1,б.

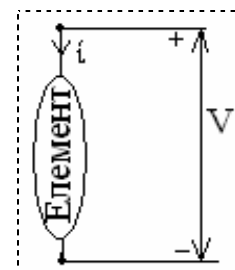
У резисторах, конденсаторах і індуктивностях вибір позитивних напрямків струмів можна здійснювати довільно, але напрямок струму в джерелі напруги диктується заданою полярністю напруги, а в джерелі струму цей напрямок співпадає з напрямком заданого струму. З урахуванням зазначеного, отримуємо схему з позначеними вузлами та прийнятими позитивними струмами і напругами, що наведена на рис.2.2.

Для отримання оргграфа цієї електричної системи кожний елемент замінимо ребром, напрямком якого співпадає з прийнятим позитивним напрямком струму через цей елемент. Оргграф системи зображений на рис.2.3.

Для того, щоб повідомити комп'ютеру про структуру графа, можна застосувати таблицю у вигляді списку ребер. Для кожного ребра треба вказати наступні дані:



а)



б)

Рис. 2.1.

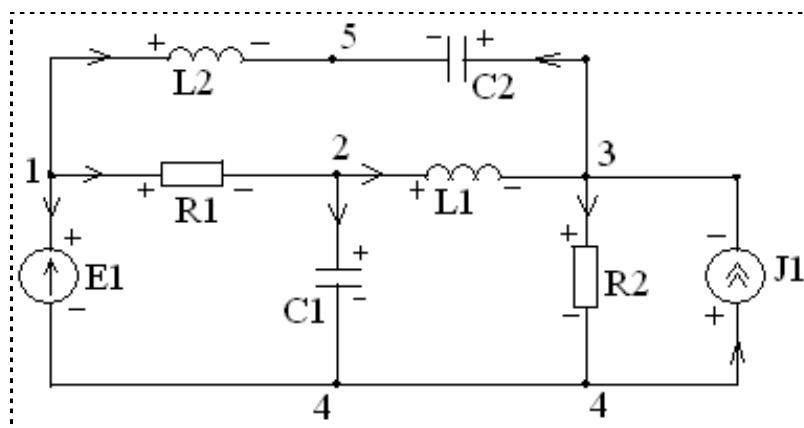


Рис.2.2

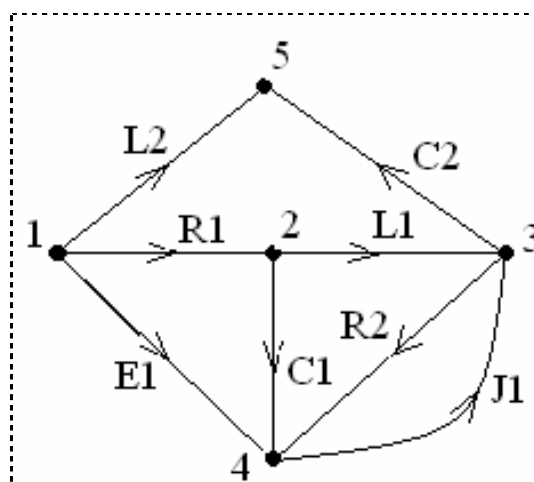


Рис. 2.3.

1. Тип елемента.
2. Номер елемента в групі однорідних елементів.
3. Номер початкового вузла, від якого стрілка відходить.
4. Номер кінцевого вузла, до якого стрілка спрямована.
5. Параметр (параметри, якщо їх декілька) елемента.

Для наведеної системи зазначена таблиця має наступний вигляд:

Таблиця 1.

№ п/п	Тип елемента	Номер елемента	Початковий вузол	Кінцевий вузол	Параметр
1	E	1	1	4	120.0
2	C	1	2	4	5.4E-03
3	C	2	3	5	0.02
4	R	1	1	2	24.5
5	R	2	3	4	384.0
6	L	1	2	3	1.2E-02
7	L	2	1	5	0.0016
8	J	1	4	3	0.75

Параметри елементів в останньому стовпчику прийняті довільно.

Для того, щоб ввести інформацію про орграф системи, необхідно зарезервувати масиви з відповідними розмірами й типами елементів. Наприклад, можна позначити масив *Tip* на 8 елементів, при цьому для розміщення в цьому символів 'E', 'C' і т.д. тип масиву повинен бути *char*. Для відображення наступних трьох стовпців можна ввести масиви *Nel*, *Nuz*, *Kuz* типу *integer*. Для відображення стовпця параметрів можна використовувати масив *Par* типу *double*. Введення конкретних даних в ці масиви можна забезпечити за допомогою оператора циклу.

### **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Що називається графом?
2. Який граф називається орієнтованим?
3. Яким чином обираються позитивні напрями струмів в елементах електричної системи?
4. Охарактеризуйте порядок отримання орграфа електричної системи .
5. Напишіть програму для вводу і виводу інформації про орграф будь якої електричної системи, реалізуйте її на комп'ютері на будь-якій алгоритмічній мові.

### 3. МАТРИЦЯ ІНЦИДЕНЦІЙ ТА ЇЇ РІВНЯННЯ

Ребро і вузол називають інцидентними, якщо вони належать одне одному. Наприклад, для графа, зображеного на рис.2.3. ребро C2 інцидентне вузлам 3 і 5, а вузол 2 інцидентний ребрам R1, L1, C1.

Матриця інциденцій відображає топологію графа, тобто спосіб сполучення ребер у вузлах.

Будемо позначати матрицю інциденцій через **A**. Її стрічки відповідають вузлам, а стовпці – ребрам. Наявність інцидентності в матриці **A** будемо позначати за допомогою +1, коли ребро спрямовано від вузла, і -1 – коли ребро спрямовано до вузла. Якщо вузол і ребро не інцидентні, то відповідний елемент вважається нульовим і ця клітина матриці залишається пустою. З урахуванням зазначеного матриця інциденцій для графа, зображеного на рис.2.3 має вигляд :

	<i>E1</i>	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>R1</i>	<i>R2</i>	<i>L1</i>	<i>L2</i>	<i>J1</i>
<b>A</b> = 1	+1			+1			+1	
2		+1		-1		+1		
3			+1		+1	-1		-1
4	-1	-1			-1			+1
5			-1				-1	

Наведена матриця охоплює всі вузли і називається повною матрицею інциденцій. Разом з тим раціонально розглядати скорочену матрицю інциденцій, складену для випадку, коли один з вузлів заземлено. Наприклад, при заземленому 4 вузлі відповідна йому 4 стрічка буде виключена, і скорочена матриця інциденцій має вигляд :

	<i>E1</i>	<i>C1</i>	<i>C2</i>	<i>R1</i>	<i>R2</i>	<i>L1</i>	<i>L2</i>	<i>J1</i>
<b>A</b> = 1	+1			+1			+1	
2		+1		-1		+1		
3			+1		+1	-1		-1
5			-1				-1	

У повній матриці інциденцій сума елементів кожного стовпця дорівнює нулю, тому із скороченої матриці інциденцій можна легко отримати повну. Для цього достатньо доповнити скорочену матрицю тією стрічкою, що відповідає заземленому вузлу, а елементи цієї стрічки вписати таким чином, щоб сума елементів повної матриці в кожному стовпці дорівнювала нулю.

За допомогою матриці інциденцій можна записати систему рівнянь за першим законом Кірхгофа, що має вигляд:

$$A \cdot I^P = 0,$$

де  $I^P$  – матриця-стовпець (або вектор) струмів ребер.

Беручи до уваги скорочену матрицю  $A$ , отримаємо незалежну систему рівнянь за першим законом Кірхгофа. Для схеми на рис.2.3 така система має вигляд :

	E1	C1	C2	R1	R2	L1	L2	J1
1	+1			+1			+1	
2		+1		-1		+1		
3			+1		+1	-1		-1
5			-1				-1	

 $\times$ 

$i_{E1}$
$i_{C1}$
$i_{C2}$
$i_{R1}$
$i_{R2}$
$i_{L1}$
$i_{L2}$
$i_{J1}$

 $=$ 

0
0
0
0

Здійснюючи операцію добутку матриць за правилом “стрічка на стовпець”, дотримуємо систему рівнянь за першим законом Кірхгофа у скалярній формі :

$$\begin{aligned} i_{E1} + i_{R1} + i_{L2} &= 0 \\ i_{C1} - i_{R1} + i_{L1} &= 0 \\ i_{C2} + i_{R2} - i_{L1} - i_{J1} &= 0 \\ -i_{C2} - i_{L2} &= 0 \end{aligned}$$

Розглядаючи граф, можна помітити, що ці рівняння записані для 1, 2, 3 і 5 вузлів. Ні одне з цих рівнянь не може бути отримане лінійною комбінацією інших рівнянь, таким чином ця система рівнянь є незалежною.

Друге матричне рівняння виражає напруги ребер через вузлові напруги відносно заземленого вузла :

$$V^P = A^T V^Y$$

де  $V^P$  – вектор напруг на ребрах (елементах);

$V^Y$  – напруги вузлів відносно заземленого;

$A^T$  – транспонована матриця інциденцій.

Операція транспонування полягає в тому, що стрічки початкової матриці  $A$  записують як стовпці транспонованої матриці  $A^T$ .

Конкретно для графа на рис.3.2:

$V_{E1}$
$V_{C1}$
$V_{C2}$
$V_{R1}$
$V_{R2}$
$V_{L1}$
$V_{L2}$
$V_{J1}$

 $=$ 

1	2	3	5
+1			
	+1		
		+1	-1
+1	-1		
		+1	
	+1	-1	
+1			-1
		-1	

 $\times$ 

$V_1$
$V_2$
$V_3$
$V_5$

Здійснимо операцію добутку матриць :

$$\begin{aligned}
 V_{E1} &= V_1 ; & V_{R2} &= V_3 ; \\
 V_{C1} &= V_2 ; & V_{L1} &= V_2 - V_3 ; \\
 V_{C2} &= V_3 - V_5 ; & V_{L2} &= V_1 - V_5 ; \\
 V_{R1} &= V_1 - V_2 ; & V_{J1} &= - V_3 .
 \end{aligned}$$

Для електроенергетичних розрахунків ці співвідношення мають не абияку користь. Справа в тому, що найбільш розповсюдженим методом аналізу режимів електричних мереж традиційно залишається метод вузлових напруг. Він дає змогу обчислити потенціали всіх вузлів відносно заземленого. Адже на цьому розрахунки не скінчаються, тому що треба визначати для кожного елемента (або ребра в графі системи) струм через нього, напругу на ньому і далі обчислювати потужність, що пов'язана з кожним елементом. Саме рівняння  $\mathbf{V}^P = \mathbf{A}^T \mathbf{V}^Y$  дозволяє обчислити напругу на кожному елементі. Поділивши напругу на елементі на його опір, отримаємо струм, що протікає через цей елемент. Добуток знайдених напруг і струму становить потужність, пов'язану з цим елементом.

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Що відображає матриця інциденцій?
2. У чому полягає поняття інцидентності?
3. Який розмір має матриця інциденцій?
4. Поясніть порядок формування матриці інциденцій, навівши конкретний приклад.
5. Чим відрізняються повна і скорочена матриця інциденцій?
6. Як за скороченою матрицею інциденцій відновити повну?
7. Які топологічні рівняння можна записати, користуючись матрицею інциденцій?

#### 4. ДЕРЕВО ГРАФА

Деревом графа називають зв'язану сукупність ребер, яка включає в себе всі вузли і не створює ні одного замкнутого контура. Виходячи з цього визначення, дерево, таким чином, відповідає трьом властивостям:

- 1) зв'язаність ребер;
- 2) включення всіх вузлів;
- 3) відсутність замкнених контурів;

Розглянемо отримання дерева на прикладі простого графа, зображеного на рис.4.1,а. Кількість вузлів цього графа  $N^v=4$ , кількість ребер  $N^p=5$ . Оскільки до дерева входять всі вузли, то накреслимо всі ці вузли і включимо до дерева ребро  $a$ . (рис.4.1,б). Така комбінація ребер ще не утворює дерево, оскільки не виконується властивість 2, що зазначена вище. Тому додамо ще одне ребро до дерева, наприклад, ребро  $f$  (рис.4.1,в). Така сукупність ребер також ще не створює дерева, оскільки сукупність ребер не зв'язана, не задовольняється властивість 1. Додамо ще одне ребро  $c$ , і отримаємо сукупність ребер, що відповідає визначенню дерева. Додавання ще одного будь-якого ребра вже створить замкнений контур, тому для даного графа дерево утворюється тільки трьома ребрами.

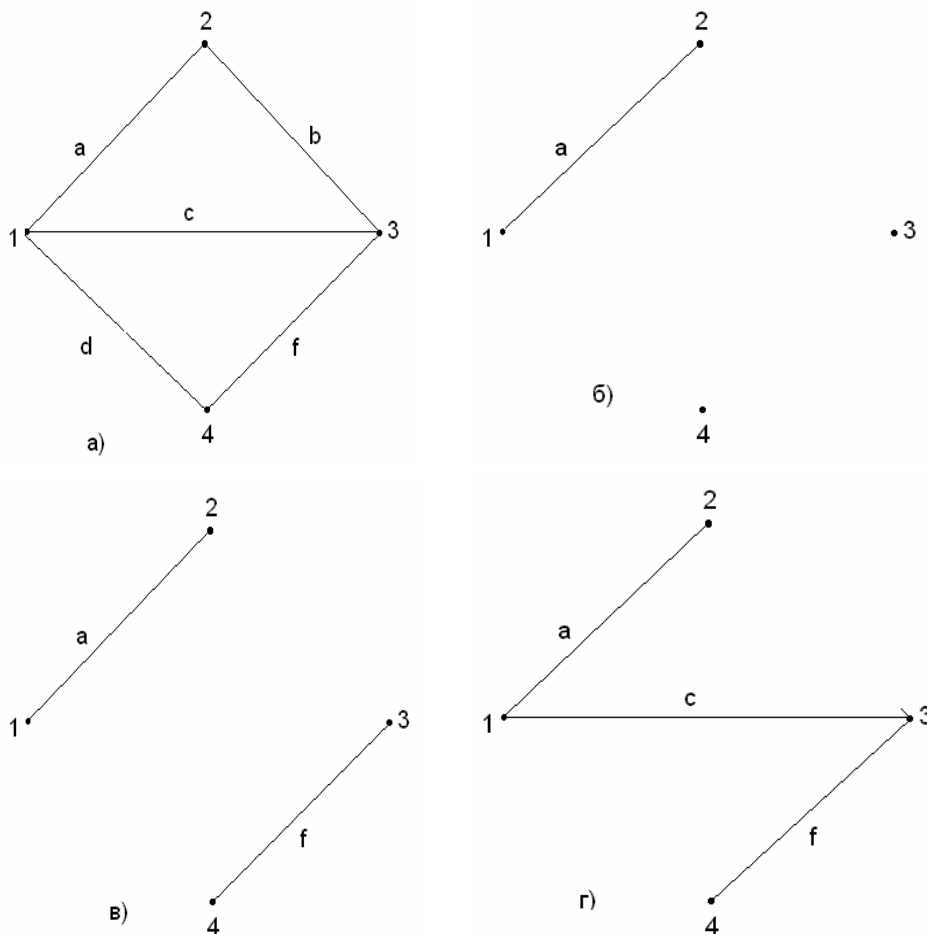


Рис. 4.1.



Ті ребра, що увійшли до складу дерева графа, прийнято називати вітками, а ті, що не створюють дерева, – зв'язками. Вітки далі будемо позначати на рисунках безперервними виділеними лініями, а зв'язки – перервними тонкими лініями.

Як визначити кількість гілок  $N^g$  будь-якого графа? Наведемо такі аргументи: якщо маємо дерево лише з однієї вітки, то воно містить 2 вузли, тобто якщо  $N^g=1$ , то  $N^v=2$ . Додавання до дерева ще однієї вітки збільшує кількість вузлів також лише на одиницю, оскільки один з двох вузлів цієї нової вітки поглинається вузлом, що вже міститься у дереві. Тому при  $N^g=2$ , буде  $N^v=3$ . Ці міркування зберігають сенс при подальшому збільшенні кількості гілок, тому первинне перебільшення кількості вузлів на одиницю кількості гілок буде збігатися в будь-якому разі. Таким чином, кількість гілок на одиницю менше кількості вузлів:

$$N^B = N^v - 1.$$

Зв'язки складаються з тієї сукупності ребер, що не увійшли до складу дерева, тому кількість зв'язків  $N^c$  обчислюється за виразами:

$$N^c = N^p - N^g = N^p - N^v + 1.$$

Отже для графа на рис.2.3:

$$N^v = 4; \quad N^p = 5; \quad N^g = 3; \quad N^c = 2.$$

Виходячи з визначення поняття дерева, можна побудувати і інші варіанти дерев, що приведені на рис.4.2 а-ж, включаючи і перший варіант сформованого дерева. Для розглянутого графа кількість розглянутих дерев  $n_d = 8$ .

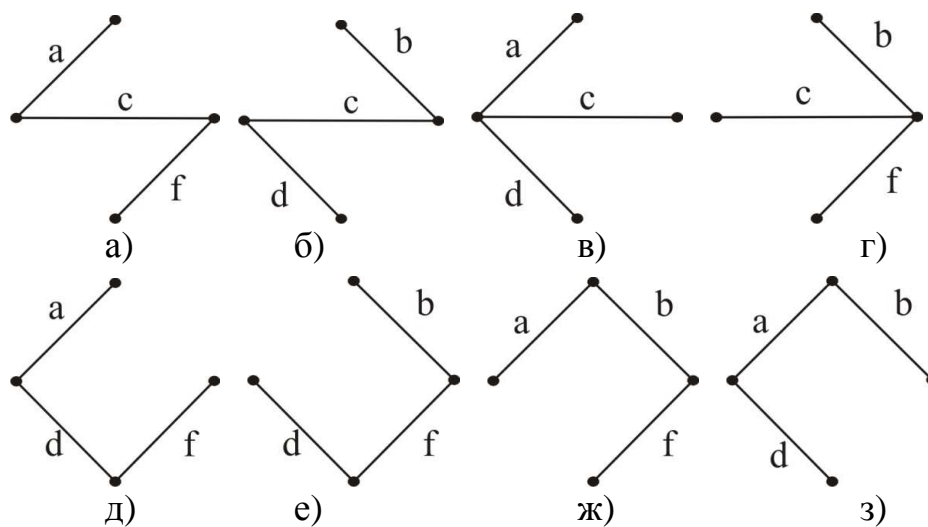


Рис.4.2

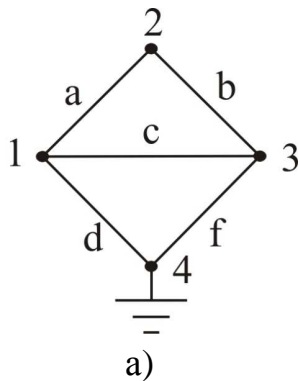
Як можна обчислити кількість всіх можливих дерев для будь-якого графа? Відома методика полягає у наступному алгоритмі.

а)Заземлити один з вузлів графа.

б)Скласти матрицю вузлових провідностей графа, вважаючи провідність кожного ребра одиничною.

в) Знайти визначник отриманої матриці, його значення і буде дорівнювати кількості всіх можливих дерев графа.

Для графа на рис.4.1,а заземлено вузол 4 (рис.4.3а). Будемо вважати, що  $a, b, c, d, f$  позначають провідності ребер графа. Для складання матриці вузлових провідностей пригадаймо, що в діагоналі клітини слід вписати суми провідностей тих ребер, що зв'язані з відповідним вузлом, а в недіагональні клітини вписуємо суми провідностей тих елементів, що сполучені безпосередньо з двома вузлами, номери яких відповідають номерам стрічки і стовпця недіагонального елемента.



$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a+c+d & -a & -c \\ -a & a+b & -b \\ -c & -b & b+c+f \end{bmatrix} \end{matrix}$$

б)

Рис 4.3.

Матриця вузлових провідностей показана на рис.4.3,б. Вважаючи, що  $a=b=c=d=f=1$ , отримаємо цю матрицю у такому вигляді:

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Визначник цієї матриці дає:

$$N_0 = \det \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix} = 18 - 1 - 1 - 2 - 3 - 3 = 18 - 10 = 8$$

Поняття дерева виявляється дуже корисним для формалізації формування рівнянь електричної системи за законами Кірхгофа. Однак для раціонального вибору дерева електричної системи слід дотримуватись наступних правил, прагнучи скласти так зване нормальне дерево.

- 1) У дерево повинні увійти всі джерела напруги і конденсатори.
- 2) Всі джерела струму й котушки індуктивностей повинні бути зв'язками.
- 3) Резистори можна включати як до складу дерева, так і до складу зв'язків.

Зважаючи на ці правила, сформулюємо дерево для графа на рис.2.3.

У першу чергу до дерева треба віднести елементи E1, C1, C2. Однак цього ще не достатньо, оскільки сукупність цих ребер є не зв'язаною. Резистор R1 не можливо віднести до дерева, оскільки він утворює замкнутий контур разом з елементами E1 і C1, при цьому до того ж не замикається сукупність ребер, що формує дерево. А от включення до складу дерева елемента R2 доречне, саме при цьому створюється нормальне дерево електричної системи. Ребро R1, L1, L2, J1 відноситься до зв'язків тому на рис.4.4 вони зображені перервними лініями.

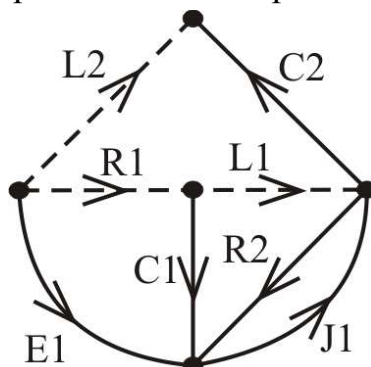


Рис. 4.4

На закінчення слід зауважити, що не завжди можна утворити нормальне дерево. Можна розглядати такі електричні системи, які мають у своїй топології контури, створені виключно із джерел напруги і конденсаторів, а також зірки, створені виключно джерелами струму і котушками індуктивностей. Такі схеми називають схемами з топологічними особливостями (або з топологічними виродженнями, з надлишковими елементами). Аналіз таких систем потребує спеціальних підходів, один з яких враховує, що ідеальних джерел, конденсаторів і котушок індуктивностей в реальності не існує і саме прийняття до уваги малих опорів і провідностей допомагає розв'язати проблему топологічних вироджень.

### **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

#### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Дайте визначення дерева.
2. Як обчислити кількість гілок і зв'язків?
3. Як обчислити кількість всіх можливих дерев графа?
4. Які правила слід взяти до уваги, якщо формувати дерево графа електричної системи?
5. Створіть декілька електричних систем і поясніть, як можна для них утворити дерево?

## 5. МАТРИЦЯ ОСОБЛИВИХ КОНТУРІВ

Особливим контуром називають контур, який утворюється, якщо до дерева приєднати лише один зв'язок. Таким чином, кожен зв'язок утворює свій особливий контур, тому кількість особливих контурів дорівнює кількості зв'язків.

На рис.5.1 наведені всі варіанти утворення особливих контурів для графа системи, зображеного на рис.2.3.

У кожному особливому контурі позитивний напрямок обходу контура визначає напрямок саме того зв'язку, який утворює цей особливий контур.

Якщо обійти особливий контур за позитивним напрямом, визначеним зв'язком, то можна визначити співпадіння чи неспівпадіння інших ребер особливого контура, якими є вітки. Так у особливому контурі, утвореному зв'язком R1, вітка C1 співпадає з позитивним напрямом, а вітка E1 протилежна позитивному напрямку. Співставивши +1 для випадку співпадіння, а -1 випадку неспівпадіння ребра з позитивним напрямом, можна утворити матрицю особливих контурів, яка відображатиме структуру особливих контурів.

Матрицю особливих контурів будемо позначати через **B**. Стрічки матриці **B** відповідають зв'язкам, а стовпці—ребра графа. При цьому розділимо всі ребра на вітки і зв'язки. У кожній стрічці треба вписати +1, якщо ребро входить до складу особливого контура і співпадає з позитивним напрямом обходу контура.

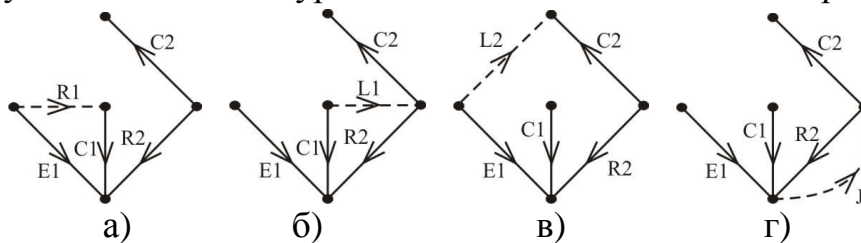


Рис.5.1

Якщо ребро протилежне позитивному напрямом обходу контура, то в стрічці у відповідному стовпцю записується -1. У стовпцях тих ребер, які не потрапили до даного особливого контура, треба вписати 0 (звичайно ці елементи залишають пустими). Користуючись цими правилами і рис.5.1, отримаємо таку матрицю особливих контурів:

	E1	C1	C2	R2	R1	L1	L2	J1
<b>B</b> =	R1	-1	+1		+1			
	L1		-1	+1		+1		
	L2	-1		-1	+1		+1	
	J1			+1				+1
	вітки				зв'язки			

Зазначимо, що подвійна вертикальна лінія вказує межу між ребрами-вітками і ребрами-зв'язками.

За допомогою матриці особливих контурів можна записати матричне рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$\mathbf{BV}^p = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

де  $\mathbf{V}^p$  – вектор напруг на ребрах.

Підставимо матриці в це співвідношення і отримаємо:

	E1	C1	C2	R2	R1	L1	L2	J1
R1	-1	+1			+1			
L1		-1		+1		+1		
L2	-1		-1	+1			+1	
J1				+1				+1

 $\times$ 

$V_{E1}$
$V_{C1}$
$V_{C2}$
$V_{R2}$
$V_{R1}$
$V_{L1}$
$V_{L2}$
$V_{J1}$

 $=$ 

0
0
0
0

Здійснюючи операції матричного добутку, отримаємо рівняння за другим законом Кірхгофа у скалярній формі:

$$\begin{aligned} -V_{E1} + V_{C1} + V_{R1} &= 0 \\ -V_{C1} + V_{R2} + V_{L1} &= 0 \\ -V_{E1} - V_{C2} + V_{R2} + V_{J1} &= 0 \\ V_{R2} + V_{J1} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ці рівняння створюють незалежну систему, оскільки ні одне із наведених рівнянь не може бути отримане лінійною комбінацією будь-яких інших рівнянь цієї системи.

Розглянемо далі запис системи (5.3) за допомогою розбиття матриці  $\mathbf{B}$  і  $\mathbf{V}^p$  на блоки. Як відомо з матричного обчислення, матриці можна розподіляти за допомогою вертикальних і горизонтальних ліній-меж на блоки, які називають також блочними матрицями, або підматрицями, або субматрицями. У нашому випадку врахуємо розподіл матриць подвійними лініями на елементи, що відповідають віткам і зв'язкам, тоді рівняння (5.3) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^v & \mathbf{B}^c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{V}^v \\ \mathbf{V}^c \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

де  $\mathbf{B}^v$  і  $\mathbf{B}^c$  – лівий і правий блоки матриці  $\mathbf{B}$ , які відповідають віткам і зв'язкам;  
 $\mathbf{V}^v$  і  $\mathbf{V}^c$  – верхній і нижній блоки матриці  $\mathbf{V}^p$ , які відповідають віткам і зв'язкам.

Правила операцій з блочними матрицями співпадають з правилами здійснення операцій із звичайними матрицями, при цьому блоки повинні

розглядатися як елементи звичайних матриць. Здійснимо операцію добутку блочних матриць у виразі (5.5):

$$B^e V^e + B^c V^c = 0 \quad (5.6)$$

Врахуємо, що матриця  $B^c$  завжди одинична. Це з'ясовується, коли пригадати, що в особливий контур завжди входить лише один зв'язок, тому в тій частині кожної стрічки матриці  $B$ , яка відповідає зв'язкам, може міститися тільки одна одиниця. Таким чином  $B^c = I$ , де  $I$  – одинична матриця відповідного порядку. Оскільки множення на одиничну матрицю не змінює початкову матрицю, то  $B^c V^c = I V^c = V^c$ , тому (5.6) можна подати у вигляді:

$$B^e V^e + V^c = 0,$$

звідки отримаємо:

$$V^c = -B^e V^e \quad (5.7)$$

Це матричне співвідношення виражає напруги на зв'язках через напруги на вітках. Для конкретного прикладу маємо:

$$\begin{array}{|c|} \hline V_{R1} \\ \hline V_{L1} \\ \hline V_{L2} \\ \hline V_{J1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & E1 & C1 & C2 & R2 \\ \hline +1 & -1 & & \\ \hline & & +1 & & -1 \\ \hline +1 & & & +1 & -1 \\ \hline & & & & -1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline V_{E1} \\ \hline V_{C1} \\ \hline V_{C2} \\ \hline V_{R2} \\ \hline \end{array}$$

Розкриємо операцію матричного добутку:

$$\begin{aligned} V_{R1} &= V_{E1} - V_{C1}; \\ V_{L1} &= V_{C1} - V_{R2}; \\ V_{L2} &= V_{E1} + V_{C2} - V_{R2}; \\ V_{J1} &= -V_{R2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Система рівнянь (5.9) може бути отримана з системи (5.4), якщо в лівій частині залишити напруги зв'язків. Тому система (5.9) представляє собою також незалежну систему рівнянь за другим законом Кірхгофа для особливих контурів.

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Як чином утворюється кожний особливий контур?
2. Як обирають позитивний напрямок обходу кожного особливого контура?
3. З'ясуйте правила утворення матриці особливих контурів на прикладі будь-якої електричної системи.
4. Яким чином здійснюють розподіл матриць на блоки і операції з такими матрицями?
5. Які матричні рівняння можна записати за допомогою матриці особливих контурів?

## 6. МАТРИЦЯ ОСОБЛИВИХ ПЕРЕТИНІВ

Перетином називають сукупність ребер, при розриві яких граф розпадається на дві незв'язані частини, однією з яких може бути навіть окремий вузол (в останньому випадку перетин називають канонічним).

На рис. 6.1 наведено приклад графа, перервними лініями показано розташування деяких можливих перетинів. Ребра графа позначені латинськими літерами, а перетини - номерами. Таким чином, до перетину 1, наприклад, належать ребра g, h, f, b. Перетини 3 і 4 представляють канонічні перетини, оскільки відділяють окремі вузли в якості однієї з частин, на які розділяється граф перетином. Зазначимо, що перервні лінії кожного перетину можуть бути зображені в замкнутому вигляді, тобто ліній перетинів 1, 2, 3 їхніми продовженнями можуть бути замкнені і виглядати як лінії перетинів 4 і 5. При цьому не матиме значення, в який спосіб буде охоплена частина графа цим замкненим перетином. Замкнення лінії перетину буде для нас корисне при подальшому розгляді орієнтованих графів електричних систем.

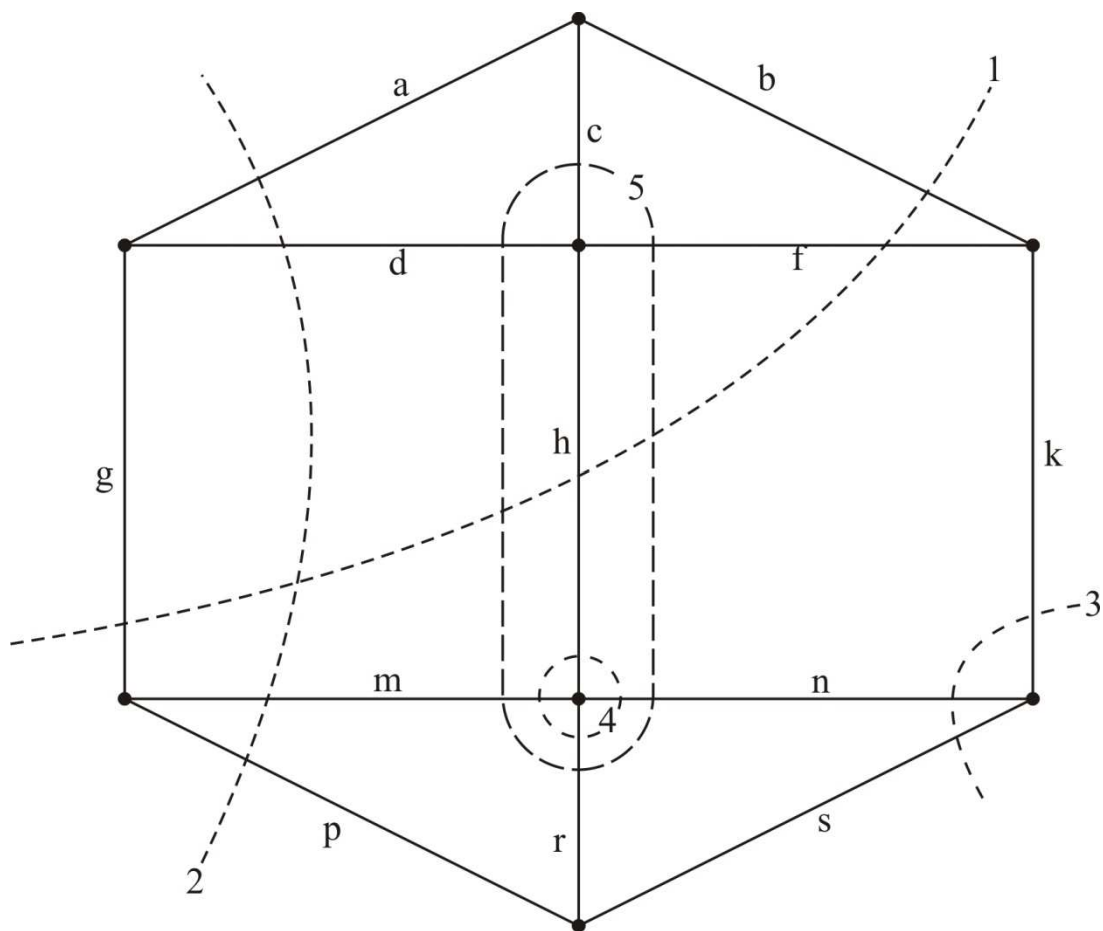


Рис. 6.1

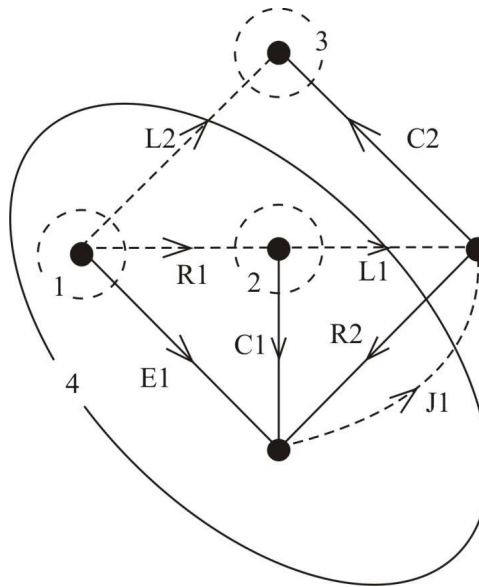


Рис. 6.2.

Особливим перетином називається такий перетин, що містить в собі тільки одну вітку, а іншими ребрами цього перетину є зв'язки. На рис. 6.2 зображено граф з розподілом ребер на вітки і зв'язки, такими лініями показані особливі перетини. Дійсно, перетин 1 включає лише одну вітку E1, а інші ребра R1 L2 є зв'язки. Те саме можна сказати про перетин 2, 3, 4, утворені на основі гілок C1, C2 і R2.

Отже кожна вітка утворює свій особливий перетин. Структуру особливих перетинів можна відобразити за допомогою матриці особливих перетинів  $D$ . Її стрічки відповідають віткам (або, точніше сказати, особливим перетинам, пов'язаним з цими вітками). Стовпці матриці  $D$  відповідають ребрам графа, які розподіляються на вітки і зв'язки. У кожній стрічці проставляються одиниці в тих стовпцях, які відповідають ребрам, що утворюють зазначений перетин. Знак одиниці залежить від напрямку ребра відносно лінії перетину, а точніше сказати, — поверхні перетину. Визначальну роль для напрямку відносно поверхні перетину відіграє саме вітка перетину. Її напрям приймають за позитивний, а напрями інших ребер-зв'язків порівнюють з позитивним. Співпадіння дає +1, а при неспівпадінні в матрицю записуємо -1. Із урахуванням зазначеного матриця особливих перетинів для графа, зображеного на рис. 6.2, може бути записана в такому вигляді:

	E1	C1	C2	R2	R1	L1	L2	J1
E1	+1				+1		+1	
C1		+1			-1	+1		
C2			+1				+1	
R2				+1		-1	-1	-1

(6.1)

З'ясуємо знаки елементів на прикладі другої стрічки, якій відповідає особливий перетин через вітку C1. Ця вітка спрямована таким чином, що виходить із замкненої поверхні перетину (рис. 6.2). Цей напрямок приймають за



позитивний. Зв'язок L1 співпадає з позитивним напрямком, тому в стовпці L1 записуємо +1, а зв'язок R1 протилежний за напрямом і дає у своєму стовпці -1. Зрозуміло, що у стовпці самої вітки C1 слід записати +1, оскільки вітки завжди співпадають з позитивним напрямом, визначаючи його.

Для матриці особливих перетинів справедливе таке метричне рівняння:

$$DI^p = 0, \quad (6.2)$$

де  $I^p$  — вектор струмів ребер.

Для графа на рис. 6.2 отримуємо:

E1	C1	C2	R2	R1	L1	L2	J1
+1				+1		+1	
	+1			-1	+1		
		+1				+1	
			+1		-1	-1	-1

 $\times$ 

$i_{E1}$
$i_{C1}$
$i_{C2}$
$i_{R2}$
$i_{R1}$
$i_{L1}$
$i_{L2}$
$I_{J1}$

 $=$ 

0
0
0
0

Виконуючи множення матриць, одержуємо:

$$\begin{aligned} i_{E1} + i_{R1} + i_{L2} &= 0. \\ i_{C1} - i_{R1} + i_{L1} &= 0. \\ i_{C2} + i_{L2} &= 0. \\ i_{R2} - i_{L1} - i_{L2} - i_{J1} &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ці рівняння є суто рівняннями за першим законом Кірхгофа. Звичне формулювання першого закону Кірхгофа застосовується до струмів, які збігаються у будь-якому вузлі. І дійсно, перші три рівняння можна співвіднести до відповідних вузлів. Але останнє рівняння не знаходить для себе ніякого відповідного вузла. Справа в тому, що воно записане для перетину і загальна форма першого закону Кірхгофа записується саме до перетинів. А перші три рівняння співпадають з вузловими, оскільки їх перетини є канонічними.

До речі, рівняння для перетину можна отримати шляхом лінійних еквівалентних перетворень рівнянь для вузлів, які охоплює поверхня перетину. Так, перетин 4 охоплює три вузли, рівняння для яких за першим законом Кірхгофа мають вигляд:

$$\begin{aligned} -i_{E1} - i_{R1} - i_{L2} &= 0; \\ +i_{R1} - i_{C1} - i_{L1} &= 0; \\ +i_{E1} + i_{C1} + i_{R2} - i_{J1} &= 0. \end{aligned}$$

Просумуємо ліві й праві частини усіх трьох рівнянь.

Перші два члени кожного рівняння взаємно знищуються і отримуємо:

$$-i_{L2} - i_{L1} + i_{R2} - i_{J1} = 0,$$

що співпадає з рівнянням для перетину.

Розкладаючи у рівнянні (6.3) матриці на блоки, можемо записати:

$$D^b I^b + D^c I^c = 0. \quad (6.4)$$

Оскільки матриця  $D^b$  завжди одинична, нарешті справедливе рівняння

$$I^b = -D^c I^c. \quad (6.5)$$

Це рівняння виражає струми гілок через струми зв'язків. Для нашого випадку

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline i_{E1} \\ \hline i_{C1} \\ \hline i_{C2} \\ \hline i_{R2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & R1 & L1 & L2 & J1 \\ \hline -1 & & & -1 & \\ \hline +1 & -1 & & & \\ \hline & & & -1 & \\ \hline & & +1 & +1 & +1 \\ \hline \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline i_{R1} \\ \hline i_{L1} \\ \hline i_{L2} \\ \hline i_{J1} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (6.7)$$

Виконуючи множення матриць, отримаємо:

$$\begin{aligned} i_{E1} &= -i_{R1} - i_{L2} ; \\ i_{C1} &= i_{R1} - i_{L1} ; \\ i_{C2} &= -i_{L2}; \\ i_{R2} &= i_{L1} + i_{L2} + i_{J1}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ці рівняння можна вивести із системи (6.4), якщо в лівій частині залишити струми гілок, вони створюють систему незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа для особливих перетинів.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Що називають перетином?
2. Як утворюється кожний особливий перетин?
3. З'ясуйте правила формування матриці особливих перетинів і поясніть на прикладі.
4. Які матричні рівняння можна записати за допомогою матриці особливих перетинів?

## 7. ТОПОЛОГІЧНА МАТРИЦЯ “КОНТУР-ВІТКА”

Розглядаючи матриці особливих контурів  $B$  і особливих перетинів  $D$ , можемо зазначити, що кожна з них може бути представлена двома підматрицями, одна з яких завжди є одиничною і тому в сенсі інформативності є малозначущою. Співставимо неединичні, інформативні матриці  $B^e$  і  $D^c$

$$B^e =$$

	E1	C1	C2	R2
R1	-1	+1		
L1		-1		+1
L2	-1		-1	+1
J1				+1

$$D^c =$$

	R1	L1	L2	J1
E1	+1		+1	
C1	-1	+1		
C2			+1	
R2		-1	-1	-1

Саме ці матриці беруть участь у формуванні топологічних рівнянь у формі:

$$V^c = -B^e V^e; \quad (7.1)$$

$$I^e = -D^c I^c. \quad (7.2)$$

Неважко помітити, що одна з цих матриць може бути отримана з іншої за допомогою матричних операцій — транспортування та інвертування знаку перед одиницями, а саме:

$$B^e = -(D^c)^T; \quad (7.3)$$

$$D^c = -(B^e)^T; \quad (7.4)$$

Отже, для запису топологічних рівнянь (7.1) і (7.2) можна обійтись лише однією із цих матриць. Звичайно, перевагу надають матриці  $B^e$ , оскільки для її формування достатньо визначити вітки і зв'язки, і не потрібно проводити додаткові графічні побудови у вигляді ліній перетинів. Візьмемо в подальшому за основу топологічних рівнянь матрицю  $B^e$ , яку позначимо через  $F$  і будемо називати її топологічною матрицею “контур-вітка”:

$$F = B^e. \quad (7.5)$$

Тепер топологічні рівняння можна подати у вигляді:

$$\mathbf{V}^c = -\mathbf{F}\mathbf{V}^b; \quad (7.6)$$

$$\mathbf{I}^b = \mathbf{F}^T \mathbf{I}^c \quad (7.7)$$

Ці рівняння і будемо застосовувати в подальшому, якщо річ йтиме про топологічні рівняння.

Для конкретного прикладу граф на рис.2.3. маємо:

$$\mathbf{F} = \begin{array}{c|cccc} & \text{E1} & \text{C1} & \text{C2} & \text{R2} \\ \hline \text{R1} & -1 & +1 & & \\ \text{L1} & & -1 & & +1 \\ \text{L2} & -1 & & -1 & +1 \\ \text{J1} & & & & +1 \end{array} \quad (7.8)$$

У матриці  $\mathbf{F}$  стрічки відповідають зв'язкам (іншими словами, особливим контурам, які утворюють ці зв'язки), а стовпці — віткам. Правило складання матриці  $\mathbf{F}$  співпадає з правилом для матриці  $\mathbf{B}$  за винятком тієї частини матриці  $\mathbf{B}$ , що відповідає зв'язкам.

Тепер топологічні рівняння у матричній формі відповідно до рівнянь (7.6) і (7.7) виглядають наступним чином:

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \mathbf{V}_{\text{R1}} \\ \mathbf{V}_{\text{L1}} \\ \mathbf{V}_{\text{L2}} \\ \mathbf{V}_{\text{J1}} \end{array} & \begin{array}{c|cccc} & \text{E1} & \text{C1} & \text{C2} & \text{R2} \\ \hline +1 & -1 & & & \\ & +1 & & & -1 \\ +1 & & +1 & & -1 \\ & & & & -1 \end{array} & \times & \begin{array}{c} \mathbf{V}_{\text{E1}} \\ \mathbf{V}_{\text{C1}} \\ \mathbf{V}_{\text{C2}} \\ \mathbf{V}_{\text{R2}} \end{array} \end{array} \quad (7.9)$$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \dot{\mathbf{i}}_{\text{E1}} \\ \dot{\mathbf{i}}_{\text{C1}} \\ \dot{\mathbf{i}}_{\text{C2}} \\ \dot{\mathbf{i}}_{\text{R2}} \end{array} & \begin{array}{c|cccc} & \text{R1} & \text{L1} & \text{L2} & \text{J1} \\ \hline -1 & & -1 & & \\ +1 & -1 & & & \\ & & & -1 & \\ & +1 & +1 & +1 & \end{array} & \times & \begin{array}{c} \dot{\mathbf{i}}_{\text{R1}} \\ \dot{\mathbf{i}}_{\text{L1}} \\ \dot{\mathbf{i}}_{\text{L2}} \\ \dot{\mathbf{i}}_{\text{J1}} \end{array} \end{array} \quad (7.10)$$

Здійснивши множення матриць, отримаємо систему топологічних рівнянь у скалярній формі:

$$\begin{aligned}
V_{R1} &= V_{E1} - V_{C1}; \\
V_{L1} &= V_{C1} - V_{R2}; \\
V_{L2} &= V_{E1} + V_{C2} - V_{R2}; \\
V_{J1} &= -V_{R2}; \\
i_{E1} &= -i_{R1} - i_{L2}; \\
i_{C1} &= i_{R1} - i_{L1}; \\
i_{C2} &= -i_{L2}; \\
i_{R2} &= i_{L1} + i_{L2} + i_{J1}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Система топологічних рівнянь складається із 8 рівнянь за обома законами Кірхгофа, але містить ця система 14 невідомих змінних. Дійсно, нехай система має  $n_E$  джерел напруги,  $n_C$  конденсаторів,  $n_R$  резисторів,  $n_L$  котушок індуктивностей,  $n_J$  джерел струму. Разом ці елементи складають ребра орграфа в кількості

$$N^P = n_E + n_C + n_R + n_L + n_J. \tag{7.12}$$

Припустимо, що схема побудована на вузлах у кількості  $N^y$ . Якою буде кількість топологічних рівнянь?

За першим законом Кірхгофа для струмів (ЗКС) рівняння визначається кількістю гілок:

$$n_{ЗКС} = N^g = N^y - 1. \tag{7.13}$$

За другим законом Кірхгофа для напруг (ЗКН) кількість рівнянь визначається кількістю зв'язків:

$$n_{ЗКН} = N^c = N^P - N^g = N^P - N^y + 1.$$

Загальна кількість топологічних рівнянь:

$$n_{mon} = n_{ЗКС} + n_{ЗКН} = N^y - 1 + N^P - N^y + 1 = N^P,$$

тобто кількість топологічних рівнянь завжди дорівнює кількості ребер графа або кількості елементів у системі.

Разом з тим, кількість невідомих змінних завжди більша. Дійсно, для кожного резистора, конденсатора, котушки індуктивності можна назвати дві невідомі змінні – струм через такий елемент і напруга на ньому. Кожне джерело дає лише одну невідому змінну: для джерела напруги невідомою є струм, а напруга є заданою. Для джерела струму, навпаки, відомим є струм, а невідома змінна — це напруга

на джерелі. Тому загальна кількість невідомих змінних (НЗ) визначається таким чином:

$$\begin{aligned} n_{H3} &= 2(n_c + n_R + n_L) + n_E + n_J = \\ &= n_E + n_c + n_R + n_L + n_J + n_c + n_R + n_L = N^P + n_c + n_R + n_L. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Таким чином, перевищення кількості невідомих змінних над кількістю топологічних рівнянь складає:

$$n_{H3} - n_{mon} = N^P + n_c + n_R + n_L - N^P = n_c + n_R + n_L. \quad (7.15)$$

Як бачимо, тільки топологічних рівнянь не вистачає для розв'язання задачі, оскільки треба, щоб розв'язати систему рівнянь, аби кількість невідомих змінних і кількість рівнянь співпадали, як це відомо з курсу математики.

Для того, щоб мати систему рівнянь в замкненому вигляді, яку можна було б однозначно розв'язати, необхідно доповнити систему топологічних рівнянь системою компонентних рівнянь.

### ***КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ***

#### ***І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ***

1. Як можна отримати топологічну матрицю «контур-вітка» з топологічної матриці особливих контурів?
2. Як можна отримати топологічну матрицю «контур-вітка» з топологічної матриці особливих перетинів?
3. Сформулюйте і запишіть правила складання топологічної матриці «контур-вітка» безпосередньо за графом електричної системи.
4. Які рівняння називають топологічними?
5. Чому саме топологічних рівнянь не вистачить для розв'язання задачі аналізу електричної системи?
6. Накресліть свою електричну систему і визначіть кількість рівнянь для цієї системи за ЗКС і ЗКН.

## 8. КОМПОНЕНТНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ

Компонентне рівняння описує поведінку елемента системи, який взято поза зв'язком цього елемента з системою. Таким чином, елемент треба відокремити від системи і дослідити його поведінку. Звичайно, окремий елемент простіший, ніж ціла система. Відокремлення елемента пов'язане з процедурою так званої декомпозиції системи. Повна декомпозиція орграфа є відокремленням усіх елементів від системи (наприклад, при ремонті годинника майстер виконує повну чи часткову декомпозицію, тобто розбирання годинника). Загальна методика дослідження будь-якого складного механізму або організму передбачає перехід на більш спрощений рівень дослідження. У фізиці і електротехніці початково вивчають будову і поведінку простіших елементів, як-от резистори, конденсатори, котушки індуктивності, джерела електроенергії. А надалі вже досліджуються системи, в яких ці елементи сполучаються разом.

Для електричних систем важливо показати, як поведуться окремі елементи шляхом виведення математичних залежностей між їх струмами й напругами. У випадку двополюсних елементів можна обійтися лише одним рівнянням, яке виражає струм через напругу, або, навпаки, напругу через струм. У випадку багатополюсних елементів кількість змінних збільшується і з'являється збільшена кількість варіантів подання таких рівнянь за формулою (через  $z$ - ,  $y$ - ,  $h$ - параметри, тощо).

Для резистора  $R$  можна записати такі компонентні рівняння:

$$V_R = R i_R ; \quad (8.1)$$

$$i_R = \left( \frac{1}{R} \right) V_R . \quad (8.2)$$

Для конденсатора з ємністю  $C$  і початковою напругою  $V_C(0)$  справедливі наступні компонентні рівняння:

$$V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + V_C(0) \quad (8.3)$$

$$i_C = C \left( \frac{dV_C}{dt} \right). \quad (8.4)$$

Котушка з індуктивністю  $L$  і початковим струмом  $I_L(0)$  дає такі компонентні рівняння:

$$V_L = L \left( \frac{di_L}{dt} \right); \quad (8.5)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t V_L dt + I_L(0) \quad (8.6)$$

Для джерел напруги  $E$  і струму  $J$  компонентних рівнянь не існує, оскільки відсутній безпосередній зв'язок електричних величин для цих елементів. Але з практичної точки зору корисними виявляються такі формальні рівняння:  
для джерела напруги:

$$V_E = 0 \cdot i_E + V_E(t); \quad (8.7)$$

для джерела струму:

$$i_J = 0 \cdot V_J + i_J(t). \quad (8.8)$$

У цих досить простих рівняннях нульові коефіцієнти показують незалежність електричних величин у джерелах, а останній член у правій частині виражає конкретну залежність заданої величини джерела від часу (наприклад, напруга або струм джерела можуть бути постійними, синусоїдальними, прямокутними і т.п.).

Рівняння (8.7) і (8.8) виявляються дуже зручними, щоб їх використовувати в загальних матричних рівняннях електричних систем.

Розглядаючи рівняння (8.1), бачимо, що в ньому напруга виражена через струм за допомогою опору резистора. Таку форму називають імпедансною (impedance (англ.) – повний опір). Аналогічно рівняння (8.3) і (8.5) також відносяться до імпедансної форми.

Рівняння (8.2) виражає струм через напругу за допомогою провідності резистора. Таку форму рівнянь прийнято називати адмітансною формою (admittance (англ.) – повна провідність).

Залежно від типу джерел електричної енергії та цілей розрахунків компонентні рівняння раціонально застосовувати в різних формах. Так, для аналізу на постійному струмі усталених режимів реактивні елементи, конденсатори та індуктивності не мають значення, їх взагалі можна виключити з розгляду, розірвавши ребра з конденсаторами й замкнувши ребра з індуктивностями. Еквівалентна розрахункова схема буде містити тільки джерела постійного струму або напруги і резистори. У цьому випадку компонентні рівняння обмежуються лише рівняннями за зразками (8.1) і (8.2). Для аналізу усталених режимів на синусоїдальному струмі опори і провідності конденсатора і індуктивності виражаються за допомогою оператора  $j\omega$ , тоді компонентні рівняння можна записати таким чином:

$$\dot{I}_C = j\omega C \dot{V}_C \quad (8.9)$$

$$\dot{V}_L = j\omega L \dot{I}_L \quad (8.10)$$

де напруги і струми є комплексні величини.



Найзагальніший вигляд мають комплексні рівняння для дослідження перехідних процесів, де їх треба подати у формі диференціальних і інтегральних рівнянь (8.3) – (8.6), але зазначимо, що більш бажаною формою є все таки диференціальна форма компонентних рівнянь, тобто (8.4) і (8.5).

Взагалі, за допомогою операційного числення диференціальні й інтегральні рівняння можна подати в алгебраїчній формі, тоді компонентні рівняння для зображень струмів і напруг реактивних елементів відповідно до рівнянь (8.3) – (8.6) матимуть вигляд:

$$V_C(p) = \left(\frac{1}{pC}\right) I_C(p) + \frac{V_C(0)}{p}; \quad (8.11)$$

$$I_C(p) = pC \cdot V_C(p); \quad (8.12)$$

$$V_L(p) = pL \cdot I_L(p); \quad (8.13)$$

$$I_L(p) = \frac{1}{pL} V_L(p) + \frac{I_L(0)}{p}; \quad (8.14)$$

Надалі можемо обрати й вживати саме ту форму представлення компонентних рівнянь, яка буде раціональною для конкретного випадку, а в разі необхідності компонентні рівняння можна буде подати і у матричній формулі, що буде пояснюватися додатково в разі потреби.

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Що називають компонентними рівняннями?
2. Чи потрібно для написання компонентних рівнянь мати інформацію про спосіб, в який елементи пов'язані один з другим у системі?
3. Як виглядають компонентні рівняння для резисторів, конденсаторів, індуктивностей?
4. Чи існують компонентні рівняння для джерел напруги і струму?
5. Які компонентні рівняння називаються імпедансними і адмітансними?
6. Як виглядають компонентні рівняння елементів для режиму на синусоїдному струмі?
7. Як алгебраїзуються диференціальні ті інтегральні рівняння компонентів за допомогою операційного числення?

## 9. МЕТОД ЗМІННИХ СТАНУ.

Будемо розглядати в першу чергу динамічні режими, тобто перехідні процеси, які є найзагальнішими. Саме з них можуть бути отримані не тільки графіки (часові діаграми) самих перехідних процесів, а й усталені режими – як для випадку живлення постійним струмом, так і для змінного, синусоїдального струму. Для цього достатньо провести розрахунки на досить великому інтервалі часу, щоб процеси заспокоїлись і залишилися лише та складова, яка обумовлена джерелами живлення. Такий метод (метод усталення) може бути досить витратним за комп'ютерним часом, але він є найпростішим.

Із відомих методів можна було б спробувати метод вузлових напруг або метод контурних струмів. Їх переваги в тому, що рівняння, які формуються за цими методами, містять менше невідомих змінних, ніж повна система рівнянь, складена з топологічних та компонентних рівнянь. Але, по-перше, ці рівняння вимагають додаткових обчислень для визначення струмів і напруг саме елементів. І, по-друге, при написанні цих рівнянь потрібно використовувати компонентні рівняння виключно в одній формі – або у імпедансній, або в адмітансній. Отже тому в рівняння обов'язково потрапляють і похідні, і інтеграли, тобто будуть отримані інтегро-диференціальні рівняння. В інженерній практиці традиційно перевага віддається диференціальним рівнянням, а інтегральні рівняння є предметом розгляду спецкурсів вищої математики в університетській фізико-математичній освіті. Тому найбільш раціональним є так званий метод змінних стану, який дозволяє отримати рівняння динаміки у вигляді диференціальних рівнянь, які виглядають до того ж у формі, зручній для подальших розрахунків на комп'ютерах.

В якості змінних стану обирають електричні величини (струми та напруги), які визначають запас енергії в системі. В електричних системах енергія накопичується в реактивних елементах – конденсаторах і котушках індуктивності. У загальному випадку енергії цих елементів визначаються зарядами конденсаторів і потокозчепленням котушок індуктивності. У разі розгляду лінійних систем задача спрощується, і в якості змінних стану використовують напруги на конденсаторах і струми через котушки індуктивностей.

Отже, маючи в системі  $m$  конденсаторів і  $n$  індуктивностей утворимо з названих величин вектор змінних стану:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \\ \dots \\ V_{Cm} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ \dots \\ i_{Ln} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Крім того, зазначимо вектор заданих величин джерел, який буде складатися з напруг джерел напруги і струмів джерел струму. Якщо в системі маємо  $k$  джерел напруги і  $l$  джерел струму, то цей вектор буде мати вигляд:

$$Q = \begin{bmatrix} V_{E1} \\ V_{E2} \\ \dots \\ V_{Ek} \\ i_{J1} \\ i_{J2} \\ \dots \\ I_{Jl} \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

Метод змінних стану вимагає скласти такі рівняння щоб похідні від змінних стану були виражені через самі змінні стану й задані величини джерел, тобто:

$$\frac{dx}{dt} = f(X, Q) \quad (9.3)$$

Формування таких рівнянь розглянемо на прикладі системи, граф якої зображений на рис. 2.3. У цій системі маємо кількість конденсаторів  $m = 2$ , кількість котушок індуктивностей  $n = 2$ , кількість джерел напруги  $k = 1$ , кількість джерел струму  $l = 1$ . Тому вектори змінних стану і заданих величин джерел будуть представлені таким чином:

$$X = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

$$Q = \begin{bmatrix} V_{E1} \\ i_{J1} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

Повна система рівнянь складається з отриманих раніше топологічних рівнянь (5.9) і (6.8), доповнених компонентними рівняннями. При складанні компонентних рівнянь будемо використовувати для резисторів – гілок імпедансну форму (8.1), для резисторів – зв'язків – адмітансну форму (8.2), а для конденсаторів і котушок індуктивностей будемо використовувати

виключно диференціальні рівняння з формул (8.4) і (8.5). З рештою матимемо таку повну систему:

$$V_{R1} = V_{E1} - V_{C1}; \quad (9.6)$$

$$V_{L1} = V_{C1} - V_{R2}; \quad (9.7)$$

$$V_{L2} = V_{E1} + V_{C2} - V_{R2}; \quad (9.8)$$

$$V_{II} = -V_{R2}; \quad (9.9)$$

$$i_{E1} = -i_{R1} - i_{L2}; \quad (9.10)$$

$$i_{C1} = i_{R1} - i_{L1}; \quad (9.11)$$

$$i_{C2} = -i_{L2}; \quad (9.12)$$

$$i_{R2} = i_{L1} + i_{L2} + i_{II}; \quad (9.13)$$

$$i_{R1} = \frac{1}{R1} \cdot V_{R1}; \quad (9.14)$$

$$V_{R2} = R2 i_{R2}; \quad (9.15)$$

$$i_{C1} = C1 \frac{dV_{C1}}{dt}; \quad (9.16)$$

$$i_{C2} = C2 \frac{dV_{C2}}{dt}; \quad (9.17)$$

$$V_{L1} = L1 \frac{di_{L1}}{dt}; \quad (9.18)$$

$$V_{L2} = L2 \frac{di_{L2}}{dt}. \quad (9.19)$$

Звернемо увагу на останні 4 рівняння, які містять у правих частинах похідні від змінних стану. В лівих частинах цих рівнянь фігурують змінні  $i_{C1}$ ,  $i_{C2}$ ,  $V_{L1}$ ,  $V_{L2}$ . Ті самі змінні знаходяться в лівих частинах рівнянь (9.11), (9.12), (9.7), (9.8) відповідно. Тому можемо скласти рівняння, порівнявши праві частини відповідних рівнянь, після чого отримаємо:

$$C1 \frac{dV_{C1}}{dt} = i_{R1} - i_{L1}; \quad (9.20)$$

$$C2 \frac{dV_{C2}}{dt} = -i_{L2}; \quad (9.21)$$

$$L1 \frac{dV_{L1}}{dt} = V_{C1} - V_{R2}; \quad (9.22)$$

$$L2 \frac{dV_{L2}}{dt} = V_{E1} + V_{C2} - V_{R2}. \quad (9.23)$$

Отримані рівняння подібні до потрібних рівнянь за методом змінних стану. Лише дві речі заважають цим рівнянням набути потрібної форми (9.3):

1) В лівих частинах містяться коефіцієнти  $C1$ ,  $C2$ ,  $L1$ ,  $L2$  – ця перешкода легко може бути усунута переносом цих коефіцієнтів в знаменник правих частин;

2) В правих частинах окрім змінних стану  $X$  і заданих величин джерел  $Q$  (див. (9.4) і (9.5)) фігурують „зайві”, небажані резистивні величини -  $i_{R1}$  і  $V_{R2}$ . Для того щоб позбутися цих небажаних величин, треба виразити їх через дозволені змінні стану  $X$  й задані величини джерел  $Q$ . Для цього в загальному випадку слід використати ті рівняння з повної системи рівнянь (9.6) – (9.19), які не були зачеплені попередньою операцією формування рівнянь (9.20) – (9.23). У цих рівняннях резистивні величини слід вважати невідомими і перенести в ліві частини, а змінні стану  $X$  і задані величини джерела  $Q$  вважати відомими і заданими, і перенести їх у праві частини. Після цього слід розв’язати отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно резистивних величин, виразивши їх через змінні стану  $X$  і задані величини джерел  $Q$ . Для конкретного випадку можна скористатися рівняннями (9.6), (9.13), (9.14) і (9.15), представивши їх у вигляді, відповідному до сказаного вище:

$$V_{R1} = V_{E1} - V_{C1}; \quad (9.24)$$

$$i_{R2} = i_{L1} + i_{L2} + i_{J1}; \quad (9.25)$$

$$\frac{1}{R_1} V_{R1} - i_{R1} = 0 \quad (9.26)$$

$$V_{R2} - R_2 \cdot i_{R2} = 0 \quad (9.27)$$

Розв’язуючи ці рівняння, отримаємо:

$$i_{R1} = \frac{1}{R_1} (V_{E1} - V_{C1}) \quad (9.28)$$

$$V_{R2} = R_2 (i_{L1} + i_{L2} + i_{J1}) \quad (9.28)$$

З урахуванням цього рівняння (9.20) – (9.23) набудуть вигляду:

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[ \frac{1}{R_1} (V_{E1} - V_{C1}) - i_{L1} \right]; \quad (9.30)$$

$$\frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} (-i_{L2}); \quad (9.31)$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} [V_{C1} - R_2 (i_{L1} + i_{L2} + i_{J1})]; \quad (9.32)$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} [V_{E1} + V_{C2} - R_2 (i_{L1} + i_{L2} + i_{J1})]. \quad (9.33)$$

Ці рівняння і представляють рівняння за методом змінних стану. Розв'язання цих диференціальних рівнянь дає змогу побудувати перехідний процес, що протікає в електричній системі. Для цього треба лише знати параметри системи, математичний опис характеру змін в часі заданих величин джерел електроенергії та початкові умови, що являють собою напруги на конденсаторах і струми через котушки індуктивностей в нульовий момент часу, тобто початкові значення змінних стану.

Звичайно, для розв'язання систем диференціальних рівнянь можна скористатися аналітичними методами з вищої математики. Але більший практичний інтерес становлять чисельні методи розв'язання подібних задач.

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Які електричні величини відносяться до змінних стану і чому саме ці величини?
2. В якій формі треба скласти рівняння за методом змінних стану?
3. Що являють собою вектори  $X$  і  $Q$  в рівнянні (9.3) ?
4. Яким чином можна виразити резистивні величини з рівнянь за методом змінних стану?
5. Проілюструйте вміння складати рівняння за методом змінних стану для електричної системи 3–5 порядку з 1–3 декількома джерелами електричної енергії (схеми скласти самостійно).
6. Від чого залежить кількість рівнянь за методом змінних стану?
7. Яка інформація потрібна для розв'язання рівнянь за методом змінних стану?

## 10. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ЗА МЕТОДОМ ЗМІННИХ СТАНУ.

Найпростішим чисельним методом розв'язання диференціальних рівнянь є метод Ейлера. В математиці розглядається так звана нормальна форма (або форма задачі Коші) представлення диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (10.1)$$

Ця форма практично співпадає з формою рівнянь за методом змінних стану:

$$\frac{dx}{dt} = f(X, Q) \quad (10.2)$$

якщо мати на увазі, що вектор заданих величин джерел  $Q$  є функцією часу. Дійсно, якого б роду ми не мали джерело електричної енергії, в задачі аналізу поведінка джерела завжди задана амплітудою, частотою, фазовим зсувом, або іншими потрібними характеристиками. Тому в рівнянні (10.2) можна замінити  $Q$  на  $t$ , коли вважати, що  $Q=Q(t)$ .

Крім рівняння (10.1) потрібно знати початкове значення змінної  $X$ :

$$t=0: \quad x=x(0). \quad (10.3)$$

Розрахунок процесу полягає в знаходженні невідомої функції  $x(t)$ , яка задовольняє рівнянню (10.1) та початковим умовам (10.3).

Звичайно, функція  $x(t)$  є неперервною і може характеризуватися нескінченно великою кількістю точок, що утворюють графік величини  $x$  при зміні часу  $t$ . На практиці обчислюється скінченна кількість значень  $x(t)$ , які знаходяться у дискретні моменти часу  $t$  і розташовані на досить малій відстані одне від іншого таким чином, щоб передати всі характерні особливості графіка змінної  $x$  в часі. Часто ці точки рівновіддалені й відстають в часі на величину кроку дискретизації  $\Delta t$ , яку звичайно називають кроком інтегрування диференціального рівняння. Крок  $\Delta t$  може бути фіксований протягом всіх розрахунків, але ніщо не заважає вести розрахунки і зі змінним кроком – це може робитися для економізації обчислювального процесу в сенсі комп'ютерного часу.

Яким же чином можна, знаючи початкові умови (10.3), використати рівняння (10.1) для обчислення значення змінної  $x$  на кінці часового кроку  $\Delta t$ ? Алгоритм обчислень полягає в наступному:

1. Підставимо початкові умови  $t=0$  і  $x=x(0)$  в праву частину рівняння (10.1), обчисливши тим значення похідної в момент  $t=0$  :

$$\frac{dx(0)}{dt} = f(x(0), 0) \quad (10.4)$$

2. Пригадаємо, в чому полягає геометричний сенс похідної: вона дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, що проведена до графіка функції у зазначеній точці.

На рис.10.1 будемо ілюструвати обчислення графічними побудовами.

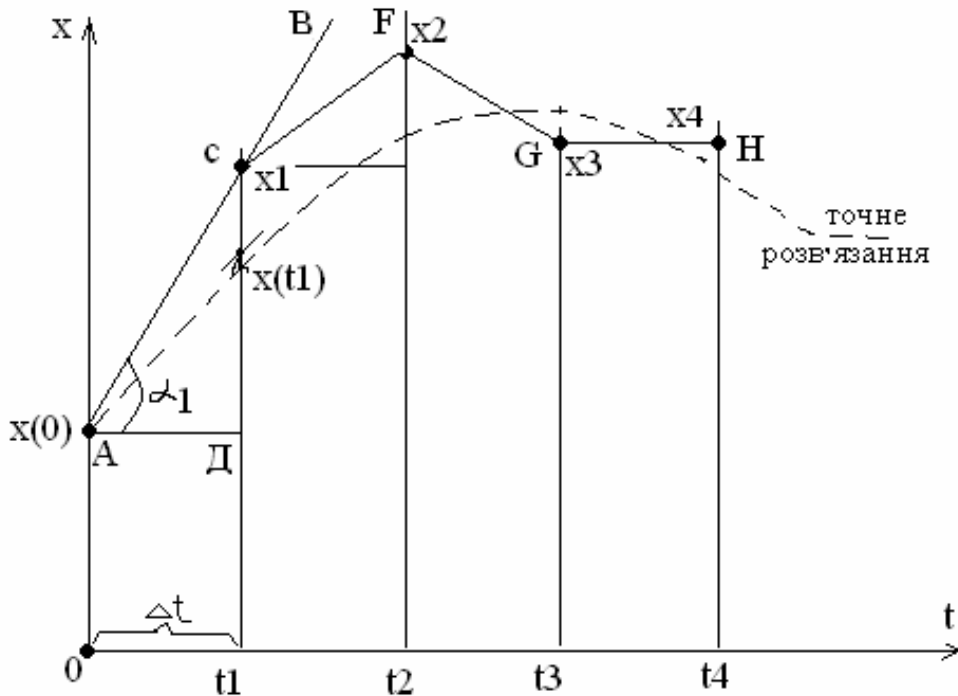


Рис. 10.1

Тут штрих-пунктирною лінією показано точне розв'язання. Слід розуміти, що це розв'язання завжди невідоме, адже якби воно було відоме, то не треба було б застосовувати методику чисельного розв'язування. На рис.10.1 графік точного розв'язання показаний лише для того, щоб бачити, що чисельне розв'язування буде близьким до точного. На підставі отриманого значення похідної в точці  $t=0$  можемо побудувати дотичну АВ в точці А для  $t=0$  і  $x=x(0)$ . Відступивши в часі від початкового значення  $t=0$  на крок інтегрування  $\Delta t$ , отримаємо час  $t_1 = \Delta t$  для першої дискети  $x_1$ , значення якої знайдемо на проведеній дотичній. Це значення і будемо вважати наближеним чисельним значенням шуканої змінної в момент  $t=t_1$  (точка С). Як видно, це значення відрізняється від точного значення змінної  $x(t_1)$ , яке знаходиться на пунктирній лінії. Зменшуючи крок інтегрування, можна зменшити і величину похибки, якщо є така потреба або бажання. Для обчислення значення  $x_1$  будемо виходити з таких очевидних співвідношень:

$$x_1 = x(0) + CD = x(0) + \Delta x_1.$$



$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dx(0)}{dt} = f(x(0), 0),$$

звідки

$$\Delta x_1 = \Delta t * f(x(0), 0),$$

і нарешті

$$x_1 = x(0) + \Delta t * f(x(0), 0). \quad (10.5)$$

Отже наступне значення змінної змінюється в порівнянні з попереднім на величину, яку обчислюємо, помноживши крок інтегрування на значення похідної, а остання дорівнює значенню правої частини диференціального рівняння, якщо в неї підставити попередні значення часу і змінної.

Розмірковуючи аналогічним чином, можна записати :

$$x_2 = x_1 + \Delta t * f(x_1, t_1)$$

$$x_3 = x_2 + \Delta t * f(x_2, t_2)$$

і взагалі

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t * f(x_k, t_k). \quad (10.6)$$

Співвідношення (10.6) презентує обчислювальну формулу методу Ейлера. Ця формула дозволяє обчислити наступне значення змінної  $x_{k+1}$  на основі попереднього  $x_k$ .

Такі формули, які дозволяють обчислити одне(або декілька) наступних значень за одним (або декількома) попереднім, називаються рекурентними. Рекурентні формули взагалі знаходять широке використання в практиці чисельного інтегрування диференціальних рівнянь.

Розглянемо джерела похибок методу Ейлера. По-перше, в методі Ейлера використовується лише перша похідна, а похідна вищих порядків до уваги не приймаються. Дійсно, розкладання в ряд Тейлора має нескінченну кількість членів, які враховують також нескінченну кількість похідних:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \Delta t * x'(t_0) + ((\Delta t)^2/2!) * x''(t_0) + ((\Delta t)^3/3!) * x'''(t_0) + \dots \quad (10.7)$$

Порівнюючи розкладання в ряд Тейлора з формулою методу Ейлера (10.5), можна помітити, що остання може бути отримана із ряду Тейлора утриманням лише двох перших членів у ряді. Звичайно, якби можна було врахувати вплив вищих похідних, тобто збільшити кількість членів ряду Тейлора, то результат був би більш близьким до точного розв'язання. Але в нашому розпорядженні відсутній вираз для  $x(t)$ , який би можна було про

диференціювати потрібну кількість раз і отримати вирази для вищих похідних (до речі, в такому разі сама необхідність в наближеному обчисленні відпала б).

Насправді ми можемо розраховувати лише на математичний вираз для обчислення першої похідної, а диференціювати її не можемо, оскільки в цей вираз входить сама невідома змінна  $x(t)$ , значення якої наприкінці попереднього кроку дає змогу обчислити лише першу похідну.

Другим джерелом похибки є та обставина, що навіть значення першої похідної обчислюється неточно на всіх кроках, крім першого. Дійсно, на другому кроці (рис. 10.1) для обчислення першої похідної ми змушені використовувати вже неточне, наближене значення  $x_1$  замість невідомого точного значення  $x(t_1)$ .

Третім джерелом похибок є так звана апаратна похибка. Вона обумовлена скінченністю розрядної сітки комп'ютера для зображення чисел. Звичайні числові оцінки проводять з точністю 3-6 цифр у кінцевому результаті. Але коли цей результат отримується через серію розрахунків, то в проміжних результатах слід утримувати 7-12 значущих цифр для отримання заданої кінцевої точності. Інтегрування диференціальних рівнянь проводиться на практиці з малими часовими кроками і це потребує розрахунків, скажімо, сотен тисяч кроків. При цьому теоретично проміжні результати мають нескінчену кількість значущих цифр, але завдяки обмеженості розрядної сітки комп'ютера (8-,16-,32-,64-розрядні) утримуються лише зазначена кількість старших розрядів чисел, а молодші розряди відкидаються.

Ця обставина, як показують чисельні експерименти, може привести залежно від виду рівнянь навіть до різкого збільшення похибок. Слід зазначити, що подальші успіхи в розробці комп'ютерної техніки дозволяють зменшити цю складову похибок.

У чисельних методах інтегрування диференціальних рівнянь кількість врахованих похідних визначає так званий порядок методу. Таким чином, метод Ейлера, який враховує лише одну похідну, є методом першого порядку.

Намагання зменшити перші дві складові похибок привело до розробки методів, які враховують більшу кількість похідних в ряді Тейлора, тобто мають більш високий порядок.

Найбільш поширеним є метод Рунге-Кутта 4-го порядку. В цьому методі звичайно вищі похідні не обчислюються безпосередньо, а враховуються завдяки посереднім обчисленням за наступним алгоритмом. Спочатку знаходимо коефіцієнти  $k_1, k_2, k_3, k_4$  за формулами

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, t_k); \\ k_2 &= f(x_k + (\Delta t / 2) k_1, t_k + (\Delta t / 2)); \\ k_3 &= f(x_k + (\Delta t / 2) k_2, t_k + (\Delta t / 2)); \\ k_4 &= f(x_k + \Delta t * k_3, t_k + \Delta t). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Тепер обчислюємо значення наприкінці кроку інтегрування

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t * \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10.9)$$

Таким чином, на кожному кроці треба 4 рази обчислити перші похідні у відповідних точках, що визначаються значеннями  $x$  і  $t$  у дужках виразів (10.8), після чого обчислюється усереднена похідна і робиться крок на зразок методу Ейлера (10.9). Математично може бути строго доведено, що такі обчислення еквівалентні врахуванню чотирьох похідних в ряді Тейлора. Цей метод дає досить точні результати, він є популярним і включений до математичного забезпечення алгоритмічних мов програмування та різноманітних наукових прикладних пакетів програм в якості стандартного методу. За зазначеним принципом легко конструюються методи Рунге-Кутта як вищих, так і нижчих порядків. Слід враховувати, що методи Рунге-Кутта вимагають на кожному кроці декілька раз обчислювати праві частини диференціальних рівнянь, тому вони потребують більших витрат комп'ютерного часу, ніж однокроковий метод Ейлера.

Крім описаних методів існують модифікації цих методів, а також інші методи чисельного інтегрування диференціальних рівнянь (Гілла, Мерсона, Мілна, Адамса, Башфорта, Мултона, Хеммінга, Шіхмана, формул диференціювання назад, Гіра-Нордсона та ін.) [1].

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. У чому полягає особливість представлення диференціальних рівнянь в нормальній формі?
2. Яку роль відіграють початкові умови при розв'язанні диференціальних рівнянь?
3. З'ясуйте алгоритм методу Ейлера і поясніть його геометричними побудовами.
4. Які існують джерела похибок методу Ейлера?
5. Як визначається поняття порядку чисельного методу інтегрування диференціальних рівнянь?
6. Які обчислення здійснюються в методі Рунне-Кутта четвертого порядку?
7. Реалізуйте метод Ейлера для рівнянь (9.30) – (9.33) за допомогою пакетів MS EXEL або MathCAD, задаючись конкретними параметрами і початковими умовами.

## 11. СТІЙКІСТЬ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ СТАНУ

При розгляді алгоритму обчислень за методом Ейлера легко з'ясувати, що зменшення кроку інтегрування підвищує точність обчислень, але при цьому збільшуються витрати комп'ютерного часу на обчислення протягом одного і того ж часу інтегрування. Тому актуальною є проблема визначення кроку інтегрування, який би давав досить точні результати і одночасно не був би надзвичайно обтяжливим за витратами комп'ютерного часу. Існує простий практичний спосіб контролю точності отриманих результатів, який називають способом зменшення кроку інтегрування вдвічі. Для цього проводять розрахунки процесу з кроком інтегрування  $\Delta t$  і результати запам'ятовують (у вигляді таблиць або часових діаграм). Далі шаг інтегрування зменшують вдвічі до величини  $\Delta t/2$  і повторюють розрахунки, також фіксуючи результати. Якщо зменшення кроку інтегрування не приводить до суттєвої зміни результатів, то вважають останній розрахунок за прийнятний. Якщо зменшення кроку виявляє суттєві зміни результатів, то слід продовжити зменшення кроку інтегрування вдвічі. Таким чином зменшення кроку інтегрування позитивно впливає на результати розрахунків.

Розглянемо, однак, до чого будуть призводити зміни кроку інтегрування в більшу сторону. Для цього візьмемо нескладну систему, в якій конденсатор  $C$ , попередньо заряджений до напруги  $V_c(0)$ , буде розряджуватися на активний резистор  $R$  (рис.11.1,а). Обираючи в дерево ребро з конденсатором, можна сформулювати таку повну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} V_R &= V_c; \\ i_c &= -i_R; \\ i_c &= C(dV_c/dt); \\ i_R &= \frac{1}{R} V_R. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Звідси можна отримати таке рівняння за методом змінних стану:

$$dV_c/dt = -\frac{1}{CR} V_c, \quad (11.2)$$

з якого виведемо рекурентну формулу методу Ейлера:

$$V_c^{(k+1)} = V_c^{(k)} + \Delta t(-\frac{1}{CR} V_c^{(k)}) = V_c^{(k)}(1 - (\Delta t/CR)), \quad (11.3)$$

де  $V_c^{(k)}$  і  $V_c^{(k+1)}$  – напруги на конденсаторі, які відносяться до моментів часу  $t_k$  і  $t_{k+1}$ , тут  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ .

Хід обчислювального процесу буде залежати від величини співвідношення  $\Delta t / RC$ .

Розглянемо наступні варіанти.

1.  $\Delta t / RC = 0,5$  , в такому разі рекурентна формула метода Ейлера зазнає вигляду

$$V_c^{(k+1)} = V_c^{(k)} * 0,5 \quad (11.4)$$

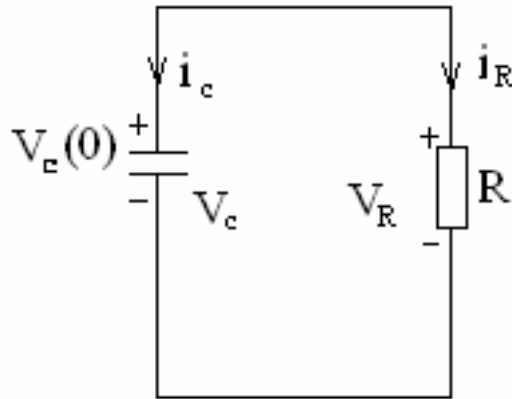


Рис. 11.1

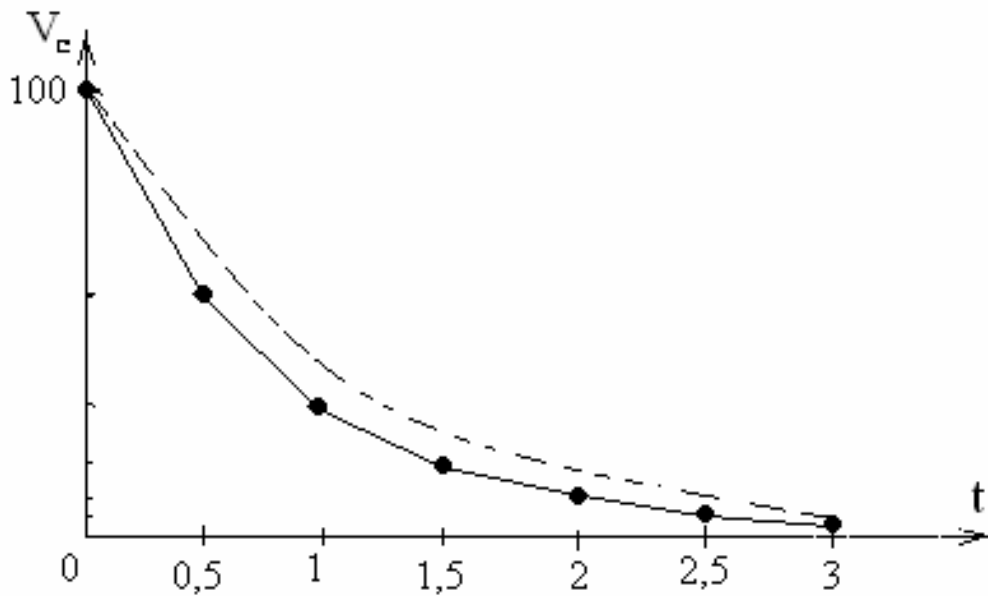


Рис. 11.2.

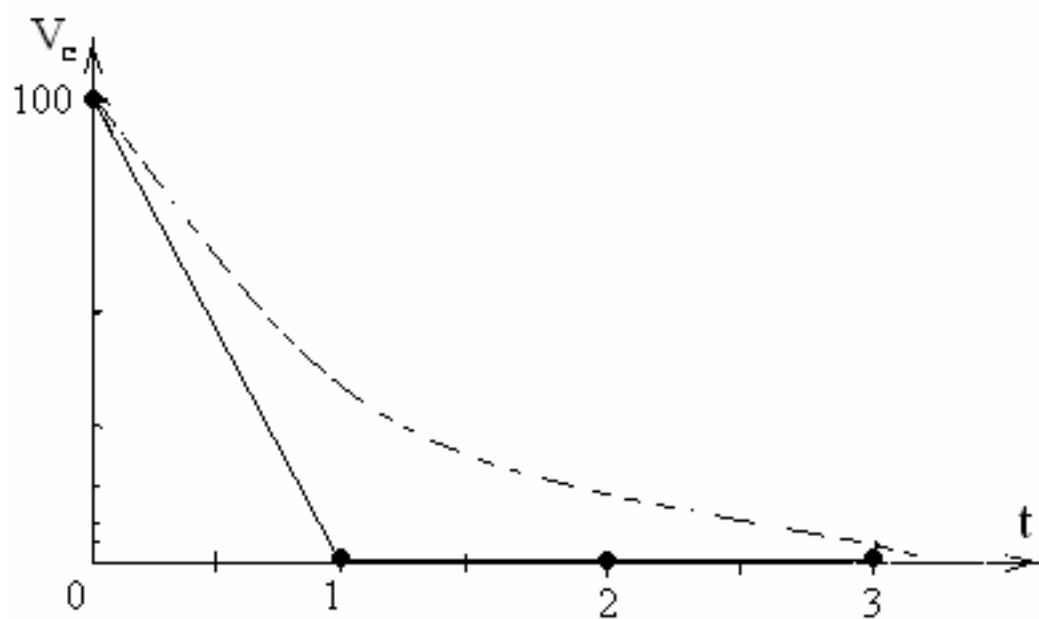


Рис. 11.3

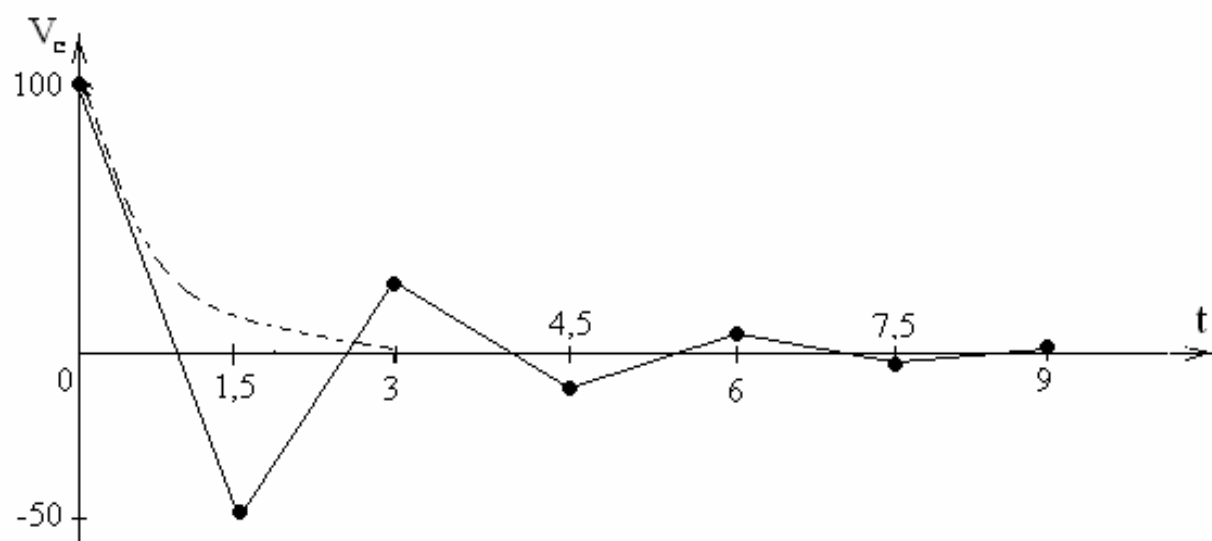


Рис. 11.4

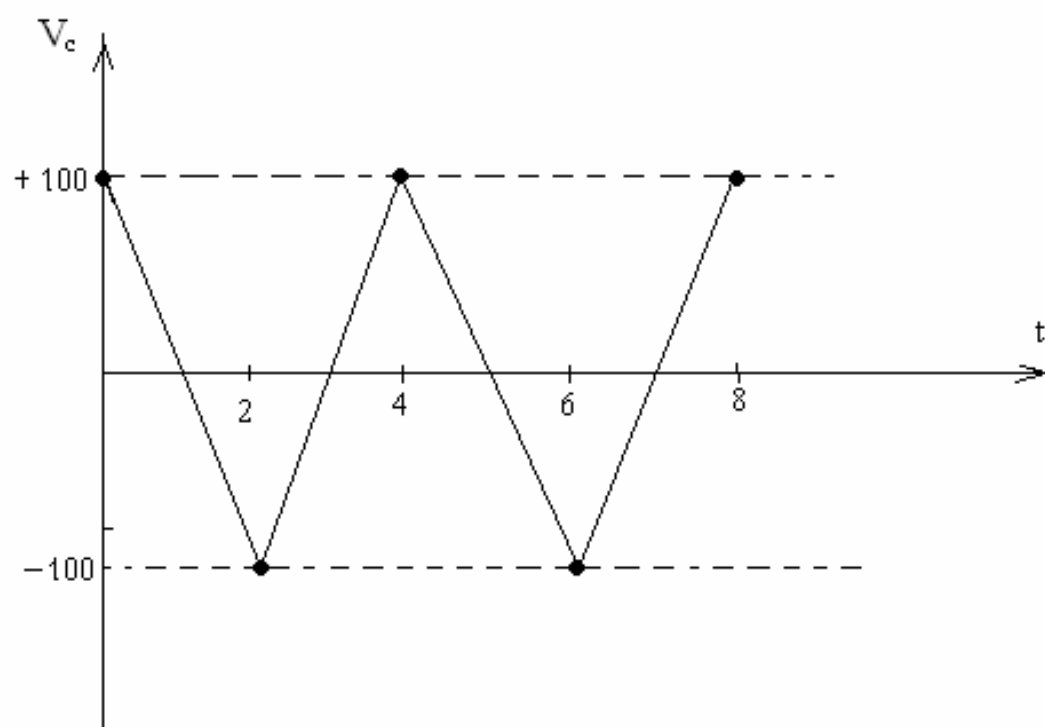


Рис. 11.5

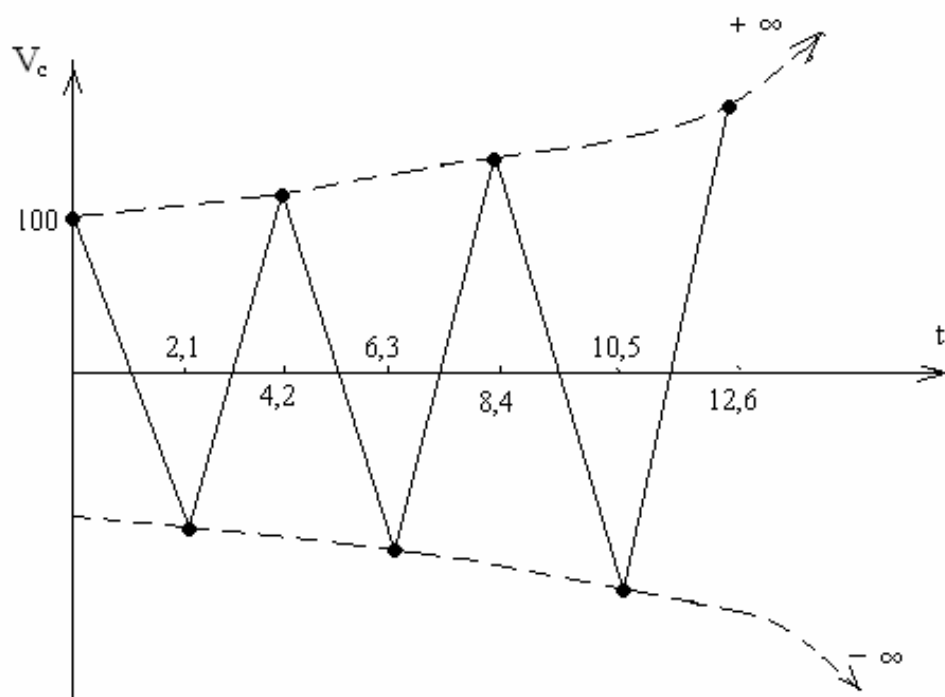


Рис. 11.6

Вважаючи  $V_c(0) = 100$ ,  $RC=1$  розрахуємо таблицю перших точок з кроком  $\Delta t = 0,5$  (таблиця 11.1)

Таблиця 11.1

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$V_c$	100	50	25	12,5	6,25	3,125	1,5625

Точне розв'язування для цієї системи має вигляд

$$V_c(t) = V_c(0) e^{-t/RC}, \quad (11.5)$$

що дає  $V_c(1)=36,7879$ ,  $V_c(2)=13,5335$ ,  $V_c(3)=4,9787$

На рис.11.2 побудовано графіки точного розрахунку (пунктиром) і наближеного за методом Ейлера при  $\Delta t = 0,5$ . Порівнюючи ці графіки, можемо стверджувати, що наближене розв'язання досить точно відображає дійсний хід процесу, точність буде підвищуватися якщо крок інтегрування зменшувати.

2.Збільшимо крок інтегрування до  $(\Delta t/RC)=1$ . Тоді рекурентна формула методу Ейлера матиме вигляд :

$$V_c^{(k+1)} = V_c^{(k)} * 0. \quad (11.6)$$

Таблиця 11.2 дає результати розрахунків, з яких видно, що вже на першому кроці напруга на конденсаторі досягає свого кінцевого значення.

Таблиця 11.2

t	0	1	2	3	.....
$V_c$	100	0	0	0	.....

Такий процес прийнято називати процесом кінцевої тривалості, коли величина досягає усталеного значення за кінцеву кількість інтервалів дискретизації. Графік процесу для цього випадку показано на рис.11.3. Тепер бачимо, що при збільшенні кроку похибка збільшилась, але процес відображається всі адекватно.

3. Збільшимо крок інтегрування до  $(\Delta t/RC)=1,5$ . Рекурентна формула методу Ейлера матиме вигляд

$$V_c^{(k+1)} = V_c^{(k)} * (-0,5) \quad (11.7)$$

Таблиця 11.3 представляє розрахунки для цього випадку, а графіки побудовані на рис. 11.4.



Таблиця 11.3

t	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9
V <sub>c</sub>	100	-50	25	-12,5	6,25	-3,125	1,5625

Як видно з графіків, результати обчислення характеризуються не тільки збільшеною похибкою, але і спотворюють дійсний хід процесу. Насправді конденсатор, який розряджається через резистор, ніколи не змінює своєї напруги (таке трапляється лише в коливальному LC-контурі), а розрахунки показують, що на парних кроках напруга конденсатора начебто від'ємна. Все ж ці результати мають позитивну рису, що полягає у спаданні напруги зрештою до кінцевого нульового значення.

4. Подальше збільшення кроку до  $(\Delta t/RC)=2$  приводить до рекурентної формули

$$V_c^{(k+1)} = V_c^{(k)} * (-1) \quad (11.8)$$

Результати розрахунків представлені в таблиці 11.4 і на рис.11.5.

Таблиця 11.4

t	0	2	4	6	8	.....
V <sub>c</sub>	100	-100	100	-100	100	.....

Отриманий процес ще більше спотворюється, демонструючи начебто незгасаючий коливальний процес, який в дійсності в такій системі існувати не може. небезпечність опинитися в такій обчислювальній ситуації полягає і в тому, що можна чекати нескінченно довго на угамування процесу, оскільки ніколи напруга не досягне свого правильного, нульового значення. Але зауважимо, що при цьому значенні кроку ще зберігається числова стійкість, яка зникне, якщо крок збільшити навіть на малу величину. Тому крок  $(\Delta t / RC)=2$  називається максимально допустимим, або критичним.

5. Збільшимо крок лише на 0,1, тобто  $(\Delta t/RC)=2,1$ . Рекурентна формула методу Ейлера набирає вигляду

$$V_c^{(k+1)} = V_c^{(k)} * (-1,1) \quad (11.9)$$

Тепер на кожному наступному кроці напруга на конденсаторі збільшується на 10% і змінює свій знак (таблиця 11.5)

Таблиця 11.5

t	0	2,1	4,2	6,3	8,4	10,5	12,6	.....
V <sub>c</sub>	100	-110	+121	-133,1	+146,41	-161,051	177,156	.....

Графіки цього процесу показані на рис.11.6. Оскільки з кожним кроком напруга збільшується за геометричною прогресією, показник якої більше 1, то очікуємо, що обвідна графіка, показана пунктиром буде прямувати до нескінченно великої величини. Скажімо, вже на 25 кроці значення  $V_c$  більш ніж в 10 разів перевищує  $V_c(0)$ . При подальшому збільшенні кількості кроків  $V_c$  досягає такої величини, яка переповнює розрядну сітку комп'ютера.

Звичайно операційна система реагує на переповнення розрядної сітки аварійною зупинкою роботи комп'ютера, оскільки подальші розрахунки будуть апріорі спотворені і тому втрачають будь-який сенс.

Ця ситуація ілюструє явище чисельної нестійкості методу Ейлера, яка може уявляти собою серйозну перешкоду в проведенні розрахунків. Простіший спосіб уникнути такої ситуації полягає в зменшенні кроку інтегрування до величини, меншої за критичну. Більш надійним виходом з цієї ситуації є розробка таких методів інтегрування рівнянь стану, які були б нечутливі до будь-якого збільшення кроку інтегрування.

### ***КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ***

#### ***І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ***

1. Як чином точність розрахунків за методом Ейлера залежить від величини кроку інтегрування?
2. Що являє собою процес кінцевої тривалості?
3. Яка величина кроку інтегрування обумовлює процес кінцевої тривалості?
4. До яких явищ призводить збільшення кроку інтегрування?
5. Яка величина кроку інтегрування називається критичною?
6. У чому полягає явище чисельної нестійкості при застосуванні методу Ейлера?

## 12.СИСТЕМНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ХАРАКТЕРИСТИЧНЕ РІВНЯННЯ

Метод змінних стану в загальному вигляді виражається формулою (9.3):

$$\frac{dX}{dt} = f(X, Q),$$

де  $f$  являє собою будь-яку функціональну залежність, яка визначає математично вплив  $X$  і  $Q$  на похідні змінних стану. Цей вираз набуває конкретності у випадку лінійної системи, де завдяки властивостям лінійної системи вплив кожної складової є незалежним. Тому метод змінних стану можна представити виразом:

$$\frac{dX}{dt} = AX + BQ \quad (12.1)$$

У цьому виразі  $A$  – квадратна матриця, порядок якої дорівнює кількості змінних стану. Ця матриця відображає вплив на похідні змінних стану самих змінних стану. Матриця  $B$  – це прямокутна матриця, кількість її стрічок дорівнює кількості змінних стану, а кількість стовпців визначається кількістю джерел енергії. Ця матриця відображає вплив на похідні змінних стану саме джерел електричної енергії  $Q$ .

Матриця  $A$  називається системною матрицею, вона віддзеркалює внутрішні властивості системи. Матрицю  $B$  називають матрицею збурень, вона віддзеркалює вплив зовнішніх джерел енергії на поведінку системи. Якщо вектор  $Q$  зробити нульовим, то система буде знаходитися у стані вільного руху, і у випадку наявності в ній енергії (ненульової напруги на конденсаторі або ненульового струму в індуктивності) буде рухатися під впливом цієї енергії. Реальні системи завжди мають у своєму складі елементи, які витрачають енергію, перетворюючи її, наприклад, у тепло, яке розсіюється в навколишньому середовищі. В електричних системах такими елементами є резистори. Навіть коли в реальній системі не ввімкнено навмисно резисторів, вони фактично присутні в конденсаторах, індуктивностях, провідниках, що сполучають елементи в систему, тощо. Внаслідок безумовної присутності резисторів у реальних електричних системах енергія в них під час вільного руху буде завжди зменшуватися з часом, асимптотично наближаючись до нуля. Системи, в яких енергія під час вільного руху втрачається і розсіюється, називаються дисипативними. Властивості системи можуть бути досліджені за допомогою системної матриці.

Матриці  $A$  і  $B$  можна виділити, розглядаючи систему рівнянь за методом змінних стану. (9.30) – (9.33), які зручно записати, розкривши дужки:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{C1}}{dt} &= -\frac{1}{C_1 R_1} V_{C1} - \frac{1}{C_1} i_{L1} + \frac{1}{C_1 R_1} V_E; \\ \frac{dV_{C2}}{dt} &= -\frac{1}{C_2} i_{L2}\end{aligned}\quad (12.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{di_{L1}}{dt} &= \frac{1}{L_1} V_{C1} - \frac{R_2}{L_1} i_{L1} - \frac{R_2}{L_1} i_{L2} - \frac{R_2}{L_1} i_{J1}; \\ \frac{di_{L2}}{dt} &= \frac{1}{L_2} V_{C2} - \frac{R_2}{L_2} i_{L1} - \frac{R_2}{L_2} i_{L2} + \frac{1}{L_2} V_{E1} - \frac{R_2}{L_2} i_{J1}.\end{aligned}$$

Ці рівняння можна подати за формою (12.1):

$$\begin{array}{c} \frac{dV_{C1}}{dt} \\ \frac{dV_{C2}}{dt} \\ \frac{di_{L1}}{dt} \\ \frac{di_{L2}}{dt} \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & L_1 & L_2 \\ \hline -\frac{1}{C_1 R_1} & & -\frac{1}{C_1} & \\ \hline & & & -\frac{1}{C_2} \\ \hline \frac{1}{L_1} & & -\frac{R_2}{L_1} & -\frac{R_2}{L_1} \\ \hline & \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{array} \times \begin{array}{c} V_{C1} \\ V_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{array} + \begin{array}{c|c} E_1 & J_1 \\ \hline \frac{1}{C_1 R_1} & \\ \hline & -\frac{R_2}{L_1} \\ \hline \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{array} \times \begin{array}{c} V_{E1} \\ i_{J1} \end{array} \quad (12.2)$$

Еквівалентність (12.1) і (12.2) можна довести, розкривши в (12.2) операції матричного множення. Отже для зазначеної системи маємо:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & L_1 & L_2 \\ \hline -\frac{1}{C_1 R_1} & & -\frac{1}{C_1} & \\ \hline & & & -\frac{1}{C_2} \\ \hline \frac{1}{L_1} & & -\frac{R_2}{L_1} & -\frac{R_2}{L_1} \\ \hline & \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{array} \quad (12.2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c|c} E_1 & J_1 \\ \hline \frac{1}{C_1 R_1} & \\ \hline & -\frac{R_2}{L_1} \\ \hline \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{array} \quad (12.2)$$

Важливими показниками системи, які визначаються за допомогою системної матриці, є так звані власні значення системної матриці. Вони можуть бути отримані шляхом складання характеристичного рівняння і знаходження коренів при його розв'язанні. Операції, пов'язані з характеристичними рівняннями, можна пригадати з розділів вищої математики, присвячених лінійним диференціальним рівнянням. Якщо розглядається лінійне диференціальне рівняння  $n$ -го порядку, то характеристичне рівняння складається з коефіцієнтів лівої частини диференціального рівняння, а ступені оператора  $p$  характеристичного рівняння дорівнюють порядкам похідних при відповідних коефіцієнтах. Характеристичне рівняння являє собою алгебраїчне рівняння  $n$ -го порядку, розв'язавши його, отримаємо корені, від виду яких залежить конструювання аналітичних виразів розв'язання самого диференціального рівняння. У теоретичній електротехніці характеристичне рівняння розглядається при дослідженні перехідних процесів. За спрощеною методикою ліва частина характеристичного рівняння, тобто характеристичний поліном формується як операторний опір схеми відносно деякої пари затисків, або як знаменник операторного зображення досліджуваної електричної величини в разі використання операційного обчислення. Але класичне визначення характеристичного рівняння впливає з матричного обчислення, де воно в загальному матричному вигляді визначається за формулою

$$\det (A - pI) = 0 , \quad (12.4)$$

де  $\det$  - означає розрахунок визначника матриці, яку отримують внаслідок здійснення операцій в дужках;

$I$  - одинична матриця, порядок якої співпадає з порядком матриці  $A$ , для якої складається характеристичне рівняння;

$p$  - оператор (змінна), відносно якого формується характеристичне рівняння.

Розглянемо формування характеристичного рівняння для спрощення схеми, зображеної на рис.12.1.

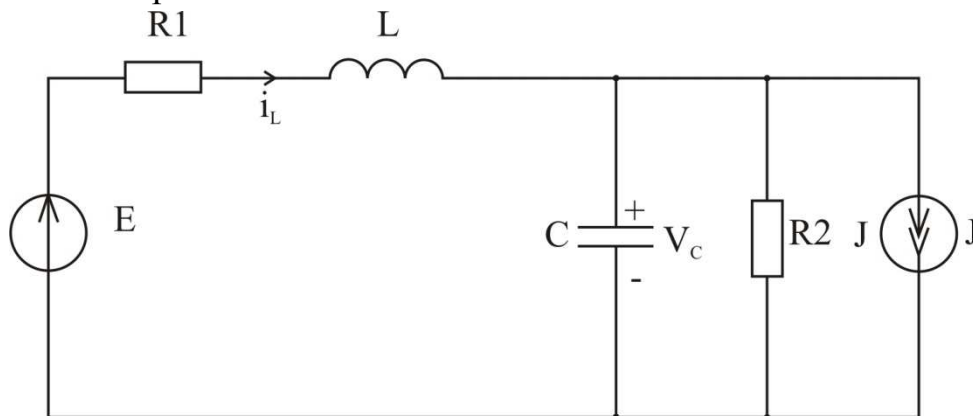
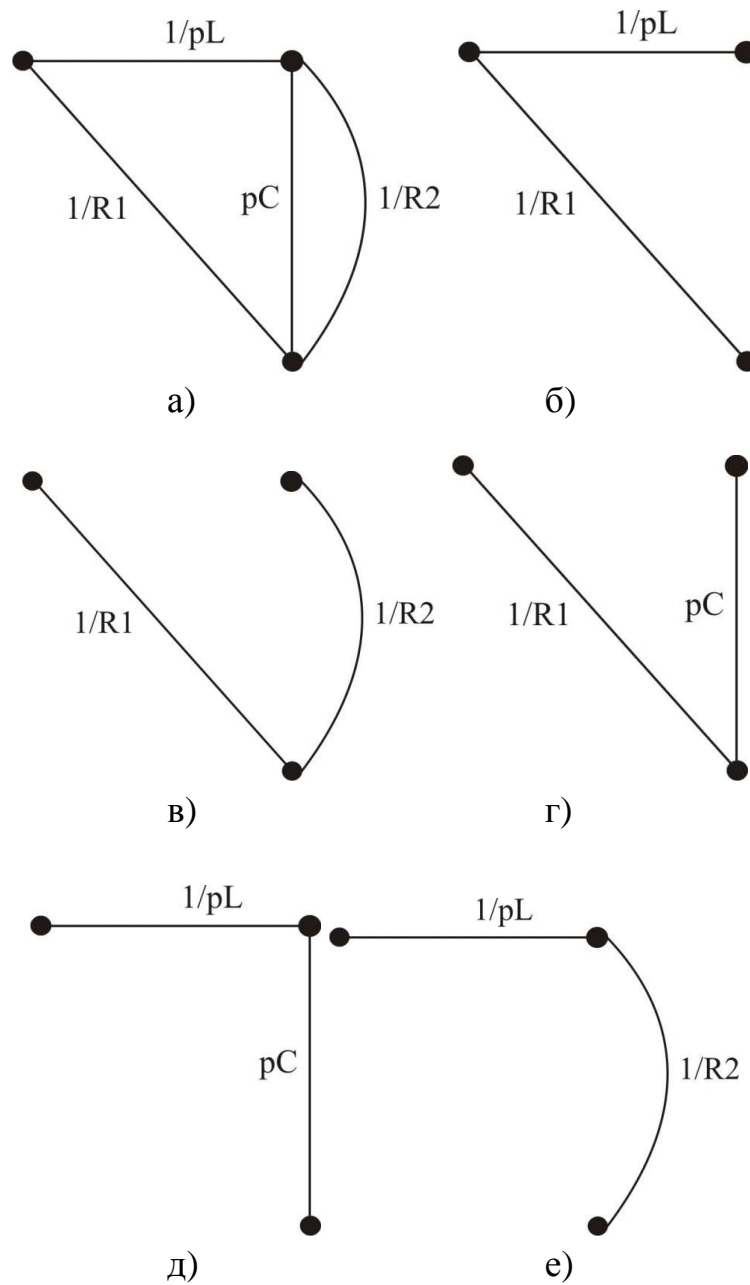


Рис. 12.1.



У цьому випадку маємо такі вектори змінних стану і заданих величин джерел:

$$X = \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} V_E \\ i_J \end{bmatrix}$$

Рівняння стану в скалярній формі:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \left( i_L - \frac{1}{R_2} V_C - i_J \right) \quad (12.5)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (V_E - V_C - R_1 i_L).$$

У матричній формі ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_E \\ i_J \end{bmatrix}$$

Звідси видно, що системна матриця:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} C & L \end{matrix} \\ \begin{matrix} C \\ L \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Утворимо характеристичне рівняння за зразком виразу (12.4):

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_2} - p & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} - p \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (12.6)$$

Звідки отримаємо:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{CR_2} - p & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} - p \end{vmatrix} = 0. \quad (12.7)$$

Розкриття визначника приводить до рівняння:

$$\left( \frac{1}{CR_2} + p \right) \left( \frac{R_1}{L} + p \right) + \frac{1}{CL} = 0. \quad (12.8)$$

Розкриваючи дужки і здійснюючи угруповання, отримаємо рівняння

$$p^2 + \left( \frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L} \right) p + \left( \frac{1}{CL} + \frac{R_1}{CLR_2} \right) = 0, \quad (12.9)$$

яке і представляє характеристичне рівняння системної матриці А.

Існують методи формування характеристичного рівняння на основі розгляду топологічних характеристик системи. Одним з найважливіших є поняття визначникане спрямованого графа, який можна знайти розглядом усіх можливих дерев графа. Величина дерева дорівнює добутку провідностей усіх ребер, які створюють дерево. Визначник неспрямованого графа підраховують як суму величин всіх можливих дерев графа. Для конденсаторів і індуктивностей при

формуванні характеристичного рівняння слід використовувати операторні провідності  $pC$  і  $\frac{1}{pL}$ . У графі електричної системи джерела напруги слід замкнути, а джерела струму розірвати, таким чином деактивувати всі джерела електричної енергії. Граф схеми на рис.12.1 для складання визначника представлений на рис.12.2,а, а усі можливі дерева зображені на рис.12.2,б-е. Просумуємо величини цих дерев і суму прирівняємо до нуля:

$$\frac{1}{pLR_1} + \frac{1}{R_1R_2} + \frac{pC}{R_1} + \frac{C}{L} + \frac{1}{pLR_2} = 0$$

Помножимо обидві частини на  $\frac{pR_1}{C}$ :

$$\frac{1}{CL} + p\frac{1}{CR_2} + p^2 + p\frac{R_1}{L} + \frac{R_1}{CLR_2} = 0.$$

Це рівняння вже легко приводиться до вигляду (12.9). Розглянемо характеристичний поліном в матричному і скалярному вигляді:

$$\det(A - pI) = p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \dots + a_{n-1}p + a_n$$

Якщо вважати в характеристичному поліномі  $p=0$ , то отримуємо:

$$\det A = a_n,$$

тобто вільний член характеристичного поліному дорівнює визначнику матриці.

Запишемо характеристичний поліном у вигляді добутку:

$$(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_{n-1})(p - p_n) = \det(A - pI),$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_n$  - корені характеристичного рівняння. Поклавши знову  $p=0$ , одержимо:

$$(-1)^n (p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n) = \det(A) = a_n. \quad (12.10)$$

Цей вираз показує, що коефіцієнт  $a_n$  дає оцінку добутку коренів характеристичного рівняння.

Якщо розкрити характеристичний поліном, записаний у вигляді добутку, то можна виразити коефіцієнти при різноманітних степенях  $p$  через корені характеристичного рівняння. Найпростіше обчислити коефіцієнт при  $p^{n-1}$ , який дорівнює:

$$a_1 = -(p_1 + p_2 + \dots + p_n).$$

Розкривши визначник  $|A - pI|$ , можемо помітити, що цей коефіцієнт з від'ємним знаком дорівнює сумі діагональних елементів матриці  $A$ :

$$a_1 = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}).$$



Звідси можна дійти висновку, що суму коренів характеристичного рівняння становить сума діагональних елементів матриці A:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}, \quad (12.11)$$

що також дає оцінку коренів характеристичного рівняння.

Для систем другого порядку характеристичне рівняння має вигляд

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0,$$

отже враховуючи зазначене вище, легко знайдемо коефіцієнти характеристичного рівняння.

Для системної матриці рівняння (12.5) коефіцієнт  $a_1$  отримуємо, сумуючи діагональні члени з від'ємним знаком:

$$a_1 = \left( -\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L} \right) = -\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}.$$

Для знаходження  $a_2$  треба обчислити визначник матриці A:

$$\det \begin{vmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{vmatrix} = -\frac{R_1}{CLR_2} + \frac{1}{CL}$$

Ці результати співпадають з (12.9).

У теорії матриць сума діагональних елементів називається слідом матриці і позначається через  $\text{Tr}(A)$  або  $\text{Sp}(A)$  (trace, spoor (англ.) – слід).

Позначимо через  $T_k$  слід матриці  $A^k$ , тобто

$$T_k = \text{Tr}(A^k).$$

Тоді коефіцієнти характеристичного рівняння можуть бути знайдені за допомогою наступних рекурентних формул Бохера:

$$\begin{aligned} a_1 &= -T_1 = -\text{Tr}(A), \\ a_2 &= -\frac{1}{2}(a_1 T_1 + T_2) = -\frac{1}{2}[a_1 \text{Tr}(A) + \text{Tr}(A^2)], \\ a_3 &= -\frac{1}{3}(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3) = -\frac{1}{3}[a_2 \text{Tr}(A) + a_1 \text{Tr}(A^2) + \text{Tr}(A^3)], \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_n &= -\frac{1}{n}(a_{n-1} T_1 + a_{n-2} T_2 + \dots + a_1 T_{n-1} + T_n). \end{aligned}$$

Ці рекурентні формули надзвичайно ефективні для комп'ютерного обчислення коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Сформуємо характеристичне рівняння для розглянутого вище прикладу за допомогою рекурентних формул Бохера:

$$a_1 = -T_1 = \frac{1}{CR_3} + \frac{R_1}{L}.$$

Для коефіцієнта  $a_2$  слід визначити  $A^2$  і  $\text{Tr}(A^2) = T_2$ .  $A^2$  обчислимо, помноживши  $A$  саму на себе:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(CR_2)^2} - \frac{1}{CL} & -\frac{1}{C^2R_2} - \frac{R_1}{CL} \\ \frac{1}{CLR_2} + \frac{R_1}{L^2} & -\frac{1}{CL} + \frac{R_1^2}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Тоді } T_2 = \frac{1}{C^2R_2^2} - \frac{2}{CL} + \frac{R_1^2}{L^2}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L} \right) \left( -\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L} \right) + \frac{1}{C^2R_2^2} - \frac{2}{CL} + \frac{R_1^2}{L^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{C^2R_2^2} - \frac{R_1}{CLR_2} - \frac{R_1^2}{L^2} + \frac{1}{C^2R_2^2} - \frac{2}{CL} + \frac{R_1^2}{L^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{2R_1}{CLR_2} - \frac{2}{CL} \right) = \frac{R_1}{CLR_2} + \frac{1}{CL}. \end{aligned}$$

Ці результати також співпадають із зазначеними в (12.9).

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Як визначити системну матрицю, якщо відома система рівнянь за методом змінних стану?
2. Яким чином визначають характеристичне рівняння в матричній формі?
3. Поясніть топологічний метод обчислення коефіцієнтів характеристичного рівняння.
4. Які формули дозволяють обчислити коефіцієнти  $a_1$  і  $a_n$  характеристичного рівняння?
5. Що називається слідом матриці?
6. З'ясуйте використання рекурентних формул для обчислення коефіцієнтів характеристичного рівняння.

### 13. ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ СИСТЕМНОЇ МАТРИЦІ

Корені характеристичного рівняння матриці називаються власними значеннями (або власними числами чи характеристичними числами) цієї матриці. Знання власних значень дозволяє мати уявлення про характер динамічних процесів системи, або, як ще кажуть, динамічні властивості системи.

Коефіцієнти характеристичного рівняння електричної системи визначаються параметрами резисторів, конденсаторів і котушок індуктивності. Ці коефіцієнти є завжди дійсними числами, тому корені характеристичного рівняння можуть бути або дійсними, або попарно спряженими. Таким чином, будь-яка пара коренів може бути представлена як

$$p_{k,k+1} = \alpha_K \pm j\omega_K. \quad (13.1)$$

Дійсні корені або дійсні частини комплексних коренів визначають експоненціальні складові розв'язань диференціальних рівнянь. Коефіцієнти при уявних частинах спряжених коренів визначають кругові частоти гармонійних складових. У загальному вигляді складова розв'язання диференціального рівняння може бути записана у такому вигляді:

$$X_K = Ae^{\alpha_K t} \sin(\omega_K t + \varphi). \quad (13.2)$$

Амплітуда  $A$  визначається початковими умовами для змінної стану, а кут  $\varphi$  — співвідношенням між амплітудами синусної і косинусної складових рівняння. Для дисипативних систем затухаючий характер обумовлений тим, що експонента повинна бути затухаючою, що можливо лише при  $\alpha_K < 0$ . Тому для реальних систем, які завжди є дисипативними, дійсні корені й дійсні частини комплексних коренів повинні бути від'ємними. При розгляді процесів в електричних системах більш прийнятною формою представлення експонент є така, при якій виділяють постійні часу експонент  $\tau$ :

$$X_K = Ae^{\frac{t}{\tau_K}} \sin(\omega_K t + \varphi), \quad (13.3)$$

при цьому, звичайно, повинно бути  $\tau_K < 0$ .

Порівнюючи (13.2) і (13.3), бачимо, що

$$\tau_K = \frac{1}{\alpha_K},$$

тобто величини постійних часу експонент є оберненими величинами модулів дійсних коренів і дійсних частин комплексних коренів. Коефіцієнти при уявних частинах дозволяють визначити періоди коливальних складових, оскільки

$$\omega_K = 2\pi f_K = 2\pi \cdot \frac{1}{T_K},$$

де  $f_K$  — частота, виміряна у Гц;  $T_K$  — період коливань.

Звідси можна оцінити періоди коливань:  $T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}$ .

Величини постійних часу  $\tau$  і періодів гармонійних коливань  $T$  дозволяють оцінити відповідні величини кроків інтегрування. Наприклад, якщо найменша постійна часу  $\tau_{\min}$  затухає приблизно за час  $(3-5)\tau_{\min}$ , то можна вважати максимальний крок

$$\Delta t_{\max} = \frac{(3 \div 5)\tau_{\min}}{10} = (0,3 \div 0,5)\tau_{\min}. \quad (13.4)$$

Якщо найшвидша гармонійна складова дає мінімальний період  $T_{\min}$ , будемо вважати за необхідне обчислити  $(8 \div 12)$  точок на періоді

Дістанемо величину найбільш припустимого кроку інтегрування

$$\Delta t_{\max} = \frac{T_{\min}}{(8 \div 12)} = \frac{2\pi}{(8 \div 12)\omega} = \frac{\pi}{(4 \div 6)\omega} = \frac{(0,5 \div 0,8)}{\omega}. \quad (13.5)$$

Порівнюючи оцінки (13.4) і (13.5), слід обрати менший крок для розрахунків.

Звичайно ці співвідношення є приблизними, вони виходять з кількості дискрет на періоді або на інтервалі постійної часу, які необхідно обчислити для адекватної побудови часових діаграм. Але ці співвідношення говорять про те, наскільки важливо знати власні значення системної матриці.

Яким же чином можна знайти корені характеристичного рівняння

$$p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

За теоремою Абея при  $n > 4$  символічне розв'язання алгебраїчного рівняння  $n$ -го порядку неможливе. Один з можливих чисельних методів, який називають методом Берстоу, полягає в послідовному виділенні тричленів, які мають вигляд

$$p^2 + Ap + B,$$

на які характеристичним поліном може бути поділений без залишку(точніше кажучи, з нескінченно малим залишком).

Така операція дозволяє у знайденому тричлені зосередити два корені, які легко визначаються розв'язанням рівняння

$$p^2 + Ap + B = 0$$

за відомими формулами Вієта.

Після поділу характеристичного поліному на тричлен ступінь характеристичного полінома зменшується на 2.

Процедура визначення тричленів і зниження ступеня характеристичного полінома продовжується доти, доки його ступінь не стане дорівнювати 1 або 2, тоді останнє рівняння легко розв'язується. Для знаходження коефіцієнтів  $A$  і  $B$  тричлена застосовують різноманітні чисельні алгоритми.

На рис. 13.1 наведена програма на мові Visual Basic, яка дозволяє по заданій системній матриці сформувати характеристичний поліном за методом рекурентних формул Бохера та розв'язати його за методом Берстоу. Програма може бути легко реалізована в середовищі Visual Basic, або навіть в MS Excel, який має можливості написання так званих макросів на мові Visual Basic, яку в MS Excel називають VBA(Visual Basic for Application). Для застосування VBA(за допомогою “гарячих” клавіш Alt+F11), де на робочому аркуші можна вписати текст програми і запустити програму на виконання. На рис.13.2 наведено вид панелі в VBA в середовищі MS Excel, на кнопках в дужках зроблені помітки, які дозволяють співставити їх із закріпленими викликами макросів і процедур з тексту наведеної програми.

Другий метод знаходження власних значень дозволяє досягати результату без формування характеристичного рівняння і його розв'язування. Для цього застосовують еквівалентні перетворення системної матриці, при яких власні значення перетвореної матриці зберігаються.

```
Option Explicit
Dim KP(0 To 21) As Double
Dim V As Integer
Dim A(20, 20) As Double
Dim C(20, 20) As Double
Dim N As Integer
Dim AA(20) As Double
Dim U(20) As Double
Dim VV(20) As Double
Dim IR As Integer
Sub Кнопка4_Щелкнуть()
    wwod N, A
End Sub
'=====
Sub wwod(N As Integer, A() As Double)
    Dim i, j As Integer
    N = CInt(InputBox("Введи порядок матрицы N:"))
    For i = 1 To N
        For j = 1 To N
            A(i, j) = CDBl(InputBox("Введи коэффициент A[" & i & "," & j & "]:"))
        Next j
    Next i
End Sub
' Кнопка5_Щелкнуть Макрос
Sub Кнопка5_Щелкнуть()
    polynom N, KP, A, V, C
End Sub
'=====
' Кнопка6_Щелкнуть Макрос
```

```

Sub Кнопка6_Щелкнуть()
    wyw N, KP
End Sub
'=====
Sub polynom(N As Integer, KP() As Double, A() As Double, V As Integer, C() As Double)
    Dim i, j, k, sk As Integer
    Dim B(20, 20) As Double
    Dim U(20, 20) As Double
    Dim B1(20, 20) As Double
    Dim P1(20, 20) As Double
    Dim P, SPU As Double
    MsgBox ("ПОЙДЕТ ФОРМИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА:")
    For i = 1 To N
        For j = 1 To N
            If i = j Then B(i, j) = 1# Else B(i, j) = 0#
        Next j
    Next i
    KP(N) = 1
    V = 1
    k = 0
1
    k = k + 1
    MsgBox ("New k=" & k)
    For i = 1 To N
        For j = 1 To N
            B1(i, j) = B(i, j)
        Next j
    Next i
    'умножение матриц:
    For i = 1 To N
        For j = 1 To N
            U(i, j) = 0
            For sk = 1 To N
                U(i, j) = U(i, j) + A(i, sk) * B(sk, j)
            Next sk
        Next j
    Next i
    SPU = 0
    For i = 1 To N
        SPU = SPU + U(i, i)
    Next i
    MsgBox ("SPU=" & CDb1(SPU) & "   k=" & CInt(k))
    P = SPU / k
    KP(N - k) = -P
    If (k = N) And (P = 0) Then GoTo 100

```

```

For i = 1 To N
  For j = 1 To N
    If i = j Then P1(i, j) = P Else P1(i, j) = 0#
    B(i, j) = U(i, j) - P1(i, j)
  Next j
Next i
If k < N Then GoTo 1
  For i = 1 To N
    For j = 1 To N
      ' C(i, j) = B1(i, j) / P
    Next j
  Next i
GoTo 2
100
V = -1
2
MsgBox ("ФОРМИРОВАНИЕ ХАР-СТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ЗАВЕРШЕНО!")
For i = 0 To N
  MsgBox ("KP[" & i & "]= " & CStr(KP(i)))
Next i
End Sub
'=====
Sub Кнопка7_Щелкнуть()
ww_koef_харур
End Sub
'=====
Sub wyw(N As Integer, KP() As Double)
Dim i As Integer
For i = 0 To N
  MsgBox ("Коэффициент KP[при p^" & i & "]= " & CStr(KP(i)))
Next i
End Sub
'=====
Sub ww_koef_харур()
Dim j As Integer
N = CInt(InputBox("Введи порядок уравнения N:"))
For j = 1 To N + 1
  'А это ввод, начиная с коэффициента при высшей степени:
  AA(N + 2 - j) = CDBl(InputBox("Введи A[при p^" & (N + 1 - j) & "]:"))
  'Это ввод, начиная со свободного члена:
  A(j) = CDBl(InputBox("Введи (начиная со свободного члена) A[" & (N + 1 - j) & "]:"))
Next j
MsgBox ("Ввод ЗАВЕРШЕН!")
End Sub

```

```

Кнопка8_Щелкнуть Макрос
Sub Кнопка8_Щелкнуть()
root N, AA, U, VV, 1
End Sub
Sub Кнопка9_Щелкнуть()
wyw_roots U, VV, N
End Sub
'=====
Sub wyw_roots(U() As Double, V() As Double, N As Integer)
Dim i As Integer
For i = 1 To N
    MsgBox ("Корень #" & CStr(i) & " : " & CStr(U(i)) & " + j { " & CStr(V(i) & " }")
Next i
End Sub
=====
Sub root(N As Integer, A() As Double, U() As Double, V() As Double, IR As Integer)
MsgBox ("ПОЙДЕТ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ БЕРСТОУ:")
Dim H(21) As Double
Dim B(21) As Double
Dim C(21) As Double
Dim IREV, NC, i, j, i1, M, NL, NP As Integer
Dim P, Q, R, F, D, QP, PP, E, CBAR As Double
For i = 1 To N + 1
    H(i) = 0
    B(i) = 0
    C(i) = 0
    U(i) = 0
    V(i) = 0
Next i
IREV = IR
NC = N + 1
'переписываем коэффициенты из A в H:
For i = 1 To NC
    H(i) = A(i)
Next i
P = 0
Q = 0
R = 0
3
If H(1) <> 0 Then GoTo 4
'понижение порядка из-за нулевого коэффициента при p^N:
NC = NC - 1
V(NC) = 0
U(NC) = 0
For i = 1 To NC

```



```

    H(i) = H(i + 1)
Next i
GoTo 3
4
If NC = 1 Then GoTo 100
If NC = 2 Then
    R = -H(1) / H(2)
    GoTo 50
End If
If NC = 3 Then
    P = H(2) / H(3)
    Q = H(1) / H(3)
    GoTo 70
End If
If (Abs(H(NC - 1) / H(NC)) - Abs(H(2) / H(1))) < 0 Then
    GoTo 10
Else
    GoTo 19
End If
10
'перестановка коэффициентов:
IREV = -IREV
M = NC / 2
For i = 1 To M
    NL = NC + 1 - i
    F = H(NL)
    H(NL) = H(i)
    H(i) = F
Next i
If Q = 0 Then
    P = 0#
    GoTo 15
End If
P = P / Q
Q = 1# / Q
15
If R <> 0# Then R = 1# / R
19
'ПОДГОТОВКА А ИТЕРАЦИЯМ И ЗАДАНИЕ ТОЧНОСТИ E:
E = 0.00000000005
B(NC) = H(NC)
C(NC) = H(NC)
B(NC + 1) = 0#
C(NC + 1) = 0#
NP = NC - 1

```

20

'ТЕПЕРЬ ПОШЛИ ИТЕРАЦИИ:

For j = 1 To 1000

For i1 = 1 To NP

i = NC - i1

$B(i) = H(i) + R * B(i + 1)$

$C(i) = B(i) + R * B(i + 1)$

Next i1

If  $Abs(B(1) / H(1)) \leq E$  Then GoTo 50

If  $C(2) = 0$  Then

R = R + 1

GoTo 30

End If

$R = R - B(1) / C(2)$

30

For i1 = 1 To NP

i = NC - i1

$B(i) = H(i) - P * B(i + 1) - Q * B(i + 2)$

$C(i) = B(i) - P * C(i + 1) - Q * C(i + 2)$

Next i1

If  $H(2) = 0$  Then GoTo 31 Else GoTo 32

31

If  $Abs(B(2) / H(1)) \leq E$  Then GoTo 33 Else GoTo 34

32

If  $Abs(B(2) / H(2)) \leq E$  Then GoTo 33 Else GoTo 34

33

If  $Abs(B(1) / H(1)) \leq E$  Then GoTo 70 Else GoTo 34

34

$CBAR = C(2) - B(2)$

$D = C(3) * C(3) - CBAR * C(4)$

If  $D \neq 0$  Then GoTo 36

$P = P - 2$

$Q = Q * (Q + 1)$

GoTo 49

36

$P = P + (B(2) * C(3) - B(1) * C(4)) / D$

$Q = Q + (-B(2) * CBAR + B(1) * C(3)) / D$

49

Next j

$E = E * 10\#$

GoTo 20

50

'ЕСЛИ КОРЕНЬ ОДИН:

$NC = NC - 1$

$V(NC) = 0\#$

```

If IREV >= 0 Then GoTo 52
U(NC) = 1# / R
GoTo 53
52
  U(NC) = R
53
  For i = 1 To NC
    H(i) = B(i + 1)
  Next i
  GoTo 4
70
'Если корней два: выделен квадратный трехчлен:
NC = NC - 2
If IREV >= 0 Then GoTo 72
QP = 1# / Q
PP = P / (2 * Q)
GoTo 73
72
  QP = Q
  PP = P / 2
73
  F = PP * PP - QP
  If F >= 0 Then GoTo 75
  U(NC + 1) = -PP
  U(NC) = -PP
  V(NC + 1) = Sqr(-F)
  V(NC) = -V(NC + 1)
  GoTo 76
75
  If PP = 0 Then
    U(NC + 1) = -Sqr(F)
    GoTo 82
  End If
  U(NC + 1) = -(PP / Abs(PP)) * (Abs(PP) + Sqr(F))
82
  V(NC + 1) = 0#
  'здесь бывает деление на 0!?
  U(NC) = QP / U(NC + 1)
  V(NC) = 0#
76
  For i = 1 To NC
    H(i) = B(i + 2)
  Next i
  GoTo 4
100

```

```

MsgBox ("РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ БЕРСТОУ ЗАВЕРШЕНО!")
End Sub
Sub Кнопка10_Щелкнуть()
MsgBox ("Eigen Values Problem")
End Sub
Sub Кнопка11_Щелкнуть()
Dim i As Integer
For i = 0 To N
AA(i + 1) = KP(i)
Next i
MsgBox ("Произведена пересылка коэффициентов характеристического уравнения для его решения!")
End Sub

```

Рис. 13.1

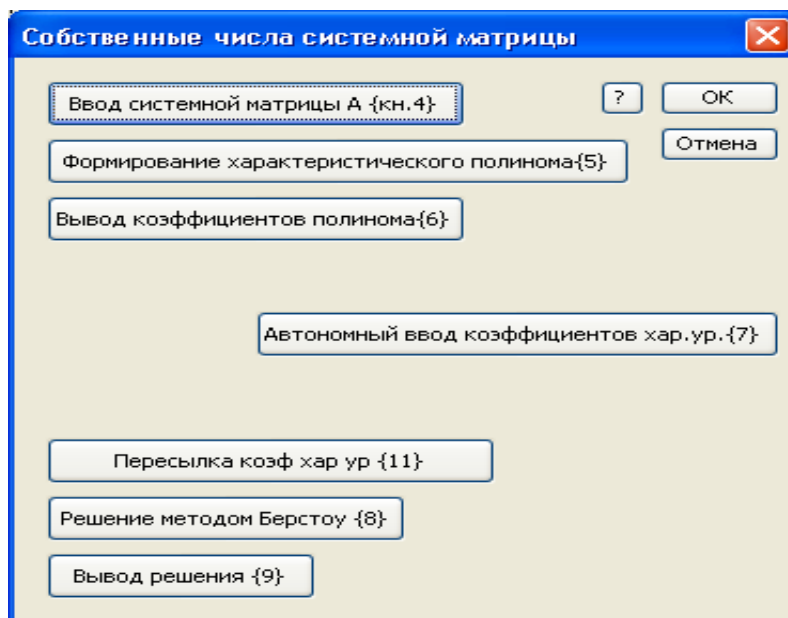


Рис. 13.2

Метою таких перетворень є зведення системної матриці до форми такої матриці, в якій на головній діагоналі зосереджуються під матриці розміру (1x1) або (2x2), в яких і локалізовані власні значення, тому що всі елементи нижче головної діагоналі перетворюються в нулі. Для отримання такої матриці, яка має діагональні блоки розмірами (1x1) або (2x2) використовують так званий QR-алгоритм [8]. Маючи будь-яку матрицю A можна отримати матрицю B, яка буде мати ті ж самі власні значення. Матрицю B отримують із матриці A так званим перетворенням подібності, головною особливістю такого перетворення є збереження власних значень матриці. Саме за такими алгоритмами побудовані підпрограми-функції `eigenvals` та `eig` відповідно в система MathCAD і MATLAB, які дозволяють отримати власні значення заданої матриці.

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$x := \text{eigenvals}(A)$

$$x = \begin{pmatrix} -0.31 \\ -9.69 \end{pmatrix}$$

а)

>> A=[-1 3;2 -9]

A =

-1 3

2 -9

>> x=eig(A)

x =

-0.3096

-9.6904

>>

б)

Рис.13.3

На рис. 13.3,а показано застосування функції `eigenvals` в системі MathCAD для знаходження власних значень матриці другого порядку. Спочатку задається сама матриця **A** шляхом вводу значень її елементів у відповідний шаблон другого порядку. Вектор власних значень засилається в матрицю-стовпець **x** завдяки зверненню до функції `eigenvals`, параметром якої є ім'я матриці **A**, після чого запитуємо значення вектора **x**.

На рис. 13.3,б показано застосування функції `eig` в системі MATLAB. Послідовність дій в цьому варіанті співпадає з попереднім з урахуванням відмінності у способі вводу матриці **A** (вводимо матрицю по рядкам, відділяючи їх точками з комами).

Застосування програми на VBA в MS Excel приводить у даному випадку до характеристичного рівняння

$$p^2 + 10p + 3 = 0,$$

корені якого дорівнюють:  $p_1 = -0.3095842$  та  $p_2 = -9.690415$ , що співпадає з результатами, отриманими в середовищах математичних пакетів.

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Що являють собою власні значення системної матриці?
2. Які уявлення про властивості електричної системи дають власні значення?
3. Яким чином визначають власні значення за допомогою метода Берстоу?
4. У чому полягає сутність методів отримання власних значень матриці без складання характеристичного рівняння?
5. Як за власними значеннями системної матриці знайти сталі часу й власні частоти електричної системи?
6. Складіть електричну систему 3-4 порядку, задайте параметри і знайдіть її сталі часу й власні частоти.
7. Перевірте отримані в п.6 результати за допомогою відповідних функцій в пакетах MathCAD і MATLAB.
8. Реалізуйте наведену на рис. 13.1 програму і використайте її для знаходження власних значень системної матриці за п.6.

## 14. СТІЙКІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ

Розглянемо тестову систему, на якій було проілюстровано виникнення чисельної нестійкості методу Ейлера (рис. 11.1).

Для конденсатора компонентне рівняння:

$$C \frac{dV_c}{dt} = i_c \quad (14.1)$$

можна представити, замінивши диференціали приростами:

$$\begin{aligned} dV_c &\approx V_c^{(K+1)} - V_c^{(K)} \\ dt &\approx \Delta t, \end{aligned} \quad (14.2)$$

де  $V_c^{(K)}$  і  $V_c^{(K+1)}$  – дискретні значення напруг на конденсаторі в момент часу.

$t_K$  і  $t_{K+1} = t_K + \Delta t$ , а  $\Delta t$  – крок інтегрування. Відносно струму  $i_c$ , з погляду на дискретний характер обчислюваних величин, також треба прийняти рішення щодо незмінності струму протягом кроку інтегрування. Прийmemo, що  $i_c = i_c^{(k)}$ , тобто величина струму через конденсатор береться постійною і дорівнює значенню на початку кроку інтегрування.

Таким чином,

$$C \frac{V_c^{(K+1)} - V_c^{(K)}}{\Delta t} = i_c^{(K)}, \quad (14.3)$$

звідки можна одержати:

$$V_c^{(K+1)} = V_c^{(K)} + \frac{\Delta t}{C} i_c^{(K)}. \quad (14.4)$$

З урахуванням топологічних рівнянь і компонентного рівняння резистора можна виразити струм конденсатора:

$$i_c^{(K)} = -i_R^{(K)} = -\frac{1}{R} V_R^{(K)} = -\frac{1}{R} V_c^{(K)}. \quad (14.5)$$

Підставимо цей вираз і отримаємо:

$$V_c^{(K+1)} = V_c^{(K)} + \frac{\Delta t}{C} \left( -\frac{1}{R} V_c^{(K)} \right) = V_c^{(K)} \left( 1 - \frac{\Delta t}{RC} \right). \quad (14.6)$$

Ця рекурентна формула отримана, виходячи з фізичних міркувань, вона співпадає з результатами застосування методу Ейлера для рівняння стану названої тестової схеми з усіма недоліками в сенсі чисельної нестійкості.

Дослідимо, яким чином змінюється рекурентна обчислювальна формула, якщо прийняти  $i_c = i_c^{(k+1)}$ . Такий підхід означає, що струм конденсатора вважається постійним і дорівнює значенню наприкінці даного кроку інтегрування:

$$C \frac{V_c^{(K+1)} - V_c^{(K)}}{\Delta t} = i_c^{(K+1)}, \quad (14.7)$$

На перший погляд здається, що значення  $i_c^{(k+1)}$  може бути розраховане тільки після здійснення обчислень визначення напруги  $V_c^{(k+1)}$  на кінці кроку інтегрування, оскільки:

$$i_c^{(K+1)} = -\frac{1}{R} V_c^{(K+1)} \quad (14.8)$$

Підставимо це значення в рівняння (14.7):

$$C \frac{V_c^{(K+1)} - V_c^K}{\Delta T} = -\frac{1}{R} V_c^{(K+1)}. \quad (14.9)$$

Тепер це рівняння розв'яжемо відносно  $V_c^{(k+1)}$ :

$$V_c^{(K+1)} = \frac{V_c^{(K)}}{1 + \frac{\Delta t}{CR}}. \quad (14.10)$$

Це і є вираз рекурентної формули для так званого неявного методу Ейлера. Неявність подібних методів впливає з тієї особливості, що для обчислення значення змінної стану використовують величини цієї змінної або її похідної саме на кінці кроку інтегрування, хоча вона, по суті, ще невідома. За формулою представлення в рівняннях неявних методів невідома змінна знаходиться і в лівій, і в правій частині рівняння. Для проведення розрахунків у загальному вигляді навіть застосовують ітерації, які послідовно уточнюють обчислювальні значення.

У розглянутому простішому випадку формули неявного методу Ейлера навіть можна перетворити таким чином, що  $(k+1)$ -ше значення одразу ж знаходиться за  $k$ -м значенням змінної без будь-яких ітерацій.

Розглянемо поведінку обчислювальних процесів за формулою (14.10) неявного методу Ейлера, результати розрахунків зведемо в таблиці подібно до того, як це зроблено в розділі 11.

Вважаючи  $V_c(0) = 100$ , а  $RC=1$ , отримаємо таблицю реперних точок для часового кроку інтегрування  $\Delta t = 0.5$  (табл.14.1).

Таблиця 14.1

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
V <sub>c</sub>	100	66,66	44,44	29,629	19,753	13,168	8,779	5,882	3,901	2,601	1,734

Для  $\Delta t = 1$  дані розрахунків зведені в табл.14.2.

Таблиця 14.2

T	0	1	2	3	4	5
$V_c$	100	50	25	12,5	6,25	3,125

Для  $\Delta t = 2$  результати розрахунків наведено в табл.14.3.

Таблиця 14.3

t	0	2	4	6
$V_c$	100	33,33	11,11	3,703

За результатами наведених розрахунків побудовано графіки на рис.14.1.

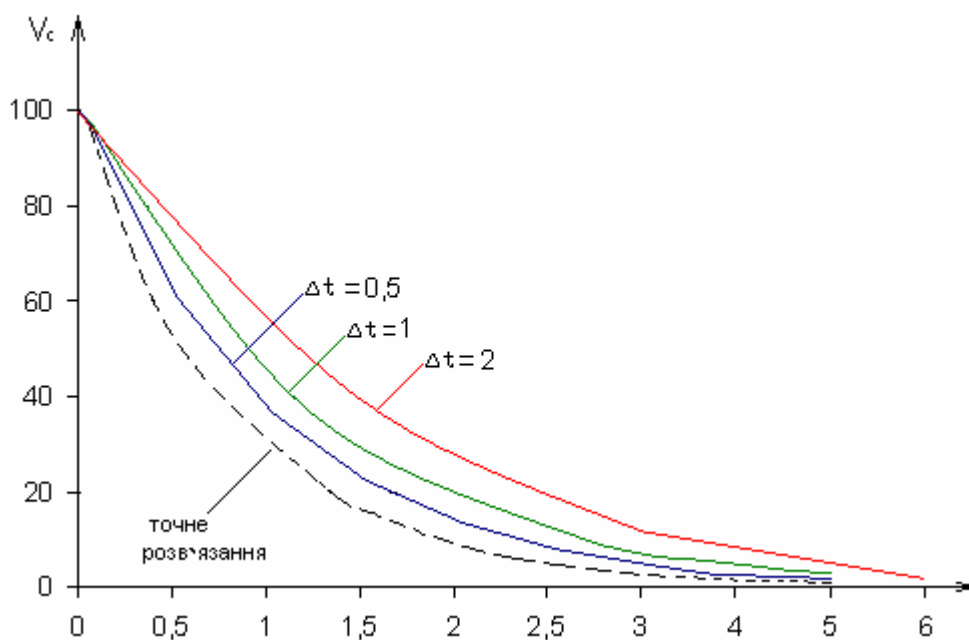


Рис. 14.1

З графіків видно, що при збільшенні кроку інтегрування похибка звичайно збільшується, але напруга на конденсаторі буде завжди зменшуватись на кожному наступному кроці незалежно від того, на скільки великий буде обраний цей крок.

Таким чином, перехідний процес в асимптотиці при  $t \rightarrow \infty$  завжди буде приводити до  $V_c \rightarrow 0$ , тобто процес буде відображатися адекватно, явище нестійкості спостерігатися ніколи не буде при застосуванні неявного методу Ейлера. Подібні методи називають А-стійкими. Вони не чутливі до величини кроку інтегрування, тому знаходять широке застосування при розрахунках динамічних процесів в електричних і електронних системах. Ці системи описуються так званими жорсткими диференціальними рівняннями (stiff (англ.) – жорсткий), для яких системна матриця має власні значення з великим розкидом. Це означає, що динамічний процес має складові, які змінюються з



дуже великими і дуже малими швидкостями, які відрізняються на декілька порядків. У таких випадках явні методи не прийнятні, тому що вони призводять до нестійких обчислювальних процесів, єдиним засобом здійснити розрахунки є застосування саме А-стійких методів.

Розглянемо загальний матричний метод отримання рекурентних формул неявного методу Ейлера. Загальна система диференціальних рівнянь лінійної електричної системи має вигляд

$$\frac{dX^{(K+1)}}{dt} = AX^{(K+1)} + BQ^{(K+1)}.$$

Застосовуючи рекурентну формулу неявного методу Ейлера, отримаємо:

$$x^{(K+1)} = x^{(K)} + \Delta t \frac{dx^{(K+1)}}{dt} = x^{(K)} + \Delta t (AX^{(K+1)} + BQ^{(K+1)})$$

Розкриємо матричні дії і перенесемо  $x^{(K+1)}$  в ліву частину:

$$x^{(K+1)} - \Delta t AX^{(K+1)} = x^{(K)} + \Delta t BQ^{(K+1)},$$

або:

$$(I - \Delta t A)x^{(K+1)} = x^{(K)} + \Delta t BQ^{(K+1)}.$$

Помножимо обидві частини на  $(I - \Delta t A)^{-1}$ , отримаємо:

$$x^{(K+1)} = (I - \Delta t A)^{-1} [x^{(K)} + \Delta t BQ^{(K+1)}] \quad (14.11)$$

Ця матрична формула в загальному вигляді виражає рекурентні формули неявного методу Ейлера.

Якщо позначити:

$$\alpha = (I - \Delta t A)^{-1}, \quad (14.12),$$

$$\beta = \alpha \Delta t B, \quad (14.13),$$

то

$$x^{(K+1)} = \alpha x^{(K)} + \beta Q^{(K+1)} \quad (14.14).$$

На прикладі схеми зображеної на рис.12.1 отримаємо рекурентні формули неявного методу Ейлера, прийнявши параметри:

$E = 100 \text{ В}$ ,  $J = 10 \text{ А}$ ,  $R_1 = 0,01 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,1 \text{ Гн}$ ,  $C = 0,01 \text{ Ф}$ ,  $\Delta t = 0,0005$ .

Тоді

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -100 \\ -10 & -0,1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = (I - \Delta t A)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.01 \begin{bmatrix} -10 & 100 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99478 & -0.04974 \\ -4.973 \cdot 10^{-3} & 0.9997 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \alpha \cdot \Delta t \cdot B = \begin{bmatrix} 0.99478 & -0.04974 \\ -4.973 \cdot 10^{-3} & 0.9997 \end{bmatrix} \cdot 0.01 \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.486 \cdot 10^{-4} & -0.04974 \\ -4.998 \cdot 10^{-3} & 2.486 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

При заданих початкових умовах за допомогою циклічних обчислень за наведеними рекурентними формулами можна обчислити перехідний процес на потрібному часовому інтервалі.

На рис.14.2 зображено робочий аркуш MathCAD, на якому наведено розрахунок неявним методом Ейлера.

Спочатку задаються параметри системи і матриці  $A$ ,  $B$  і  $Q$ , що відповідають правим частинам рівнянь стану. За допомогою функції `eigenvals` визначено власні значення системної матриці. З них видно, що процес характеризується гармонічним коливанням з періодом  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,201$  і затухаючою експонентою зі сталою  $\tau = 0,198$ . Останнє свідчить про те, що за час  $(3 - 5)\tau$  процес повинен згаснути. Далі обчислені матриці  $\alpha$  і  $\beta$  за виразами (14.12) і (14.13), задаючи кількість циклів  $k = 10000$ , обчислюємо дискрети процесу за рекурентною формулою (14.14). Після обчислення напруги конденсатора  $V_C$  і струму індуктивності  $I_L$  будуємо графіки динамічного процесу. В таблицях наведені значення змінних стану після встановлення процесу. Нарешті за допомогою оператора `Given-Find` обчислені сталі значення змінних стану, якщо прирівняти перші похідні змінних стану, тобто праві частини рівнянь стану до нуля. Як бачимо, знайдені сталі змінення змінних стану збігаються з отриманими в результаті чисельного інтегрування неявним методом Ейлера.

## РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЯВНИМ МЕТОДОМ ЕЙЛЕРА В МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

$$E := 100 \quad J := 10 \quad R1 := 0.01 \quad R2 := 10 \quad L := 0.1 \quad C := 0.01 \quad dlt := 0.0001$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-1}{C \cdot R2} & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R1}{L} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad Q := \begin{pmatrix} E \\ J \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

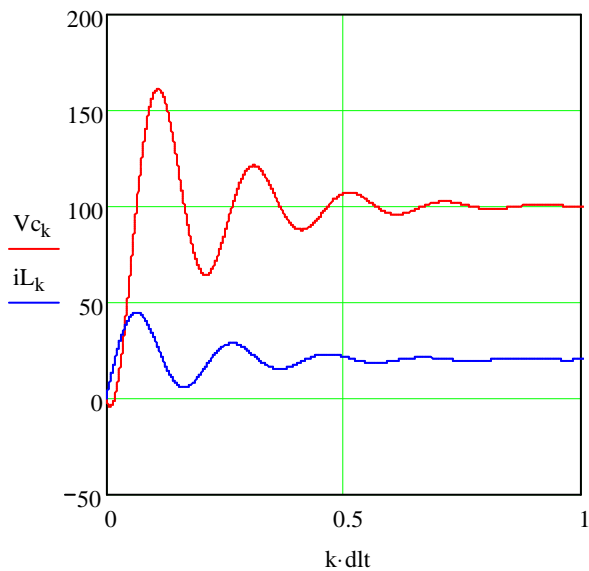
$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -5.05 + 31.233i \\ -5.05 - 31.233i \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \frac{\pi}{31.233} = 0.201$$

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 100 \\ -10 & -0.1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{alf} := (I - dlt \cdot A)^{-1} \quad \text{bet} := \text{alf} \cdot dlt \cdot B \quad \frac{1}{5.05} = 0.198$$

$$\text{alf} = \begin{pmatrix} 0.99478 & 0.04974 \\ -4.97364 \times 10^{-3} & 0.9997 \end{pmatrix} \quad \text{bet} = \begin{pmatrix} 2.48682 \times 10^{-4} & -0.04974 \\ 4.99851 \times 10^{-3} & 2.48682 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$V_{C0} := 0 \quad i_{L0} := 0 \quad k := 0..10000$$

$$\begin{pmatrix} V_{C_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} := \text{alf} \cdot \begin{pmatrix} V_{C_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} + \text{bet} \cdot Q$$



	0
9993	99.8002
9994	99.8002
9995	99.8002
9996	99.8002
9997	99.8002
9998	99.8002
9999	99.8002
10000	99.8002
10001	99.8002

	0
9995	19.98002
9996	19.98002
9997	19.98002
9998	19.98002
9999	19.98002
10000	19.98002
10001	19.98002

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$A \cdot X + B \cdot Q = 0$$

$$x := \text{Find}(X)$$

$$x = \begin{pmatrix} 99.8002 \\ 19.98002 \end{pmatrix}$$

Рис. 14.2

## ***КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ***

1. Яким чином можна вивести формули чисельно стійкого методу, виходячи з фізики роботи конденсатора і котушки індуктивності?
2. Чим відрізняються рекурентні формули чисельного стійкого методу Ейлера від чисельно нестійкого?
3. Як впливає перехід до неявного методу Ейлера на стійкість обчислювального процесу?
4. Проілюструйте викладки загального матричного неявного методу Ейлера на конкретному прикладі.
5. Як побудувати розрахунки за матричним неявним методом Ейлера за допомогою системи Math CAD?

## 15. ДИСКРЕТНІ СХЕМИ ЗМІЩЕННЯ

Розгляд рівнянь динаміки реактивних елементів на основі фізики їх роботи дозволяє отримати простий і наочний метод складання рекурентних формул за допомогою так званих дискретних схем заміщення. При цьому конденсатори та індуктивності замінюють еквівалентними схемами, які своїми параметрами враховують крок інтегрування  $\Delta t$ . Тим самим отримуємо схеми і рівняння на їх основі, які дозволяють побудувати часові діаграми перехідних процесів.

Компонентне рівняння конденсатора

$$i_c^{(k+1)} = C \frac{dV_c}{dt} = C \frac{V_c^{(k+1)} - V_c^{(k)}}{\Delta t} \quad (15.1)$$

дає такий вираз для обчислення напруги на кінці кроку інтегрування:

$$V_c^{(k+1)} = V_c^{(k)} + \frac{\Delta t}{C} i_c^{(k+1)} \quad (15.2)$$

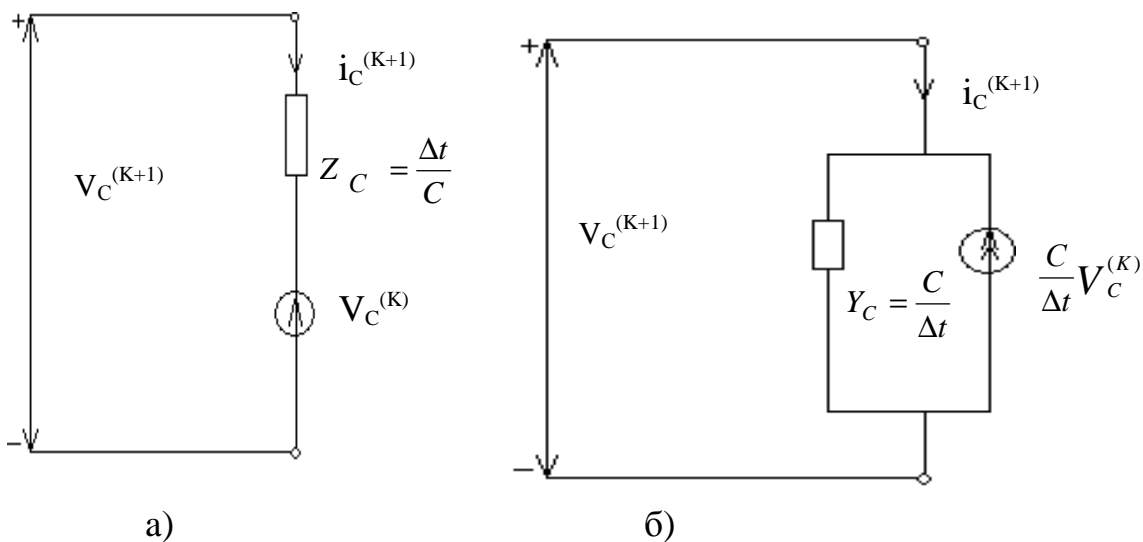


Рис 15.1

На рис.15.1 а зображена еквівалентна схема, яка відповідає цьому рівнянню.

Дійсно, напруга  $V_c^{(k+1)}$  дорівнює сумі напруг джерела  $V_c^{(k)}$  і падінню напруги на певному резисторі з еквівалентним опором  $Z_c = \frac{\Delta t}{C}$ , через який протікає струм  $i_c^{(k+1)}$ . Можна отримати різновид цієї еквівалентної схеми з джерелом струму, який зображений на рис. 15.1,б. Таку схему можна отримати, застосувавши еквівалентні перетворення попередньої схеми з джерелом напруги  $V_c^{(k)}$  і послідовно ввімкнутим резистором  $Z_c = \frac{\Delta t}{C}$  в джерело струму

$\frac{C}{\Delta t} V_c^{(k)}$  з паралельно ввімкненим тим же резистором  $Z_c = \frac{\Delta t}{C}$  або провідністю  $Y_c = \frac{C}{\Delta t}$ .

Така схема, крім того, еквівалентна рівнянню (15.1) записаному у формі

$$i_c^{(k+1)} = \frac{C}{\Delta t} V_c^{(k+1)} - \frac{C}{\Delta t} V_c^{(k)}. \quad (15.3)$$

Перший додатак в цій формулі представляє струм через резистор з провідністю  $Y_c = \frac{C}{\Delta t}$ , а другий додатак представлений правильно зорієнтованим джерелом струму  $\frac{C}{\Delta t} V_c^{(k)}$ .

Для індуктивності відповідні рівняння мають вигляд

$$i_L^{(k+1)} = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{i_L^{(k+1)} - i_L^{(k)}}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} i_L^{(k+1)} - \frac{L}{\Delta t} i_L^{(k)} \quad (15.4)$$

$$i_L^{(k+1)} = i_L^{(k)} + \frac{\Delta t}{L} V_L^{(k+1)} \quad (15.5)$$

Відповідні дискретні схеми заміщення індуктивності з джерелом напруги і джерелом струму наведені на рис. 15.2, а і б.

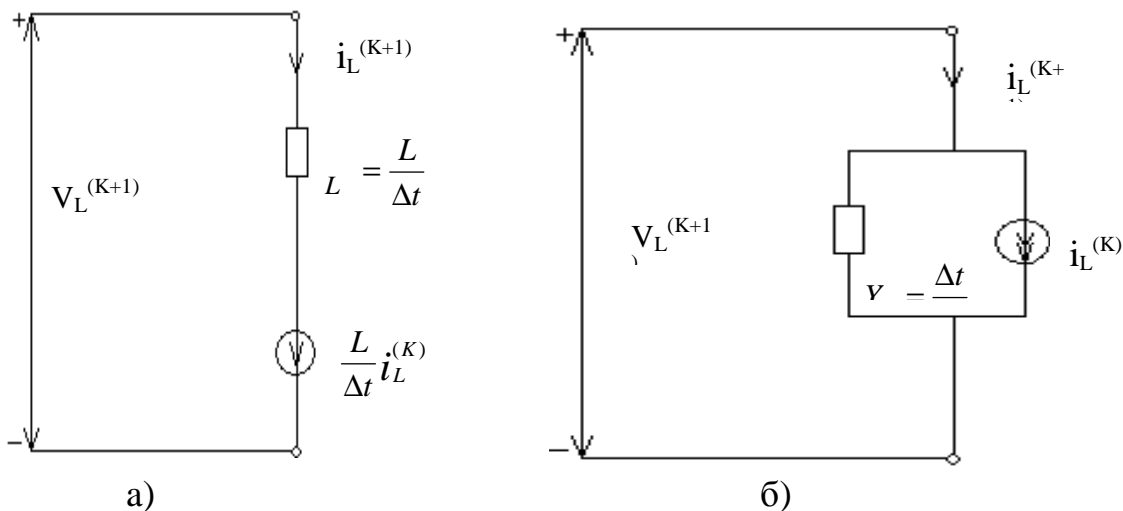


Рис.15.2

Маючи дискретні еквівалентні схеми, можемо отримати рекурентні формули динамічних процесів за допомогою добре відомих методів. При цьому слід брати до уваги, що для методу контурних струмів слід віддати перевагу

дискретним схемам на рис. 15.1,а і 15.2,б, що містять джерела напруги. Для метода вузлових напруг більш зручним є застосування дискретних схем на рис. 15.1,б і 15.2,б, які містять джерела струму.

Розглянемо застосування методу контурних струмів для складання рівнянь динаміки у вигляді рекурентних формул для електричної системи, наведеної на рис. 15.3,а.

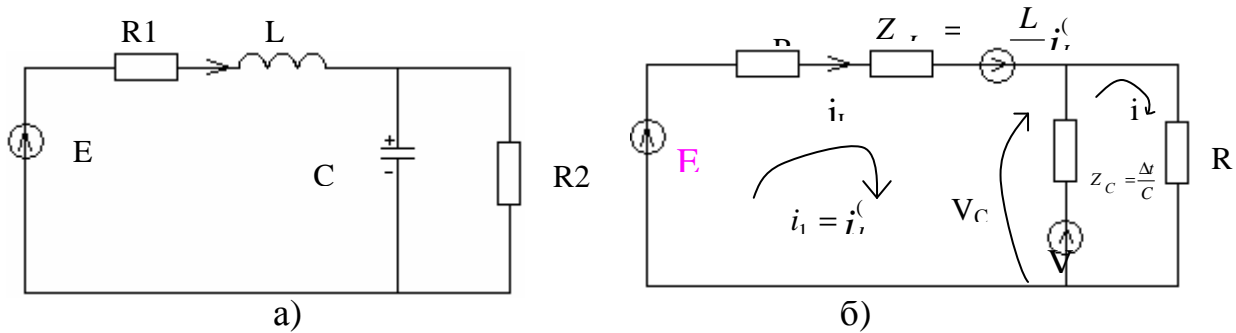


Рис. 15.3

Після заміни конденсатора та індуктивності їх еквівалентними дискретними схемами заміщення отримаємо еквівалентну дискретну схему системи, зображену на рис. 15.3,б. Рівняння за методом контурних струмів у матричній формі мають вигляд:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{L}{\tau} + \frac{\tau}{C} & -\frac{\tau}{C} \\ -\frac{\tau}{C} & R_2 + \frac{\tau}{C} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E + \frac{L}{\tau} - V_c^{(k+1)} \\ V_c^{(k)} \end{bmatrix} \quad (15.6)$$

У матричному рівнянні (15.6) і далі для скорочення записів позначено  $\tau = \Delta t$ . Перша матриця являє собою матрицю контурних опорів. В її діагональні клітки вписані суми опорів відповідного контура. У недиагональні клітки з позначкою “мінус” вписують опори тих резисторів, які є спільними для двох відповідних контурів, номери яких становлять номери стовпця і стрічки матриці контурних опорів. Застосуємо для розв’язання метод Крамера.

Визначник матриці контурних опорів

$$\Delta = (R_1 + \frac{L}{\tau} + \frac{\tau}{C})R_2 + (R_1 + \frac{L}{\tau})\frac{\tau}{C}.$$

Перша невідома величина

$$i_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} E + \frac{L}{\tau} i_L^{(k)} - V_c^{(k)} & -\frac{\tau}{C} \\ V_c^{(k)} & R_2 + \frac{\tau}{C} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[ (R_2 + \frac{\tau}{C})E - R_2 V_c^{(k)} + (R_2 + \frac{\tau}{C})\frac{L}{\tau} i_L^{(k)} \right].$$

Друга невідома величина

$$i_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1 + \frac{L}{\tau} + \frac{\tau}{C} & E + \frac{L}{\tau} i_L^{(k)} - V_c^{(k)} \\ -\frac{\tau}{C} & V_c^{(k)} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\tau}{C} E + (R_1 + \frac{L}{\tau}) V_c^{(k)} + \frac{\tau}{C} \cdot \frac{L}{\tau} i_L^{(k)} \right].$$

Для отримання рекурентних формул слід виразити  $V_c^{(k+1)}$  та  $i_L^{(k+1)}$ . Знаходження  $i_L^{(k+1)}$  нескладно, оскільки  $i_L^{(k+1)} = i_1$ . Напругу  $V_c^{(k+1)}$  можемо знайти як падіння напруги на резисторі  $R_2$  при протіканні через нього струму  $i_2$ , тобто  $V_c^{(k+1)} = R_2 i_2$ .

Таким чином, наприкінці отримаємо:

$$\begin{aligned} V_c^{(k+1)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\tau R_2}{C} E + (R_1 + \frac{L}{\tau}) R_2 V_c^{(k)} + \frac{L R_2}{C} i_L^{(k)} \right] \\ i_L^{(k+1)} &= \frac{1}{\Delta} \left[ (R_2 + \frac{\tau}{C}) E - R_2 V_c^{(k)} + (R_2 + \frac{\tau}{C}) \frac{L}{\tau} i_L^{(k)} \right] \end{aligned} \quad (15.7)$$

В матричному вигляді рекурентні формули можна представити таким чином:

$$\begin{bmatrix} V_c^{(k+1)} \\ i_L^{(k+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_2(R_1 + \frac{L}{\tau}) & \frac{L R_2}{C} \\ -R_2 & \frac{L}{\tau}(R_2 + \frac{\tau}{C}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_c^{(k)} \\ i_L^{(k)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{\tau R_2}{C} \\ R_2 + \frac{\tau}{C} \end{bmatrix} \times E \quad (15.8)$$

На рис. 15.4 наведена програма на MathCAD, що реалізує розв'язання задачі за методом контурних струмів за допомогою дискретних схем. У першій стрічці визначено параметри й величину часової вибірки, яку позначено через  $\tau$ . Далі обчислюємо визначник OPR й відповідні матриці рекурентної матричної формули (15.8). Далі задаються початкові напруга на конденсаторі і струм індуктивності і організується цикл обчислювань за рекурентними формулами. За результатами обчислень побудовано графік і виведено масиви значень змінних стану в усталеному режимі. Для контролю усталеного режиму обчислено усталені значення змінних стану на основі розгляду еквівалентної схеми для усталеного режиму (індуктивність закорочують, а конденсатор розмикають).

Слід зазначити, що методи дискретних схем за рекурентними формулами еквівалентний неявному методу Ейлера, оскільки базується на тих же обчислювальних засадах. Про це свідчить навіть еквівалентність матриці A і матриці alf (рис. 15.4 і 14.2).

Дискретні схеми є досить поширеним засобом обчислення динамічних процесів. Завдяки простоті фізичної трактовки, обчислювальної стійкості вони реалізовані в багатьох програмних пакетах аналізу електричних і електронних



систем. Так, в системі MATLAB у пакеті розширення Simulink представлений розділ для моделювання електронних комплексів Power System Block Set має можливість перетворення моделі системи на дискретну. Така дискретизація моделі здійснюється за допомогою спеціального блоку Powergui. Розробники пакету зазначають, що дискретизація електричної моделі дозволяє суттєво підвищити швидкість її роботи, і крім того вирішити проблему чисельної стійкості обчислювального процесу.

#### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗА ДИСКРЕТНОЮ СХЕМОЮ МЕТОДОМ КОНТУРНИХ СТРУМІВ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ

$$E := 100 \quad J := 10 \quad R1 := 0.01 \quad R2 := 10 \quad L := 0.1 \quad C := 0.01 \quad \tau := 0.0001$$

$$OPR := \left( \frac{\tau}{C} + R1 + \frac{L}{\tau} \right) \cdot R2 + \left( R1 + \frac{L}{\tau} \right) \cdot \frac{\tau}{C} \quad OPR = 2.011 \times 10^3 \quad \tau = 5 \times 10^{-4}$$

$$A := \begin{bmatrix} R2 \cdot \left( R1 + \frac{L}{\tau} \right) & L \cdot \frac{R2}{C} \\ -R2 & \left( R2 + \frac{\tau}{C} \right) \cdot \frac{L}{\tau} \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1}{OPR} \right) \quad B := \begin{bmatrix} \tau \cdot \frac{R2}{C} \\ R2 + \frac{\tau}{C} \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1}{OPR} \right) \quad Q := E$$

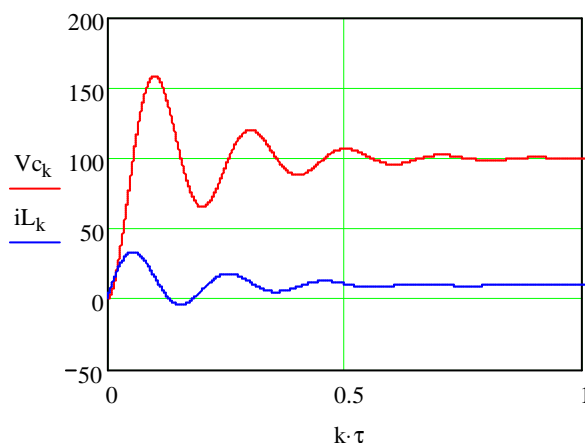
$$A = \begin{pmatrix} 0.99478 & 0.04974 \\ -4.97364 \times 10^{-3} & 0.9997 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2.48682 \times 10^{-4} \\ 4.99851 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$V_{C0} := 0 \quad i_{L0} := 0 \quad k := 0..10000$$

$$\begin{pmatrix} V_{C_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} := A \cdot \begin{pmatrix} V_{C_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} + B \cdot Q$$

$$V_C =$$

	0
9986	99.9001
9987	99.9001
9988	99.9001
9989	99.9001
9990	99.9001
9991	99.9001
9992	99.9001
9993	99.9001
9994	99.9001



$$i_L =$$

	0
9995	9.99001
9996	9.99001
9997	9.99001
9998	9.99001
9999	9.99001
10000	9.99001
10001	9.99001

$$v := E \cdot \frac{R2}{R1 + R2}$$

$$i := \frac{E}{R1 + R2}$$

$$v = 99.9001$$

$$i = 9.99001$$

Рис. 15.4

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Які рівняння реактивних елементів вважають за основу побудови дискретних схем конденсатора і індуктивності?
2. Як перетворити дискретну схему з джерелом напруги в еквівалентну дискретну схему з джерелом струму? Як здійснити зворотне перетворення?
3. Які дискретні схеми слід брати при застосуванні методу контурних струмів?
4. Чому при застосуванні методу вузлових напруг слід використовувати дискретні схеми з джерелами струму?
5. Поясніть порядок формування матричних рівнянь для дискретних схем при використанні методів вузлових напруг або контурних струмів.
6. Здійсніть розв'язання прикладу для схеми на рис. 15.3 а за допомогою методу вузлових напруг.
7. Які переваги має метод дискретних еквівалентних схем перед іншими методами аналізу динамічних режимів електричних систем?
8. Поясніть структуру робочого аркуша MathCAD для розв'язання задачі методом дискретних схем.

## 16. МАТРИЧНА ЕКСПОНЕНТА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ СТАНУ

Теорія диференціальних рівнянь настільки глибоко інтегрувала в себе матричні методи, що було введено спеціальне поняття – матрична експонента. Застосування цього поняття дозволяє в загальному аналітичному вигляді проінтегрувати систему лінійних диференціальних рівнянь.\*

Якщо  $A$  є квадратна матриця, то запис  $e^{At}$  позначає так звану матричну експоненту (матричний експоненціал). Ця матриця, в свою чергу, має той же порядок, що і матриця  $A$ , і для її обчислення можна застосувати формулу розкладання в ряд Тейлора, яка співпадає за формою з випадком скалярної експоненти, представлені рядом Тейлора:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 \times t^2}{2!} + \frac{A^3 \times t^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{K!} \quad (16.1)$$

У цьому виразі  $I$  – це одинична матриця, порядок якої співпадає з порядком  $A$ .

Існує багато методів обчислення матричного експоненціалу, які випливають з матричної теорії, однак найпростішим методом є саме обчислення за формулою (16.1). При практичних обчисленнях кількість врахованих членів розкладання може визначатися шляхом оцінки того уточнення, яке вносить наступний член у величини елементів матричного експоненціалу.

Для подальшого застосування матричної експоненти слід визначити операції її диференціювання та інтегрування.

Для операції диференціювання здійснимо почленне диференціювання правої частини виразу (16.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= A + (2A^2t/2!) + (3A^3t^2/3!) + (4A^4t^3/4!) + \dots = A + A^2t + (A^3t^2/2!) + \\ &+ (A^4t^3/3!) + \dots = A(I + At + (A^2t/2!) + (A^3t^2/3!) + \dots) = Ae^{At}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Таким чином, щоб продиференціювати матричний експоненціал, слід помножити його на матрицю  $A$ . При цьому можна довести, що дозволяється переставити матриці  $A$  і  $e^{At}$ :

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = e^{At}A \quad (16.3)$$

Якщо показник матричного експоненціалу містить позначку “мінус”, то

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}) = -Ae^{-At} = -e^{At}A. \quad (16.4)$$

Для того, щоб проінтегрувати матричну експоненту, розглянемо рівняння(16.2) і візьмемо інтеграли від обох частин:

$$\int \left[ \frac{d}{dt} (e^{At}) \right] dt = \int A e^{At} dt \quad (16.5)$$

Взяття інтегралів приводить до співвідношення

$$e^{At} = A \int e^{At} dt. \quad (16.6)$$

Домножимо обидві частини на  $A^{-1}$  і отримаємо :

$$\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At}. \quad (16.7)$$

Тут також дозволяється переставляти матриці  $A^{-1}$  і  $e^{At}$ :

$$\int e^{At} dt = e^{At} A^{-1}. \quad (16.8)$$

При наявності позначки “мінус” в показнику експоненти:

$$\int e^{-At} dt = -A^{-1} e^{-At} = -e^{-At} A^{-1} \quad (16.9)$$

Тепер розглянемо систему неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь, складених за методом змінних стану для електричної системи :

$$\frac{dx}{dt} = AX + BQ. \quad (16.10)$$

Будемо мати на увазі, що  $X$  і  $Q$  є функціями часу, тобто  $X=X(t)$  і  $Q=Q(t)$ .

Домножимо обидві частини (16.10) на  $e^{-At}$ :

$$e^{-At} \frac{dx}{dt} = e^{-At} AX + e^{-At} BQ. \quad (16.11)$$

Перенесемо перший доданок правої частини в ліву:

$$e^{-At} \frac{dx}{dt} - e^{-At} AX = e^{-At} BQ. \quad (16.12)$$

Ліва частина (16.12) являє собою похідну від добутку двох функцій  $u=e^{-At}$  і  $v=X(t)$ , тому можна записати :

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} X(t)] = e^{-At} BQ(t). \quad (16.13)$$

Зазначимо, що тепер  $X$  і  $Q$  записані як функції часу. Візьмемо визначений інтеграл від обох частин від  $t=0$  до  $t=T$ , де  $T$  представляє крок інтегрування :

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [e^{-At} X(t)] dt = \int_0^T e^{-At} BQ(t) dt. \quad (16.14)$$

Оскільки в лівій частині береться інтеграл від похідної, то можна записати:

$$e^{-At} X(t) \Big|_0^T = \int_0^T e^{-At} BQ(t) dt \quad (16.15)$$

Підставляючи межі інтегрування, отримаємо :

$$e^{-AT} X(T) - X(0) = \int_0^T e^{-At} BQ(t) dt . \quad (16.16)$$

Запишемо в лівій частині лише перший доданок :

$$e^{-AT} X(T) = X(0) + \int_0^T e^{-At} BQ(t) dt . \quad (16.17)$$

Тепер для того, аби в лівій частині залишилось лише  $X(T)$ , домножимо обидві частини (16.17) на  $e^{AT}$  :

$$X(T) = e^{AT} X(0) + e^{AT} \int_0^T e^{-At} BQ(t) dt . \quad (16.18)$$

Можна внести  $e^{AT}$  під знак інтегралу :

$$X(T) = e^{AT} X(0) + \int_0^T e^{A(T-t)} BQ(t) dt \quad (16.19)$$

Рівняння (16.19) представляє аналітичне матричне роз'язання системи диференціальних рівнянь за методом змінних стану. Перший доданок відображає вільний рух системи, якщо  $X(0)$  не дорівнює нулю, тобто система має запас електричної енергії. Другий доданок являє вплив на перехідний процес джерел енергії. В обчисленні цієї складової є найбільші складності, оскільки треба брати інтеграл від функції, залежної від  $Q(t)$ , що може бути будь якою. Задача спрощується, коли вважати, що величина  $Q(t)$  протягом кроку інтегрування є незмінною і дорівнює величині на початку кроку інтегрування :

$$Q(t) = Q(0) = Q = \text{const.}$$

Тоді при обчисленні інтегралу  $BQ$  може бути винесено за позначку інтегралу:

$$\int_0^T e^{A(T-t)} BQ(t) dt = \int_0^T e^{A(T-t)} dt * BQ. \quad (16.20)$$

Рационально також винести і  $e^{AT}$  за позначку інтегралу, тоді треба визначити

$$e^{AT} \int_0^T e^{-At} dt BQ = e^{AT} (-A^{-1}) e^{-At} \Big|_0^T BQ = e^{AT} A^{-1} e^{-AT} \Big|_T^0 * BQ \quad (16.21)$$

Обчислимо окремо матрицю  $C$ , яка помножується на  $BQ$ :

$$C = e^{AT} A^{-1} e^{-AT} \Big|_T^0 = e^{AT} (I - e^{-AT}) A^{-1} = (e^{AT} - I) A^{-1} \quad (16.22)$$

Підставимо замість  $e^{AT}$  розкладання в ряд за (16.1) :

$$C = (I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots - I) A^{-1} = TA + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \frac{A^4 T^4}{4!} + \dots \quad (16.23)$$

Таким чином, можна записати розв'язання у вигляді

$$X(T) = e^{AT} X(0) + CBQ, \quad (16.24)$$

де згідно з (16.22)

$$C=(e^{AT}-I)A^{-1}, \quad (16.25)$$

а якщо враховувати (16.23), то

$$C=TI+\frac{AT^2}{2!}+\frac{A^2T^3}{3!}+\frac{A^3T^4}{4!}+.... \quad (16.26)$$

Якщо перейти до рекурентних формул, то (16.24) можна подати у вигляді

$$X^{(k+1)}=e^{AT}X^k+CBQ^k \quad (16.27)$$

Наведена формула надає дві можливості для обчислення матриць, що входять до рекурентних формул. По-перше, можна використати обчислення матричної експоненти розкладанням в ряд :

$$e^{AT}=I+AT+\frac{A^2T^2}{2!}+\frac{A^3T^3}{3!}+..$$

При цьому можна заздалегідь вказати кількість врахованих членів ряду або вести розрахунок доти, доки наступний член вже не буде суттєво уточнювати результат. Після того, як обчислено матрицю експоненти, матрицю можна обчислити за (16.25). Однак аналізуючи формулу (16.25), можна зазначити, що вона пов'язана з необхідністю здійснення операцій з одиничною матрицею  $A^{-1}$ . Можна довести, що експоненціал і матрицю  $C$  можна обчислювати й уточнювати паралельно. Тому в другому алгоритмі діють наступним чином. Обчисливши перший член експоненціалу, можна помножити його на  $T$  і отримати перший член матриці  $C$ . Якщо помножити перший член матриці  $C$  на  $A$ , отримаємо другий член експоненціалу. Помноживши цей член на  $\frac{T}{2}$ , отримаємо другий член матриці  $C$ . Таким чином, для отримання наступного члена матриці  $C$  слід помножити останній обчислений член експоненціалу на  $T$ ,  $\frac{T}{2}$ ,  $\frac{T}{3}$ ,  $\frac{T}{4}$  і т.д., а для отримання наступного члена експоненціалу слід останній обчислений член матриці  $C$  помножити на  $A$ .

Серед функцій MATLAB взагалі введена функція обчислення матричної експоненти  $\text{expm}(A)$ , якою можна користуватися при обчисленні коефіцієнтів рекурентних формул.

На рис. 16.1 наведено робочий аркуш MathCAD, на якому реалізовано розрахунок з використанням матричної експоненти. Через  $e^{AT}$  позначено матричний експоненціал, обчислення якого обмежено 5 членами розкладання в ряд. Матриця  $C$  обчислюється за формулою (16.25), а рекурентна формула (16.27) забезпечує розрахунок перехідного процесу протягом заданого інтервалу часу.

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЧНОЇ ЕКСПОНЕНТИ

$$E := 100 \quad J := 10 \quad R1 := 0.01 \quad R2 := 10 \quad L := 0.1 \quad C := 0.01 \quad dlt := 0.0001$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-1}{C \cdot R2} & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R1}{L} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad Q := \begin{pmatrix} E \\ J \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -5.05 + 31.233i \\ -5.05 - 31.233i \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \frac{\pi}{31.233} = 0.201$$

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 100 \\ -10 & -0.1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5.05} = 0.198$$

$$e^{AT} := I + dlt \cdot A + \frac{dlt^2}{1 \cdot 2} \cdot A^2 + \frac{dlt^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot A^3 + \frac{dlt^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot A^4 \quad C := (e^{AT} - I) \cdot A^{-1}$$

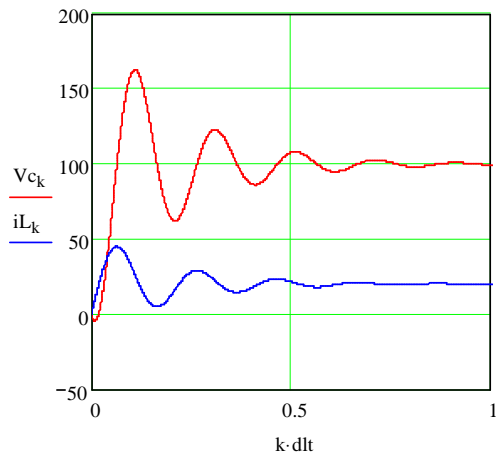
$$e^{AT} = \begin{pmatrix} 0.994888 & 0.049872 \\ -4.987188 \times 10^{-3} & 0.999825 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4.987313 \times 10^{-4} & 1.247872 \times 10^{-5} \\ -1.247872 \times 10^{-6} & 4.999667 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$V_{c0} := 0 \quad iL_0 := 0 \quad k := 0..10000$$

$$\begin{pmatrix} V_{c_{k+1}} \\ iL_{k+1} \end{pmatrix} := e^{AT} \cdot \begin{pmatrix} V_{c_k} \\ iL_k \end{pmatrix} + C \cdot B \cdot Q$$

$$V_c =$$

	0
9995	99.8002
9996	99.8002
9997	99.8002
9998	99.8002
9999	99.8002
10000	99.8002
10001	99.8002



$$iL =$$

	0
9995	19.98002
9996	19.98002
9997	19.98002
9998	19.98002
9999	19.98002
10000	19.98002
10001	19.98002

Рис.16.1

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

#### І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Як визначається матрична експонента?
2. Як обчислюються похідна і інтеграл від матричної експоненти?
3. Наведіть викладки до роз'язання рівнянь стану із застосуванням матричної експоненти.
4. Які способи можна використати для обчислення матриць в рекурентних формулах для розрахунків перехідних процесів із застосуванням матричної експоненти?
5. Поясніть структуру робочого аркуша MathCAD для реалізації методу матричної експоненти.

## 17. РОЗКЛАДАННЯ ПАДЕ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЧНОЇ ЕКСПОНЕНТИ

Намагання скоротити кількість обчислювальних операцій привело до застосування розкладання Паде. Розглянемо обмежений степеневий ряд у вигляді

$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_k z^k = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_e z^t}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m} \quad (17.1)$$

Звільнившись від знаменника, виконаємо операції множення лівої частини на знаменник правої, що приведе до рівняння:

[illegible]

Співставляючи коефіцієнти обох частин рівняння (17.2) при однакових ступенях  $z^0, z^1, z^2, \dots, z^{k+m}$ , отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
& p_0 b_0 = a_0 \\
& p_1 b_1 + p_1 b_0 = a_1 \\
& p_0 b_2 + p_1 b_1 + p_2 b_0 = a_2 \\
& \dots\dots\dots \\
& p_l b_0 + p_{l-1} b_1 + \dots + p_{l-m} b_m = a_l \\
& p_{l+1} b_0 + p_l b_1 + \dots + p_{l-m+1} b_m = 0 \\
& \dots\dots\dots \\
& p_k b_0 + p_{k-1} b_1 + \dots + p_{k-m} b_m = 0 \\
& \dots\dots\dots \\
& p_k b_{m+l-k} + p_{k-1} b_{m+l-k+1} + \dots + p_l b_m = 0
\end{aligned}
\tag{17.3}$$

Аналізуючи умови розв'язання цієї системи рівнянь, можна зробити висновок, що повинна виконуватися умова  $k > m$ . При умові, що  $k > m + \ell$ , розкладання Паде можна забезпечити співпадання з не менше  $(m + \ell + 1)$  членами ряду Тейлора.

Для електричних систем доцільно обирати

$$\ell = m,$$

$$k=2m,$$

що забезпечує мінімізацію обчислювальних операцій, в тому числі завдяки рівності за модулем коефіцієнтів чисельника і знаменника:

$$|b_i| = |a_i|.$$

Ці коефіцієнти входять в розкладання Паде з різними знаками для членів з непарними ступенями  $z$ : для чисельника при цих членах стоїть знак “плюс”, а для знаменника – “мінус”.



Слід зазначити, що точність методу Паде  $m$ -го порядку має той же порядок, який має розкладання в ряд Тейлора, який має  $2m$  членів; саме тому вдвічі зменшуються витрати часу на обчислення.

Розглянемо побудову формули розкладання Паде третього порядку для матричної експоненти. Оскільки  $\kappa=2$ , а  $m=6$ , то можна скласти рівняння:

$$e^{AT}=e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3}{b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3} \quad (17.4)$$

Якщо діяти за зазначеним вище алгоритмом, то отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} & b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + b_0z + b_1z^2 + b_2z^3 + b_3z^4 + \\ & + \frac{1}{2}b_0z^2 + \frac{1}{2}b_1z^3 + \frac{1}{2}b_2z^4 + \frac{1}{2}b_3z^5 + \frac{1}{6}b_0z^3 + \frac{1}{6}b_1z^4 + \\ & + \frac{1}{6}b_2z^5 + \frac{1}{6}b_3z^6 + \frac{1}{24}b_0z^4 + \frac{1}{24}b_1z^5 + \frac{1}{24}b_2z^6 + \frac{1}{24}b_3z^7 + \\ & + \frac{1}{120}b_0z^5 + \frac{1}{120}b_1z^6 + \frac{1}{120}b_2z^7 + \frac{1}{120}b_3z^8 + \frac{1}{720}b_0z^6 + \frac{1}{720}b_1z^7 + \frac{1}{720}b_2z^8 + \frac{1}{720}b_3z^9 = \\ & = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3. \end{aligned}$$

Звідси можна записати таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_0 + b_1 &= a_1 \\ \frac{1}{2}b_0 + b_1 + b_2 &= a_2 \\ \frac{1}{6}b_0 + \frac{1}{2}b_1 + b_2 + b_3 &= a_3 \\ \frac{1}{24}b_0 + \frac{1}{6}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 &= 0 \\ \frac{1}{120}b_0 + \frac{1}{24}b_1 + \frac{1}{6}b_2 + \frac{1}{2}b_3 &= 0 \\ \frac{1}{720}b_0 + \frac{1}{120}b_1 + \frac{1}{24}b_2 + \frac{1}{6}b_3 &= 0. \end{aligned} \quad (17.5)$$

У цій системі рівнянь можна виділити 7 невідомих  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1$  і  $b_2$ , які можна знайти, якщо визначити, що  $b_3$  дорівнює певній величині. Задаємося  $b_3 = -1$  і отримаємо такі величини:

$$\begin{aligned} a_0 &= 120, \quad a_1 = 60, \quad a_2 = 12, \quad a_3 = 1, \\ b_0 &= 120, \quad b_1 = -60, \quad b_2 = 12. \end{aligned}$$

Таким чином, наприкінці отримаємо формулу розкладання Паде третього порядку для експоненти:

$$e^z = \frac{120 + 60z + 12z^2 + z^3}{120 - 60z + 12z^2 - z^3}. \quad (17.6)$$

Формулу (17.6) раціонально представити у вигляді

$$e^z = \frac{1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{10}z^2 + \frac{1}{120}z^3}{1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{10}z^2 - \frac{1}{120}z^3}; \quad (17.7)$$

Для матричної експоненти  $e^{AT}$  з урахуванням необхідності заміни скалярної операції ділення на матричну операцію множення на обернену матрицю отримаємо наприкінці:

$$e^{AT} = (I - \frac{1}{2}AT + \frac{1}{10}A^2T^2 - \frac{1}{120}A^3T^3)^{-1} (I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{10}A^2T^2 + \frac{1}{120}A^3T^3) \quad (17.8)$$

Розкладання матричної експоненти другого порядку, яке забезпечує співпадання з п'ятьма членами ряду Тейлора, має вигляд

$$e^{AT} = (I - \frac{1}{2}AT + \frac{1}{12}A^2T^2)^{-1} \cdot (I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{12}A^2T^2) \quad (17.9)$$

Розкладання першого порядку забезпечує співпадання з трьома членами ряду Тейлора:

$$e^{AT} = (I - \frac{1}{2}AT)^{-1} (I + \frac{1}{2}AT) \quad (17.10)$$

На рис.17.1 представлено робочий аркуш MathCAD, що реалізує розрахунок процесу в електричній системі, що зображена на рис. 15.3,а, за допомогою розкладання Паде другого порядку. Обчислення матричної експоненти, позначеної через  $e^{AT}$ , здійснюється за формулою (17.9).

Точність обчислення матричної експоненти можна співставити з попередніми результатами.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

### І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Який вигляд має розкладання Паде у загальній формі?
2. У чому полягає методики знаходження коефіцієнтів розкладання Паде?
3. Які переваги й недоліки застосування розкладання Паде для обчислення матричної експоненти.
4. Знайдіть коефіцієнти Паде першого і другого порядків для експоненти.

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЧНОЇ ЕКСПОНЕНТИ ЗА РОЗКЛАДАННЯМ ПАДЕ

$$E := 100 \quad J := 10 \quad R1 := 0.01 \quad R2 := 10 \quad L := 0.1 \quad C := 0.01 \quad dlt := 0.0001$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-1}{C \cdot R2} & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R1}{L} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \quad Q := \begin{pmatrix} E \\ J \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -5.05 + 31.233i \\ -5.05 - 31.233i \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \frac{\pi}{31.233} = 0.201$$

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 100 \\ -10 & -0.1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5.05} = 0.198$$

$$eAT := \left( I - \frac{dlt}{2} \cdot A + \frac{dlt^2}{12} \cdot A^2 \right)^{-1} \cdot \left( I + \frac{dlt}{2} \cdot A + \frac{dlt^2}{12} \cdot A^2 \right)$$

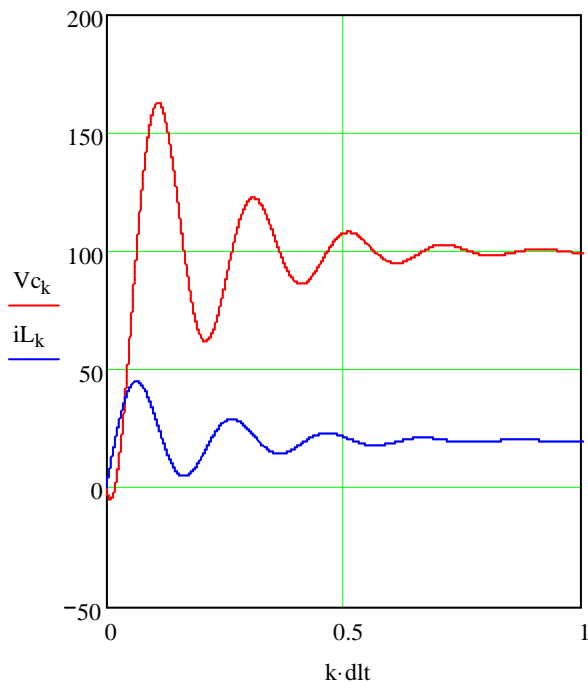
$$C := (eAT - I) \cdot A^{-1}$$

$$eAT = \begin{pmatrix} 9.9488789975 \times 10^{-1} & 4.9871882117 \times 10^{-2} \\ -4.9871882117 \times 10^{-3} & 9.9982521608 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4.987313 \times 10^{-4} & 1.247872 \times 10^{-5} \\ -1.247872 \times 10^{-6} & 4.999667 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$V_{C0} := 0 \quad i_{L0} := 0 \quad k := 0..10000$$

$$\begin{pmatrix} V_{C_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} := eAT \cdot \begin{pmatrix} V_{C_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} + C \cdot B \cdot Q$$



$$V_c =$$

	0
9996	99.8002
9997	99.8002
9998	99.8002
9999	99.8002
10000	99.8002
10001	99.8002

$$i_L =$$

	0
9995	19.98002
9996	19.98002
9997	19.98002
9998	19.98002
9999	19.98002
10000	19.98002
10001	19.98002

Рис.17.1

## 18. РОЗРАХУНОК УСТАЛЕНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖ

Електричні мережі являють собою електричні системи, в яких здійснюються процеси генерації електроенергії, її трансформації, передачі й споживання. У загальному випадку електричну енергію отримують від синхронного генератора. Далі її за допомогою підвищуючого трансформатора перетворюють на високу напругу і подають в мережу. Мережа може передавати енергію на десятки й сотні кілометрів, далі напруга знижується за допомогою трансформаторів і подається споживачу. Такий спосіб отримання і передачі електроенергії був запропонований ще наприкінці XIX ст. У розрахунковому плані звичайно маємо трифазні системи, однак якщо розглядають нормальні режими, то для спрощення вважають систему повністю симетричною. Тому достатньо розглядати лише одну фазу. А для інших фаз струми і напруги будуть зсунуті на 120 і 240 електричних градусів.

При виникненні несиметрії аналіз режиму суттєво ускладнюється, така завдання розв'язується спеціальними методами. Ще одне припущення стосується ліній передачі електроенергії, що реалізується досить довгими проводами. З математичної точки зору процеси в довгих лініях описують диференціальними рівняннями у часткових похідних. Для спрощення довгу лінію розділяють на окремі секції, для кожної секції застосовують схему заміщення із зосередженими параметрами. На рис. 18.1,а показана довга лінія, а на рис. 18.1,б і 18.1,в наведені відповідно Г- та Т-подібні схеми заміщення окремих секцій. Величини опорів, індуктивностей і ємностей визначаються так званими погонними параметрами. Таким способом можна звести математичний опис процесів в електричній мережі до звичайних диференціальних рівнянь. Точність такої заміни збільшується при зростанні кількості секцій  $n$ . Для розрахунків усталених режимів електричних мереж в першому наближенні впливом ємностей нехтують. У цьому випадку всі індуктивності й резистори сполучаються послідовно, тому їх можна замінити єдиним еквівалентним резистором  $R_e$  і єдиною індуктивністю  $L_e$  (рис. 18.1,г).

В електроенергетиці прийнято використовувати спрощену систему зображення схеми мережі. На рис. 18.2,а наведено приклад електричної мережі, запозичений з [5]. На цій прощеній схемі джерела напруги і струму позначені у вигляді стрілок і не створюють замкнених кіл, які в дійсності проходять через заземлений вузол. Дійсна схема, в якій джерела замикаються через заземлений вузол і зображені у прийнятому для електричних схем вигляді, наведена на рис. 18.2,б.

Довга лінія

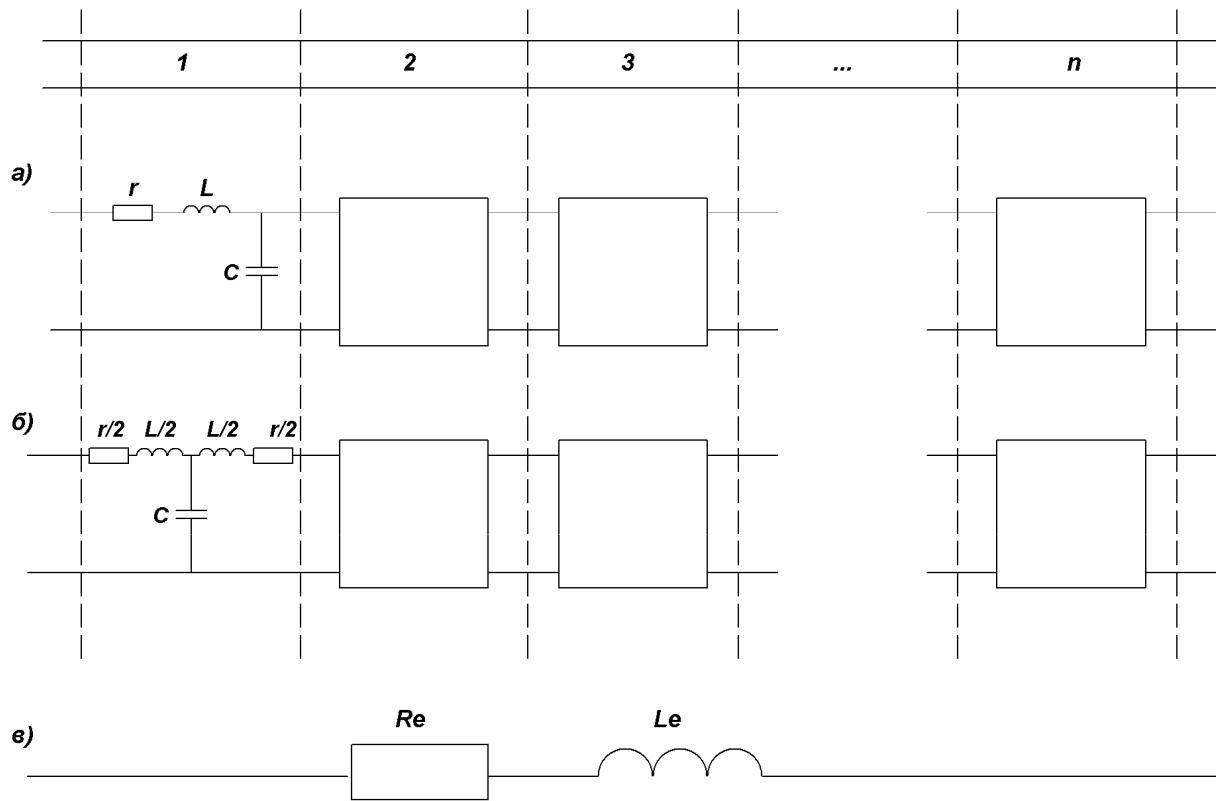


Рис. 18.1

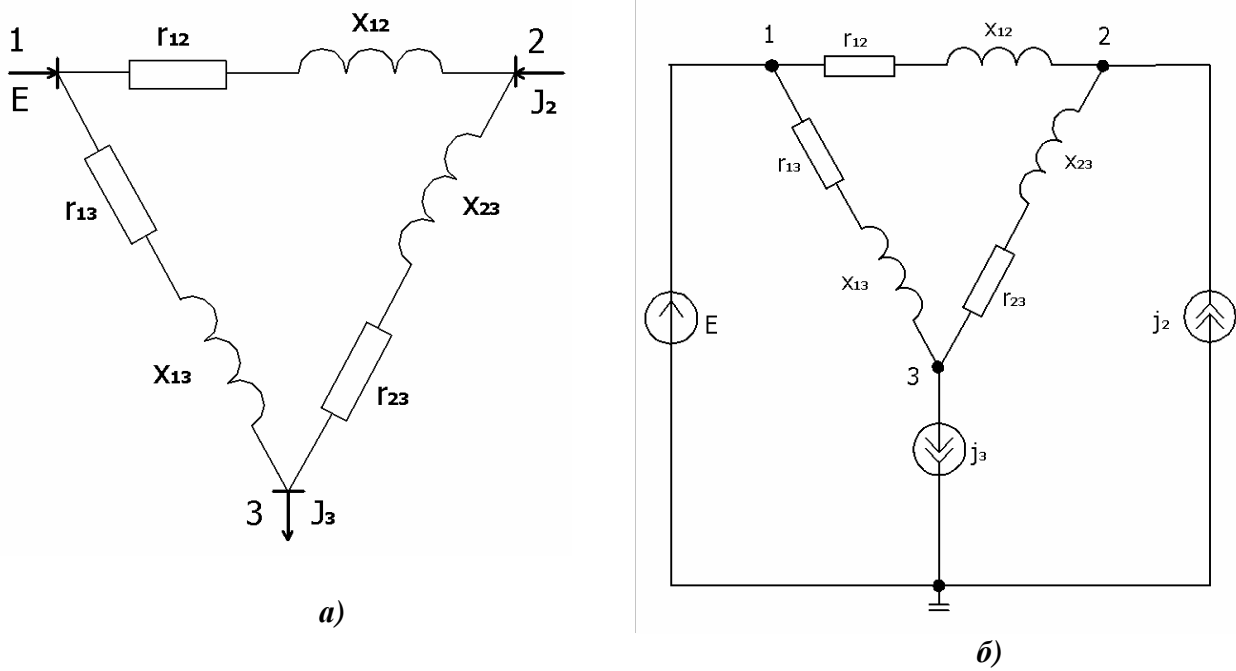


Рис. 18.2

Традиційно в електроенергетиці для обчислення усталених режимів використовують метод вузлових напруг. При цьому слід приймати до уваги, що доводиться мати справу з синусоїдальними срумами і напругами, тому застосовують метод комплексних амплітуд. При цьому опори, стуми, напруги і потужності виражаються комплексними величинами. Центри енергопостачання відображаються джерелом напруги  $E$ , лінії передачі – активно-індуктивними опрами  $z_{12}=r_{12}+jx_{12}$ ,  $z_{13}=r_{13}+jx_{13}$ ,  $z_{23}=r_{23}+jx_{23}$ . Споживачі можуть відображатися джерелами потужності або джерелами струму, як це показано на рис.18.2,б у вигляді  $J_2$  та  $J_3$ . Чисельні значення параметрів, запозичені з прикладу [5]:

$$E=115\text{kV},$$

$$z_{12}=(10+j20)\text{ Ом}, \quad z_{13}=(15+j30)\text{ Ом}, \quad z_{23}=(10+j25)\text{ Ом}$$

$$J_2=(0.2624+j0.1575)\text{ кА} \quad J_3=(0.4199+j0.2099)\text{ кА}$$

Розв'язання задачі аналізу усталеного режиму розподіляють на 2 етапи: 1)формування системи рівнянь; 2) розв'язання цієї системи.

При формуванні системи рівнянь за методом вузлових напруг, як відомо з теоретичної електротехніки, повинні отримати матричне рівняння

$$YV^y=J \quad (18.1),$$

де  $Y$  - матриця вузлових провідностей;

$V^y$  - матриця вузлових напруг відносно заземленого вузла;

$J$  - матриця вузлових струмів

Для формування цієї системи рівнянь доцільно джерела напруги перетворити в еквівалентні джерела струму. З цією метою застосовують заміну послідовно ввімкнених джерела напруги  $E$  і резистора  $R$  на паралельно ввімкнені цей же резистор і еквівалентне джерело струму (рис. 18.3,а)

$$J=E/R.$$

Але в схемі на рис. 18.2,а послідовний резистор для  $E$  відсутній Тому слід застосувати еквівалентне перетворення переносу джерела напруги за вузол (рис.18.3,б.) При цьому джерело напруги зсувається за вузол  $m$ , до якого воно приєднане, і опиняється послідовно ввімкненим з усіма елементами, які інцидентні цьому вузлу. Після цього можна замінити послідовно ввімкнені джерела напруги і резистори на еквівалентні джерела стуму згідно з рис. 18.3,а.

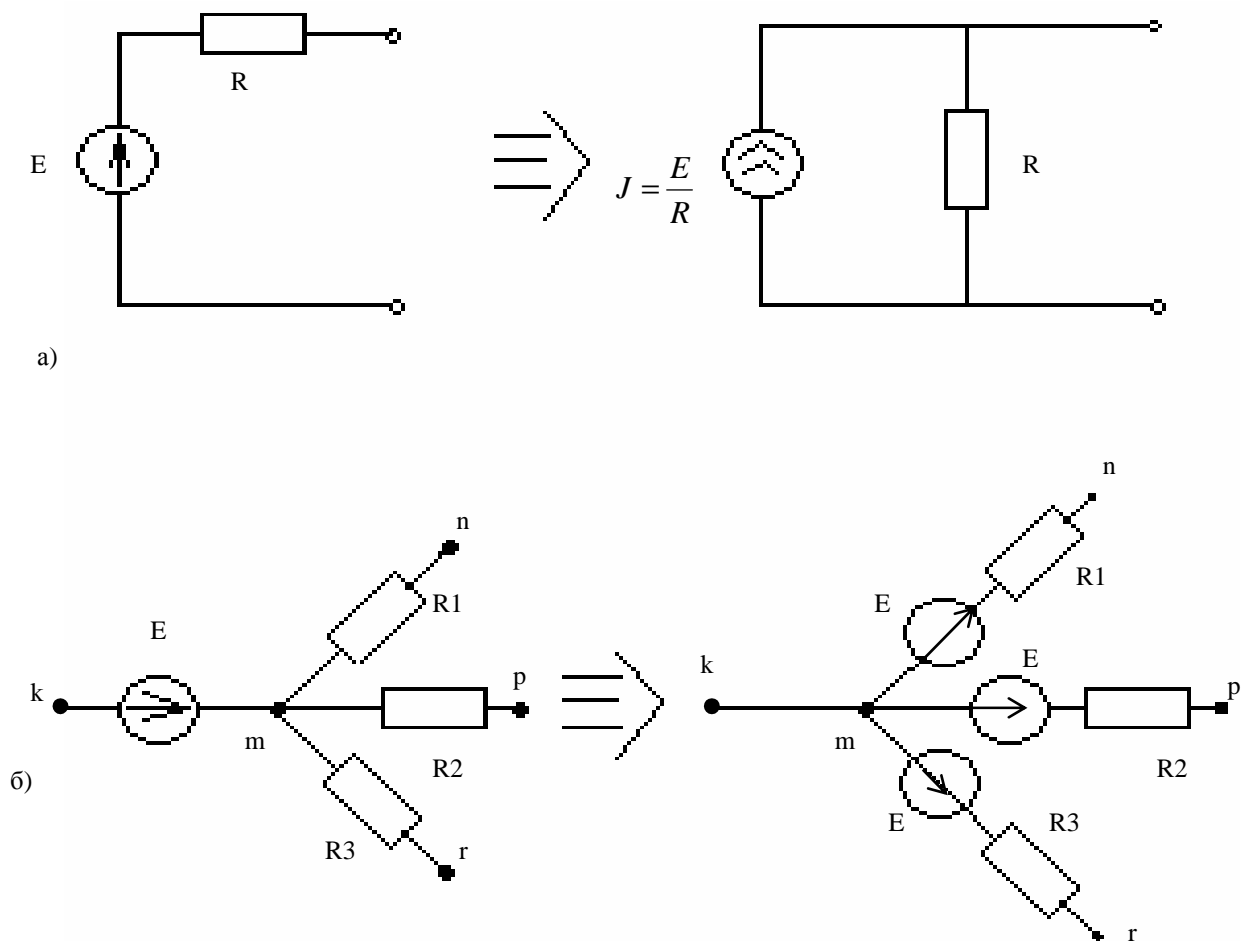


Рис. 18.3

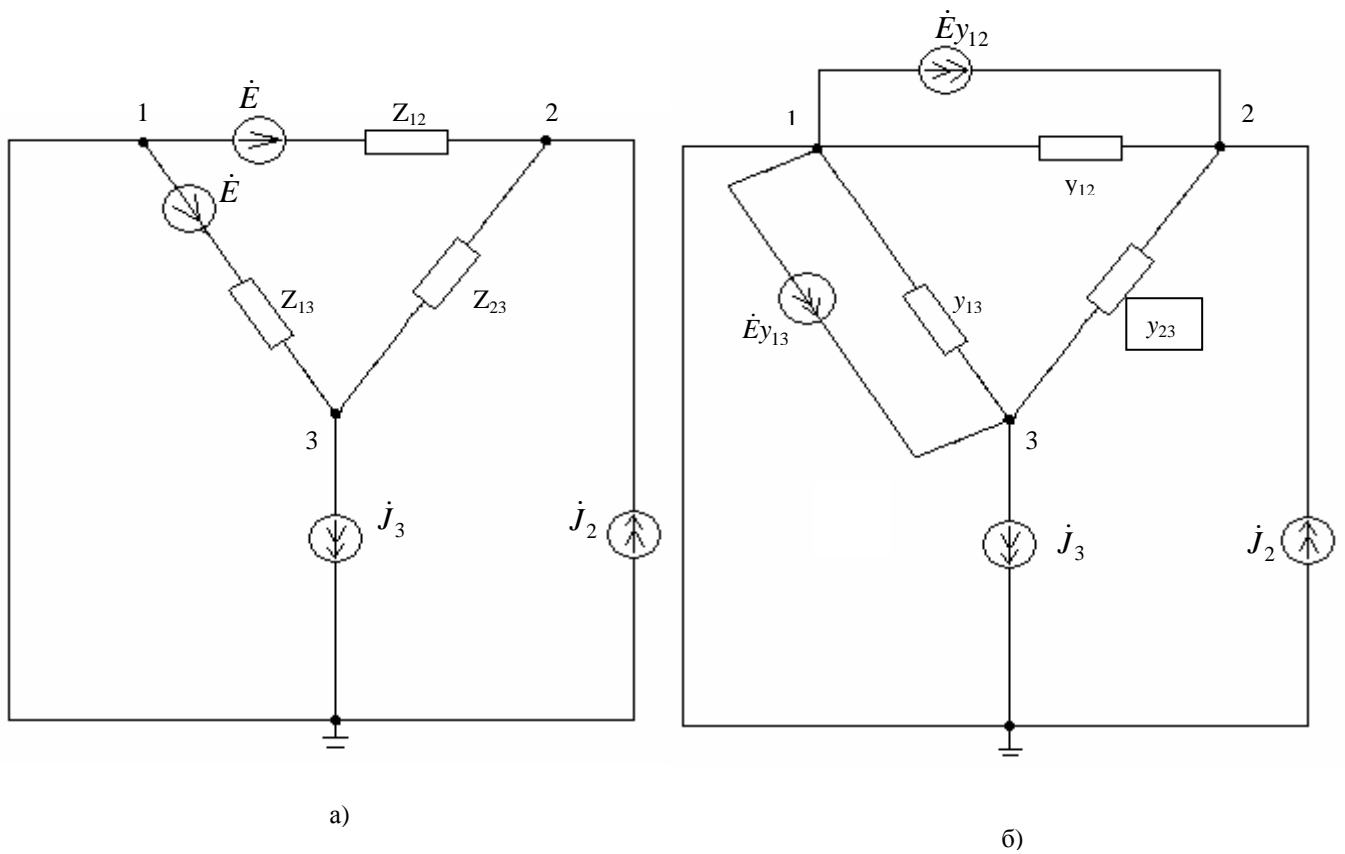


Рис. 18.4

Застосовуючи зазначені перетворення, отримуємо еквівалентні схеми, що показані на рис.18.4,а,б. При цьому вузол 1 співпадає із заземленим вузлом, тому потенціал цього вузла неможливо визначити, але його, по суті, і не треба визначати, оскільки його потенціал в дійсності визначається напругою джерела:  $V_1=E$ .

Використовуючи схему заміщення, зображену на рис. 18.4 б, складемо матричну систему рівнянь за методом вузлових напруг:

$$\begin{matrix} & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{12}+y_{23} & -y_{23} \\ -y_{23} & y_{13}+y_{23} \end{bmatrix} & \times \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2+y_{12}E \\ -J_3+y_{13}E \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Враховуючи, що

$$y_{12}=1/(10+j20)=(0,02-j0,04) \text{ Ом}^{-1}$$

$$y_{13}=1/(15+j30)=(0,01333-j0,02666) \text{ Ом}^{-1}$$

$$y_{23}=1/(10+j25)=(0,01379-j0,03448) \text{ Ом}^{-1}$$

$$y_{12}+y_{23}=(0,03379-j0,07448) \text{ Ом}^{-1}$$

$$y_{13}+y_{23}=(0,02712-j0,06114) \text{ Ом}^{-1}$$

$$y_{12} \cdot E=(2,3-j4,6) \text{ Ом}^{-1}$$

$$y_{13} \cdot E=(1,53333-j3,06666) \text{ Ом}^{-1}$$

$$J_2+y_{12}E=(0,2624-j0,1575)+(2,3-j4,6)=(2,56239-j4,7575) \text{ кА}$$

$$-J_3+y_{13}E=-(0,4199-j0,2099)+(1,53333-j3,06666).$$

Отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 0,03379-j0,07448 & -0,01379+j0,03448 \\ -0,01379+j0,03448 & 0,02712-j0,06114 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,56239-j4,7575 \\ 1,11343-j2,85676 \end{bmatrix}$$

Розв'язання такої системи лінійних рівнянь може бути здійснено окремо для дійсних і уявних складових. Це фактично вдвічі збільшує порядок системи рівнянь, що підлягають розв'язанню. Представимо кожну матрицю в рівнянні за методом вузлових напруг сумою дійсних і уявних матриць:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_r+j\mathbf{Y}_i \quad \mathbf{V}=\mathbf{V}_r+j\mathbf{V}_i \quad \mathbf{J}=\mathbf{J}_r+j\mathbf{J}_i$$

Тепер рівняння усталеного режиму за методом вузлових напруг має вид:

$$(\mathbf{Y}_r+j\mathbf{Y}_i) \cdot (\mathbf{V}_r+j\mathbf{V}_i) = \mathbf{J}_r+j\mathbf{J}_i$$

Розкривши операцію матричного множення, отримаємо рівняння окремо для дійсних частин і коефіцієнтів при уявних частинах, які можна записати у формі спільного матричного рівняння з дійсними величинами:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_r & -\mathbf{Y}_i \\ \mathbf{Y}_i & \mathbf{Y}_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r \\ \mathbf{J}_i \end{bmatrix}$$



Для реалізації процесу розв'язання звичайно використовують матричні й наближені ітераційні числові методи: метод Гаусса, метод оберненої матриці, метод простої ітерації.

Сучасні математичні пакети дозволяють безпосередньо виконувати розрахунки за рівняннями з комплексними коефіцієнтами. Спочатку задані довільні значення вузлових напруг  $V_2, V_3$ . Рівняння записані в комплексному вигляді, для знаходження коренів системи використовуємо засіб MathCAD у формі оператору Given-Find. Результати розв'язання співпадають з наведеними в [5].

**РОЗРАХУНОК УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ**

$$j := \sqrt{-1}$$

$$V2 := 100 + j \cdot 50$$

$$V3 := 50 - j \cdot 100$$

Given

$$\begin{pmatrix} 0.03379 - j \cdot 0.07448 & -0.01379 + j \cdot 0.03448 \\ -0.01379 + j \cdot 0.03448 & 0.02712 - j \cdot 0.06114 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V2 \\ V3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.56239 - j \cdot 4.7575 \\ 1.11343 - j \cdot 2.85676 \end{pmatrix}$$

$$v := \text{Find}(V2, V3)$$

$$\begin{pmatrix} V2 \\ V3 \end{pmatrix} := v$$

$$V2 = 115.7245 + 0.26288i$$

$$V3 = 110.00586 - 4.33471i$$

Рис. 18.5

## **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

### **І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Яку роль в електроенергетичних системах відіграють розрахунки усталених режимів?
2. Як можна спростити представлення довгих ліній електропередачі енергії?
3. Які припущення використовують для розрахунків процесів у трифазних системах електропостачання?
4. Які перетворення електричних систем застосовують для приведення схеми до аналізу за методом вузлових напруг?
5. Сформулюйте правила формування системи рівнянь, що описує усталений режим в електричній мережі, яка живиться змінним синусоїдальним струмом.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Перхач В.С. Математичні задачі електроенергетики. –Л.: Вища шк., 1989.-464 с.
2. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики. -М.:1970. - 362 с.
3. Самойленко А.М., Кривошия С.А., Перстюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах.-К.: Вища школа,1994.-454с.
4. Сенди К. Современные методы анализа электрических систем.- М.: Энергия, 1971.- 360 с.
5. Идельчик В.И. Электрические системы и сети.-М.: Энергоатомиздат, 1989.-592 с.
6. Романюк Ю.Ф. Електричні системи та мережі. - К.: Знання, 2007.-292 с.
7. Хэмминг Р.В. Численные методы. М.:ИИЛ, 1968.-585 с.
8. Чуа Л., Пен Мин-Лин Машинный анализ электронных схем. –М.: Энергия,1980.-620 с.
9. Ажогин В.В., Згуровский М.З. Моделирование на аналоговых, цифровых и гибридных ЭВМ.- К.: Вища школа,1983.-280 с.

## НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Ягуп Валерій Григорович

Математичні задачі електроенергетики. Конспект лекцій (для студентів за напрямом підготовки 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» спеціальності «Електричні системи електроспоживання»)

Редактор: *М.З.Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання: *Ю.П. Степась*

План 2009, поз. 95Л

---

Підп. до друку 11.12.09  
Друк на ризографі.  
Зам. №

Формат 60х84 1/16  
Ум. друк. арк. 5,8  
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:  
Харківська національна академія міського господарства,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК №731 від 19.12.2001