Міністерство освіти і науки України

Харківська національна академія міського господарства

О.В. БОРАКОВСЬКИЙ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
МОДУЛЬ І

(для студентів 1-го курсу денної і заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.040106 – «Екологія, охорона навколишнього
середовища та збалансоване природокористування (ЕОНС)»)

Харків – ХНАМГ – 2010

Бораковський О. В. Вища математика: конспект лекцій, модуль І. (для студентів 1-го курсу денної і заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.040106 – «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування (ЕОНС)») / О. В. Бораковський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; – Х.: ХНАМГ, 2010. – 106 с.

Автор: Бораковський О. В.

Рецензент: професор кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, кандидат технічних наук Станішевський С. О.

У конспекті лекцій наведено стислі теоретичні відомості та їх практичне застосування для розв’язання задач з аналітичної геометрії на площині й у просторі, елементів математичного аналізу, диференціального числення функції однієї змінної, елементів лінійної й векторної алгебри.

Рекомендовано для студентів факультету інженерної екології міст.

Рекомендовано для друку кафедрою вищої математики
протокол №3 від 24.10.2009 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В основу конспекту лекцій покладено програми вищої математики для студентів денної і заочної форм навчання факультетів інженерної екології міст і містобудівельного Харківської національної академії міського господарства (ХНАМГ).

Модуль I охоплює такі розділи вищої математики, як аналітична геометрія на площині й у просторі, елементи математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної, елементи лінійної векторної алгебри.

Достатня кількість розв’язаних типових прикладів дає змогу студентам самостійно опанувати даний курс вищої математики й підготуватися до складання іспиту.

Конспект складено на основі курсів лекцій, які читалися автором на факультетах інженерної екології міст і містобудівельному.

Зауваження та пропозиції надсилайте на кафедру вищої математики ХНАМГ за адресою: 61002, м. Харків, вул. Революції, 12.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.1.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1. Прямокутна система координат

На початку XVII ст. французький математик Р. Декарт запропонував ідею сітки або системи для визначення положення та нанесення точки на площину. Для задання системи координат, що має назву декартової, креслимо під прямим кутом дві осі й визначаємо:

1) початок системи координат;
2) додатні напрямки осей;
3) одиницю виміру або масштаб.

Положення кожної точки (скажімо, *A*) може бути описано двома числами: перше стосується горизонтальної осі *OX* (далі вісь абсцис), а друге вертикальної *OY* (далі вісь ординат). Ці два числа називаються декартовими координатами точки.

Відстань *d* між точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ на числовій осі при будь-якому їх розташуванні визначаємо за формулою: $d = |x_2 - x_1|$

Відстань між точками $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ на площині *XOY* визначаємо за формулою

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Зокрема, відстань від точки $M(x, y)$ до початку координат дорівнює

$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Координати точки $C(x_c; y_c)$, що ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = \pm\frac{|AC|}{|CB|}$, визначаємо за формулами:

$$\boxed{x_c = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} \qquad y_c = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}}$$

При визначенні λ знак «+» беремо, якщо точка *C* належить відрізку *AB,* «–» якщо *C* не належить відрізку *AB*, але розташована на тій же лінії, що і сам відрізок. Координати середини відрізку (λ=1) визначаємо за формулами:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \overline{y} = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Площу трикутника *ABC* обчислюємо за так званою мнемонічною формулою

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix}\begin{matrix} \text{IV} - \\ \text{V} - \\ \text{VI} - \\ \text{I} + \\ \text{II} + \\ \text{III} + \end{matrix} = \frac{1}{2}\left|\overbrace{x_A y_B}^{\text{I}} + \overbrace{x_B y_C}^{\text{II}} + \overbrace{x_C y_A}^{\text{III}} - \overbrace{x_B y_A}^{\text{IV}} - \overbrace{x_C y_B}^{\text{V}} - \overbrace{x_A y_C}^{\text{VI}}\right|.$$

Доведемо цей факт. Розглянемо трикутник ABC (рис.1). З елементарної геометрії відомо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\alpha$, де $a = |AC|$, $b = |CB|$ і α кут між цими сторонами.

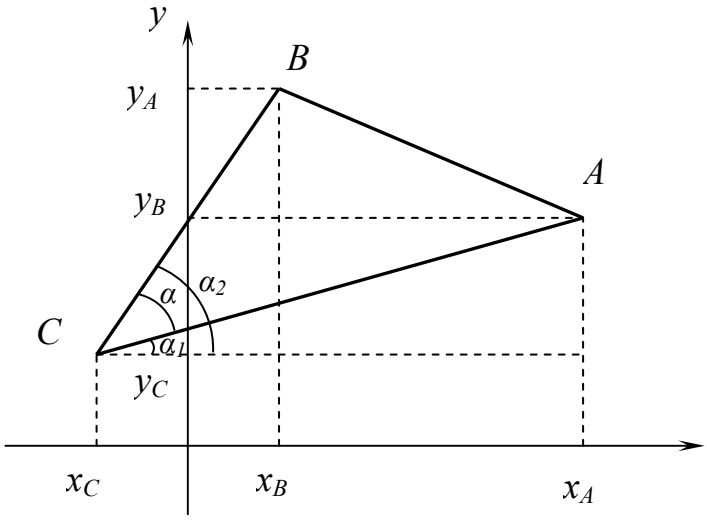


Рис. 1

$$\text{Отже, } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\Big||CA|\cdot|CB|\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big||CA|\cdot|CB|(\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big||CA|\cos\alpha_1\cdot|CB|\sin\alpha_2 - |CB|\cos\alpha_2\cdot|CA|\sin\alpha_1\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|(x_A - x_C)\cdot(y_B - y_C) - (y_A - y_C)\cdot(x_B - x_C)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C\Big| ,$$

що й треба було довести. Зауважимо, що вираз під знаком модуля буде додатнім, якщо перебіг точок A, B і C йде проти годинникової стрілки й навпаки.

2. Пряма на площині

Будь-яке рівняння першого степеня у декартовій системі координат виду

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \quad \text{де } A^2 + B^2 \neq 0$$

визначає на площині пряму. Це загальне рівняння прямої. Рівняння виду $y = kx + b$, графік якого є пряма, має назву рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$, де α кут між віссю *OX* та прямою, *b* точка перетину прямої з віссю *OY*. Якщо пряма $Ax + By + C = 0$ не проходить крізь початок координат, тобто $C \neq 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, ми можемо отримати рівняння прямої у відрізках $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,}$ де $a = -\frac{C}{A}$ $b = -\frac{B}{A}$ – відрізки, що відсікаються прямою на координатних осях.

Помножуючи загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак якого протилежний знаку С, отримаємо нормальне рівняння прямої

$$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0},$$

де p – довжина відрізка перпендикуляра до прямої між початком координат і точкою його перетину з нею;

φ – кут між цим перпендикуляром і додатним напрямом вісі *OX*.

Гострий кут між двома прямими $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ обчислюємо за допомогою формули

$$\boxed{tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|},$$

Тоді умова паралельності двох прямих є $\boxed{k_2 = k_1}$, а умова перпендикулярності є $1 + k_1k_2 = 0$ або $\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$.

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_1; y_1)$ із заданим кутовим коефіцієнтом k, має вигляд

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}.$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ має вигляд

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}.$$

Кутовий коефіцієнт цієї прямої обчислюємо за формулою $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Якщо $x_2=x_1$, тоді рівняння прямої $x=x_1$.

Якщо $y_2=y_1$, тоді рівняння прямої $y=y_1$.

Відстань d між точкою $M(x_0;y_0)$ і прямою $Ax+By+C=0$ обчислюємо за формулою

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}.$$

Рівняння бісектриси кута між прямими $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$ має вигляд

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0}.$$

Рівняння пучка прямих, що проходять через точку їх перетину, має вигляд:

$$\boxed{A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0},$$

де λ – числовий множник.

Приклад. Знайти координати точок *A* і *B* прямої *AB:* $y=2x-4$, якщо x змінюється від –1 до 3.

Розв'язання. $y(-1)=-2-4=-6$, $y(3)=6-4=2$.

Тоді $A(-1,-6)$, $B(3,2)$.

Приклад. Знайти проекцію точки $C(2;3)$ на пряму, що проходить через точки $A(3;0)$ і $B(-3;3)$.

Розв'язання. AB – є рівняння прямої, що проходить через точки *A* і *B*:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A};\ \frac{y-0}{3-0}=\frac{x-3}{-3-3};\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};\ k_{AB}=-\frac{1}{2}.$$

Тоді кутовий коефіцієнт прямої CN: $k_{CN}=+2$, бо $k_{CN}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$ з умови перпендикулярності.

Рівняння прямої, що проходить через точку C з даним кутовим коефіцієнтом, є:

$$y - y_C = k_{CN}(x - x_C); \quad y - 3 = 2(x - 2); \quad y = 2x - 1.$$

Вирішуючи разом: $\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} \\ y - 2x - 1 \end{cases}$, знайдемо координати точки $N(1;1)$.

Проекція точки C на пряму AB є точка $N(1;1)$.

Приклад. Маємо координати вершин трикутника ABC: $A(-2;-2)$; $B(4;1)$; $C(0;4)$. Знайти:

1) відстань між точками A та B;
2) рівняння сторін AB, AC;
3) рівняння висоти, що проходить через точку C;
4) площу трикутника ABC;
5) внутрішній кут біля вершини A;
6) довжину висоти, що проходить через точку C;
7) центр ваги трикутника ABC;
8) рівняння прямої, що проходить через центр ваги $(\bar{x};\bar{y})$ трикутника паралельно стороні AC;
9) рівняння медіани, що виходить з вершини C.

Розв'язання. Накреслимо ΔABC використовуючи названі вище методи аналітичної геометрії (рис. 2). Використовуючи названі вище методи аналітичної геометрії знаходимо:

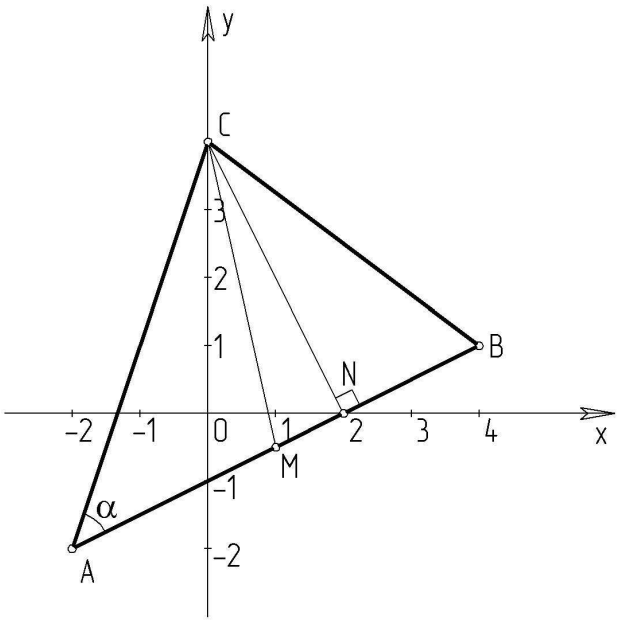


Рис. 2

1) $d_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4+2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$;

2) $AB:\ \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A};\quad \dfrac{y+2}{1+2}=\dfrac{x+2}{4+2};$

$x-2y-2=0;\quad y=\dfrac{1}{2}x-1;\quad k_{AB}=\dfrac{1}{2};$

$AC:\ y=3x+4;\quad k_{AC}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{4+2}{0+2}=3;$

3) $y-y_C=-\dfrac{1}{k_{AB}}(x-x_C);$

$CN:\ k_{CN}=-\dfrac{1}{k_{AB}};\quad y-4=-\dfrac{1}{1/2}(x-0);\quad y=-2x+4;$

4) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{matrix}\right\|$, отже: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & -2 \end{matrix}\right\|=$

$=\dfrac{1}{2}\left|-2+16+0+8-0+8\right|=\dfrac{1}{2}30=15$ (кв. од.);

5) $tg\alpha=\left|\dfrac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}\right|=\left|\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}\right|=1;\quad \alpha=arctg1=\dfrac{\pi}{4};$

6) $d_{CN}=\dfrac{|1\cdot x_C-2y_C-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}};$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|d_{CN}=\dfrac{1}{2}3\sqrt{5}\dfrac{10}{\sqrt{5}}=15$, для перевірки;

7) Центр ваги трикутника обчислюємо за формулами:

$\bar{x}=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3};$

$\bar{y}=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=1;$

8) $y-\bar{y}=k_{AC}(x-\bar{x});\quad y-1=3(x-\dfrac{2}{3});\quad y=3x-1;$

9) знайдемо середину відрізка AB – точку M :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$CM: \quad \frac{y - y_M}{y_C - y_M} = \frac{x - x_M}{x_C - x_M}; \quad \frac{y + \frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{x-1}{0-1};$$

$$-y - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}; \quad y = -\frac{9}{2}x + 4.$$

3. Криві другого порядку

Кривою другого порядку на площині називається множина точок, координати яких у даній декартовій системі координат задовольняють наступному рівнянню

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0},$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Розглянемо найпростіші (канонічні) рівняння кривих другого порядку.

1. Якщо $A = C$, та $B = 0$, маємо рівняння кола.

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених на величину *R*, яка має назву радіус, від даної точки $O_1(a,b)$, що має назву центру:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}.$$

Виконаємо тотожні перетворення цього рівняння:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0.$$

Тут: $l = -2a$; $m = -2b$; $n = a^2 + b^2 - R^2$.

Якщо $l^2 + m^2 - 4n > 0$, матимемо рівняння дійсного кола;

якщо $l^2 + m^2 - 4n = 0$, маємо точку $O_1\left(-\frac{l}{2}; -\frac{m}{2}\right)$ або $R = 0$;

якщо $l^2 + m^2 - 4n < 0$, маємо уявне коло.

Приклад. Знайти координати центру O_1 і радіус (R) кола:

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$;

b) $x^2 + 3x + y^2 + y + 2 = 0$.

Розв'язання. Треба виділити повні квадрати: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

a) $\underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 + \underbrace{y^2 + 4y + 4} - 4 + 1 = 0$,

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$; $O_1(1;-2)$; $R = 2$;

b) $\underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}} - \frac{9}{4} + \underbrace{y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = 0$,

$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$; $O_1(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$; $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. *Еліпсом* називається множина точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок, що мають назву фокусів, стала (рівна $2a$), що менша ніж відстань між фокусами (*2c*).

Якщо розташувати декартову систему координат таким чином, що вісь OX проходитиме через фокуси F_1F_2, а вісь OY посередині між ними (рис. 3), то рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

має назву канонічного рівняння. Числа $2a$ і $2b$ представляють довжини великої і малої осей еліпса. Вони зв'язані наступним співвідношенням: $c^2 = a^2 - b^2$.

Точки $(a,0)$; $(-a,0)$; $(0,b)$; $(0,-b)$ мають назви вершин еліпса.

Відношення половини фокальної відстані до половини великої осі називається ексцентриситетом еліпса $\boxed{e = \frac{c}{a}}$.

Ексцентриситет характеризує степінь стискання еліпса, і для еліпсу $e < 1$. Для кола $e = 1$.

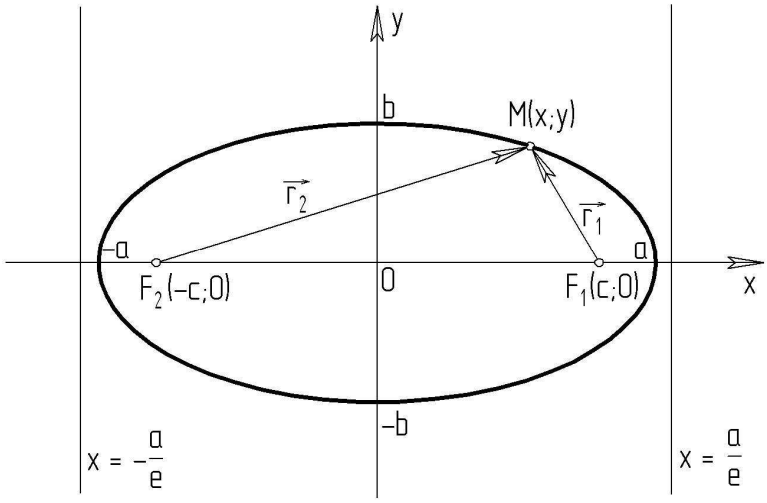


Рис. 3

Отримаємо канонічне рівняння еліпсу:

За означенням: $|\overline{r_1}| + |\overline{r_2}| = 2a > 2c$, де $|\overline{r_1}| = MF_1 = \sqrt{(x-c)+y^2}$;

$|\overline{r_2}| = MF_1 = \sqrt{(x+c)+y^2}$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$;

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$;

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$;

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$;

Так як $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$.

Позначимо $b^2 = a^2 - c^2$, тоді $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ або $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. *Гіперболою* називається множина точок площини, модуль різниці яких від двох даних точок, що мають назву фокусів, є величина стала (що дорівнює $2a$), менша ніж відстань між фокусами ($2c$).

Якщо розташувати декартову систему координат аналогічно попередньому випадку (рис. 4) і виконати відповідні тотожні перетворення виразу: $|\overline{r_1}| - |\overline{r_2}| = 2a > 2c$, то отримаємо канонічне рівняння гіперболи $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

Числа $2a$ і $2b$ являють собою довжини дійсної і уявної осей гіперболи. Вони зв'язані наступним співвідношенням: $c^2 = a^2 + b^2$.

Точки $(a,0)$ і $(-a,0)$ мають назву вершини гіпербол. Відношення половини фокальної відстані до половини довжини дійсної осі має назву ексцентриситету гіперболи: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$.

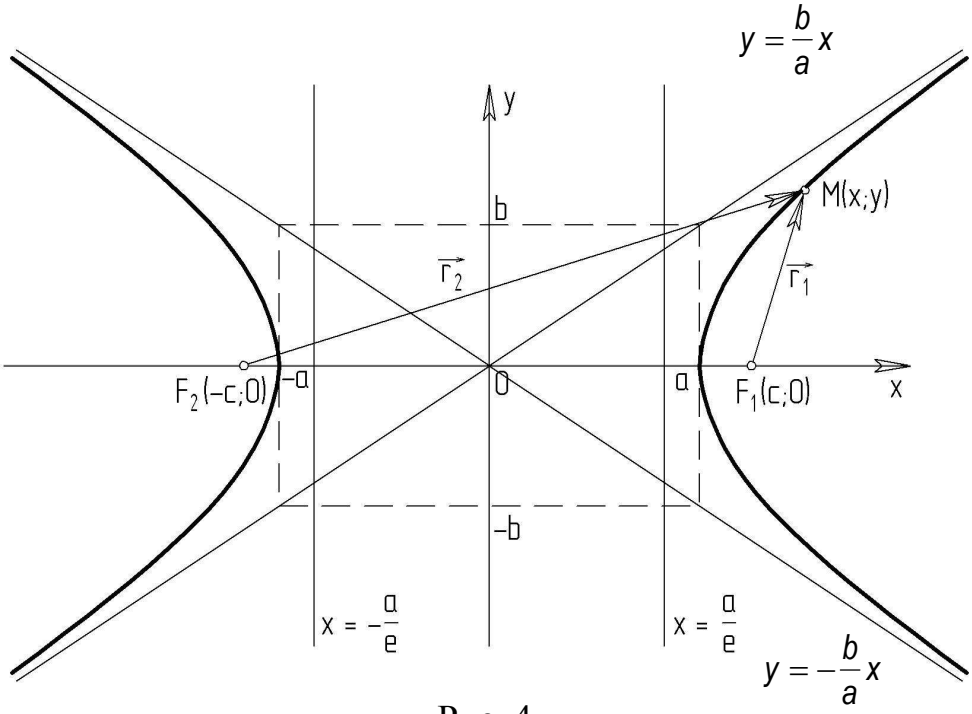


Рис. 4

Для гіперболи $e > 1$.

Прямі $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$ мають назву асимптот гіперболи. Якщо $a = b$, гіпербола має назву рівнобічної.

Має місце так звана фокально-директоріальна властивість кривих другого порядку, за якою відношення відстаней від будь-якої точки $M(x;y)$ кривої до фокуса і відповідної директриси є стале, що дорівнює ексцентриситету кривої: $\frac{\left|\vec{r}_M\right|}{d_M} = e$.

Користуючись фокально-директоріальною властивістю кривих другого порядку, отримаємо канонічне рівняння гіперболи.

Розглянемо рівність $\frac{\left|\vec{r}_M\right|}{d_M} = e$ (рис. 4), де $\left|\vec{r}_1\right| = MF_1 = \sqrt{(x+c)+y^2}$;

d_1 – це відстань від точки $M(x;y)$ до правої директриси гіперболи, що має рівняння $x = \frac{a}{e}$ або у загальному вигляді $x - \frac{a}{e} = 0$.

Вважаючи, що $e = \frac{c}{a}$, рівняння правої директриси має вигляд $x - \frac{a^2}{c} = 0$.

Тоді $d_1 = \left|x - \frac{a^2}{c}\right|$ і матимемо $\frac{\sqrt{(x-c^2)+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|} = \frac{c}{a}$; $\frac{c\sqrt{(x-c^2)+y^2}}{\left|cx-a^2\right|} = \frac{c}{a}$;

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \left|cx-a^2\right|$;

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4$;

$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$;

Оскільки $c > a$, то $c^2 - a^2 > 0$.

Позначимо $b^2 = c^2 - a^2$, тоді $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ або $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. *Параболою* називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки – фокуса і від даної прямої – директриси.

Розташувавши декартову систему координат, як зображено на рис. 5, отримаємо наступне канонічне рівняння параболи: $\boxed{y^2 = 2px}$,

де p – параметр параболи, що чисельно дорівнює відстані між фокусом і директрисою. $\left|\bar{r}\right| = d$; $\left|\bar{r}\right| = x + \frac{p}{2}$. Тут $\left|\bar{r}\right| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Директриса має рівняння $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$;

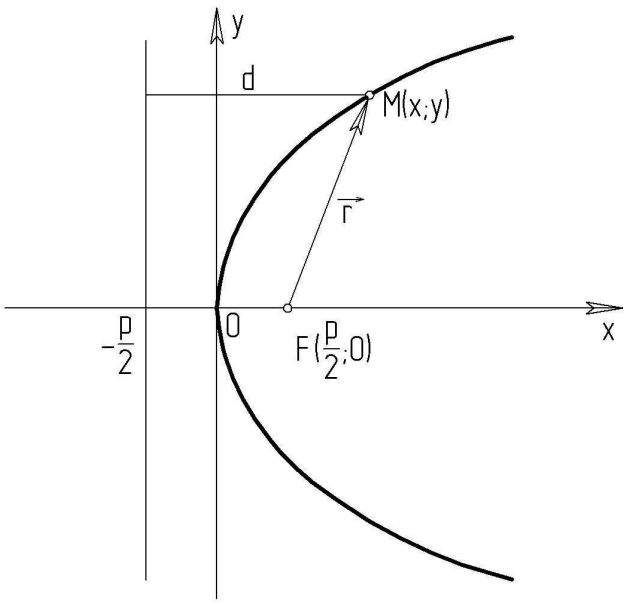


Рис. 5

Зауважимо, що поняття директриси притаманне також еліпсу і гіперболі, що мають по дві директриси, рівняння яких $\boxed{x = \pm\frac{a}{e}}$.

Ці лінії перпендикулярні фокальній осі й розташовані зовні від вершини у випадку еліпса ($e < 1 \Rightarrow |x| > a$) і між вершинами у випадку гіперболи ($e > 1 \Rightarrow |x| < a$). Так, права директриса відповідає правому фокусу, а ліва – лівому.

Приклад. Скласти рівняння парабол:

a) точка $A(1;2)$ належить параболі; OX являє собою вісь симетрії;

b) рівняння директриси параболи $y = -2$.

Розв'язання.

a) $y^2 = 2px$; $2^2 = 2p \cdot 1$; $p = 2$; $y^2 = 4x$;

b) $y = -2$; $-\frac{p}{2} = -2$; $p = 4$; $x^2 = 2py$; $x^2 = 8y$.

Приклад. Скласти рівняння еліпсів: a) точки $A(0;-2)$ і $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ лежать на еліпсі;

b) точка $A(0;\sqrt{11})$ є вершиною і $e = \frac{5}{6}$.

Розв'язання. а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; щоб знайти a^2 і b^2 підставимо у рівняння відповідні координати точок A і B.

$$\left.\begin{array}{l} A:\ \frac{0}{a^2}+\frac{(-2)^2}{b^2}=1;\ ; \\ B:\ \frac{15}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1; \end{array}\right\}$$

Розв'яжемо систему і знайдемо a^2 і b^2. З першого рівняння $b^2=4$,

З другого рівняння $\frac{15}{4a^2}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$; $a^2=5$;

Отже, $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$; $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{(2)^2}=1$.

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{0}{a^2}+\frac{11}{b^2}=1$; $b^2=11$

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}$; $c^2=a^2-b^2$; $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{25}{36}$; $\frac{36}{36}-\frac{11}{a^2}=\frac{25}{36}$;

$\frac{11}{36}=\frac{11}{a^2}$; $a^2=36$; $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$; $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{11})^2}=1$.

Приклад. Скласти рівняння гіпербол:

а) точки $A(3;4)$ та $B(5;4\sqrt{5})$ лежать на гіперболі;

b) точка $A(6;0)$ є вершиною і $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; Розв'язуємо аналогічно попередньому прикладу.

$$\left.\begin{array}{l} A:\ \frac{9}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1 \\ B:\ \frac{25}{a^2}-\frac{80}{b^2}=1 \end{array}\right\}\begin{array}{l}-5\\+\end{array}$$

Перше рівняння помножили на -5 і склали з другим. Отримали:

$$\frac{-45}{a^2}+\frac{25}{a^2}+\frac{80}{b^2}-\frac{80}{b^2}=-5+1;\ \ \frac{-20}{a^2}=-4;\ a^2=5;$$

$$\frac{25}{5}-\frac{80}{b^2}=1;\ \ \frac{80}{b^2}=4;\ b^2=20;\ \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1;\ \ \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{y^2}{(2\sqrt{5})^2}=1;$$

b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\ \ a=6;\ k=b/a=\sqrt{2}/2;$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 6=3\sqrt{2};\ \ \frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2}=1.$$

4. Полярна система координат

Полярна система координат задається точкою *O*, що має назву полюс, і полярною віссю або полярою *OP* (рис. 6) з одиницею вимірювання або масштабом.

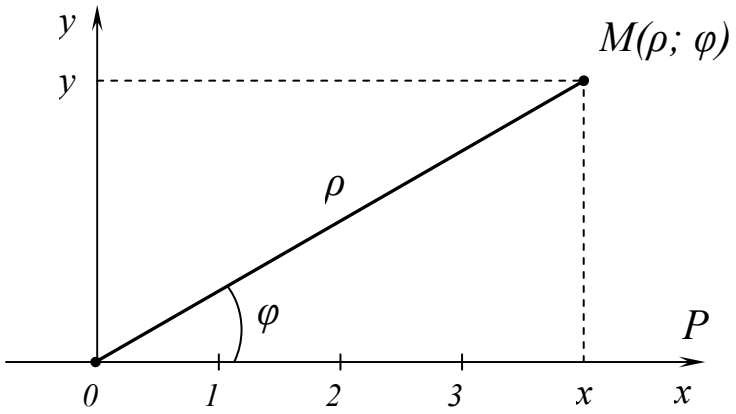


Рис. 6

Положення точки *M* визначається числами ρ і φ, де ρ відстань її від полюса, φ – кут між відрізком *OM* і полярною віссю (відлік кутів ведеться від полярної осі проти годинникової стрілки).

Числа ρ і φ мають назву полярних координат точки M: ρ – полярний радіус, φ – полярний кут. Між множиною усіх точок площини (крім точки O) і множиною впорядкованих пар чисел $(\rho;\varphi)$, де $\rho \geq 0$ і $\varphi \in [-\pi;\pi]$ (або $0 \leq \varphi < 2\pi$), існує взаємно однозначна відповідність. Для точки *O* величина полярного кута не визначена.

Встановимо зв'язок між прямокутними й полярними координатами. Якщо за полюс взяти початок прямокутної системи координат, а за полярну вісь – додатний напрям осі OX (рис. 6), прямокутні координати x і y точки M і її полярні координати ρ і φ, окрім полюса, зв'язані наступними формулами:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}}; \qquad \boxed{\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}}.$$

Приклад. Знайти прямокутні координати точки $A\left(\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$ і полярні координати точки $B\left(-1;\sqrt{3}\right)$, якщо полюс співпадає з початком декартової системи координат, а полярна вісь з додатнім напрямом осі OX.

Розв'язання.

$$x = \rho\cos\varphi = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1; \quad y = \rho\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1;$$

Таким чином точка $A\left(\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$ має декартові координати $A(1;1)$.

Точка B лежить у другій чверті,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; звідси $\varphi = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, де $n \in \mathrm{Z}$.

Таким чином точка $B\left(-1;\sqrt{3}\right)$ має полярні координати $B\left(2;\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Приклад. Побудувати в полярній системі координат криву, яка має назву «лемніската Бернуллі»: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, $(a > 0)$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат:

$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$ або $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Звідси $\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Знак «$\pm$» вказує на той факт, що крива симетрична відносно полюса. Область допустимих (можливих) значень кута φ

знаходимо з нерівності: $\cos 2\varphi \geq 0$; $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$. Оскільки $\cos 2\varphi$ – парна функція, то крива буде симетрична відносно полярної осі.

Таким чином достатньо побудувати криву в першій чверті і скористатися умовами симетрії.

Для першої чверті $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ з кроком $\frac{\pi}{16}$ сформуємо таблицю:

φ	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	$\approx 0{,}96\,a$	$\approx 0{,}84\,a$	$\approx 0{,}62\,a$	0

Отже, ρ спадає від a до 0. Будуємо лемніскату Бернуллі (рис.7).

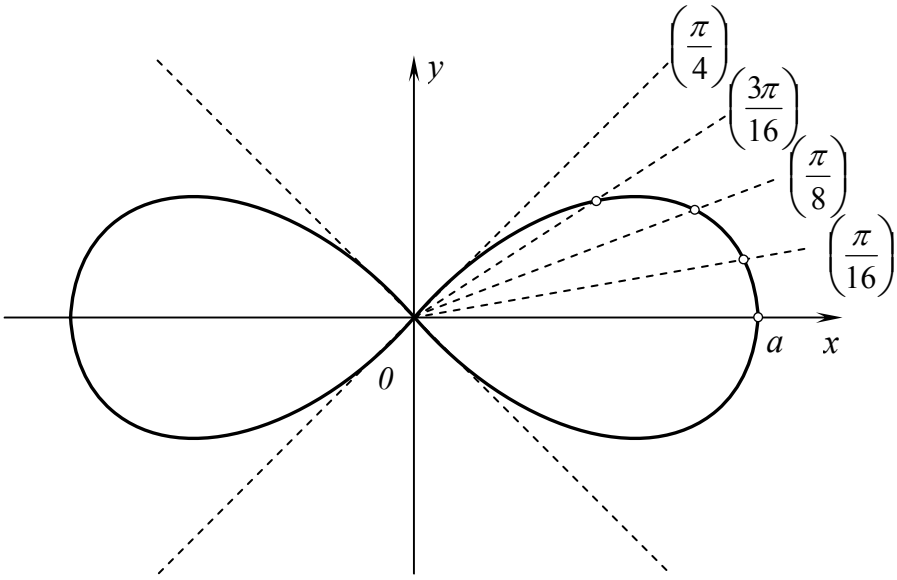


Рис. 7

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.2.
ВСТУП ДО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Змінні і сталі величини. Функції

У природі існує безліч фізичних величин, таких як час, швидкість об'єм, маса, тиск, температура та ін. Математика вивчає числові значення цих величин. Величина, яка набігає різних числових значень (наприклад зі збігом часу) називається змінною, а яка не змінює своїх значень – сталою.

Існують абсолютні сталі, такі як швидкість світла у вакуумі с=300000 км/сек., відношення довжини кола до діаметру $\pi = 3{,}14159\ldots$

Сукупність всіх числових значень змінної величини називається її областю визначення, яку можна зобразити точками числової осі. Областю визначення змінної величини може бути точка, інтервал, сегмент, або уся числова ось.

Змінні величини можуть бути зростаючими, спадаючими, обмеженими, упорядкованими, утворювати числові послідовності.

З поняттям функція ми стикаємося, коли досліджуємо змінну однієї величини в залежності від зміни іншої.

Якщо ми маємо дві непустих множини *X* та *Y* і кожному елементу *x*, що належить множині X $(x \in X)$ по деякому правилу поставлений у відповідність один і тільки один елемент із множини Y $(y \in Y)$, то кажуть, що на множині *X* задана функція *f* або відображення, що переводять елементи множини *X* у елементи множини *Y*. Цей факт записується так $X \xrightarrow{f} Y$, або $f : X \to Y$, або $y = f(x)$.

Множина *X* має назву області визначення функції *D{f}*, а множина Y – області значень функції *E{f}*. Значення функції $f(x)$ при $x = a$ позначається $f(a)$. Областю визначення функції може бути точка, інтервал, сегмент, або їх сукупність, або уся числова ось.

Графіком функції $y = f(x)$ є множина точок площини *x0y* з координатами $(x; f(x))$, де $x \in X$.

Функція $f(x)$, область визначення якої симетрична відносно нуля, має назву парної, якщо $f(-x) = f(x)$ для будь якого значення $x \in X$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат. Приклади парних функції: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = \cos x$.

Функція $f(x)$, область визначення якої симетрична відносно нуля, має назву непарної, якщо $f(-x) = -f(x)$ для будь якого значення $x \in X$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Приклади непарних функції: $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$.

Функція $f(x)$ має назву періодичної, якщо існує таке додатнє число *T*, яке має назву періода функції, що для усіх $x \in X$ виповнюється рівність $f(x+T) = f(x)$.

Основним періодом функції називають найменше число τ, що має таку властивість. Функції можуть задаватися таблично, графічно та аналітично. Розглянемо основні елементарні функції та їх графіки.

Степенева функція $y = x^a$, $a \in R$, рис.8.

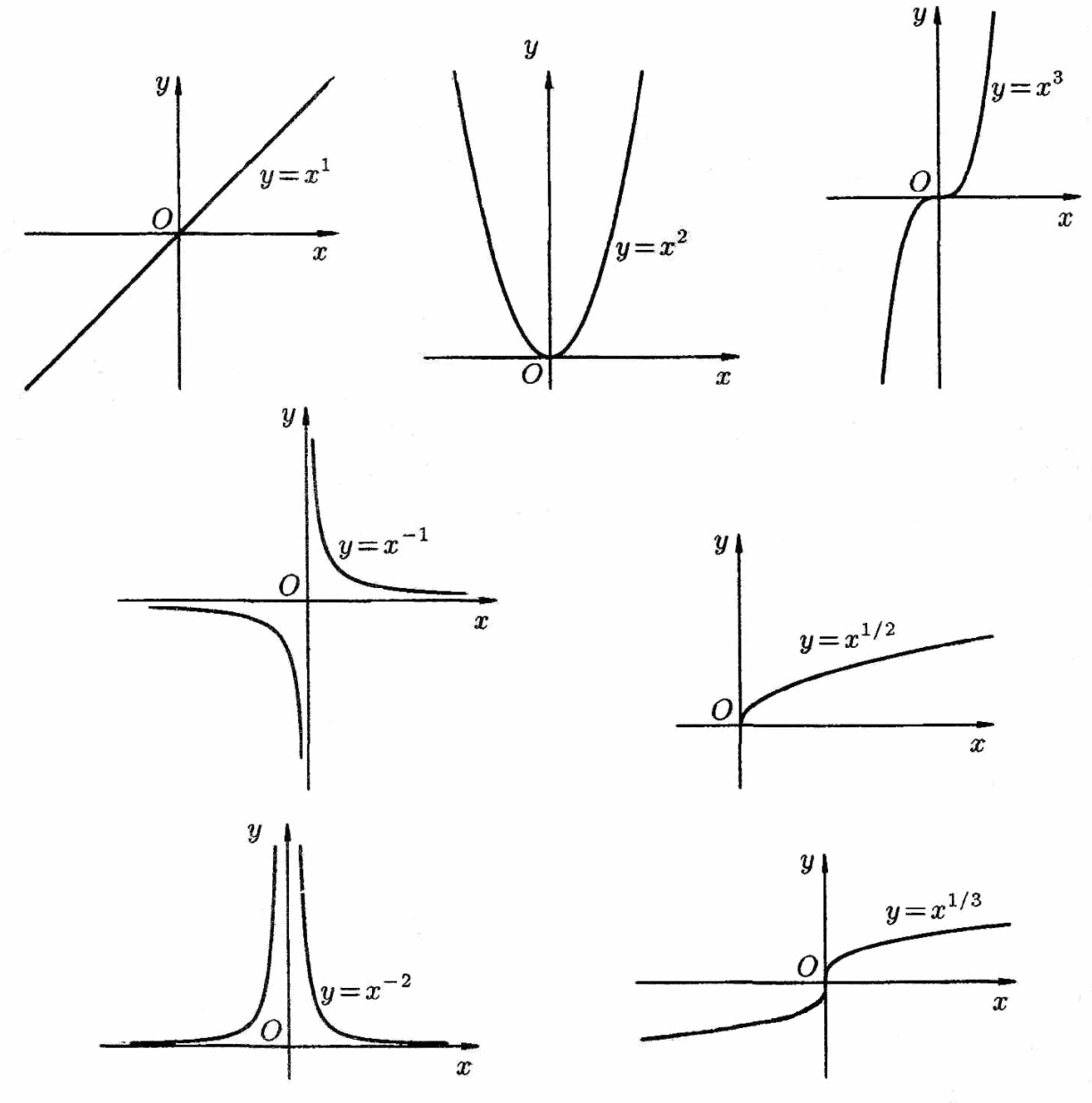


Рис. 8

Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Рис. 9.

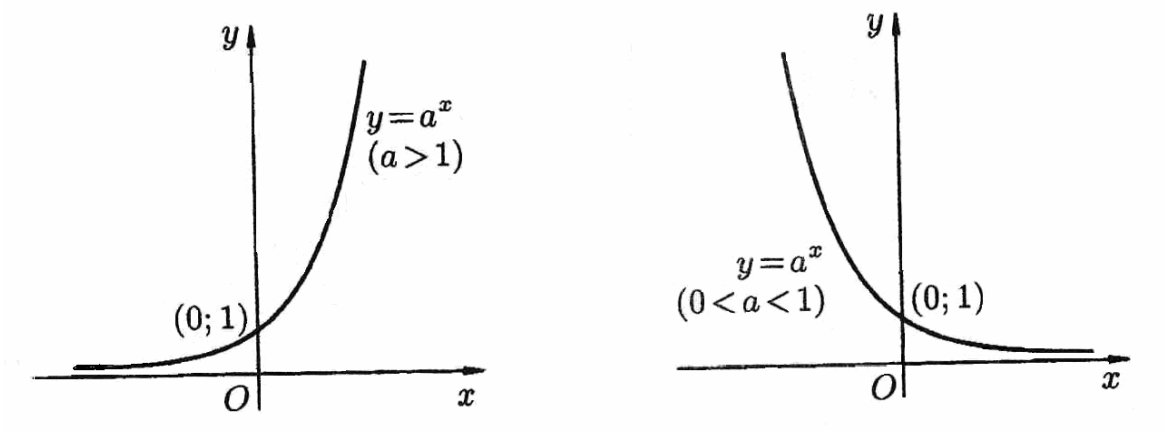


Рис. 9

Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Рис. 10.

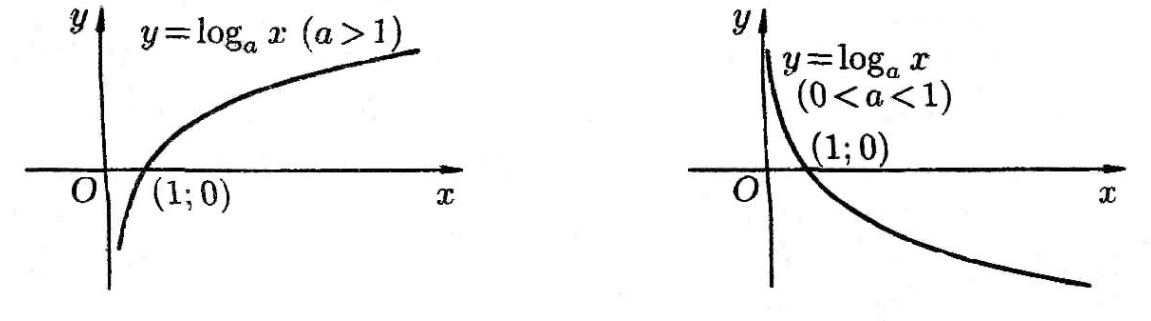


Рис. 10

Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$. Рис. 11.

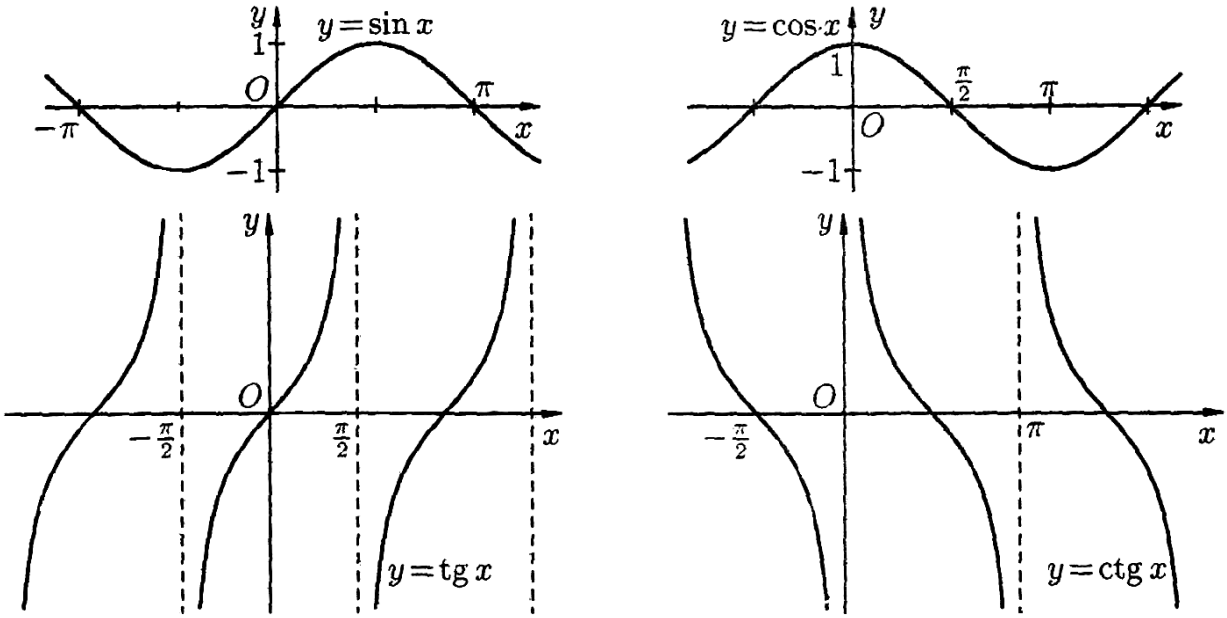


Рис. 11

Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$. Рис. 12.

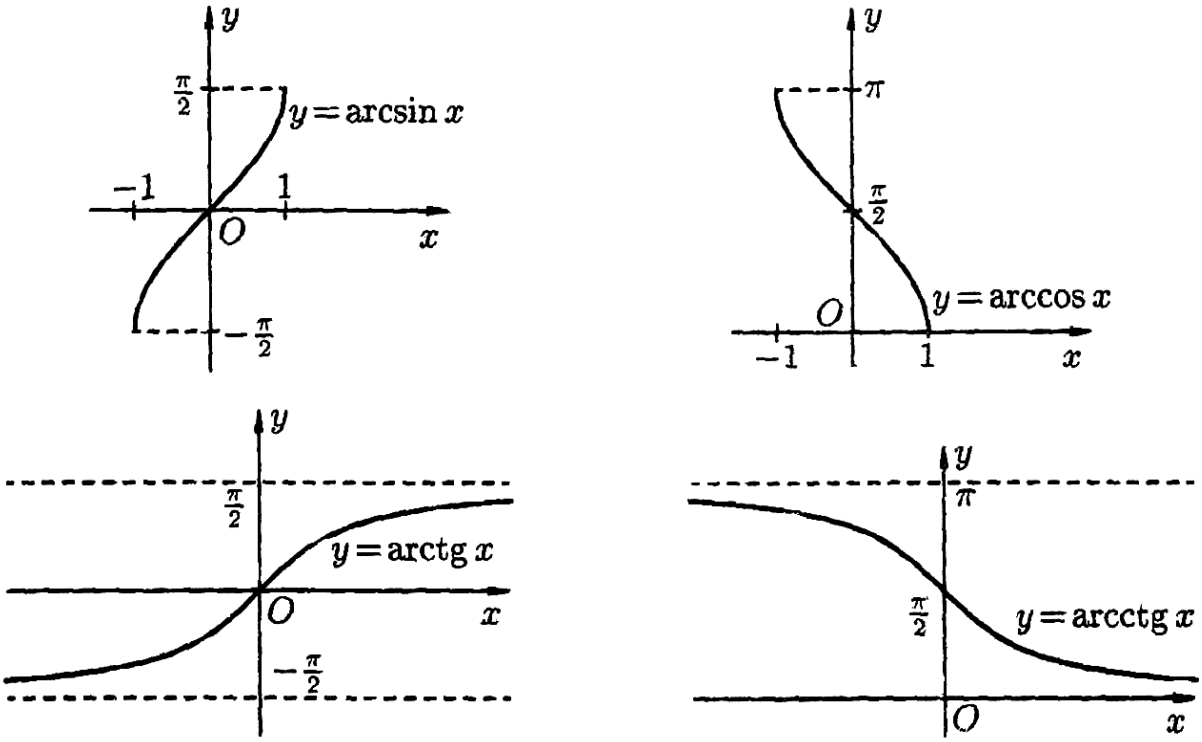


Рис. 12

При побудуванні графіків функцій використовується побудування «по точкам»; дії з графіками (додавання, віднімання, множення графіків); перетворення графіків (зсув, розтягування).

Виходячи з графіка $y = f(x)$ побудуємо:

1) $y = f(x - a)$ - графік зсунуто вздовж осі *ox* на величину а вправо *(a>0)*;
2) $y = f(x) + b$ - графік зсунуто вздовж осі *oy* на величину *b* угору *(b>0)*;
3) $y = Af(x)$ - графік розтягнуто вздовж осі *oy* у А разів;
4) $y = f(kx)$ - графік розтягнуто у $\frac{1}{k}$ разів вздовж осі *ox* (стиснуто у *k* разів).

Таким чином, маючи графік $y = f(x)$, можемо побудувати графік функції $y = Af[k(x - a)] + b$.

2. Теорія границь

Числова послідовність $x_1, x_2, x_3, ...x_n, ...$ це функція $x_n = f(n)$, що задана на множині натуральних чисел.

Коротко послідовність позначається $\{x_n\}$, або x_n, $n \in N$ де x_1 – перший член послідовності, x_2 – другий, … , x_n – загальний член послідовності.

Послідовність $\{x_n\}$ має назву обмеженої, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \le M$.

Наприклад $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

У протилежному випадку вона має назву необмеженої.

Наприклад: $S_n = \{2, 5, 10, ..., n^2 + 1, ...\}$.

Послідовність $\{x_n\}$ має назву зростаючої (неспадаючої), якщо для будь-якого *n* виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$, $(x_{n+1} \ge x_n)$.

Послідовність $\{x_n\}$ має назву спадаючої (незростаючої), якщо для будь-якого *n* виконується нерівність $x_{n+1} < x_n$, $(x_{n+1} \le x_n)$.

Усі ці послідовності мають назву монотонних. Якщо усі члени послідовності дорівнюють одному і тому ж числу *c* вона має назву постійної.

Число *a* має назву границі числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого, наперед даного довільно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, існує номер *N* (взагалі кажучи, залежний від ε, $N = N(\varepsilon)$), що для всіх $n > N$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Коротше це записується так:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \ if \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists N(N = N(\varepsilon)), \\ \forall n > N, \quad |x_n - a| < \varepsilon \end{array}}$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

$\Downarrow$

За визначенням число 1 є границею послідовності $x_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in N$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує $(\exists)$ натуральне число *N*, таке, що для усіх *n>N* виконується нерівність $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, тобто $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Звідси $n > \frac{1}{\varepsilon}$ тобто для усіх $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, де $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – ціла частка числа $\frac{1}{\varepsilon}$.

Якщо $\varepsilon > 1$, то за *N* можна узяти $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Таким чином $\forall \varepsilon > 0$ знайдене відповідне значення *N,* що й доказує, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} = 1$. ■

Число A є границею функції $y = f(x)$, коли x прямує до a $(x \to a)$, якщо для будь-якого, наперед даного, довільно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, існує таке число $\delta > 0$ (взагалі кажучи, залежне від ε $(\delta = \delta(\varepsilon))$, що як тільки $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротше це записується так:

$$\boxed{a = \lim_{x \to a} f(x),\ if\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ (\delta = \delta(\varepsilon)),\ |x - a| < \delta,\quad |f(x) - A| < \varepsilon}$$

Аналогічно $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, якщо $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Умовно запишемо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, якщо $|f(x) > M|$, при $|x - a| < \delta$, де M довільне додатне число. У цьому разі функція $f(x)$ має назву нескінченно великої при $x \to a$.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$.

Деякі властивості нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$:

1) Добуток двох нескінченно малих є нескінченно мала більш високого порядку по відношенню до співмножників: тобто якщо $\gamma = \alpha \cdot \beta$, то $\gamma = 0(\alpha)$, $\gamma = 0(\beta)$ (гамма є 0 мале від альфа і є 0 мале від бета).
2) Нескінченно малі α і β еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх різниця $\alpha - \beta = \gamma$ є нескінченно мала більш високого порядку по відношенню до α, або β, тобто $\gamma = 0(\alpha)$, $\gamma = 0(\beta)$.

3) Якщо частка від ділення двох нескінченно малих має границю, то ця границя не змінюється, якщо кожну з них замінити на еквівалентну тобто якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=m,\ \alpha\sim\alpha_1,\ \beta\sim\beta_1$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=m$.

Нагадаємо, що $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні при $x\to a$ $(\alpha\sim\beta)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Розглянемо порівняння нескінченно малих α *і* β.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}1,\ \alpha(x)\ \text{еквівалентна}\ \beta(x),\ \alpha(x)\sim\beta(x),\\ 0,\ \alpha(x)\ \text{нескінченно мала більш високого порядку ніж}\ \beta(x),\\ \alpha(x)=0\big(\beta(x)\big),\\ m<\infty,\ \alpha(x)\ \text{і}\ \beta(x)\ \text{нескінченно малі одного і того ж порядку},\\ \infty,\ \beta(x)\ \text{нескінченно мала більш високого порядку ніж}\ \alpha(x).\end{cases}$$

Корисно мати на увазі еквівалентність наступних нескінченно малих при $x\to 0$: $\sin x\sim x;$ $\operatorname{tg} x\sim x;$ $\arcsin x\sim x;$ $\operatorname{arctg} x\sim x;$ $\ln(1+x)\sim x;$ $e^x-1\sim x.$

Якщо α^k та β - нескінченно малі одного й того ж порядку, то, нескінченно мала β має порядок $k>0$ по відношенню до α.

Приклад. Порівняти нескінченно малі $\alpha=t\sin^2 t$ и $\beta=3t^2\sin t$ при $t\to 0$.

Розв'язання. Знайдемо $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{t\sin^2 t}{3t^2\sin t}=\frac{1}{3}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{3}$, тобто α та β нескінченно малі одного й того ж порядку.

Якщо $x<a$ і $x\to a$, то використовують запис $x\to a-0$. Якщо $x>a$ і $x\to a$, то – $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ й $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ мають назву відповідно лівої та правої границі функції $f(x)$ при $x\to a$. Щоб $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ необхідно і достатньо, щоб $f(a-0)=f(a+0)$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має границю що дорівнює A, то її можна представити як суму числа A й нескінченно малої $\alpha(x)$, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$, тобто $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$, а це означає, що функція $f(x) - A$ має границю, що дорівнює нулю, тобто є нескінченно малою, яку позначимо $\alpha(x)$: $f(x) - A = \alpha(x)$. А звідси $f(x) = A + \alpha(x)$. ■

Теорема (обернена). Якщо функцію $f(x)$ можна представити у вигляді суми числа A і нескінченно малої $\alpha(x)$ при $x \to a$, то число A є границею функції $f(x)$, тобто якщо $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Доведення. Нехай $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to a$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) < \varepsilon|$. А так як за умовою $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha(x) = f(x) - A$. Отримаємо $|f(x) - A| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Практичне обчислення границь базується на наступних теоремах, у яких будемо рахувати, що границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ існують. (Доведення, коли $x \to \infty$ аналогічне). ■

Теорема. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь.

Доведення. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$.

Тоді $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$,

де $\alpha(x) + \beta(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to a$, як сума нескінченно малих.

З попередньої теореми $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=A+B$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Таке ж доведення приводимо у випадку різниці двох функцій. Теорема виконується для алгебраїчної суми скінченої кількості функцій. ■

Теорема. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Доведення. Доведення аналогічне попередньому.

$\Downarrow$

Так як $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$; $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$,

то $f(x)=A+\alpha(x)$; $\varphi(x)=B+\beta(x)$, де

де $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to a$.

Тоді $f(x)\cdot\varphi(x)=(A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x))$, або $f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B+\left[A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right]$, де вираз у дужках є нескінченно мала функція і ми матимемо $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Теорема виконується для будь-якої скінченої кількості функцій. ■

Слідство. Постійний множник можна виносити за знак границі.

$$\lim_{x\to a}c\cdot f(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$$

Доведення. $\lim\limits_{x\to a}c\cdot f(x)-\lim\limits_{x\to a}c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ■

$\Downarrow$

Теорема. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$$

Доведення. Доведення аналогічне попередньому.

$\Downarrow$

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$,

то $f(x) = A + \alpha(x)$; $\varphi(x) = \beta + \beta(x)$, тоді

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right) =$$

$$= \frac{A}{B} + \left(\frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}\right) = \frac{A}{B} + \left(\frac{B\cdot\alpha(x) - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}\right).$$

Друга дроб є нескінченно мала функція, тому $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$. ■

У теорії границь важливе місце займають перша і друга чудові границі:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\ x}{x} = 1$, – перша чудова границя;

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$, – друга чудова границя, де $e = 2{,}71828\ldots$ – ірраціональне число;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln\ a$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln\ a}$.

Для доведення першої чудової границі доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0} \cos\ x = 1$.

Доведення. З тригонометричних тотожностей маємо:

$\Downarrow$

$\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, тобто $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$,

але $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| < |\sin x|$, і тому $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{x}{2} = 0$.

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=1-2\left(\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}\right)^2=1-0=1.$ ■

Доведемо першу чудову границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}=1.$

Доведення. Розглянемо частину кола радіуса одиниця, рис. 13.

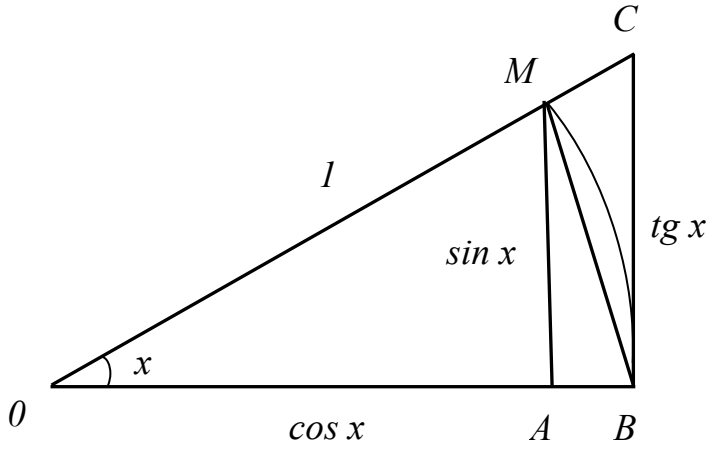


Рис. 13

Позначимо радіальну міру кута *MOB* за *x*. Нехай $0<x<\frac{\pi}{2}$.

На малюнку $|AM|=\sin x$, дуга *MB* чисельно дорівнює центральному куту *x*, $|BC|=tg\ x$.

Наочно маємо $S_{\Delta MOB}<S_{сектора\,MOB}<S_{\Delta COB}$.

Тоді $\frac{1}{2}\sin\ x<\frac{1}{2}\ x<\frac{1}{2}tg\ x$. Поділимо на $\frac{1}{2}\sin\ x>0$:

$1<\frac{x}{\sin\ x}<\frac{x}{\cos\ x}$ або $\cos x<\frac{\sin\ x}{x}<1$.

Так як $\lim\limits_{x\to 0}\cos\ x=1$ і $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, то змінна $\frac{\sin\ x}{x}$ розташована між двома величинами, які мають одну й ту ж границю, яка дорівнює 1, отже, за теоремою про стиснуту змінну, маємо $\lim\limits_{x\to 0}\sin\ x=1$.

Нехай тепер $x<0$. Маємо $\frac{\sin\ x}{x}=\frac{\sin\ (-x)}{-x}$, де $-x>0$.

Звідси $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \frac{\sin x}{x}=1$, а тому $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$. ■

Для неперервної функції (див. нижче) має місце граничний перехід

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Усі елементарні функції неперервні в області визначення. Розглянемо розкриття невизначеностей наступних видів: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞.

Приклад. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2-3x-4}{x^3+4x+4}=\frac{2+3-4}{-1-4+3}=-1$.

Після підстановки замість x мінус одиниці, не маючи невизначеностей, отримаємо відповідь.

Розглянемо $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{\infty}{\infty}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ многочлени порядку n і m відповідно, $n\in N$ і $m\in N$.

Для розкриття невизначеностей виду $\frac{\infty}{\infty}$ скорочуємо чисельник і знаменник на старший ступінь x чисельника або знаменника і користуємось умовною таблицею.

$c\cdot 0=0$; $\quad c\cdot\infty=\infty$; $\quad \frac{0}{c}=0$; $\quad \frac{\infty}{c}=\infty$

$\frac{c}{0}=\infty$; $\quad \frac{0}{\infty}=0$; $\quad$ де $c=const$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+1}{x^2+2x-1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$,

$\begin{pmatrix} n=2; & n=m \\ m=2; & \end{pmatrix}$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^3-x^2+3x}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^4}{x^3}-3\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}}=,$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1}=\infty,\qquad\begin{pmatrix}n=4;\\ m=3;\end{pmatrix}\quad n>m\Big).$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-2x^2+5}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2}-7\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{10}{x^2}}{\dfrac{x^3}{x^2}-2\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}=,$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-2}=0,\qquad\begin{pmatrix}n=2;\\ m=3;\end{pmatrix}\quad n<m\Big).$

Зазначимо, що при $n=m$ границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших ступенях x у чисельнику і знаменнику. Якщо ж $n<m$, – то нулю; $n>m$, – то нескінченості.

Розглянемо обчислення границь від раціональних функцій виду

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{0}{0}.$$

Для розкриття невизначеності такого виду треба зробити алгоритмічні перетворення у чисельнику і знаменнику метою яких є виділення множника виду $(x-x_0)$, що прямує до нуля. Це можна зробити розкладаючи многочлени на множники, ураховуючи формули:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b\pm 3ab^2+b^3;$$

$$a^2\pm b^2=(a+b)(a-b);\qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\pm ab+b^2\right),$$

або поділивши многочлени на множник $(x-x_0)$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^3-x^2-1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(2x^2+x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+x+1}=\dfrac{3}{4}.$

Тут виконали ділення многочлена на двочлен наступним чином:

$$
\begin{array}{l|l}
\_2x^3 - x^2 - 1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{\;2x^3 - 2x^2\;} & 2x^2 + x + 1 \\
\quad \_x^2 - 1 & \\
\quad \underline{\;x^2 - x\;} & \\
\qquad \_\ x - 1 & \\
\qquad \underline{\;x - 1\;} & \\
\qquad\qquad 0. &
\end{array}
$$

Для усунення невизначеностей у разі ірраціональних виразів, треба домножити чисельник і знаменник на спряжений вираз.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\|$.

/Домножимо чисельник і знаменник на $\sqrt{x+2}+2$, розкладемо $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$/

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)} = \frac{1}{16}.$$

Для розкриття невизначеності виду $\infty - \infty$ треба застосувати елементарні перетворення для зведення їх до невизначеностей виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ або $\dfrac{0}{0}$.

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Розглянемо приклади обчислення границь за допомогою першої і другої чудових границь і порівняння нескінченно малих.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k \sin kx}{kx} = k \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{kx} = k$.

Тут використали першу чудову границю.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\left(\frac{5}{3x}\right)^{2x} = \left\|1^{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{\frac{3x}{5}\cdot\frac{5\cdot 2x}{3x}} = e^{\frac{10}{3}}$

Тут використали другу чудову границю.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{\frac{5x}{2}} = \left\|1^{\infty}\right\|.$

Спочатку виділимо цілу частку:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{x-2+2+4}{x-2} = 1+\frac{6}{x-2}$$

Або так: $\frac{x+4}{x-2} = 1+\frac{x+4}{x-2}-1 = 1+\frac{x+4-x+2}{x-2} = 1+\frac{6}{x-2}.$

Тепер треба виділити у показнику ступеня вираз, обернений до дробової частини:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{\frac{5x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{6}}\right]^{\frac{6}{x-2}\cdot\frac{5x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{6}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x}{2}} = e^{15}$$

Границя виразу у квадратних дужках дає число e, а границя степеня дорівнює 15.

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sqrt{1-\cos 4x}} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\|\begin{matrix} tg3x \sim 3x, \quad x\to 0 \\ 1-\cos 4x = 2\sin^2 2x \sim 2\cdot 2x\cdot 2x \end{matrix}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{2(2x)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Тут і далі скористалися еквівалентними нескінченно малими величинами.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin 3x}.$

$1-\cos^2 2x = \sin^2 2x \sim (2x)^2, \quad x\sin 3x \sim x\cdot 3x, \quad x\to 0.$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2x}{x\cdot 3x} = \frac{4}{3}.$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{arcsin2x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\|\begin{matrix} 3^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln 3 \\ arcsin2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x \end{matrix}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{2x} = \frac{\ln 3}{2}.$

Приклад.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\(x-2)\to 0}} \frac{2^x-4}{\sin \pi x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\| \begin{array}{l} x-2=z,\ z\to 0 \Rightarrow x=2+z \\ 2^x-4=2^{2+z}-2^2=2^2(2^z-1) \underset{z\to 0}{\sim} 2^2 z\ln 2 \\ sin\pi x = sin(2\pi+\pi z) = \sin \pi z \underset{z\to 0}{\sim} \pi z \end{array} \right\| =$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{4z\ln 2}{\pi z} = \frac{4\ln 2}{\pi}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{\ln\left(1+x^2\right)^3} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\| \begin{array}{l} \cos 2x = 1-1+\cos 2x = 1-\left(1-\cos 2x\right) = 1-2\sin^2 x \\ \ln\left(\cos 2x\right) = \ln\left(1+\left(-2\sin^2 x\right)\right) \sim -2\sin x \sim -2x^2 \\ \ln\left(1+x^2\right)^3 = 3\ln\left(1+x^2\right) \sim 3x^2,\ x\to 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{3x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Обчислення інших границь розглянемо нижче у розділі правило Лопіталя.

3. Неперервність функції

Функція $f(x)$ має назву неперервної у точці *a*, якщо: 1) вона визначена у деякому околі точки *a*; 2) існує границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) ця границя дорівнює значенню функції у точці a, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Існує інше визначення неперервності функції. Функція $f(x)$ називається неперервною у точці *a*, тоді і тільки тоді, коли у цій точці нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції: $\lim\limits_{x\to a} \Delta f(x) = 0$, де $\Delta f = f(x) - f(a)$, $\Delta x = x - a$.

Функція $f(x)$ неперервна у деякій області (інтервалі, сегменті, тощо) якщо вона неперервна у кожній точці цієї області.

Точка a, що належить області визначення функції, включаючи границю, має назву точки розриву, якщо у цій точці не виконуються умови неперервності функції.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ та $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, причому не усі три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ дорівнюють одне одному, то точка a – точка розриву першого роду.

Точки розриву першого роду поділяються на точки усувного розриву, коли $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$ і точки стрибка, коли $f(a-0) \neq f(a+0)$. Різниця $f(a+0) - f(a-0)$ має назву стрибка функції $f(x)$ у точці a.

Точками розриву другого роду називають точки розриву, що не є точками розриву першого роду. У точках розриву другого роду не існує хоча б одна з односторонніх границь.

Сума і добуток скінченого числа неперервних функцій є неперервною функцією.

Частка двох неперервних функцій є неперервна функція у тих точках, де дільник не дорівнює нулю.

Приклад. Дослідити на розрив функцію $y = arctg\dfrac{1}{x-5}$.

Розв'язання. Якщо $x \to 5-0$, то $\dfrac{1}{x-5} \to -\infty$, $\lim\limits_{x \to 5-0} arctg\dfrac{1}{x-5} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Якщо $x \to 5+0$, то $\dfrac{1}{x-5} \to \infty$, $\lim\limits_{x \to 5+0} arctg\dfrac{1}{x-5} = \dfrac{\pi}{2}$.

Стрибок функції $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$. $x = 5$ – точка розриву першого роду.

Приклад. Показати, що функція $y = \dfrac{x}{x-5}$ має розрив при $x = 5$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 5-0} \dfrac{x}{x-5} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 5+0} \dfrac{x}{x-5} = +\infty$, тобто скінченних границь немає. Тоді $x = 5$ – точка розриву другого роду.

4. Похідна

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_1 та x_2 – значення аргументу, а $y_1 = f(x_1)$ та $y_2 = f(x_2)$ відповідні значення функції $y = f(x)$. Різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ – приріст аргументу, а різниця $\Delta y = y_2 - y_1$ – приріст функції на відрізку $[x_1; x_2]$.

Похідною від функції $y = f(x)$ по аргументу x називається граничне відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, або $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Похідну позначають також $\dfrac{d\,y}{d\,x}$.

Поняття похідної використовують у багатьох галузях науки, особливо при вивченні швидкості перебігу різних процесів. Якщо функція $y = f(x)$ описує закон руху матеріальної точки, то похідна визначає швидкість цієї точки у даний момент часу. Взагалі похідна це швидкість зміни функції у точках.

З геометричної точки зору похідна представляє кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x.

Пошук похідної має назву диференціювання функції.

Основні правила диференціювання.

Нехай c – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають похідні, тоді:

1) $c' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = cu'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) якщо $y = f(u)$, а $u = u(x)$, тобто $y = f[u(x)]$, то $y'_x = y'_u \cdot y'_x$ – це правило диференціювання складної функції;

8) $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{x'_y}$ – правило диференціювання оберненої функції.

Приклад. Спираючись на визначення похідної знайти похідну від $y = x^2$.

Розв'язання. Надамо приріст аргументу Δx. Знайдемо приріст функції $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2 + \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Знайдемо границю відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x\Delta x) = 2x.$$

Таким чином $(x^2)' = 2x$. Аналогічно отримують похідні від інших елементарних функцій. Нижче подано таблицю похідних для функції $u = u(x)$.

1) $c' = 0$

2) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

3) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

4) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

5) $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a}$

6) $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$

7) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$

8) $\left(e^u\right)' = e^u u'$

9) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$

10) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

11) $\left(\mathrm{tg} u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

12) $\left(\mathrm{ctg} u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

13) $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

14) $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

15) $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}$

16) $\left(\mathrm{arcctg} u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

17) $\left(\mathrm{sh} u\right)' = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \mathrm{ch} u \cdot u'$

18) $\left(\mathrm{ch} u\right)' = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \mathrm{sh} u \cdot u'$

19) $\left(\mathrm{th} u\right)' = \left(\frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch} u}\right)' = \frac{1}{\mathrm{sh} u \cdot u} \cdot u'$

20) $\left(\mathrm{cth} u\right)' = \left(\frac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch} u}\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh} u \cdot u} \cdot u'$

Розглянемо приклади.

Приклад. Знайти похідну $y = \ln \sin x$.

Розв'язання. Маємо $y = \ln u$, де $u = \sin x$; $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' =$

$= \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x$.

Приклад. Знайти похідну $y = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$.

Розв'язання. $y' = 2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)' = 2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) \cdot$

$\cdot \left(\cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = -\cos x$.

Для знаходження функції, що задана неявно $f(x, y) = 0$ необхідно продиференціювати обидві частини цієї рівності, ураховуючи правило диференціювання складеної функції. Потім розв'язуємо рівняння першого ступеня відносно y'.

Приклад. Знайти похідну $xy^2 - \ln y = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо обидві частини цієї рівності $1 \cdot y^2 + x2yy' - \frac{y'}{y} = 0$; звідси $y' = -\frac{y^2 \cdot y}{2xy^2 - 1} = \frac{y^3}{1 - 2xy^2}$.

Якщо функція аргументу x задана у параметричній формі $x = \varphi(t)$,

$y = \psi(t)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, або $\boxed{y'_t = \frac{y'_t}{x'_t}}$.

Приклад. Знайти похідну y'_x якщо $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

Розв'язання. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctg\, t$.

Звільняючись від параметра t маємо $y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{x \cdot a}{a \cdot y} = -\frac{x}{y}$.

Логарифмічне диференціювання застосовується у двох випадках:

1) коли функція має вигляд змінної у змінному ступеню і 2) коли функція складається з трьох або більше множників у чисельнику або знаменнику.

У цих випадках спочатку логарифмуємо рівність $y = f(x)$, а потім візьмемо похідну від обох частин рівності і знайдемо y'.

Приклад. Знайти похідну $y = x^x$.

Розв'язання. Логарифмуємо обидві частини $\ln y = \ln x^x = x \ln x$; беремо похідну від обох частин рівності $\ln y = x \cdot \ln x$.

Маємо $\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$. Таким чином $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$.

Звідси $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

Приклад. Знайти похідну $y = \frac{x^2(x-1)^3}{(2x+1)^4}$.

Розв'язання. Логарифмуємо $\ln y = \ln \frac{x^2 \cdot (x-1)^3}{(2x+1)^4} =$

$= \ln x^2 + \ln(x-1)^3 - \ln(2x+1)^4 = 2\ln x + 3\ln(x-1) - 4\ln(2x-1)$.

Беремо похідну від обох частин. $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4 \cdot 2}{2x+1}$.

Звідси $y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{8}{2x+1}\right) = \frac{x^2(x-1)^3}{(2x+1)^4} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4 \cdot 2}{2x+1}\right)$.

Так як з геометричної точки зору похідна дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної функції $y = f(x)$, у точці x_0, то рівняння дотичної матиме вигляд $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Якщо дотична паралельна осі OY, її рівнянням буде $x = x_0$. Нормаль до кривої $y = f(x)$ перпендикулярна дотичній. Враховуючи умову перпендикулярності, рівняння нормалі матиме вигляд $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Якщо ж нормаль паралельна осі OX, її рівняння буде $y = y_0$.

Приклад. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Знайдемо ординату точки дотику $y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 = -4$.

Кутовий коефіцієнт дотичної k дорівнює $k = y'(x_0) = 3x^2 - 6x = 3 - 6 = -3$. Тоді рівняння дотичної матиме вигляд $y + 4 = (-3)(x - 1)$ або $y = -3x - 1$, а рівняння нормалі – $y + 4 = -\frac{1}{-3}(x - 1)$ або $y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$.

Кут між двома кривими $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ у точці їх перетину $M(x_0; y_0)$ обчислюється як кут між дотичними до цих кривих у точці M.

Тангенс цього кута знайдемо за формулою $tg\varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}$.

Фізичний сенс похідної це швидкість руху точки у момент часу t_0, якщо точка рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$, тобто $v = S(t)$.

Розглядаючи похідні більш високих порядків відзначимо, що похідною другого порядку або другою похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від її першої похідної, тобто $y'' = (y')'$. Другу похідну позначають ще й так $y^n = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (y^{n-1})'$.

Якщо $S = S(t)$ закон прямолінійного руху точки, то друга похідна від путі по часу $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ є прискорення руху цієї точки.

Якщо функція задана у параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то похідні більш високих порядків обчислюються по формулам $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$; $y''_{xx} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t}$; $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ і так далі.

Наприклад. $y''_{xx} = \frac{x'_t\, y''_{tt} - x''_{tt}\, y'_t}{(x'_t)^2\, x'_t} = \frac{y''_{tt}\, x'_t - x''_{tt}\, y'_t}{(x'_t)^3}$.

5. Диференціал

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту аргумента (рис. 14).

Диференціалом аргумента називається приріст аргумента $dx = \Delta x$. Диференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал аргументу $dy = f'(x)\,dx$.

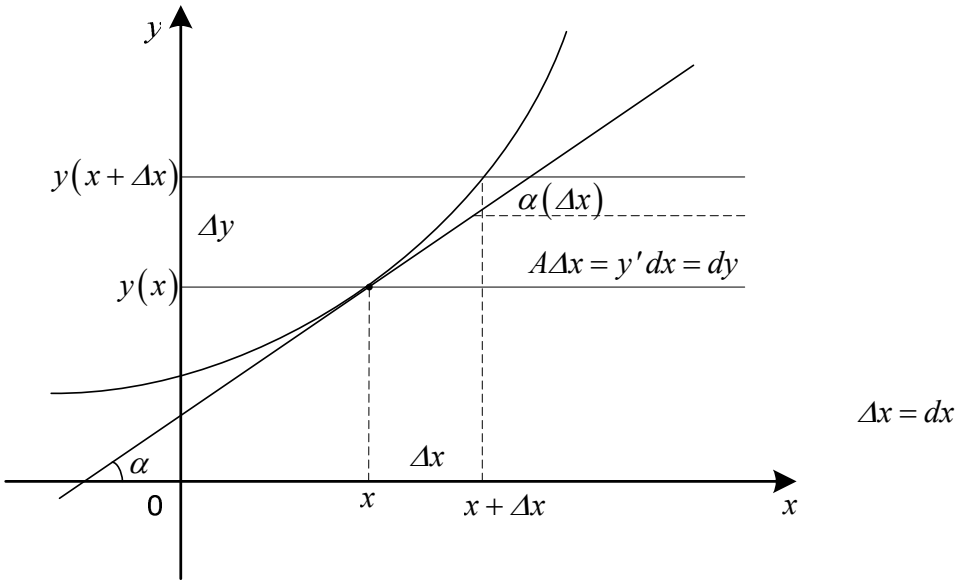


Рис. 14

З геометричної точки зору диференціал є приріст ординати дотичної до графіка функції у точці $M(x; y)$.

Основні властивості диференціала:

1) $dc = 0$, де $c = const$;

2) $dcu = cdu$;

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

4) $d(uv) = udv + vdu$;

5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$; $(v \neq 0)$;

6) $df(u) = f'(u)du$.

Приріст функції дорівнює диференціалу (головна частина приросту) і величині більш високого порядку малості ніж Δx.

$$\boxed{\Delta y = dy + 0(\Delta x)}\ .$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $0(\Delta x)$ тим паче прямує до нуля. Таким чином при, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \approx dy$, або $y(x+\Delta x) - y(x) \approx dy = y'(x)\Delta x$.

Тоді $$\boxed{y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x}\ .$$

Ця формула використовується для наближених обчислень, якщо Δx мале.

Приклад. Обчислити наближене значення $\sqrt[4]{16{,}2}$.

Розв'язання. $\sqrt[4]{16{,}2} = (16+0{,}2)^{\frac{1}{4}}$, де $x = 16$, $\Delta x = 0{,}2$.

Тоді $(16+0{,}2)^{\frac{1}{4}} \approx (16)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\,16^{-\frac{3}{4}} \cdot 0{,}2$, так як $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$.

Звідси $\sqrt[4]{16{,}2} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt[4]{16 \cdot 16 \cdot 16}} = 2 + \frac{0{,}1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 + \frac{0{,}1}{16} = 2{,}00625$.

Диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала першого порядку: $d^2 y = d(dy)$. Взагалі $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Диференціали другого і вищого порядку обчислюються за формулами: $d^2 y = y''(dx)^2$; $d^3 y = y''(dx)^3$; $d^n y = y''(dx)^n$.

Приклад. Обчислити диференціали першого, другого і третього порядку від функції $y = (ax+b)^3$.

Розв'язання. $dy = 3(ax+b)^2 \cdot adx$; $d^2 y = 6(ax+b) \cdot a^2 (dx)^2$; $d^3 y = 6a \cdot a^2 (dx)^3 = 6a^3 (dx)^3$.

6. Основні теореми диференціального числення

Розглянемо теореми, що мають велике теоретичне й прикладне значення.

Теорема Ролля (теорема про корені похідної). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована на інтервалі (a,b) і $f(a)=f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,b)$ в якій $f'(c)=0$.

Доведення. Так як функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона досягає

$\downarrow$

свого найбільшого M й найменшого значення m на цьому відрізку.

Якщо $M=m$, то $f(x)$ стала на $[a,b]$,тоді $f'(x)=0$ у будь-якій точці відрізку і теорема доведена.

Якщо $M\neq m$, то $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці, так як $f(a)=f(b)$.

Нехай $f(c)=M$, де $c\in(a,b)$: $f(c)\geq f(x)$.

Тоді $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$ як при $\Delta x>0$ так і при $\Delta x<0$.

Отже $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$, коли $\Delta x>0$,

$\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$, коли $\Delta x<0$.

Перейдемо до границі при $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leq 0,\text{ коли } \Delta x>0;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geq 0,\text{ коли } \Delta x<0,$$

а це можливо лише тоді, коли $f'(c)=0$. Геометрично це означає що дотична до графіка $y=f(x)$ у точці c паралельна осі абсцис.

Якщо ж $f(a)=f(b)=0$, то це означає, що між двома коренями функції існує хоча б один корінь похідної. ■

Теорема Коші. (про відношення приросту двох функцій). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, диференційовані на інтервалі (a,b), причому $\varphi'(x)$ ніде не обертається у нуль, то знайдеться така точка $c\in(a,b)$, що $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Доведення. Зауважимо, що $f(b)-f(a)\neq 0$, так як якщо $f(b)-f(a)=0$, то за теоремою Ролля знайдеться така точка c, де $\varphi'(c)=0$, а це не так, за умовою теореми.

Визначимо число Q рівністю $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$, складемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)-f(a)-Q[\varphi(x)-\varphi(a)]$. Ця функція задовольняє умовам теореми Ролля: неперервна і диференційована на $[a,b]$, $F(b)=F(a)=0$. Тоді знайдеться хоча б одна точка $x=c\in(a,b)$, така, що $F'(c)=0$. Але $F'(x)=f'(x)-Q\varphi'(x)$, отже $F'(c)=f'(c)-Q\varphi'(c)=0$, звідси $Q=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Тоді $\dfrac{f(a)-f(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, що й треба було довести. ■

Теорема Лагранжа (про скінченні прирости функції). Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційована на відрізку $[a,b]$, то знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,b)$, така що $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Доведення. Теорема Лагранжа є частковим випадком теореми Коші. Дійсно, поклавши $\varphi(x)=x$, знаходимо $\varphi(b)-\varphi(a)=b-a$, $\varphi'(x)=1$, $\varphi'(c)=1$. Тоді з формули $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, або $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, що й треба було довести. ■

Геометрично це означає, що на дузі графіка функції $y = f(x)$ знайдеться точка C між A і B, у якій дотична паралельна хорді, яка з'єднує точки A і B (рис. 15).

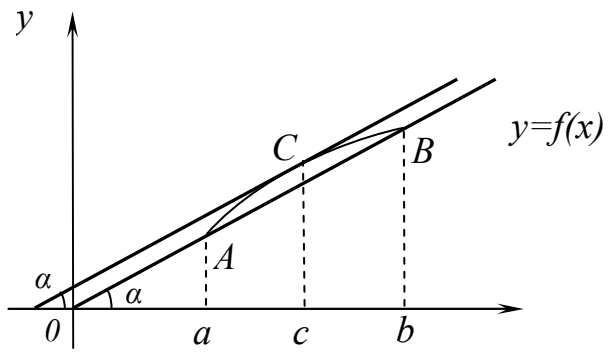


Рис. 15

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані у ε-околі точки x_0 і $\varphi'(x) \neq 0$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, тобто частка у точці $x = x_0$ представляє собою невизначеність виду $\frac{0}{0}$, або $\frac{\infty}{\infty}$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, при умові, що існує границя відношення похідних. Доведення спирається на доведення теореми Коші при умові, що $x \neq a$, $x_0 \in (a, x)$ і $f(a) = \varphi(a) = 0$. Тоді $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$.

Якщо частка $\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$ у точці $x = x_0$ також є невизначеність виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ і похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють відповідним умовам, то переходимо до відношення других похідних і так далі.

У випадку невизначеностей виду $0 \cdot \infty$ або $\infty \cdot \infty$ треба провести алгебраїчні перетворення.

Наприклад. $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ або $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$.

У випадку невизначеностей виду 0^0, ∞^0, 1^∞ треба прологарифмувати дану функцію і знайти границю її логарифма, або скористатися наступною таблицею:

a) $\infty^0 = e^{\ln \infty^0} = e^{0\cdot \ln \infty} = e^{0\cdot\infty} = e^{\frac{0}{1/\infty}} = e^{\frac{0}{0}}$;

b) $0^0 = e^{\ln 0^0} = e^{0\cdot \ln 0} = e^{0\cdot\infty} = e^{\frac{0}{1/\infty}} = e^{\frac{0}{0}}$;

c) $1^\infty = e^{\ln 1^\infty} = e^{\infty\cdot \ln 1} = e^{\infty\cdot 0} = e^{\frac{0}{1/\infty}} = e^{\frac{0}{0}}$.

Розглянемо приклади.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-tgx}{2x^3} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{6x^2} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}}{12x} = -\dfrac{1}{6}$.

Приклад.

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{1}{e^x-e^a}e^x} = e^{-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = e^{-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x}{1} = 1.$$

Приклад $\|\infty-\infty\|$**.**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x + (x-1)\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left\|0^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} = e^0 = 1.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} = \left\|e^{\frac{0}{0}}\right\| = e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2}{2x}} =$

$$= \left\|\begin{matrix}\sin 2x \sim 2x \\ cos 2x \underset{x\to 0}{\to} 1\end{matrix}\right\| = e^{-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = e^{-6}.$$

7. Застосування похідної

Умови монотонності функції. Екстремуми

Функція $f(x)$ називається зростаючою у точці x_0, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

Функція $f(x)$ називається спадаючою у точці x_0, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h).$$

Функція $f(x)$ називається зростаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь яких двох точок x_1 та x_2, що належать (a,b), за умови $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $f(x)$ називається спадаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь яких двох точок x_1 та x_2, що належать (a,b), за умови $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Ознаки зростання та спаду функцій

1) Якщо $f'(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ зростає у точці x_0.
2) Якщо $f'(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ спадає у точці x_0.

Значення $f(x_0)$ називається максимумом функції $f(x)$, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) < f(x_0) \text{ та } f(x_0 + h) < f(x_0).$$

Точка x_0, у цьому випадку, має назву точки максимуму функції.

Значення $f(x_0)$ називається мінімумом функції $f(x)$, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) > f(x_0) \text{ та } f(x_0 + h) > f(x_0).$$

Точка x_0, у цьому випадку, має назву точки мінімуму функції.

Максимум і мінімум функції називаються екстремумами функції, а точка максимуму або мінімуму – точкою її екстремуму.

Необхідна умова існування екстремума

Теорема. Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має у точці x_0 екстремум, то, її похідна у цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$, або не існує.

Доведення цієї теореми спирається на теорему Ролля.

Точка x_0 у якій $f'(x_0) = 0$ має назву стаціонарної точки.

Точки у яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує мають назву критичних точок першого роду. Не кожна критична точка є точкою екстремуму. Розглянемо достатні умови екстремуму.

Перша умова.

Теорема. Якщо неперервна функція $y = f(x)$ диференційована у ε-околі критичної точки x_0 (крім, може бути, самої цієї точки) при переході через цю точку зліва направо $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то функція $f(x)$ у точці x_0 має максимум, а якщо з мінуса на плюс, то функція $f(x)$ у точці x_0 має мінімум.

Доведення. Розглянемо ε-окіл точки x_0. Нехай виконуються умови:

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ і $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Тоді функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ і спадає на інтервалі $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Отже значення функції $f(x)$ у точці x_0 є найбільшим на інтервалі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, тобто $f(x) < f(x_0)$ для усіх $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \bigcup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, а це й означає, що точка x_0 – точка максимуму функції.

Графічно інтерпретація доведення теореми представлена на рис. 16.

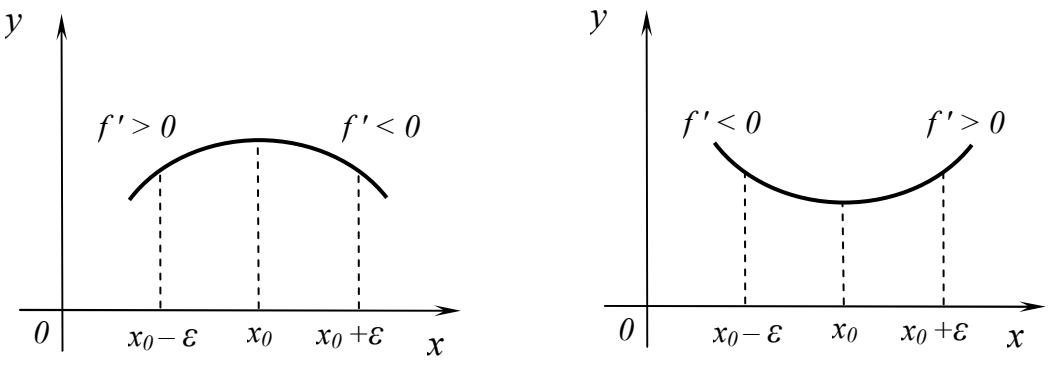


Рис. 16

Аналогічно доведення теореми у випадку, коли $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ і $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. ■

Якщо при переході через критичну точку перша похідна не змінює знак, то екстремуму у цій точці функція не має.

Друга умова.

Теорема. Якщо у точці x_0 перша похідна дорівнює нулю $(f'(x_0) = 0)$, а друга похідна існує і не дорівнює нулю $(f''(x_0) \neq 0)$, то якщо $(f''(x_0) < 0)$, функція $f(x)$ у точці x_0 має максимум, а якщо $f''(x_0) > 0$, то мінімум.

Доведення. Нехай для визначеності $f''(x_0) > 0$.

$\Downarrow$

Так як $f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$,

то $\dfrac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ у ε - околі точки x_0.

Якщо $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, а якщо $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$

А це означає, що при переході через точку x_0 перша похідна змінює знак з мінуса на плюс. Тоді за попередньою теоремою x_0 – є точка мінімуму. Якщо ж $f''(x_0) < 0$, доведення аналогічне і в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум. ■

Опуклість та угнутість графіка функції. Точка перегину

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим на інтервалі (a,b), якщо він розташований нижче дотичної, що проведена у будь якій точці цього інтервалу (рис. 17).

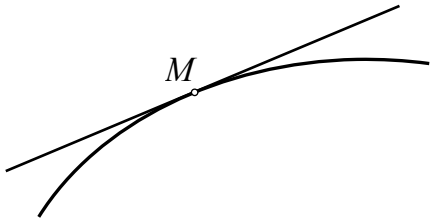


Рис. 17

Графік функції $y = f(x)$ називається угнутим на інтервалі (a,b), якщо він розташований вище дотичної, що проведена у будь якій точці цього інтервалу (рис. 18).

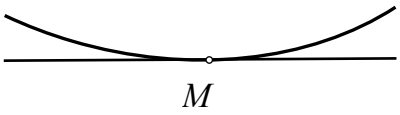


Рис. 18

Точка P графіка функції, що відділяє опуклість від угнутості має назву точки перегину (рис. 19).

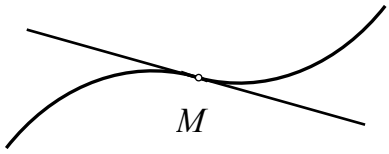


Рис. 19

Якщо x_0 – абсциса точки перегину, то друга похідна функції у цій точці $f''(x_0)$ дорівнює нулю, або не існує. Такі точки мають назву критичних точок другого роду.

Достатня умова опуклості (угнутості) графіка функції така. Якщо $f''(x) < 0$ для усіх $x \in (a,b)$, то графік функції опуклий на інтервалі (a,b); якщо ж $f''(x) > 0$ для усіх $x \in (a,b)$, то графік функції угнутий на інтервалі (a,b).

Достатня умова існування точок перегину. Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, у якій вона дорівнює нулю, або не існує, змінює знак, то точка x_0 – є точкою перегину графіка функції.

Доведення. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$.

$\Downarrow$

Це означає що зліва від точки x_0 графік функції опуклий, а справа – угнутий. Отже точка графіка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину.

Аналогічно доводиться, що якщо $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Якщо ж друга похідна при переході через точку x_0 знак не змінює, – ця точка не є точкою перегину. ■

Асимптоти графіка функції

Пряма L називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки $M(x,y)$ кривої від прямої L прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки вздовж кривої від початку координат (тобто при прямуванні хоча б однієї з координат точки до нескінченності).

Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існують границі.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right], \text{ або}$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - kx \right]$$

План дослідження і побудови графіка функції

При побудові графіка функції $y = f(x)$ треба з'ясувати його характерні особливості. Зробимо це за планом.

1. Область визначення функції $D\{y\}$; область існування $E\{y\}$; нулі функції: $x = 0$, $y = 0$; (точки перетину з осями координат), характерні точки, інтервали знакопостійності, точки розриву.
2. Парність, непарність, періодичність функції. Якщо функція не обладає властивостями парності, вона має назву функції загального вигляду.
3. y' Інтервали зростання та спаду (інтервали монотонності) функції. Екстремуми.
4. y'' Інтервали опуклості та угнутості функції. Точки перегину.
5. Асимптоти: вертикальна $|$; горизонтальна $-$; похила $/$.
6. Побудова графіка функції.

Приклад. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції $D\{y\}$: $(x-1)^2 \neq 0$, $x \neq 1$.

Область існування функції $E\{y\}$: $y \in (-\infty; +\infty)$.

$x = 1$ точка розриву другого роду $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{x^3}{2(x-1)^2} = \infty$,

звідси $x = 1$ вертикальна асимптота.

Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Знаменник функції завжди додатний, за винятком точки $x = 1$. Отже якщо $x > 0$, то й $y > 0$; $x < 0$, то й $y < 0$.

2. Оскільки область визначення не симетрична відносно нуля, то функція загального виду. Перевіримо цей факт. $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2(-x-1)^2} = -\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

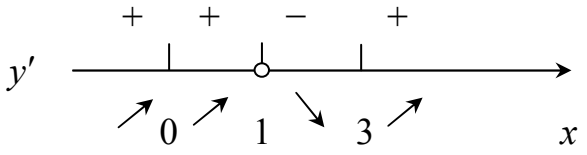
Отже $y(-x) \neq y(x)$ і $y(-x) \neq -y(x)$.

3. Для визначення інтервалів монотонності і екстремумів, знайдемо першу похідну, розглянемо точки, де вона дорівнює нулю і не існує, – критичні точки першого роду.

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{2(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{2(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3},$$

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3} = 0,$$

$x^2 = 0$, x=0, $x - 3$=0, x= 3, $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$.

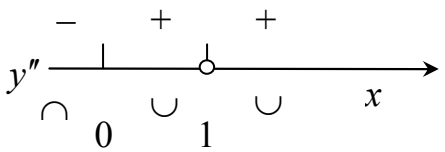


Таким чином функція зростає при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (3;+\infty)$ і спадає при $x \in (1;3)$. Екстремуму, а саме мінімуму функція досягає при $x = 3$.

$$y_{min}(3) = \frac{27}{2 \cdot 4} = \frac{27}{8}.$$

4. Для визначення інтервалів опуклості та угнутості і точок перегину, знайдемо другу похідну і розглянемо критичні точки другого роду.

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^3(3x^2-6x) - (x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{3x}{(x-1)^4} = 0, \quad x = 0, \quad x \neq 1.$$



Отже при $x \in (-\infty;0)$ графік опуклий, а при $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$ графік угнутий. $x = 0$ – точка перегину.

5. Асимптоти. Вертикальну (|) ми знайшли – це $x = 1$.

Розглянемо поведінку функції при x прямує до нескінченності.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = +\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = -\infty,$$

Отже горизонтальних асимптот (-) немає.

Знайдемо похилі асимптоти (/) $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}x\right) \left|\infty - \infty\right| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{2(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1.$$

Таким чином $y = \frac{1}{2}x + 1$ похила асимптота.

Тепер будуємо графік функції (рис. 20).

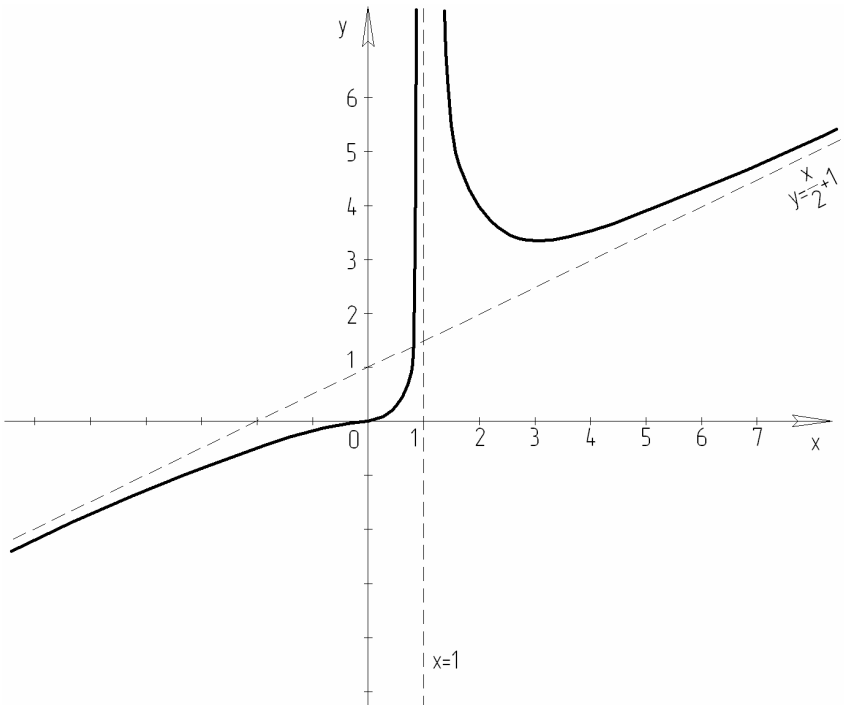


Рис. 20

Найбільше і найменше значення функції на відрізку. Задачі на екстремум

Для знаходження найбільшого і найменшого значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ треба із значень функції на краях відрізку і в критичних точках першого роду на інтервалі (a,b) відібрати найбільше й найменше.

Приклад. Знайти найбільше й найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ на відрізку $[-1;2]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, $6x(x-1) = 0$.

Звідси $x = 0$ і $x = 1$.

Функція має дві стаціонарні точки на інтервалі $(-1;2)$. Знайдемо значення функції в них. $f(0) = 4$; $f(1) = 3$.

Тепер знайдемо значення функції на границях $f(-1) = -1$; $f(2) = 8$.

Із цих чотирьох точок оберемо найбільше M і найменше m.

Бачимо, що найбільше значення M функція досягає на правій границі у точці $x = 2$: $M = f(2) = 8$, а найменшого m – у точці $x = -1$, на лівій границі інтервалу $m = f(-1) = -1$.

Існує багато задач, стосовно геометричних і фізичних об'єктів, що розв'язуються за допомогою теорії екстремумів.

Наприклад. Існує дві функціонально залежних величини і треба з'ясувати при якому, або яких значеннях однієї з них, друга приймає найбільше або найменше значення. Для розв'язання треба встановити цю функціональну залежність і дослідити функцію на найбільше і найменше значення.

Приклад. З'ясувати розміри циліндра, який при заданому об'ємі V мав би мінімальну повну поверхню S.

Розв'язання. Позначимо за R радіус основи циліндра, а за H його висоту.

Тоді повна поверхня буде дорівнювати $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$.

Виходячи з умови виразимо H.

$V = \pi R^2 H$. Звідси $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Тоді $S = 2\left(\pi R^2 + \dfrac{V}{R}\right)$, де $R \in (0, \infty)$.

Знайдемо найменше значення функції $S = S(R)$ на інтервалі $(0; \infty)$.

$\dfrac{dS}{dR} = 2(2\pi R - \dfrac{V}{R^2})$; $2\pi R - \dfrac{V}{R^2} = 0$.

Тоді $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Знайдемо $\dfrac{d^2 S}{dR^2} = 2\left(2\pi + \dfrac{2V}{R^3}\right) > 0$.

Отже функція S матиме мінімальне значення якщо $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Зауважимо, що якщо $R \to 0$ то $S \to \infty$, і якщо $R \to \infty$, то $S \to \infty$. Тоді $H = \dfrac{V}{\pi R^2} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.3.
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

1. Визначники і їх властивості

Визначником другого порядку, що відповідає таблиці елементів $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}$ називається число Δ_2, яке обчислюється за правилом

$$\Delta_2 = det\ A = \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{array}{c} II \\ I \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

де I – головна діагональ,

II – другорядна діагональ,

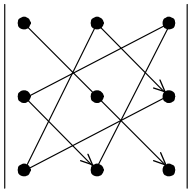
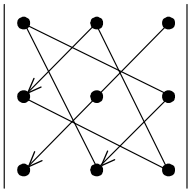
$a_{ij(i,j=1,2)}$ – елементи визначника,

i – номер строки або рядка,

j – номер стовпця.

Визначник другого порядку може позначатися так: $\Delta_2 = det\ A = \left| a_{ij} \right|$, ($det$ – від слова «детермінант»), де $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Визначник третього порядку, що відповідає таблиці елементів $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число $\Delta_3 = det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, яке може обчислюватись, наприклад, за формулою Саррюса, або зірки

$det\ A =$  $-$  , отже

$$det\ A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Правило обчислення визначника n – ного порядку базується на таких поняттях, як мінор M_{ij} та алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij}.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n – ного порядку називається визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з даного шляхом викреслення i-ї строки та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Зазначимо, що алгебраїчне доповнення відрізняється від мінора на знак. Таблиця знаків алгебраїчних доповнень така $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

Визначник n – ного порядку дорівнює сумі n добутків елементів i-ї строки або j-го стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто $\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.

Це правило має назву обчислення визначника шляхом розкладання по елементах i-ї строки або j-го стовпця.

Отже,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{13} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Це обчислення визначника третього порядку шляхом розкладання його по елементах першого рядка (строки) та по елементах першого стовпця. Про знаки алгебраїчних доповнень кажуть, що вони розташовані у шаховому порядку.

Відзначимо, що сума добутків строки або стовпця на алгебраїчний елемент іншої строки або стовпця дорівнює нулю.

Властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо строки його замінити стовпцями, а стовпці відповідними строками.
2. Загальний множник елементів рядка або стовпця можна винести за знак визначника.
3. Якщо елементи одного рядка (стовпця) дорівнюють або пропорційні відповідним елементам іншого рідка (стовпця), то визначник дорівнює нулю.
4. При перестановці двох рядків (стовпців), визначник змінює знак на протилежний.
5. Визначник, що має рядок (стовпець), який складається тільки з нулів, дорівнює нулю.
6. Визначник не змінюється, якщо до елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й теж число.

Визначники можна обчислювати, отримуючи за шостою властивістю попередньо нулі у рядку або стовпці.

Приклад. Обчислити визначник третього порядку:

а) отримуючи попередньо нулі у першому стовпці;

б) розкладаючи його по першому рядку;

в) за формулою Саррюса.

Розв'язання. Позначимо рядки римськими цифрами.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II + I \cdot (-2) = \\ III + I \cdot 3 \end{matrix} .$$

На цьому етапі можна зупинитися і обчислити визначник, розкладаючи його за елементами першого стовпця. Тоді отримаємо:

$$\Delta_3 = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 10 - (-4) = 14 .$$

Якщо ж ми отримаємо нулі під головною діагоналлю, то визначник буде дорівнювати добутку елементів головної діагоналі:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}_{III + II \cdot (-2)} = 1 \cdot 1 \cdot 14 = 14.$$

Обчислення Δ_3 шляхом розкладання за елементами *I*-го рядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(5-(-16)) - 2(2-(-12) + 3(-8-(-15)) = 21 - 28 + 21 = 14.$$

Обчислення Δ_3 за формулою Саррюса:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) \cdot 3 -$$

$$-(-3) \cdot 5 \cdot 3 - (-4) \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 5 - 21 - 24 + 45 + 16 - 4 = 14.$$

Для обчислення визначників четвертого і вищих порядків, треба попередньо отримати нулі у будь-якому рядку або стовпці, а потім розкласти визначник по ньому.

2. Матриці й дії над ними

При переході від однієї системи координат до іншої ми маємо змогу виразити координати точки в одній системі координат через координати точки в іншій за допомогою лінійного перетворення:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'; \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'; \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases}$$

Таблиця $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається матрицею цього лінійного перетворення, а визначник $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ визначником лінійного перетворення.

Якщо $\det A \neq 0$ матриця називається не виродженою або не особою, якщо $\det A = 0$, – виродженою або особою. Числа a_{ij} називаються елементами матриці, де i – номер рядка, а j – номер стовпця, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Якщо $m = n$ матриця називається квадратною, якщо $m \neq n$ – прямокутною.

Дві матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ дорівнюють одна одній тоді і тільки тоді коли є рівними їх відповідні елементи, тобто $a_{ij} = b_{ij} \quad (i, j = 1,2,3)$.

Сумою (різницею) двох матриць називається матриця, що визначається рівністю $A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$.

Добутком числа m на матрицю A називається матриця $m\,A = \begin{pmatrix} m\,a_{11} & m\,a_{12} & m\,a_{13} \\ m\,a_{21} & m\,a_{22} & m\,a_{23} \\ m\,a_{31} & m\,a_{32} & m\,a_{33} \end{pmatrix}$.

Добуток двох матриць A і B визначається рівністю

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j3} \end{pmatrix},$$

тобто перший рядок матриці A формує перший рядок матриці-добутку шляхом множення поелементно на перший, другий та третій стовпці матриці B відповідно і так далі. Елемент матриці-добутку, що стоїть у i-тому рядку і j-му стовпці дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-того рядка матриці A і j-го стовпця матриці B.

У загальному вигляді $AB \neq BA$, тобто операція множення матриць не комутативна.

Визначник добутку двох матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Нульова матриця – це матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

сума цієї матриці і будь якої матриці A дорівнює матриці A: $A + 0 = A$.

Одиничною матрицею називається матриця , у якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а усі інші нулю.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $AE = EA = A$. Будь яка невироджена квадратна матриця A має обернену матрицю A^{-1}, таку, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, де $A_{i,j}$ - алгебраїчне доповнення елементів $a_{i,j}$ у визначнику матриці A.

На практиці краще користуватися формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix},$$ де $A_{i,j}^T$ - алгебраїчне доповнення елементів $a_{i,j}$ у транспонованому визначнику матриці A.

Приклад. Знайти обернену матрицю A^{-1}. Зробити перевірку.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку обчислимо визначник матриці $\det A=\Delta$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-4+\cancel{8}+9-\cancel{8}-3+12=14$$

Знайдемо транспоновану матрицю

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & 7 & 0\\ 10 & -6 & 2\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7\cdot1+7\cdot3+0\cdot4 & -7\cdot2+ & +7\cdot2+0\cdot3 & -7\cdot1+7\cdot1+0\cdot(-2)\\ 10\cdot1-6\cdot3+2\cdot4 & 10\cdot2- & -6\cdot2+2\cdot3 & 10\cdot1-6\cdot1+2\cdot(-2)\\ 1\cdot1+5\cdot3-4\cdot4 & 1\cdot2+ & +5\cdot2-4\cdot3 & 1\cdot1+5\cdot1+4\cdot2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Зауважимо, що множити можна квадратні матриці однакового розміру або прямокутні матриці , якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. У добутку отримаємо матрицю з числом рядків першої і числом стовпців другої матриці.

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad \text{і}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\cdot1+2(-1)+3\cdot2 & 1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1\\ -1\cdot1+0(-1)+2\cdot2 & (-1)\cdot3+0\cdot2+2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Рангом матриці A ($rangA$ або $r(A)$) звуть найвищий порядок мінору матриці A, відмінного від нуля. Таких мінорів може бути декілька. Будь який мінор матриці що не дорівнює нулю, порядок якого дорівнює рангу матриці має назву базисного.

Матриці A і B звуть еквівалентними ($A\sim B$) якщо $r(A)=r(B)$.

Ранг матриці не змінюється від елементарних перетворень, під якими розуміють:

1) заміну рядків стовпцями, а стовпців відповідними рядками;

2) перестановку рядків або стовпців;

3) викреслювання рядка (стовпця), усі елементи якого дорівнюють нулю;

4) множення будь якого рядка (стовпця) на число;

5) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), домножених на відповідне число.

Приклад. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Елемент $a_{11} = 1$. Отже ранг матриці A не менший від одиниці. Далі беремо елементи, що стоять на перетині перших двох рядків і перших двох стовпців.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1.$$

Отже ранг матриці A принаймні дорівнює двом. Мінором наступного порядку буде визначник матриці A. Обчислимо його.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 + 0 - 6 - 2 - 0 = -17.$$

Отже ранг матриці A дорівнює трьом $r(A) = 3$.

Цей спосіб пошуку рангу матриці A має назву «спосіб обвідних мінорів».

За допомогою елементарних перетворень можна знаходити ранги матриць більшого розміру. Для цього початкову матрицю зводять до вигляду, у якому усі елементи дорівнюють нулям або одиницям. Кількість одиниць і визначить ранг матриці.

Приклад. Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Поміняємо перший і другий стовпці місцями

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3&2\\0&-1&2&1\\4&5&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&2&1\\5&4&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&5&3\\0&-6&-15&-9\end{pmatrix}\begin{matrix}II+I\\III+I(-5)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&5&3\\0&-2&-5&-3\end{pmatrix}\sim\underset{II+I(-2)\ III+I(-3)\ IV+I(-2)}{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&5&3\\0&-2&-5&-3\end{pmatrix}}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&5&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{III+II}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\underset{III-II\ \ IV-II}{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}.$$ Отже $r(A)=2$.

3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\----------\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

де $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ – невідомі, a_{ij} – коефіцієнти системи,

$b_1,\ b_2,\ldots,b_n$ – вільні члени.

Розв'язком системи називається сукупність n чисел, які при підстановці у систему замість невідомих перетворюють кожне рівняння системи у тотожність.

Система, яка має хоча б один розв'язок називається сумісною і несумісною, коли жодного розв'язка нема.

Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок і невизначеною, якщо розв'язків більше ніж один.

Система називається однорідною, якщо усі вільні члени дорівнюють нулю і неоднорідною, якщо хоча б одне з b_i відмінно від нуля.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ---------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Такі системи називаються крамерівськими і можуть бути розв'язані за методом Крамера.

Визначником Δ системи називається визначник, що складається з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначником Δ_k називається визначник, отриманий з визначника Δ заміною k-го стовпця, стовпцем вільних членів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} ... a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} ... a_{1n} \\ a_{21} ... a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} ... a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{n1} ... a_{n,k-1} & b_1 & a_{n,k+1} ... a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник Δ крамерівської системи відрізняється від нуля, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \dots\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Якщо ж $\Delta = 0$, то маємо два випадки:

а) система несумісна, коли хоча б один із $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n \neq 0$;

б) система невизначена, коли усі $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n = 0$.

Розглядаючи однорідну систему рівнянь, зазначимо, що вона завжди сумісна, бо завжди існує тотожний розв'язок: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Таким чином, якщо визначник Δ однорідної системи відрізняється від нуля ($\Delta \neq 0$), то система має єдиний нульовий розв'язок. Якщо ж $\Delta = 0$, матимемо нескінченну кількість розв'язків.

Зауважимо, що метод Крамера доцільно використовувати для розв'язання систем другого або третього порядку у зв'язку з трудомісткістю обчислення визначників.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + \cancel{8} + 9 - \cancel{8} - 3 + 12 = 14;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\left[-16 + \cancel{4} + 15 - \cancel{4} - 12 + 20\right] = 14;$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\left[\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 4\left[-5 - 1 - 4(-3 - 2) + 3 - 10\right] = 4\left[-6 + 20 - 7\right] = 28;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 80 + 72 - 64 - 30 - 24 = 42;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, у перше рівняння системи.

$1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8$ тобто $8 = 8$. Отримали тотожність.

Приклад. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} x+y+2z=0, \\ x+3y+z=0, \\ 3x+y+z=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+3+2-18-1-1=-12 \neq 0 .$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $x=y=z=0$.

Приклад. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+2y+9z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12+18-1+2-27-4=0 .$$

Отже система невизначена і одне з рівнянь є наслідком двох інших. Виразимо невідомі x та y через z. Розглянемо перше і третє рівняння:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3x+2y=z \\ x+y=-2z \end{cases} \Bigg| \; (-2)$$

$$x+0y=5z$$ Отже $x=5z$;

Із другого рівняння $y=-2z-5z=-7z$;

Надаючи z довільні значення, отримаємо нескінченну множину розв'язків: $x=5z$; $y=-7z$; $z=z$; або так: $x=5k$; $y=-7k$; $z=k$; $k \in R$.

Розглянемо матричний метод розв'язання системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Зауважимо, що цей метод доцільно

використовувати для розв'язання системи не дуже високого порядку, скажімо, до третього, включно.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Запишемо систему у матричній формі.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{або } AX = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – невироджена матриця системи, тобто $\det A = \Delta \neq 0$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів.

Розв'язуючи матричне рівняння $AX = B$, отримаємо $X = A^{-1} \cdot B$. Отже

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}^T b_1 & + & A_{12}^T b_2 & + & A_{13}^T b_3 \\ A_{21}^T b_1 & + & A_{22}^T b_2 & + & A_{23}^T b_3 \\ A_{31}^T b_1 & + & A_{32}^T b_2 & + & A_{33}^T b_3 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему у матричній формі. $AX = B$ звідки $X = A^{-1} \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо визначник Δ, транспоновану A^T і обернену A^{-1} матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + \cancel{8} + 9 - \cancel{8} - 3 + 12 = 14;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 \cdot 8 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 4 \\ 10 \cdot 8 - 6 \cdot 10 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 8 + 5 \cdot 10 - 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Перевірка. Підставимо отримані значення наприклад, у перше рівняння системи $1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8$; $8 = 8$. Отримали тотожність.

Найбільш ефективним і універсальним методом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, який базується на послідовному виключенні невідомих. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ---------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

На першому етапі (прямий хід) система зводиться до ступінчастого виду, шляхом елементарних перетворень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ---------- \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + ... + a_{kn}x_n = b_n \end{cases},$$

де $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$. Коефіцієнти a_{ii} називаються головними елементами системи. На другому етапі (зворотній хід) послідовно визначаємо невідомі зі ступінчастої системи.

Тепер детальніше. Прямий хід.

На перше місце ставимо рівняння, у якого коефіцієнт при першому невідомому відрізняється від нуля. Нехай $a_{11} \ne 0$.

Перетворимо систему таким чином, щоб виключити невідомі x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Для чого помножимо перше рівняння на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ і почленно додамо до другого. Далі помножимо перше рівняння на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ і почленно додамо до третього. Продовжуючи цей процес, отримаємо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ ---------- \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases},$$

де $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(ij = \overline{2,m})$ - нові значення коефіцієнтів і правих частин, отриманих після першого шагу.

Далі, враховуючи $a_{22}^{(1)} \neq 0$ головним елементом, виключимо невідоме x_2 з усіх рівнянь системи, крім першого і другого. І так продовжуємо цей процес, доки це можливо.

Якщо у процесі зведення системи до ступінчастого вигляду, з'являються нульові рівняння, тобто ($0 = 0$) їх відкинемо, а якщо рівняння виду $0 = b_i$, де $b_i \neq 0$ – це буде означати несумісність системи.

Зворотній хід. Розв'язання ступінчастої системи. З останнього рівняння виразимо невідоме x_k через невідомі $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Потім з передостаннього рівняння, знаючи x_k, виразимо x_{k-1} через $x_{k+1}, \ldots, x_n$ і так далі знайдемо $x_{k-1}, \ldots, x_1$. Надаючи вільним невідомим $x_{k+1}, \ldots, x_n$ довільні значення, отримаємо нескінченну множину розв'язків системи.

Якщо ж ступінчаста система буде трикутною, тобто $k = n$, то ісходна система матиме єдиний розв'язок. Тоді з останнього рівняння знайдемо x_n, з передостаннього x_{n-1} і так далі, – з першого x_1.

На практиці зручніше працювати не з системою, а з її розширеною матрицею, виконуючи елементарні перетворення з її рядками. Зручніше зробити коефіцієнт при першому невідомому у першому рівнянні рівним одиниці, для чого можна переставити рядки, а може й стовпці розширеної матриці, або ж поділити його на $a_{11} \neq 1$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}.$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи і проведемо елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} II \\ I \\ III \\ VI \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I(-2) \\ III + I(-3) \\ IV + I(-7) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV + II(-2). \end{array}$$

Таким чином ми отримали ступінчасту систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}.$$

Виразимо x_1 та x_2 через x_3 та x_4:

$$\begin{array}{l} x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4 \\ x_1 = 2 + x_2 + 5x_3 = 2 - 3 - 13x_3 + 5x_4 + 5x_3 \end{array},$$

отже загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 5x_4 - 1 \\ x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3 \end{cases}$

Надаючи x_3 та x_4 довільні значення, отримаємо нескінченну множину часткових розв'язків.

Наприклад. Якщо $x_3 = 0$; $x_4 = 0$, то $x_1 = -1$; $x_2 = -3$.

Якщо $x_3 = 1$; $x_4 = 1$, то $x_1 = -4$; $x_2 = -11$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}.$$

Розв'язання. Проведемо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II + I(-2) \\ III + I(-3) \\ IV + I(-5) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + I(2) \\ IV + II(6) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \\ IV + III(-3) \end{array} .$$

Бачимо, що четверте рівняння є слідством перших трьох. Отримаємо систему.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Звідси, випроваджуючи зворотний хід, матимемо $x_3 = 1$; $x_2 = 1$; $x_1 = 1$.

Відповідь на питання про існування розв'язків системи m лінійних рівнянь з n невідомими дає теорема Кронекера-Капеллі, яку приймемо без доведення.

Теорема. Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці системи.

А відповідь про кількість розв'язків сумісної системи дають наступні теореми.

Теорема. Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Теорема. Якщо ранг сумісної системи менше кількості невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків.

4. Вектори

Визначення. Вектор – це направлений відрізок. Позначають вектор двома буквами зі стрілкою $\overrightarrow{AB}$, де точка A – початок вектору, точка B – кінець, або однією маленькою буквою $\vec{a}$ зі стрілкою, або виділяють жирним шрифтом.

Вільний вектор це вектор який без зміни довжини й напрямку може бути перенесений у будь-яку точку простору.

Вектор можна представити у вигляді розкладання по осях координат або по ортах:

$$\boxed{\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}},$$

де a_x, a_y, a_k – проекції вектора на відповідні осі координат; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори або орти.

Вектори $a_x \vec{i}$, $a_y \vec{j}$, $a_z \vec{k}$ мають назви складових або компоненти вектора по осях координат.

Довжина вектора або модуль позначається $|\vec{a}|$ і дорівнює

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Напрям вектора $\vec{a}$ визначається кутами α, β, γ з осями координат. Косинуси цих кутів (так звані напрямні косинуси) обчислюють за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Напрямні косинуси вектора зв’язані співвідношенням

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Графічно два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ додаються і віднімаються за правилом паралелограма (рис. 21).

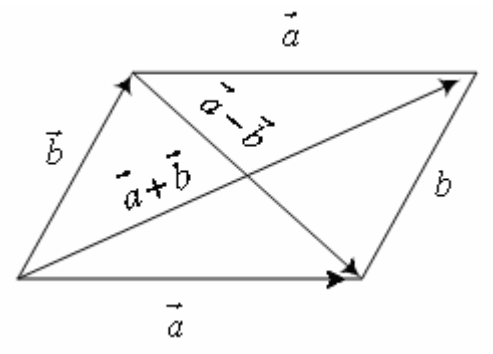


Рис. 21

Сума кількох векторів визначається за правилом багатокутника (рис. 22).

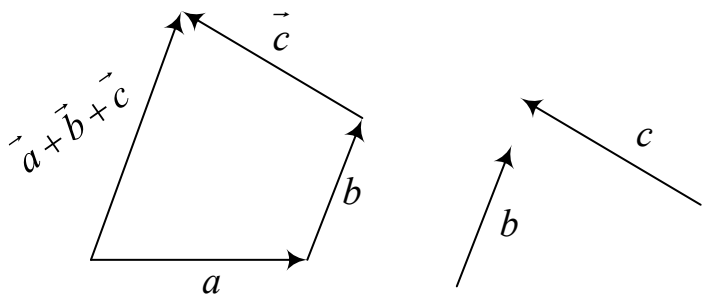


Рис. 22

Добуток вектора $\vec{a}$ на скалярний множник m визначається за формулою

$$\boxed{m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}\,.}$$

Якщо $m > 0$, то вектори $\vec{a}$ і $m\vec{a}$ паралельні (колінеарні) і мають один і той же напрямок.

Якщо $m < 0$, то вектори $\vec{a}$ і $m\vec{a}$ протилежні. Одиничний вектор $\overrightarrow{a_0}$, того ж напрямку, що і $\vec{a}$ дорівнює $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, де $O(0,0,0)$, а $M(x,y,z)$ має назву радіус-вектор точки M, позначається $\vec{r}(M)$ або просто $\vec{r}$ і дорівнює $\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ може бути записаний у вигляді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$,

де $\overrightarrow{r_B}$ – радіус-вектор точки B, а $\overrightarrow{r_A}$ – радіус-вектор точки A.

Приклад. Знайти проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ на осі координат і його напрямні косинуси якщо $A(0;0;1)$; $B(3;2;1)$; $C(4;6;5)$; $D(1;6;3)$.

$$\overrightarrow{AB} = (3-0)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = (1-4)\vec{i} + (6-6)\vec{j} + (3-5)\vec{k} = -3\vec{i} - 0\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (3-3)\vec{i} + (2+0)\vec{j} + (0-2)\vec{k} = 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Отже $a_x = 0$; $a_y = 2$; $a_z = -2$.

Знайдемо модуль вектора $|\vec{a}|$: $|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

Напрямні косинуси: $\cos\alpha = \dfrac{0}{2\sqrt{2}} = 0$; $\cos\beta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\gamma = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Перевіримо. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; $0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$; $1 = 1$.

Скалярний добуток векторів. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута φ між ними

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}, \text{ де } \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Скалярний добуток можна визначити й так:

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b} = |\vec{a}| \cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}},$$

так як $|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = Пр_{\vec{b}}\vec{a}$ (рис. 23), а $|\vec{b}| \cdot \cos\varphi = Пр_{\vec{a}}\vec{b}$.

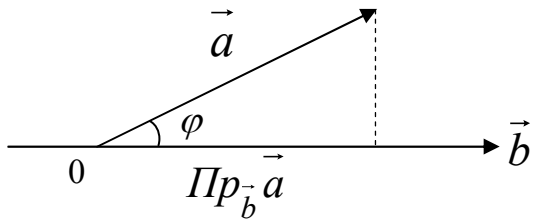


Рис. 23

Таким чином, скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію другого на напрямок першого.

Властивості скалярного добутку:

1) комутативність $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$**:**

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, а $\left(\vec{b},\vec{a}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$.

Так як $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$ як добуток чисел і $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$. ■

2) асоціативність відносно множника на число $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a},\vec{b})$:

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot Пр_{\vec{b}}\lambda\vec{a}=\lambda\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a},\vec{b})$. ■

3) операції додавання і скалярного множення векторів зв'язані дистрибутивним законом множення відносно додавання (розподільча властивість):

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$**.**

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot(Пр_{\vec{a}}\vec{b}+Пр_{\vec{a}}\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}+\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{c}=$

$=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$**.** ■

4) скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини:

$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|^2$. ■

звідси $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$.

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\left|\vec{a}\right|=0$, або $\left|\vec{b}\right|=0$, або $\left|\vec{a}\right|\perp\left|\vec{b}\right|$**.**

Звідси $\vec{i}\,\vec{j}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\,\vec{i}=0$.

Ураховуючи властивості 4) і 5), якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ та $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то $\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a},\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}.}$$

Звідси умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

З фізичної точки зору скалярний добуток постійної сили $\vec{F}$ та путі $\vec{S}$ є робота $A = \left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cos(\widehat{\vec{F}\,\vec{S}})$.

Приклад. Обчислити $(5\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Розв'язання. $(5\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 5\vec{a}^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{b}\cdot\vec{a} - 3\vec{b}^2 =$

$= 5a^2 - 3b^2 = 20 - 12 = 8$.

Приклад. Знайти одиничний вектор, того ж напряму, що й вектор $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Тоді $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

Перевіримо $\left|\overrightarrow{a_0}\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$.

Векторний добуток векторів. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який позначають $[\vec{a},\vec{b}]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$, є вектор $\vec{c}$ (рис. 24), що визначається такими трьома умовами:

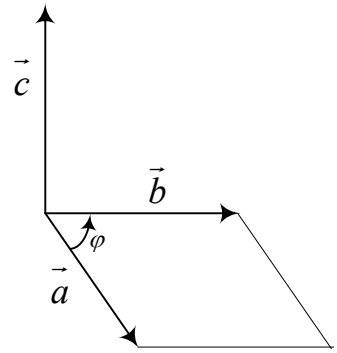


Рис. 24

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний як до $\vec{a}$ так і до $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, що не належать одній площині (не колінеарні), утворюють праву тройку; тобто, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти руху годинникової стрілки і ліву – якщо за рухом годинникової стрілки.

Властивості векторного добутку:

1) зміна місця множників дає протилежний вектор $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ колінеарні, мають однакові модулі (площа паралелограма таж сама), але протилежно спрямовані (трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$ протилежно орієнтовані).

Отже $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

3) асоціативність відносно скалярного множника:
$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.

Нехай $\lambda > 0$, вектор $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ також перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ належать одній площині). Отже вектори $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ і $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ колінеарні і напрямки їх співпадають. Вони мають однакову довжину:

$$\left|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\right| = \lambda\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \lambda\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \text{ і}$$

$$\left|(\lambda\vec{a})\times\vec{b}\right| = \left|\lambda\vec{a}\right|\times\vec{b}\cdot\sin(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}}) = \lambda\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

Звідси $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \lambda\vec{a}\times\vec{b}$.

Доведення при $\lambda < 0$ аналогічне;

3) два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нулю $\vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$.

$\Downarrow$

Якщо $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, то кут між ними дорівнює $0°$ або $180°$. Але тоді $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$. Отже $\vec{a}\times\vec{b} = 0$.

Якщо ж $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, то $\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|\cdot sin(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Але тоді $\varphi = \widehat{\vec{a},\vec{b}} = 0$ або $\varphi = 180°$, тобто $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Зокрема $\vec{i}\times\vec{i} + \vec{j}\times\vec{j} + \vec{k}\times\vec{k} = 0$;

3) векторний добуток має розподільчу властивість: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$.

Векторний добуток векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ обчислюється за формулою:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}.$$

Ця формула перевіряється безпосереднім перемноженням двох векторів.

Звідси встановлення колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{a}\,||\,\vec{b}.$$

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює $S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, а площа трикутника

$$\boxed{S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}\ .$$

Приклад. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}.$$

Тоді $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \frac{49}{2}$ (кв. од.).

Приклад. Обчислити площу паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ і $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 30°$.

Розв'язання. Маємо $(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$

$= -8\vec{a} \times \vec{b}$.

Тоді $S = 8\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin 30° = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4$ (кв. од.).

Мішаний добуток трьох векторів. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Позначається $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Модуль мішаного добутку векторів $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, які відкладені від однієї точки:

$$\boxed{V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}\ .$$

Властивості мішаного добутку:

1) мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо:

а) хоча б один з цих векторів дорівнює нулю;

б) два з векторів паралельні (колінеарні);

в) усі три вектори паралельні одній площині (компланарні);

2) мішаний добуток не зміниться, якщо у ньому змінити місцями знаки векторного і скалярного множення, тобто

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\vec{b}\vec{c}}\ ;$$

3) мішаний добуток не зміниться при круговій перестановці векторів

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;

4) при перестановці будь-яких двох векторів мішаний добуток змінить тільки знак: $\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$; $\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$; $\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Мішаний добуток векторів: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}\ .$$

З властивостей мішаного добутку трьох ненульових векторів випливає необхідна і достатня умова компланарності: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

$\Downarrow$

Припустимо, що це так. Тоді можливо було б побудувати паралелепіпед з об'ємом $V\neq 0$. Але $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm V$, тоді $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\neq 0$ а це суперечить умові $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

Навпаки, нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні. Тоді вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ – перпендикулярний до площини, якій належать (або паралельні) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ і $\vec{d}\perp\vec{c}$.

Звідси $\left(\vec{d}\cdot\vec{c}\right)=0$, тобто $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює

$$\boxed{V_{пар}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}\ .$$

Об'єм трикутної піраміди, що побудована на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює:

$$\boxed{V_{пір}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}\ .$$

Мішаний добуток дає можливість визначити взаємну орієнтацію векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ у просторі. Якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву тройку векторів, а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$, – ліву.

Приклад. Обчислити об'єм піраміди, яка має вершину у точках: $A(1;2;3)$; $B(0;-1;1)$; $C(2;5;2)$; $D(3;0;-2)$. Знайти площу грані ABC і косинус кута BAD.

Розв'язання. Складемо вектори:

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(0-1)\vec{i}+(-1-2)\vec{j}+(1-3)\vec{k}=-\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}=(-1;-3;-2)$;

$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(1;3;-1)$; $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=(2;-2;-5)$.

Знайдемо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & -5\end{vmatrix}=15+6+4+12+2-15=24.$$

Звідси $V_{пір}=\frac{1}{6}\cdot 24=4$ (куб. од.).

Площа грані ABC дорівнює:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\vec{i}\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|9\vec{i}-3\vec{j}+0\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+3^2}=\frac{\sqrt{90}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{10}\ \text{(кв. од.)}.$$

Косинус кута BAD – це косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

Звідси $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}=\dfrac{-2+6+10}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{2^2+2^2+5^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}\sqrt{33}}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{33}}\approx 0{,}651.$

5. Пряма лінія і площина у просторі. Поверхні другого порядку

Площина. Нормальне рівняння площини у векторній формі має вигляд:

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{n}=\rho},$$

де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ радіус-вектор довільної точки $M(x,y,z)$ площини; $\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра до площини, проведений з початку координат; α,β,γ – кути, що утворюються цим перпендикуляром з осями координат; ρ – довжина цього перпендикуляра. Переходячи до координат у скалярному добутку, отримаємо нормальне рівняння площини у координатній формі:

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0},$$

Будь-яке рівняння першого степеня $Ax+By+Cz+D=0$, при умові $A^2+B^2+C^2\neq 0$, задає площину у просторі і має назву загального рівняння площини. Коефіцієнти A,B,C – можна розглядати, як компоненти вектора нормалі $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ до площини.

Для отримання нормального рівняння, треба загальне рівняння площини помножити на нормуючий множник $\mu=\pm\dfrac{1}{N}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак якого обирається з умови $\mu D<0$, тобто знаки μ і D протилежні.

Розглянемо часткові випадки розташування площини $Ax+By+Cz+D=0$, у просторі:

$A = 0$; площина паралельна осі Ox;

$B = 0$; площина паралельна осі Oy;

$C = 0$; площина паралельна осі Oz;

$D = 0$; площина проходить через початок координат;

$A = B = 0$; площина перпендикулярна осі Oz (паралельна площині xOy);

$A = C = 0$; площина перпендикулярна осі Oy (паралельна площині xOz);

$B = C = 0$; площина перпендикулярна осі Ox (паралельна площині yOz);

$A = D = 0$; площина проходить через ось Ox;

$B = D = 0$; площина проходить через ось Oy;

$C = D = 0$; площина проходить через ось Oz;

$A = B = D = 0$; співпадає за площиною xOy ($z = 0$);

$A = C = D = 0$; співпадає за площиною xOz ($y = 0$);

$B = C = D = 0$; співпадає за площиною yOz ($x = 0$);

Якщо у загальному рівнянні площини $D \neq 0$ (тобто площина не проходить через початок координат), то поділивши усі частини рівняння на $-D$, отримаємо рівняння площини у відрізках

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1},$$

де $a = -\frac{D}{A}$; $b = -\frac{D}{B}$; $c = -\frac{D}{C}$ – точки перетину площини з осями Ox, Oy, Oz.

Кут φ між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ визначається як кут між нормалями до цих площин за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}.$$

Звідси умова паралельності двох площин:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}\ .$$

Умова перпендикулярності:

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0}\ .$$

Відстань точки $M(x_0,y_0,z_0)$ від площини $Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\ .$$

Зазначимо, що вираз під знаком модуля буде додатнім, якщо точка $M(x_0,y_0,z_0)$ і початок координат розташовані по різні боки від площини і від'ємним – якщо по один бік.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0,y_0,z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ має вигляд:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}\ .$$

При довільних $A,\ B,\ C$ отримаємо рівняння в'язки площин, що проходять через точку M_0.

Рівняння $\boxed{A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$, при довільному λ задає жмуток площин, що проходять через пряму перетину площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, $M_3(\vec{r}_3)$, де $\vec{r}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{r}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, $\vec{r}_3=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, отримаємо з умови компланарності векторів. $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\vec{r}_2-\vec{r}_1$, $\vec{r}_3-\vec{r}_1$, де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ – радіус-вектор довільної точки M шуканої площини:

$$\boxed{(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}-\vec{r}_2)(\vec{r}-\vec{r}_3)=0}\ ,$$

або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянемо деякі приклади:

Приклад. Скласти нормальне рівняння площини $x+2y-2z+9=0$.

Розв'язання. Знайдемо нормуючий множник $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \pm\dfrac{1}{3}$.

Знак оберемо з умови $\mu D < 0$. Так як $D = 9 > 0$, то $\mu = -\dfrac{1}{3}$.

Тоді нормальне рівняння площини матиме вигляд $-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z - 3 = 0$,

де $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$; $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$; $\rho = 3$ – відстань площини від початку координат.

Приклад. Обчислити відстань точки $M(3;5;-2)$ від площини $2x+2y-z-9=0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для обчислення відстані точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ від площини $Ax+By+Cz+D=0$

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2\cdot 3+2\cdot 5+(-1)(-2)-9|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|6+10+2-9|}{3} = 3.$$

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму перетину площин $4x+y+z-2=0$, $3x+2y-z+3=0$ і точку $M(1;2;3)$.

Розв'язання. Складемо рівняння жмутка площин: $4x+y+z-2+\lambda(3x+2y-z+3)=0$.

Із цього жмутка оберемо площину, яка проходить через точку $M(1;2;3)$.

$4\cdot 1+2+3-2+\lambda(3\cdot 1+2\cdot 2-3+3)=0$, $\quad 7+7\lambda=0$, $\quad \lambda=-1$.

Звідси $4x+y+z-2-(3x+2y-z+3)=0$, $\quad x-y+2z-5=0$.

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;-1;-2)$ та перпендикулярна до площин: $2x-y+z+4=0$ і $x-3y+2z+1=0$.

Розв'язання. За вектор нормалі шуканої площини оберемо вектор перпендикулярний до нормалей даних площини, тобто $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, де $\vec{N}_1=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{N}_2=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$.

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}.$$

Тепер складемо рівняння площини яка проходить через точку M і має вектор нормалі $\overrightarrow{N}$: $(x-1)+(-1)(y+1)+(-3)(z+2)=0$ або $x-y-3z-8=0$.

Приклад. Із точки $M(2;4;3)$ проведені перпендикуляри до осей координат. Скласти рівняння площини, яка проходить через основи цих перпендикулярів.

Розв'язання. Основи цих перпендикулярів і будуть координатами точки M. Тобто необхідно скласти рівняння площини яка відсікає на осях координат відрізки відповідно 2, 4 і 3. Скористуємось рівнянням площини у відрізках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Тоді $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$ і є шукане рівняння тут $a=2$, $b=4$, $c=3$.

Пряма лінія у просторі. Пряма у просторі може бути визначена рівняннями двох площин, що перетинаються по цій прямій:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

Канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, паралельно вектору $\vec{s}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ мають вигляд:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}}$$ або

$$\boxed{\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}},$$

де α,β,γ – кути, які утворює пряма з осями координат.

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\ \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\ \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}.$$

Від канонічних рівнянь, вводячи параметр t, неважко перейти до параметричних:

$$\begin{cases} x=lt+x_1, \\ y=mt+y_1, \\ z=nt+z_1. \end{cases}$$

Косинус кута φ між двома прямими $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}=\frac{z-z_1}{n_2}$ визначається за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}}.$$

Звідси умова паралельності двох прямих:

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}}$$

і умова перпендикулярності двох прямих:

$$\boxed{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0}.$$

Необхідна і достатня умова знаходження двох прямих, що задані їх канонічними рівняннями, в одній площині (умова компланарності двох прямих):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо l_1, m_1, n_1 не пропорційні l_2, m_2, n_2, то дане співвідношення є необхідною і достатньою умовою перетину двох прямих у просторі.

Синус кута φ між прямою $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}}.$$

Звідси умова паралельності прямої і площини:

$$\boxed{Al + Bm + Cn = 0}.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\boxed{\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}}.$$

Для визначення точки перетину прямої $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ або у параметричній формі $x = lt + x_1$, $y = mt + y_1$, $z = nt + z_1$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$ необхідно розв'язати їх рівняння:

$$A(lt + x_1) + B(mt + y_1) + C(nt + z_1) + D = 0 \text{ або}$$

$$Alt + Bmt + Cnt + D + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \text{ або } (Al + Bm + Cn)t + D_1 = 0,$$

$$\text{де } D_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Якщо $Al + Bm + Cn \neq 0$, то пряма перетинає площину. Точка перетину обчислюється з рівняння. Якщо $Al + Bm + Cn = 0$, а $D \neq 0$, то пряма належить площині.

Розглянемо приклади.

Приклад. Скласти канонічне рівняння прямої, яку задано перетином двох площин: $x - y + 3z - 2 = 0$ і $x + 2y - z - 6 = 0$.

Розв'язання. Кожна з площин має свій вектор нормалі: $\vec{N}_1 = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Вектор $\vec{s}$, вздовж якого проходить пряма, перпендикулярний як до вектора $\vec{N}_1$ так і до вектора $\vec{N}_2$. Тоді $\vec{s} = N_1 \times N_2$. Знайдемо його:

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

Для визначення координат точки M, через яку проходить шукана пряма, треба знайти точку перетину її з однією з координатних площин. Нехай це буде площина yOz. Тобто у рівняння площини треба підставити $x = 0$. Маємо:

$$\begin{cases} -y + 3z - 2 = 0 \\ 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ + \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$5z - 10 = 0, \quad z = 2$$
$$5y - 20 = 0, \quad y = 4.$$

Тепер запишемо канонічні рівняння прямої, яка проходить через знайдену точку $M(0;4;2)$ паралельно вектору $\vec{s} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$:

$$\frac{x}{-5} = \frac{y-4}{10} = \frac{z-2}{5} \quad \text{або} \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

Існує й другий спосіб розв'язання: виключаючи спочатку y, а потім z з рівнянь площини, отримаємо:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 2 = 0 \\ 3x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ + \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$5x + 5z - 10 = 0, \quad -5x = 5z - 10; \quad -10x = 10(z-2).$$
$$10x + 5y - 20 = 0, \quad -10x = 5y - 20; \quad -10x = 5(y-4).$$

Таким чином: $-10x = 5(y-4) = 10(z-z)$ або $\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Приклад. Дана точка $M(1;2;3)$ і площина $x+2y+-z-8=0$. Визначити координати точки N, симетричної до точки M, відносно даної площини.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2;3)$, перпендикулярно до площини $x+2y+-z-8=0$, що має вектор нормалі $\vec{N} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Для обчислення точки перетину цієї прямої з площиною, запишемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} = t.$$

Звідси $x = t+1$; $y = 2t+2$; $z = -t+3$.

Підставимо x, y, z у рівняння площини та обчислимо параметр t:

$$t+1+4t+4+t-3-8=0, \quad 6t=6, \quad t=1.$$

Знайдемо координати точки перетину прямої з площиною:

$$\overline{x} = t+1 = 1+1 = 2; \quad \overline{y} = 2t+2 = 2+2 = 4; \quad \overline{z} = -t+3 = 2.$$

Точка перетину є серединою відрізка між точками M і N, тобто

$$\overline{x} = \frac{x_M + x_N}{2}; \quad \overline{y} = \frac{y_M + y_N}{2}; \quad \overline{z} = \frac{z_M + z_N}{2};$$

$$2 = \frac{1+x_N}{2}; \quad 4 = \frac{2+y_N}{2}; \quad 2 = \frac{3+z_N}{2}.$$

Звідси $x_N = 3$; $y_N = 6$; $z_N = 1$.

Отже, $N(3;6;1)$.

Приклад. Обчислити кути, які утворює пряма $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z+8=0 \end{cases}$ з осями координат.

Розв'язання. Складемо канонічні рівняння прямої: $x = 2y + 5$, $x = 3z - 8$.

Тоді $x = 2y + 5 = 3z - 8$, $x = 2\left(y + \frac{5}{2}\right) = 3\left(z - \frac{8}{3}\right)$, $\frac{x}{6} = \frac{y + \frac{5}{2}}{3} = \frac{z - \frac{8}{3}}{2}$.

Звідси: $l = 6$; $m = 3$; $n = 2$; $\vec{s} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\text{Тоді} \quad \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{6}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{6}{7};$$

$$\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{3}{7}; \quad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{2}{7}.$$

Поверхні другого порядку. Будь яке рівняння другого степеня відносно x, y, z виду $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$, де принаймні один за коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля, визначає поверхню другого порядку у просторі.

Розглянемо поверхні другого порядку та їх найпростіші (канонічні) рівняння.

Сфера. У декартовій системі координат сфера, що має центр у точці $C(x_0, y_0, z_0)$ і радіус R (рис. 25) визначається рівнянням

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

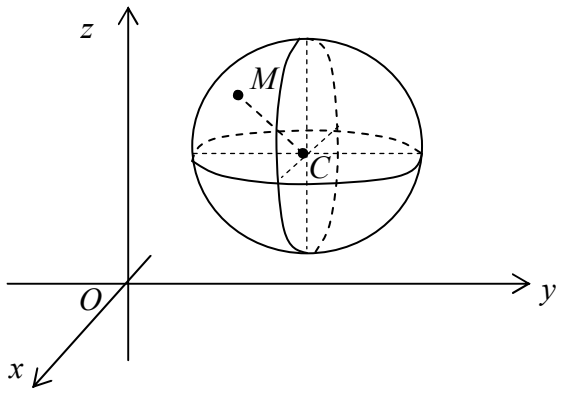


Рис. 25

Якщо центр сфери знаходиться у початку координат, то її рівняння має вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Циліндричні поверхні. Рівняння виду $F(x,y)=0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Oz.

Рівняння виду $F(x,z)=0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Oy.

Рівняння виду $F(y,z)=0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Ox.

Канонічні рівняння циліндрів другого порядку, твірна яких паралельна осі Oz наступні:

еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 26).

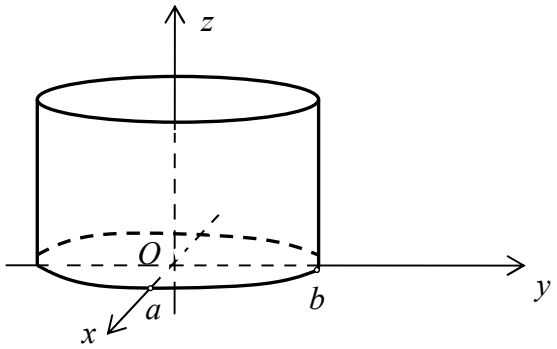


Рис.26

Якщо $a=b$, будемо мати круговий циліндр.

гіперболічний циліндр. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ (рис. 27).

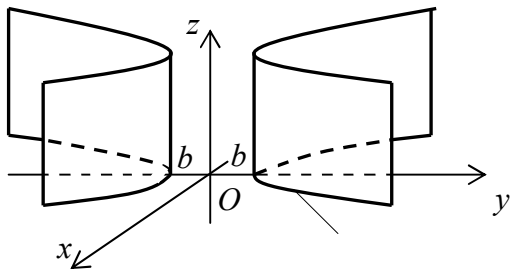


Рис.27

Якщо $a=b$, будемо мати рівнобічний гіперболічний циліндр;

параболічний циліндр $y^2 = 2px$ (рис. 28).

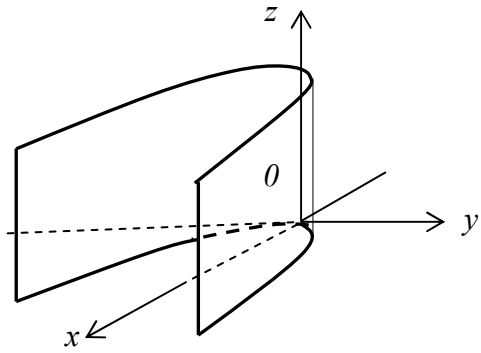


Рис.28

конус другого порядку з вершиною у початку координат, віссю якого є вісь Oz, має рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. 29).

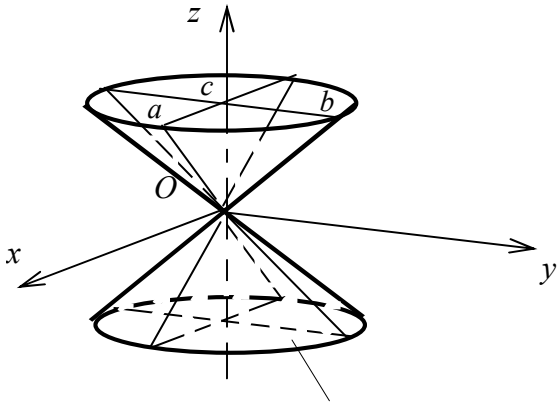


Рис.29

Аналогічно, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, якщо віссю є Oy і

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, якщо віссю є Ox.

Поверхні обертання. Якщо крива $F(y,z) = 0$, $x = 0$, що належить площині yOz обертається навколо осі Oz, то рівняння поверхні обертання має вигляд $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Аналогічно, рівняння $F(x,\sqrt{y^2+z^2})=0$ визначає поверхню, що утворена обертанням навколо осі Ox кривої $F(x,y)=0$, $z=0$; рівняння $F(\sqrt{x^2+z^2},y)=0$ визначає поверхню, що утворена обертанням навколо осі Oy кривої $F(x,y)=0$, $z=0$.

Наведемо рівняння поверхонь обертання другого порядку, що утворюються обертанням еліпса, гіперболи та параболи навколо їх осей симетрії.

Еліпсоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, де вісь обертання Oz. Еліпсоїд стиснутий, якщо $a>c$; розтягнутий, якщо $a<c$; при $a=c$ він перетворюється у сферу.

Однопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, де вісь обертання Oz є уявною віссю гіперболи, обертанням якої утворена ця поверхня.

Двопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, де вісь обертання Oz є дійсною віссю гіперболи, обертанням якої утворена ця поверхня.

Параболоїд обертання $x^2+y^2=2pz$, де вісь обертання Oz.

Поверхні обертання другого порядку є частковим випадком поверхонь другого порядку загального вигляду, канонічні рівняння яких наступні:

еліпсоїд триосний $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 30);

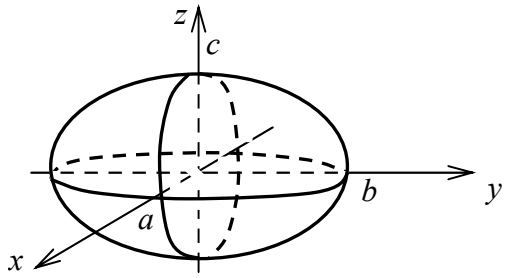


Рис. 30

однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 31);

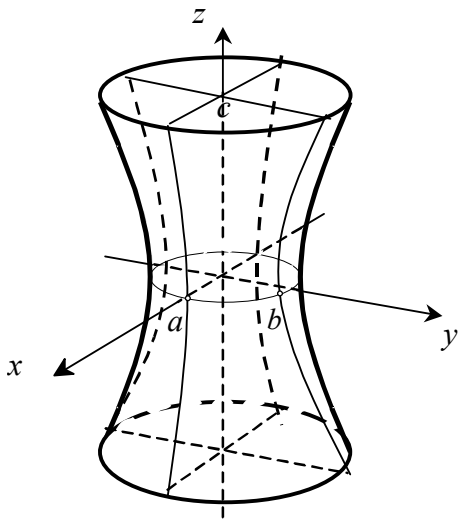


Рис. 31

двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 32);

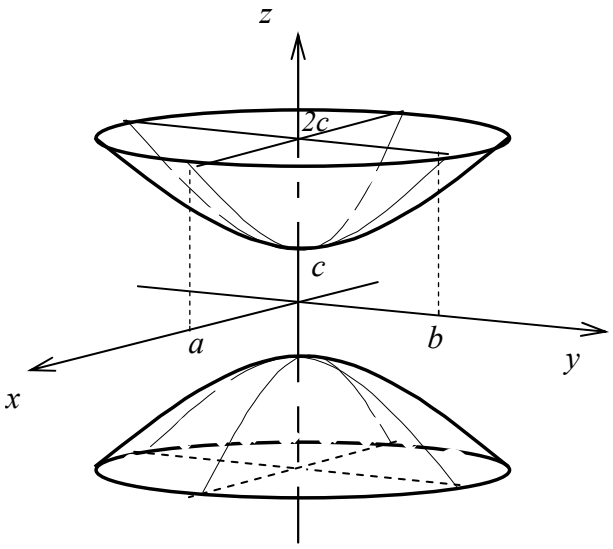


Рис. 32

еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ \ q>0)$ (рис. 33);

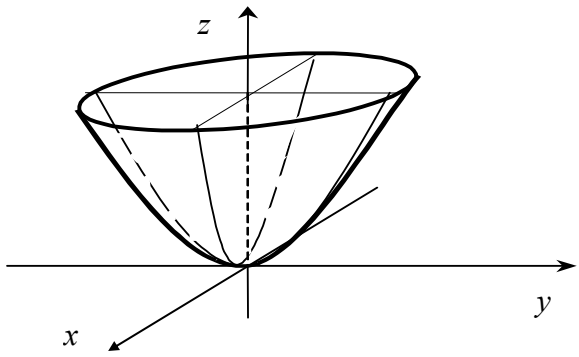


Рис. 33

гіперболічний параболоїд $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, \quad q > 0)$ (рис. 34).

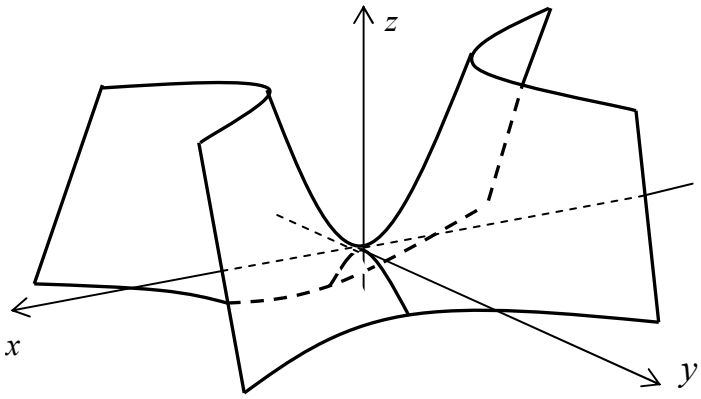


Рис. 34

Таким чином, існує дев’ять поверхонь другого порядку: три циліндри – еліптичний, гіперболічний та параболічний, конус, еліпсоїд, однопорожнинний гіперболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд, еліптичний параболоїд та гіперболічний параболоїд.

Слід зауважити, що загальне рівняння поверхонь другого порядку може також визначати сукупність двох площин, точку, пряму і, навіть, не мати геометричного змісту (визначати уявну поверхню).

Приклад. З'ясувати геометричний сенс рівняння

$$x^2+4y^2+9z^2+12yz+6xz+4xy-4x-8y-12z+3=0$$

Розв'язання. Здійснюючи алгебраїчні перетворення, отримаємо рівняння

$(x+2y+3z)^2-4(x+2y+3z)+3=0$ або $(x+2y+3z-1)(x+2y+3z-3)=0$.

Таким чином, рівняння визначає сукупність двох площин $x+2y+3z-1=0$ та $x+2y+3z-3=0$.

Приклад. Звести до канонічного виду рівняння $x^2+y^2+4z^2-2xy-8z+5=0$.

Розв'язання. Згрупуємо члени наступним чином $(x-y)^2+4(z-1)^2=-1$.

Це рівняння не має геометричного сенсу, бо ліва частина не може бути від'ємною для будь-яких дійсних x, y, z.

Приклад. Звести до канонічного виду рівняння $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати:

$4(x^2-2x+1-1)+9(y^2-2y+1-1)+36(z^2-2z+1-1)+13=0$.

$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36$.

Поділимо обидві частини на тридцять шість.

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{1}=1$ або $\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{1^2}=1$

це рівняння еліпсоїда, піввісі якого дорівнюють: $a=3$; $b=2$; $c=1$, а центр знаходиться у точці $O(1;1;1)$.

Приклад. З'ясувати, яку поверхню визначає рівняння $x^2=yz$.

Розв'язання. Треба перейти до нових координат, а саме: зробити поворот на кут, що дорівнює $45°$, від вісі Oy до вісі Oz проти годинникової

стрілки. Тоді $x = x'$; $y = y'\cos 45° - z'\sin 45°$; $z = y'\sin 45° + z'\cos 45°$, або $x = x'$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z')$; $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z')$, так як $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Підставляючи ці вирази для $x; y; z$ у рівняння $x^2 = yz$ отримаємо: $(x')^2 = \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{2}$ або $(x')^2 - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(z')^2}{(\sqrt{2})^2} = 0$.

Це рівняння конусу другого порядку, віссю якого є вісь Oy' у нових координатах.

Список використаних джерел

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М. Наука. 1973. – 720 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова, Высшая математика в упражнениях и задачах ч. I – М. Высш. школа, 1980. – 320 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука. 1985. – 384 с.
4. Станишевский С.О. Вища математика. – Харків. ХНАМГ, 2005, – 270 с.
5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1966. – 366 с.
6. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – Київ: «Видавництво А.С.К.», 2003. – 648 с.
7. Печеніжський Ю.Є., Станішевський С.О., Тихонович О.Ю. Посібник для розв’язування задач з вищої математики. – Х.: ХНАМГ, 2003. – 125 с.

Навчальне видання

БОРАКОВСЬКИЙ Олександр Васильович

Вища математика: конспект лекцій, модуль І. (для студентів 1-го курсу денної і заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.040106 – «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування (ЕОНС)»)

Редактор *М. З. Аляб'єв*

План 2009, поз. 66 Л

Підп. до друку 24.12.2009 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,4
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731 від 19.12.2001