

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА**

В. П. ШПАЧУК, М. С. ЗОЛОТОВ, В. О. СКЛЯРОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Розділ I

КІНЕТОСТАТИКА ПОВІТРЯНИХ ЛІНІЙ ЕЛЕКТРОПЕРЕДАЧ

*(для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом
6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» спеціальності „ЕСЕ”)*

**ХАРКІВ
ХНАМГ
2010**

УДК 351.1

Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу «Технічна механіка». Розділ І. Кінетостатика повітряних ліній електропередач (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» спеціальності „ЕСЕ”) / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів; за заг. ред. В. П. Шпачука; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 237 с.

Автори: В. П. Шпачук,
М. С. Золотов,
В. О. Склярів

Рецензенти:

О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Національного технічного університету «ХПІ»;

В. Г. Солодов, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри теоретичної механіки та гідравліки Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам електротехнічних спеціальностей вузів при підготовці до занять, заліків та іспитів з розділу «Кінетостатика повітряних ліній електропередач» курсу технічної механіки.

Він містить такі основні питання статика твердого тіла, довільна система сил, кінематика точки та твердого тіла, динаміки точки та твердого тіла, як закони динаміки, диференціальні рівняння динаміки точки твердого тіла. У кожному розділі наведено приклади задач, методики їх розв'язання та контрольні питання.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 15 від 13.05.2010 р.

© Шпачук В. П., Золотов М. С.,
Склярів В. О., ХНАМГ, 2010

ЗМІСТ

Вступ	6
1. Статика абсолютно твердого тіла	12
1.1. Основні визначення, поняття і аксіоми статyki. Предмет статyki	13
1.2. Класифікація систем сил	14
1.3. Аксіоми статyki	14
1.4. Проекція сили на вісь, площину	18
1.5. Розклад сили на координатні складові	19
2. В'язі та їх реакції	20
3. Система збіжних сил	24
3.1. Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил	24
3.2. Умови рівноваги збіжних сил	28
3.3. Теорема про три непаралельні сили	29
4. Момент сили відносно точки та осі. Складання паралельних сил. Пара сил, теореми про пари	32
4.1. Момент сили відносно точки	32
4.2. Момент сили відносно осі	34
4.3. Алгебраїчний момент сили відносно точки	35
4.4. Складання паралельних сил	36
4.4.1. Складання двох сил, напрямлених в один бік	37
4.4.2. Складання двох сил, напрямлених в різні боки	38
4.5. Пара сил. Момент пари. Теореми про пари	40
4.5.1. Визначення пари сил. Теореми про пари сил	40
4.5.2. Умови рівноваги системи пар сил	45
5. Довільна система сил у просторі та площині. Зведення до заданого центра (теорема Пуансо)	47
5.1. Лема про паралельний перенос сили	47
5.2. Зведення довільної системи сил у просторі до заданого центра. Теорема Пуансо (Основна теорема статyki)	50
5.3. Властивості головного вектора, головного моменту і результуючої приєднаної пари системи сил. Статичні інваріанти	53
5.4. Окремі випадки зведення просторової системи сил	59
5.4.1. Приведення системи сил до пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) з моментом $\bar{m}_O = \overline{OA} \times \bar{F}$	59
5.4.2. Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O	59
5.4.3. Зрівноважена (нульова) система сил	60
5.4.4. Приведення системи сил до головного вектора і головного моменту	60

5.4.4.1. Приведення до динами	61
5.4.4.2. Приведення до схрещеної системи двох сил	64
5.4.4.3. Приведення до однієї сили (рівнодійної)	65
5.5. Довільна система сил у площині	66
5.5.1. Приведення до пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*)	67
5.5.2. Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O	68
5.5.3. Зрівноважена система сил	68
5.5.4. У загальному випадку	69
5.6. Теорема Варіньона про момент рівнодійної	70
5.7. Приклад розв'язання задач зведення	73
6. Умови рівноваги системи сил. Окремі випадки рівноваги	75
6.1. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил	75
6.2. Приклади розв'язання задач рівноваги	78
6.4. Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл	80
7. Розрахунок плоскої ферми	87
7.1. Основні визначення і припущення	87
7.2. Порядок розрахунку плоскої ферми	90
8. Центр паралельних сил і центр ваги	96
8.1. Центр паралельних сил	96
8.2. Центр ваги твердого тіла	99
8.2.1. Центр ваги однорідного твердого тіла	99
8.2.2. Центр ваги одонорідної пластини	100
8.2.3. Центр ваги однорідного стержня	101
8.3. Способи визначення координат центра ваги	102
8.4. Центр ваги простіших фігур	106
Питання для самоконтролю	108
9. Кінематика точки	111
9.1. Способи завдання руху точки	112
9.2. Визначення швидкості та прискорення точки	115
9.3. Приклади розв'язання задач	123
10. Поступальний і обертальний рухи твердого тіла	128
10.1. Поступальний рух твердого тіла	128
10.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі	129
10.3. Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі	137
10.4. Приклади розв'язання задач	139

11. Плоскопаралельний рух твердого тіла	143
11.1. Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла	143
11.2. Визначення швидкостей точок плоскої фігури	144
11.3. Визначення прискорень точок плоскої фігури	149
11.4. Приклади розв'язання задач з визначення швидкостей точок тіла	150
11.5. Приклади розв'язання задач з визначення прискорень точок тіла	156
Питання для самоконтролю	162
12. Динаміка точки	164
12.1. Основні поняття і визначення. Закони динаміки	164
12.1.1. Основні поняття і визначення	164
12.1.2. Закони динаміки	165
12.2. Диференціальні рівняння динаміки точки	167
12.2.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	167
12.2.2. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки	169
12.2.3. Диференціальні рівняння руху невільної матеріаль- ної точки	172
12.2.4. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки	175
12.3. Прямолінійні коливання матеріальної точки	181
12.3.1. Вільні незатухаючі коливання	181
12.3.2. Вільні коливання при наявності сил опору (затухаючі коливання)	187
12.3.3. Вимушені коливання	191
12.3.3.1. Силове збудження коливань	191
12.3.3.2. Кінетичне збудження коливань	198
12.3.4. Приклади розв'язання задач з дослідження коливального руху матеріальної точки	203
12.4. Метод кінетостатики. Принцип Д'Аламбера	212
12.4.1. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки	213
12.4.2. Принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок	215
12.4.3. Сили інерції твердого тіла в часткових випадках його руху	219
12.4.4. Приклади розв'язання задач методом кінетостатики	221
12.4.5. Динамічні реакції при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі	227
Питання для самоконтролю	233
Список літератури	235

ВСТУП

Механікою називається наука про механічний рух або рівновагу матеріальних тіл і виникаючу при цьому взаємодію між ними. Відноситься механіка до природничих наук.

З розвитком механіки як науки в ній з'явився цілий ряд самостійних галузей, пов'язаних з вивченням механіки твердих деформованих тіл, рідин і газів: теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка, опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, гідравліка, динаміка споруд та інші спеціальні інженерні дисципліни. Однак в усіх цих галузях поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження, використовуються поняття, закони і методи механіки, які є загальними для них.

Теоретична механіка – це частина механіки, в якій вивчаються найзагальніші закони механічного руху або рівноваги матеріальних тіл і механічної взаємодії між ними. *Механічний рух* – найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простого переміщення за часом фізичних тіл з одного положення в просторі в інше.

В основі теоретичної механіки лежать закони Ньютона, тому вона називається *ньютонівською* або *класичною*. Класична механіка, яка є граничним випадком релятивістської механіки А.Ейнштейна, з великою точністю задовольняє багатьом галузям сучасної техніки при швидкостях руху тіл, досить малих у порівнянні зі швидкістю світла.

Роль і значення теоретичної механіки в інженерній освіті визначається, по перше, тим, що вона є *фундаментальною загальнонауковою дисципліною*, оскільки методи теоретичної механіки дозволяють з єдиних позицій описувати динаміку і процеси не тільки в механічних системах, а і в інших частинах фізичних (наприклад, утворення комірок Бенара при тепловій конвекції; явище резонансу в електричних та оптичних ланцюгах), хімічних (хімічна термодинаміка, коливання атомів і молекул, міжмолекулярна взаємодія,

динамічні явища при протіканні хімічної реакції Белоусова – Жаботинського), біологічних (динамічна поведінка системи хижак – жертва, життєвий цикл амеби), кліматичних (нерівноважність клімату Земної кулі), космічних (теорія розвитку Всесвіту) та інших системах. По друге, теоретична механіка є основою інженерних розрахунків, оскільки на її законах засновані статичні й динамічні розрахунки інженерних споруд (будівель, фундаментів, башт, мостів, гребель, трубопроводів, сховищ, технологічних споруд), транспортних засобів (вагонів, автомобілів, літаків, кораблів), виробничого устаткування (двигунів, насосів, компресорів), технологічних процесів (будівництва, транспортування, центрифугування, седиментації), параметрів польоту й керування літальними апаратами та ін.

Відвертаючись при вивченні руху матеріальних тіл від усього часткового, теоретична механіка розглядає тільки ті властивості, які в даній задачі є визначальними. Це приводить до розгляду різних моделей матеріальних тіл, які являють собою ту чи іншу ступень абстракції. До основних абстракцій теоретичної механіки відносять поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла. *Матеріальною точкою* називається тіло, розмірами якого можна знехтувати при розв'язанні певних задач. Наприклад, при наближеному дослідженні рухів планет їх можна розглядати як матеріальні точки. *Абсолютно твердим* називається тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюється під час рівноваги або руху.

Теоретична механіка широко користується не тільки методом абстракцій, а й узагальненням, математичними методами і методами формальної логіки. Застосування цих методів і узагальнень результатів безпосередніх спостережень, виробничої практики і досліду дозволили встановити певні загальні закони, що відіграють роль аксіом. Усі подальші висновки теоретичної механіки можуть бути отримані з цих аксіом за допомогою логічних міркувань і математичних викладок. При цьому достовірність положень теоретичної механіки перевіряється дослідом і практикою.

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка складається з трьох розділів:

- *статики*, в якій вивчаються методи еквівалентних перетворень систем сил, а також умови рівноваги матеріальних тіл;
- *кінематики*, в якій вивчається механічний рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, тобто незалежно від мас та діючих на них сил;
- *динаміки*, в якій вивчається рух матеріальних тіл у зв'язку з діючими на них силами.

Окрім цих трьох розділів, у теоретичній механіці вивчаються також елементи *аналітичної механіки*, яка являє собою сукупність найбільш узагальнених аналітичних методів розв'язання задач механіки, котрі дозволяють не тільки однаково розв'язувати задачі динаміки, а й розповсюджувати їх на такі галузі, як класична теорія поля і квантова механіка.

Закони теоретичної механіки сформульовані завдяки плідній праці багатьох поколінь вчених. Перші викладення загальних понять механіки містяться у творах старогрецького філософа Арістотеля (384-322 рр. до н.е.), який розглядав розв'язання практичних задач за допомогою важеля. Вперше наукове обґрунтування механіки з'являється в роботі сіракузького геометра і механіка Архімеда (287-212 рр. до н.е.). Він здійснив спробу аксіоматизації механіки (статики), дав низку наукових узагальнень, що відносяться до вчення про рівновагу, центр ваги і гідростатики (закон Архімеда).

Одне з перших місць у розвитку механіки займає Готфрід Лейбніц (1646-1716), який розробив і застосував до задач механіки диференціальне і інтегральне числення, увів поняття кінетичної енергії і впритул наблизився до утворення варіаційного числення. Завершив встановлення основних законів динаміки великий англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643-1727). У своєму знаменитому творі "Математичні основи натуральної філософії" (1687) він сформулював основні поняття класичної механіки, її аксіоматику, а також низку фундаментальних теорем небесної механіки і закон всесвітнього тяжіння.

Період розвитку механіки після Ньютона значною мірою пов'язаний з ім'ям Л.Ейлера (1707-1783), який більшу частину життя працював у Петербурзькій академії наук. Л.Ейлер повністю завершив процес математизації механіки точки, був засновником механіки твердого тіла і сформулював закони динаміки для безперервного середовища.

Подальший розвиток механіки проходив у зв'язку з вивченням руху системи матеріальних точок. Розвиток цього напрямку був покладений працями Ж.Л.Даламбера (1717-1783), який сформулював принцип, за допомогою якого формально задачі динаміки зводились до задач статички (принцип Даламбера) і Ж.Л.Лагранжа (1736-1813). У своєму видатному творі "Аналітична механіка" він сформулював найбільш загальний принцип статички – принцип можливих переміщень, знайшов загальну закономірність механіки – загальне рівняння динаміки, і вивів в узагальненому вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи (рівняння Лагранжа першого і другого роду).

У подальшому працями видатних математиків і механіків П.Л.Мопертьюї (1698-1759), П.С.Лапласа (1749-1827), К.Ф.Гаусса (1777-1855), С.Пуассона (1781-1840), У.Гамільтона (1805-1865), К.Якобі (1804-1851), М.В.Остроградського (1801-1861) завершилась математизація механіки системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла, були вироблені специфічні для аналітичної механіки поняття (узагальнені координати, узагальнені швидкості, узагальнені сили) і розроблені математичні методи розв'язання багатьох задач.

Одночасно з розвитком аналітичних методів механіки в цей період удосконалюються геометричні методи, зокрема в задачах статички. Так, у книзі французького механіка Л.Пуансо (1777-1859) «Елементи статички» вперше була введена нова абстракція – пара сил і викладена теорія приведення довільної системи сил до заданого центру.

Наступний розвиток механіки характеризується поглибленням вивченням ряду її розділів і появою нових. Слід відзначити роботи С.М.Ковалевської (1850-1891) з теорії обертання важкого твердого тіла навколо нерухомої точки, які стали початковою точкою для прикладної теорії гіроскопів. Значний внесок

у розвиток механіки неголономних систем, що має чисельні застосування в кібернетиці, теорії автоматичного керування, динаміці машин, зробили Д.Гіббс (1839-1903), С.А.Чаплигін (1863-1945) та інші вчені. Теорія стійкості рівноваги та руху, яка була тісно пов'язана з проблемою точного приладобудування, створена і розвинута працями Е.Рауса (1831-1907), М.Є.Жуковського (1847-1921), О.М.Ляпунова (1857-1918), А.Пуанкаре (1854-1912). Найбільш суттєві результати в теорії гіроскопів, які є основою навігаційних приладів, були отримані Л.Фуко (1819-1868), О.М.Криловим (1863-1945), В.В.Булгаковим (1901-1952) та іншими механіками.

Проблема боротьби з небезпечними вібраціями машин і споруд призвела до розробки теорії малих коливань, де значні результати отримали Релей (1842-1919), А.Пуанкаре, О.М.Крилов. На початку ХХ сторіччя інтенсивного розвитку набула теорія нелінійних коливань, що описує процеси не тільки в механічних, а і в радіотехнічних, хімічних, біологічних та інших системах, основоположниками якої були Ван-дер-Поль, О.О.Андронов (1901-1952), М.М.Крилов (1879-1955), М.М.Боголюбов та ін.

На початку ХХ сторіччя у зв'язку з розвитком будівництва і машинобудування виникла потреба розробки теорії пластин та оболонок, розвиток якої пов'язаний іменами Лява, Рейсснера, Доннелла, С.П.Тимошенко, В.З.Власова, В.В.Новожилова, Х.М.Муштарі, А.С.Вольміра, А.Л.Гольденвейзера та ін.

На даний момент у світі широко, застосовуються башти з високою ступеню совісності несучих труб. Стовбур таких конструкцій виконує функцію напямної поверхні для ковзного обладнання (рис. 1). Такий тип конструкції в Україні з'явився нещодавно, головним чином в індустрії розваг. Однак цей тип конструкцій має майбутнє і в інших галузях народного господарства, а саме: у підйомниках, кранах, оглядових конструкціях, тощо.

Для таких типів конструкцій головною проблемою є влаштування міжсекційного вузлового з'єднання.

Основними типами міжсекційних вузлових з'єднань башт є: з'єднання за допомогою зварювання, фланцеве з'єднання на високоміцних болтах та комбінування попередніх типів з'єднання.

З'єднання за допомогою зварювання є високотехнологічним, але не забезпечує збірності розбірності конструкції. Через обмеженість габаритів для транспортування, конструкцію зварюють на будівельному майданчику. Це призводить до значних дефектів зварювальних швів.

Конструкції освітлювальних щогл через свою велику висоту, підвищеної гнучкості, несприятливих динамічних властивостей і поганообтікаємі форм поперечного переріза елементів досить чутливі до вітрового впливу. На динамічне поводження споруд, що експлуатуються, впливають також корозійні й механічні ушкодження, що викликають зміну первинних властивостей спорудження, порушення конструктивної форми, залишкові напруги й деформації. У зв'язку із цим актуальними є питання, зв'язані зі стабілізацією конструкцій у поле динамічних навантажень і впливів.

Питання стабілізації знаходять своє відбиття в розробці ефективних способів посилення конструкцій, гасіння коливань, що у свою чергу неможливо без проведення діагностики фактичного стану споруджень, аналізу діючих на них навантажень, визначення їхньої стійкості, зміни за період експлуатації несучої здатності елементів. Під посиленням конструкцій, як правило, розуміють підвищення їхньої несучої здатності в робочому положенні. Необхідність посилення конструкцій баштових споруд, як правило, може бути викликана двома причинами: по-перше, зниженням несучої здатності внаслідок наявності дефектів й ушкоджень у результаті тривалої експлуатації й, по-друге, збільшенням навантажень при реконструкції або переустаткуванні. Вище описаними розрахунками, і рішенням проблем по посиленню займаються сучасні вчені: Шаповалів С.М., Горохів Е.В., Матвієнко В.Ф., Самійленко М.С. Казакевич М.І., Шаповалів С.Н.

1. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Основні визначення, поняття і аксіоми статички. Предмет статички

Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються загальні положення про сили, їх приведення до найпростішого вигляду та умови рівноваги матеріальних тіл, на які діють ці сили.

Під рівновагою розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. Умови рівноваги істотно залежать від того, чи є тіло твердим, пружним, рідким, газоподібним. У загальному курсі теоретичної механіки розглядаються тільки задачі про рівновагу абсолютно твердих тіл.

У статистиці розв'язуються такі основні задачі: 1) приведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду; 2) визначення умов рівноваги сил, які діють на абсолютно тверде тіло. Ці задачі статички можна розв'язувати шляхом відповідних геометричних побудов або за допомогою числових розрахунків.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло, розмірами якого при вирішенні конкретної задачі можна знехтувати, або геометрична точка, яка наділена певною масою.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між частками якого залишається постійною. Тобто абсолютно тверде тіло зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

Сила – фізична величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами. Сила – величина векторна, її дія на абсолютно тверде тіло визначається: значенням або модулем сили; напрямом дії сили; точкою, в якій вона прикладена. Пряма *aa* (рис. 1.1), уздовж якої спрямована сила, називається *лінією дії сили*. Основною одиницею сили є 1 ньютон (Н). Це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в 1 м/с^2 ($1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м/с}^2$).

Графічно сила зображується спрямованим відрізком-вектором (рис. 1.1), довжина якого виражає у вибраному масштабі величину сили, а напрям відрізка відповідає напрямку сили. Силу позначатимемо буквою \vec{F} , а її величину (модуль) як F чи $|\vec{F}|$. Сукупність сил, що діють на абсолютно тверде тіло, називати-

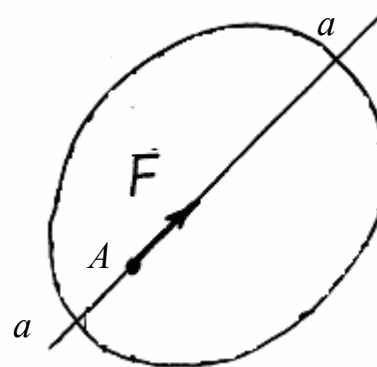


Рис. 1.1

моемо *системою сил* $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$. Наведемо ще такі визначення:

1. Тіло, яке не взаємодіє з іншими тілами і якому з даного положення можна надати будь-яке переміщення у просторі, називається *вільним*.

2. Якщо одну систему сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, що діють на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$, не порушуючи при цьому стану спокою чи руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються *еквівалентними*: $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$.

3. Система сил $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$, під дією якої вільне тверде тіло знаходиться у стані спокою, називається *зрівноваженою*, або *еквівалентною нулю*: $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$.

4. Якщо задана система сил $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n)$ еквівалентна одній силі, то ця сила називається *рівнодійною* \vec{R} заданої системи сил: $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n) \sim \vec{R}$.

5. Сила, що прикладена до тіла в точці, називається *зосередженою*. *Точкою прикладання* сили називається та матеріальна частка тіла, до якої ця сила безпосередньо прикладена.

6. Сили, що діють на всі точки довжини, поверхні чи об'єму, називаються *розподіленими*.

Величину сили, яка припадає на одиницю довжини, площі або об'єму, називають *інтенсивністю*. Звичайно розподілену силу позначають буквою q , яка має розмірність Н/м, Н/м², Н/м³ відповідно. Прикладами розподілених сил

є: тиск циліндричного котка на поверхню дороги; тиск колеса трамваю на рейку; тиск снігового шару на покрівлю; тиск рідини на стінки трубопроводу, посудини, греблі; сили ваги тіла та ін. Позначають характер дії розподілених сил графіком (епюрою). На рис. 1.2,а,б в наведено відповідно епюри рівномірної, трикуткової і довільної інтенсивностей діючих сил.

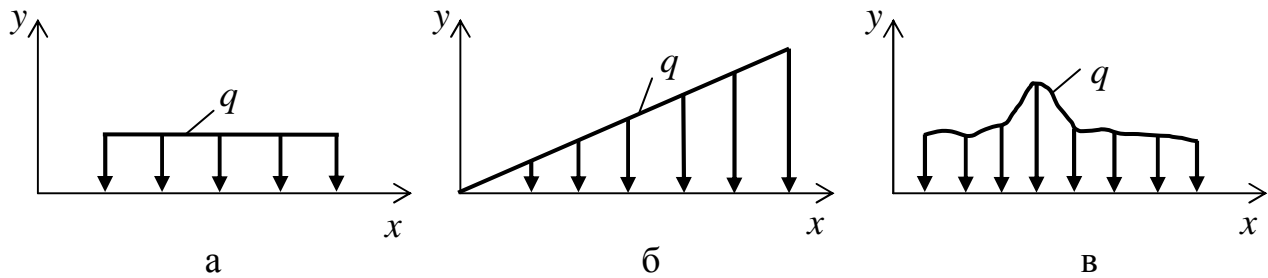


Рис.1.2

7. *Зовнішні сили* – це сили, що діють на тіло або механічну систему з боку матеріальних точок або інших тіл, які не входять в цю систему.

8. *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками однієї механічної системи.

1.2. Класифікація систем сил

При вивченні статички будемо послідовно переходити від розгляду простих систем сил до більш складних, системи сил можна класифікувати так:

- система збіжних сил, плоска й просторова;
- плоска система паралельних сил;
- довільна плоска система сил;
- просторова система паралельних сил;
- довільна просторова система сил.

1.3. Аксиоми статички

В основі статички лежить ряд аксіом, що являють собою результат узагальнень численних дослідів і спостережень за рівновагою і рухом тіл,

неодноразово підтверджених практикою. Аксиоми статички є вихідними положеннями дослідного характеру, що приймаються без доведення. Вони формулюються так.

Аксиома 1. Вільне абсолютно тверде тіло може знаходитися під дією двох сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 у рівновазі тоді й тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ і діють уздовж однієї прямої aa у протилежних напрямках (рис. 1.3):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

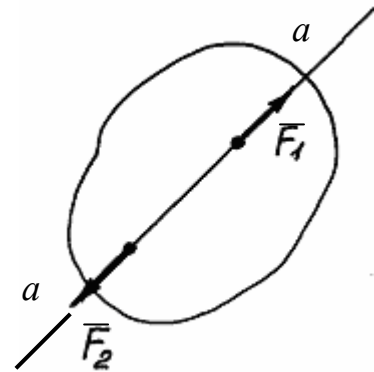


Рис. 1.3

У механіці така система сил має назву «двійка сил».

Ця аксіома визначає найпростішу зрівноважену систему двох сил, оскільки досліди свідчать, що вільне тіло, на яке діє тільки одна сила, знаходитися в рівновазі не може.

Аксиома 2. Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не порушується, якщо до неї додати або відняти зрівноважену систему сил (наприклад, двійку сил).

Наслідок з аксіоми 2. Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, точку прикладання сили можна переносити вздовж її лінії дії.

Доведення. Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила \vec{F} , прикладена в точці А (рис. 1.4). Візьмемо на лінії дії aa цієї сили довільну точку В і прикладемо в ній дві сили \vec{F}_1, \vec{F}_1' (двійку сил), що дорівнюють за величиною силі \vec{F} , тобто $(F = F_1 = F_1')$.

Таку двійку сил можемо прикласти на підставі аксіоми 2. Сила \vec{F} , яка прикладена в точці А, і сила \vec{F}_1 , прикладена в точці В, складають, за побудовою, зрівноважену систему сил. Тому її можна відкинути, не порушуючи

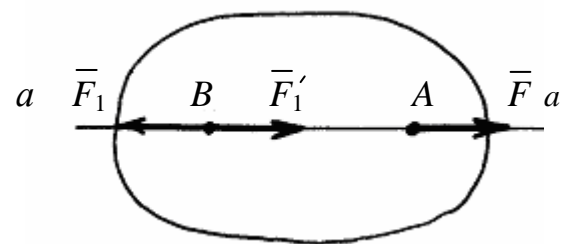


Рис. 1.4

стану рівноваги тіла. Отже, залишається сила \vec{F}'_1 , яка прикладена в точці B і дорівнює за величиною початковій силі \vec{F} . За інженерними розрахунками цим наслідком можна користуватися лише тоді, коли визначаються умови рівноваги конструкції і не розглядаються внутрішні зусилля, що виникають в її окремих частинах. Цей наслідок визначає силу як вектор, що ковзає по власній лінії дії, не залишаючи тіло (сила є ковзним вектором).

Аксиома 3 (аксіома про паралелограм сил). Система двох сил, прикладених в одній точці до абсолютно твердого тіла, має рівнодійну, яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладена в тій самій точці (рис. 1.5).

Вектор \vec{R} , який дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на векторах \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , як на сторонах, називається *геометричною сумою* цих векторів:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

У цій аксіомі сформульовано правило векторного додавання сил. Тому її можна

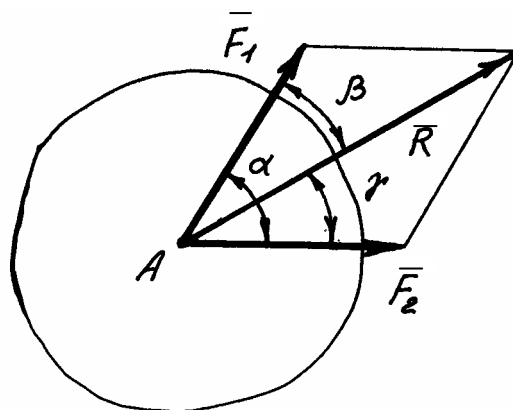


Рис. 1.5

сформулювати ще так: дві сили, які прикладені до абсолютно твердого тіла в одній точці, мають рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в тій самій точці.

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}, \quad (1.2)$$

де α - кут між векторами \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

При однаковому напрямі сил ($\cos \alpha = 1$) $R = F_1 + F_2$, а при протилежному ($\cos \alpha = -1$) $R = F_1 - F_2$.

Будь-яку силу \vec{R} також можна одним способом розкласти на дві складові сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 за двома заданими напрямками, які утворюють кути β і γ з напрямком цієї сили:

$$F_1 = R \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}; \quad F_2 = R \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}. \quad (1.3)$$

Аксиома 4. Сили взаємодії двох матеріальних тіл \bar{F}_{12} (сила дії тіла 1 на тіло 2) і \bar{F}_{21} завжди рівні за величиною ($F_{12} = F_{21}$) і діють по одній прямій aa у протилежних напрямках (рис. 1.6).

Ця аксіома є третім законом Ньютона. Сили взаємодії двох тіл не створюють систему зрівноважених сил (двійку сил), бо вони прикладені до різних тіл.

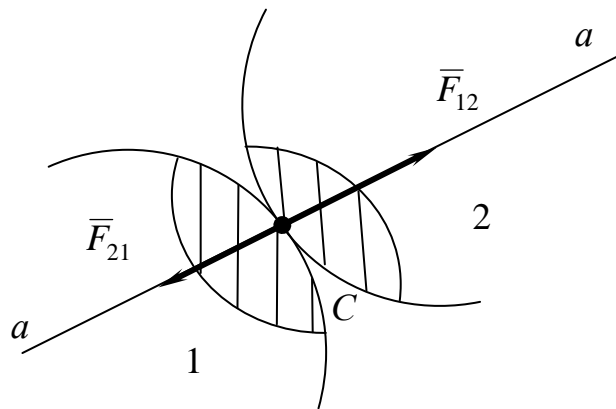


Рис. 1.6

Аксиома 5. Рівновага здеформованого тіла не порушиться, якщо воно затвердіє.

Аксиома 6. Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Ця аксіома має також назву – принцип звільнення від в'язей, який використовують при складанні рівнянь рівноваги будь-якої конструкції.

У статиці також зустрічаються задачі про рівновагу тіла, що складається з декількох твердих тіл, зв'язаних між собою. Таке тіло знаходиться в рівновазі, якщо в рівновазі перебувають всі складові тіла. У деяких випадках таке тіло розглядають як одне абсолютно тверде тіло.

Принцип затвердіння широко використовують в інженерних розрахунках.

1.4. Проекція сили на вісь, площину

Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, яка дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак “+”, якщо вектор сили нахилений у бік додатнього напрямку осі, і знак «-» – якщо в бік від’ємного напрямку. Тому (рис. 1.7,а) буде $F_x = F \cdot \cos \alpha$, $F_y = F \cdot \sin \alpha$, $T_x = 0$, $T_y = T$. Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

Проекцією сили на площину називається вектор, який міститься між проекціями початку і кінця даної сили на площину (рис. 1.7,б). Таким чином, проекція сили на площину, на різницю від проекції сили на вісь, є величиною векторною. На рис. 1.7, б вектором \vec{F}_{xy} позначена проекція сили \vec{F} на площину xOy , а її проекції на осі Ox , Oy , Oz визначаються так:

$$F_x = F_{xy} \cos \psi = F \cos \theta \cdot \cos \psi; \quad F_y = F_{xy} \sin \psi = F \cos \theta \cdot \sin \psi; \quad F_z = F \sin \theta.$$

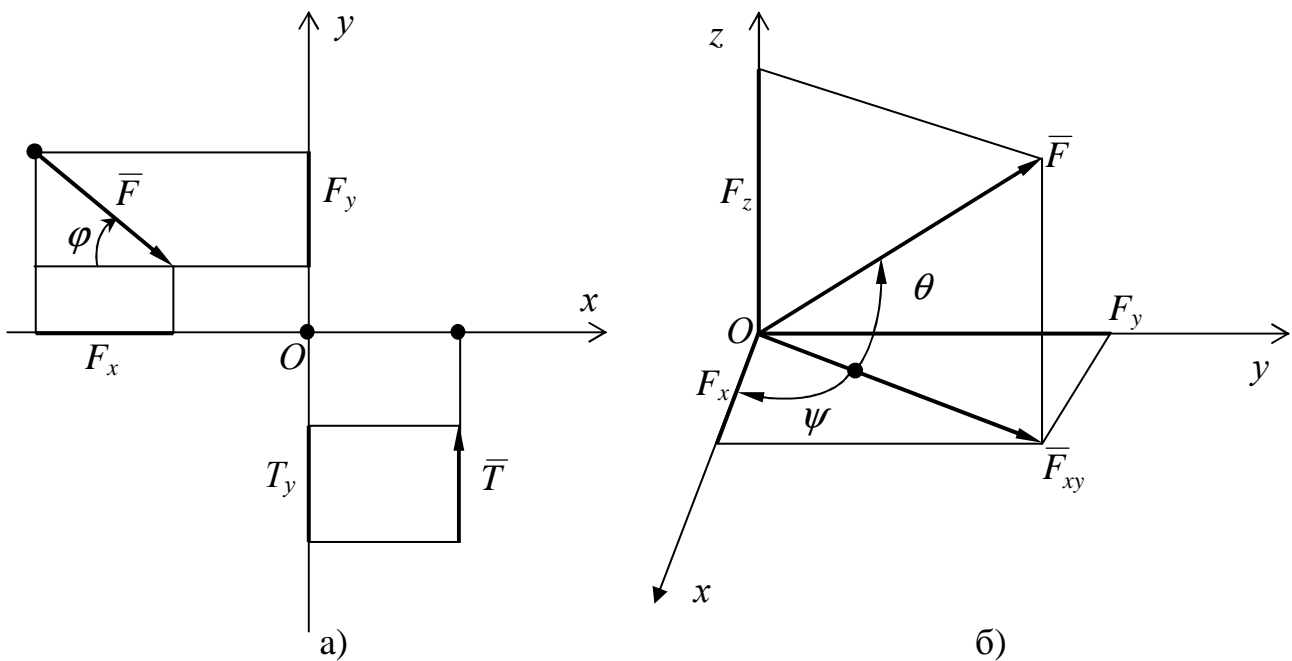


Рис. 1.7

Тут величини F_x і F_y визначено методом подвійного проектування: спочатку знаходиться проекція сили на площину xOy , а потім отриманий вектор \vec{F}_{xy} проектується на осі Ox і Oy .

1.5. Розклад сили на координатні складові

Відповідно до аксіоми 3 про паралелограм сил кожену силу можна розкласти на складові. Якщо їх лінії дії паралельні осям системи координат, то вони називаються *координатними складовими* сили у площині (сили $\bar{P}_{1x}, \bar{P}_{1y}, \bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}$ на рис. 1.8,а) або у просторі (сили $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ на рис. 1.8,б). При побудові координатних складових в першому випадку використовують метод прямокутника, а у другому – метод паралелепіпеда, відповідно до якого вектор \bar{F} сили уявляють діагоналю паралелепіпеда (рис. 1.8,б), ребра якого приймають за її складові $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$.

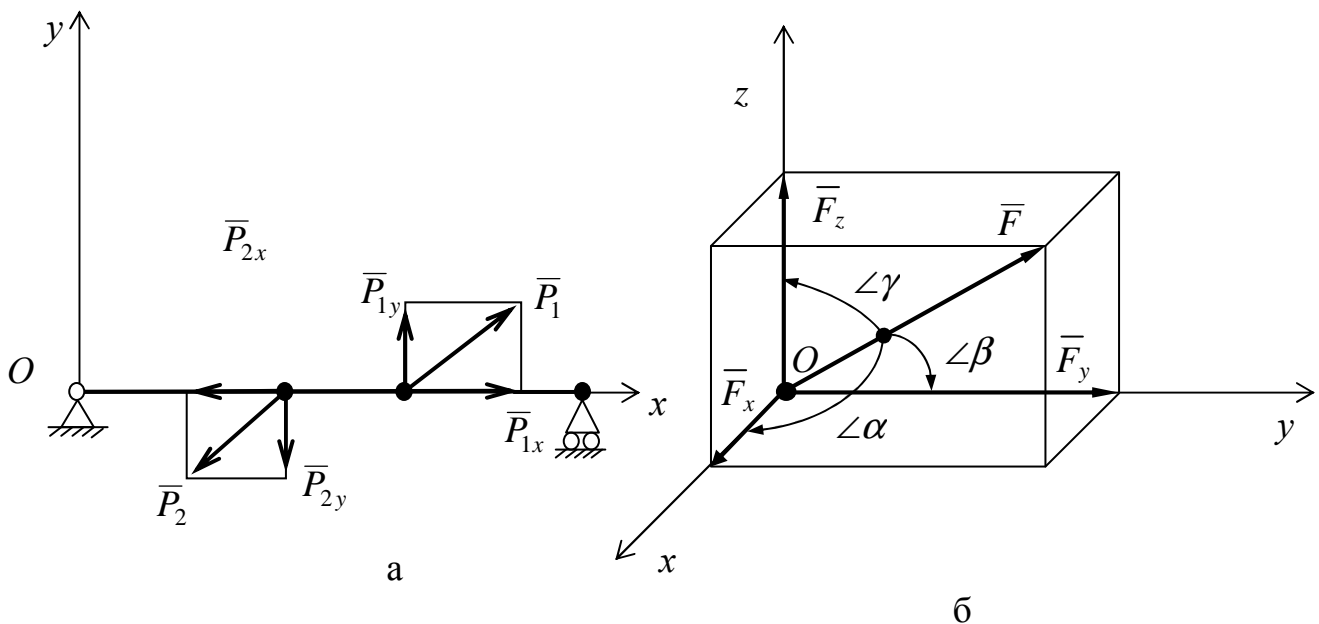


Рис. 1.8

У техніці процедуру розкладу сили на координатні складові використовують при розв'язанні задач рівноваги твердого тіла, наприклад, при складанні рівнянь моментів сил. Тут для координатних складових просто визначаються плечі сил, а деякі моменти складових виявляються рівними нулю за побудовою. Величини координатних складових розраховують за допомогою розглянутих в розділі 1.4 формул. Але якщо у просторі задано кути α, β, γ між вектором сили \bar{F} (рис. 1.8,б) і осями системи координат, то краще користуватися наступними виразами: $F_x = F \cos \alpha$; $F_y = F \cos \beta$; $F_z = F \cos \gamma$.

2. В'ЯЗИ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ

В'язями називають тіла або сукупність тіл, які обмежують рух даного тіла чи даної матеріальної системи. За аксіомою 6 невідільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Звільнення від в'язей дає можливість звести рівновагу невідільного твердого тіла до відповідного питання про рівновагу вільного твердого тіла, яке знаходиться під дією одночасно зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, щоб перешкодити будь-яким його переміщенням, називається *реакцією в'язі*. Визначення реакцій в'язей має велике практичне значення: знаючи їх, будемо знати і сили тиску тіла на в'язі, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (наприклад, сила тяжіння), будемо називати *активними силами*. Особливість активної сили полягає в тому, що її модуль і напрям безпосередньо не залежать від інших сил, які діють на тіло. Реакції в'язей відрізняються від діючих на тіло активних сил тим, що їх напрямок і величина завжди залежать від цих сил і наперед невідомі. Якщо ніякі активні сили на тіло не діють, то реакції в'язей дорівнюють нулю. Для визначення реакції в'язі потрібно розв'язати відповідну задачу статички. Правильне визначення напрямів реакцій в'язей відіграє при розв'язуванні задач статички дуже важливу роль.

Розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких основних типів в'язей.

Ідеально гладенька поверхня. Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні цієї опори у точці стикання з даним тілом (рис. 2.1, а).

У випадках, коли спільна нормаль до поверхонь в'язі й тіла виявляється неозначеною, наприклад, вироджується в точку, то реакція в'язі спрямована по нормалі до цієї поверхні, до якої можна провести нормаль. Прикладом може бути опора ребром або вершиною кута (рис. 2.1, б, в).

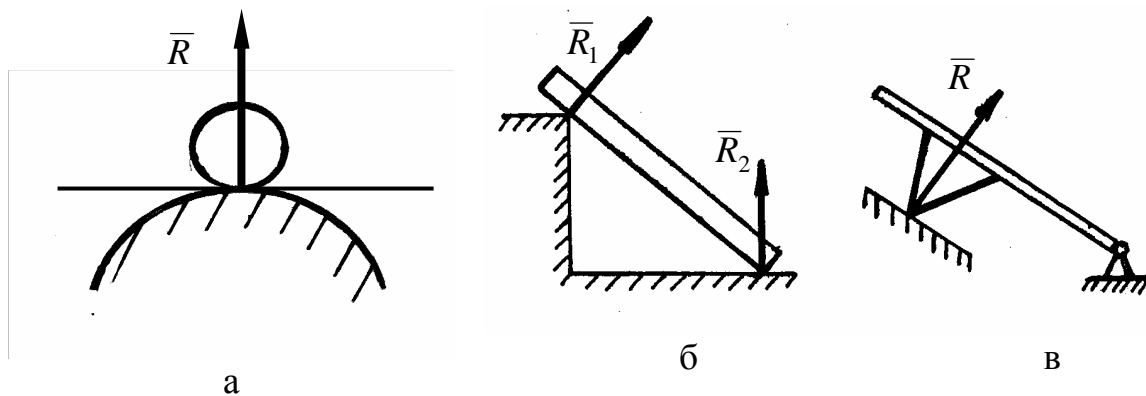


Рис. 2.1

В'язь, що здійснюється гнучким тілом, ниткою або канатом, тросом, ланцюгом. Такі в'язі (рис. 2.2) працюють тільки на розтяг, їх реакції напрямлені по нитці. В'язь, реалізована в даному вигляді, не дає змоги тілу віддалятися від точки підвісу за напрямом AM . Тому реакція \bar{T} нитки AM спрямована завжди вздовж нитки до точки підвісу A . У задачах теоретичної механіки припускають, що нитка є невагомою, гнучкою і нерозтяжною.

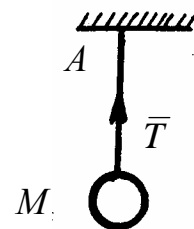
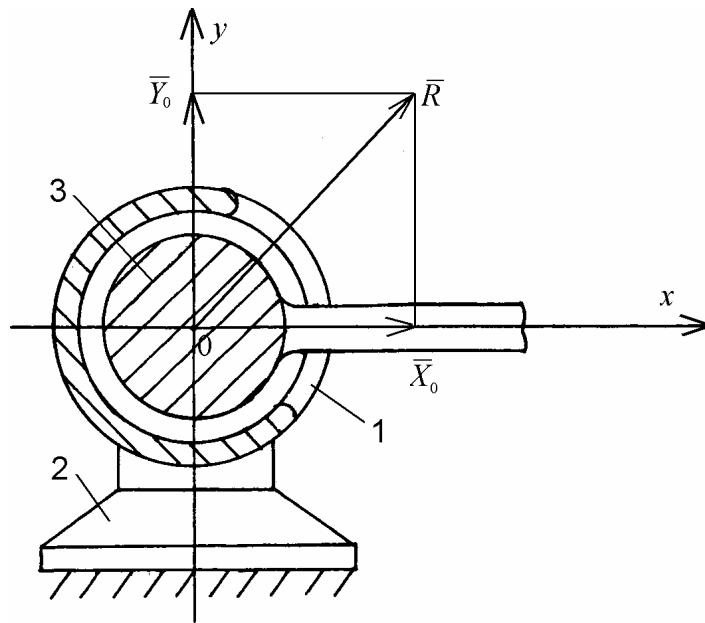


Рис. 2.2

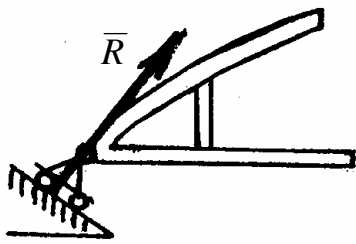
Шарнір циліндричний (сферичний), підп'ятник. З'єднання двох тіл, яке дає змогу одному тілу повертатися відносно іншого, не відділяючись, називається *шарніром*.

Нерухомий циліндричний шарнір. Він звичайно складається з обійми 1, яка закріплена на нерухомій опорі 2, і циліндричного вала 3 (рис. 2.3,а). Тут з'єднане з валом 3 тіло може обертатися тільки навколо осі O шарніра. Реакція \bar{R} циліндричного шарніра перпендикулярна до його осі і має напрям, який залежить від сил, прикладених до тіла. Тому її виражають у вигляді взаємно перпендикулярних координатних складових \bar{X}_0 , \bar{Y}_0 , тобто $\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0$ і $R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$.

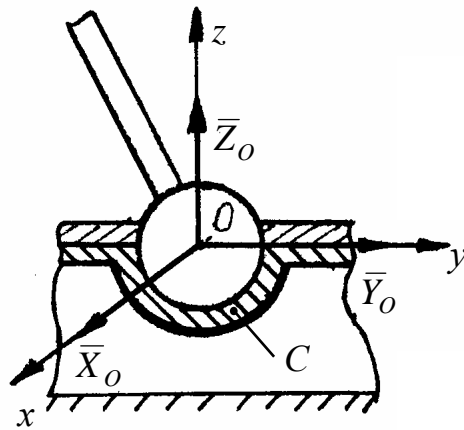
Рухомий циліндричний шарнір (коток). Цей вид в'язі не дає змоги тілу переміщатися в напрямі, перпендикулярному до опорної поверхні котка. Його реакція \bar{R} (рис. 2.3,б) напрямлена завжди по нормалі до опорної площини. Опора на котках застосовується звичайно в мостових конструкціях.



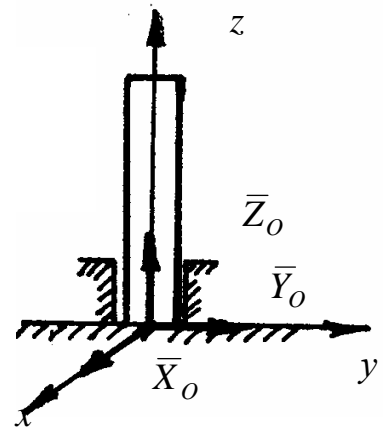
а



б



в



г

Рис. 2.3

Сферичний шарнір. У випадку сферичного шарніра тіло, яке з'єднане з обоймою C , має змогу обертатися навколо центру шарніра в будь-якому напрямі (рис. 2.3,в). Реакцію сферичного шарніра виражають трьома координатними складовими $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\bar{R} = \bar{X}_0 + \bar{Y}_0 + \bar{Z}_0; \quad R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}. \quad (2.1)$$

Під'ятник. Якщо циліндричний шарнір перешкоджає переміщенню вала вздовж осі z вниз, то такий циліндричний шарнір називають під'ятником.

Опорна реакція підп'ятника має три координатні складові $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{Z}_O$ (рис. 2.3, г):

$$\bar{R} = \bar{X}_O + \bar{Y}_O + \bar{Z}_O; R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}. \quad (2.2)$$

Ідеальний стержень. Так називається невагомий стержень AB , закріплений двома ідеальними шарнірами на його кінцях (рис. 2.4). Такий стержень працює тільки на розтяг або стиск.

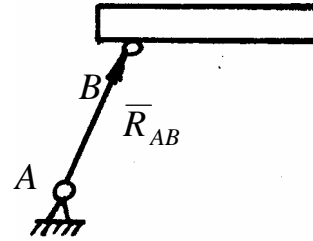


Рис. 2.4

Реакція \bar{R}_{AB} ідеального стержня напрямлена по осі стержня. Якщо стержень розтягнутий, то реакція спрямована від тіла до стержня; якщо стержень стиснутий – то по стержню (рис. 2.4) від нього до тіла.

Жорстке защемлення. Балка AB кінцем A жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець вільний (рис. 2.5). Якщо на балку діє задана сила \bar{F} , то в защемленні виникають реакції \bar{X}_A, \bar{Y}_A і пара сил з моментом M_A .

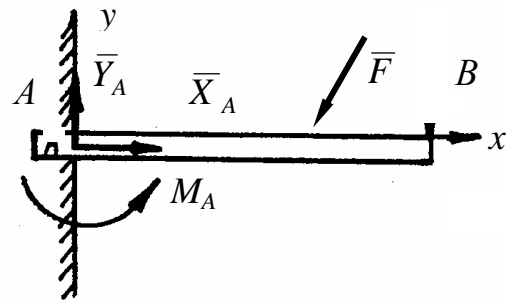


Рис. 2.5

Опора з тертям. У цьому випадку реакцію опори \bar{R} розкладають на дві складові (рис. 2.6): силу \bar{R}_n , нормальну до поверхні опори, і силу \bar{R}_τ , дотичну до поверхні опори (силу тертя):

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_\tau;$$

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2}. \quad (2.3)$$

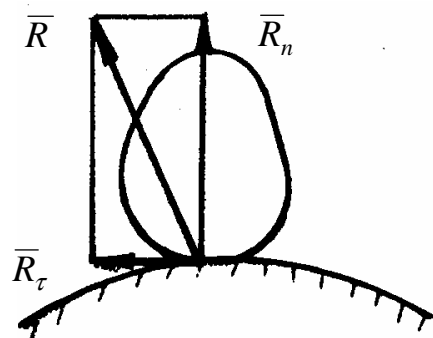


Рис. 2.6

3. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

3.1. Приведення до рівнодійної. Правило многокутника сил

Найпростішою є система *збіжних сил*, тобто система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (точці O збігу сил). Вона може бути просторовою чи плоскою. В останньому випадку всі лінії дії сил системи належать одній площині.

Теорема про рівновагу. Система збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ еквівалентна одній силі (рівнодійній \bar{R}), яка дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил $(\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i)$ і прикладена в точці O їх збігу.

Доведення. Розглянемо (рис. 3.1,а) вихідну систему збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ з лініями дії $a_1 a_1, \dots, a_n a_n$ і точками прикладання A_1, \dots, A_n .

Для кожної сили системи використовуємо аксіому 2 про перенесення сили уздовж лінії дії в точку O збігу (рис. 3.1,б). У результаті отримаємо систему сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$, прикладених в одній точці O .

На основі аксіоми 3 про паралелограм сил будь-яку кількість сил із загальною точкою прикладання можна скласти геометрично. При цьому можна використовувати або правило паралелограма, або правило трикутника (многокутника).

У першому випадку (рис. 3.1,б), застосовуючи послідовно правило паралелограма, дістанемо спочатку рівнодійну $\bar{P}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, далі отримаємо рівнодійну $\bar{P}_2 = \bar{P}_1 + \bar{F}_3$ і, нарешті, рівнодійну $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ заданої системи сил (рис. 3.1,б).

За правилом многокутника рівнодійну сил (рис. 3.1,в) визначаємо як суму векторів цих сил: для цього з кінця вектора \bar{F}_1 відкладаємо вектор сили \bar{F}_2 , і

т.д. З'єднавши початок першого вектора \vec{F}_1 з кінцем останнього \vec{F}_n , визначимо рівнодійну силу

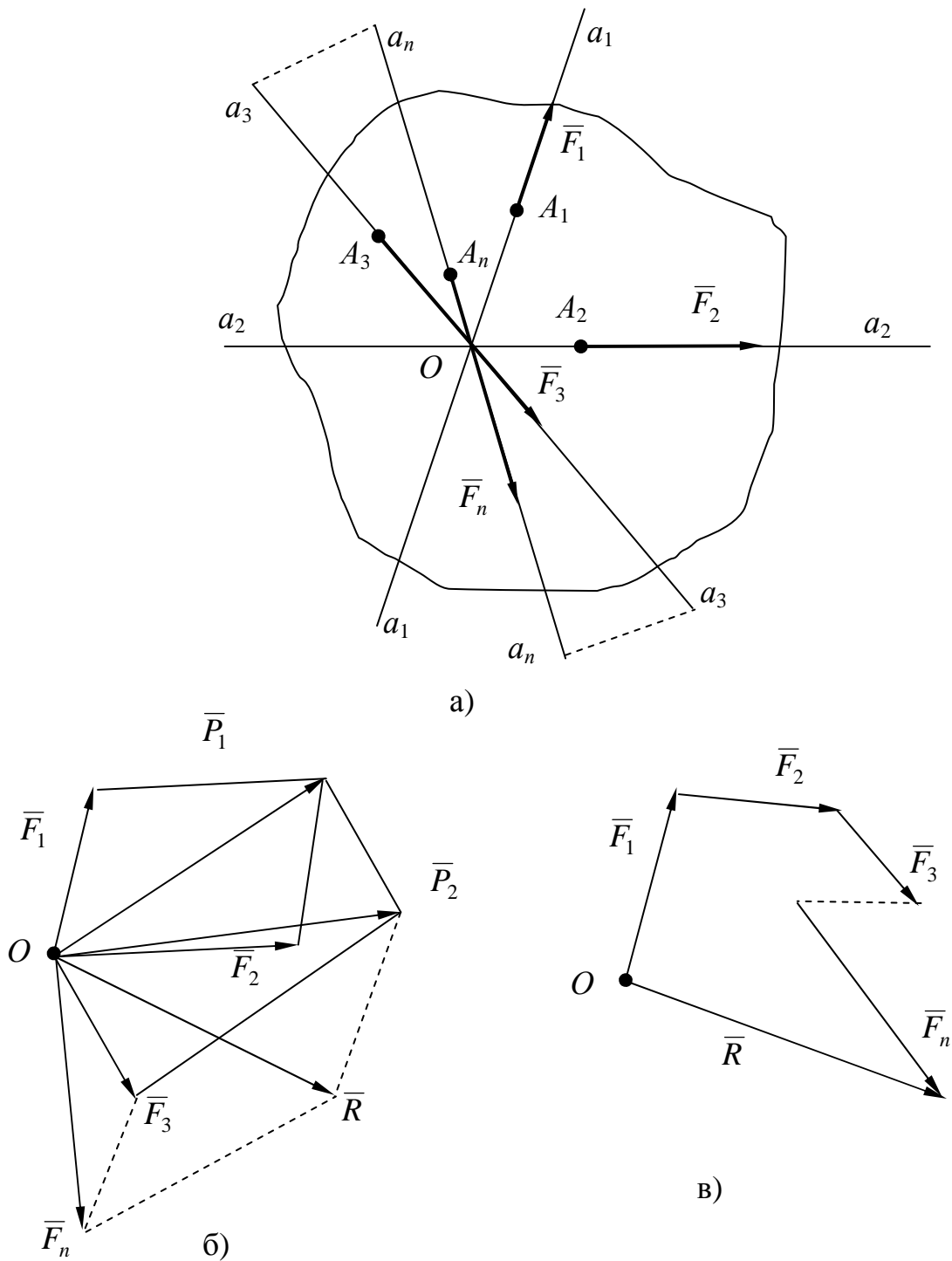


Рис. 3.1

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Одержаний таким чином багатокутник має назву *многокутника сил*, або силового багатокутника, замикальна сторона якого виявляється рівнодієюною силою системи.

Таким чином, теорему доведено.

Доведена теорема дозволяє розв'язувати задачу приведення систем збіжних сил до рівнодієюної сили графічно (нею зручно користуватись у разі плоскої довільної системи сил).

Рівнодієюну \bar{R} можна визначити також аналітично за її проєкціями R_x, R_y, R_z на осі прямокутної системи координат методами векторної алгебри. У даному випадку рівнодієюну \bar{R} представляють так:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z, \quad (3.1)$$

де $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$; $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$; $R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$; F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проєкції сил системи на відповідні осі координат; $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ – координатні складові рівнодієюної.

Величина (модуль) і напрямні косинуси рівнодієюної сили \bar{R} визначають, враховуючи (3.1), за наступними формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (3.2)$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{R}}) = R_x / R; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{R}}) = R_y / R; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{R}}) = R_z / R.$$

Визначивши проєкції або величину і напрямні косинуси рівнодієюної, можна побудувати і сам вектор \bar{R} у заданій системі координат для подальшого розв'язання задачі рівноваги тіла.

Розглянемо, наприклад, задану в площині xOy (рис. 3.2,а) систему двох збіжних сил $F_1 = 1$ Н, $F_2 = 1$ Н. Визначимо рівнодієюну \bar{R} системи методом додавання векторів початкових сил за правилом паралелограма, а також методом додавання координатних складових рівнодієюної за правилом прямокутника (плоска система сил) або паралелепіпеда (просторова система) чи за правилом «модуль-кут».

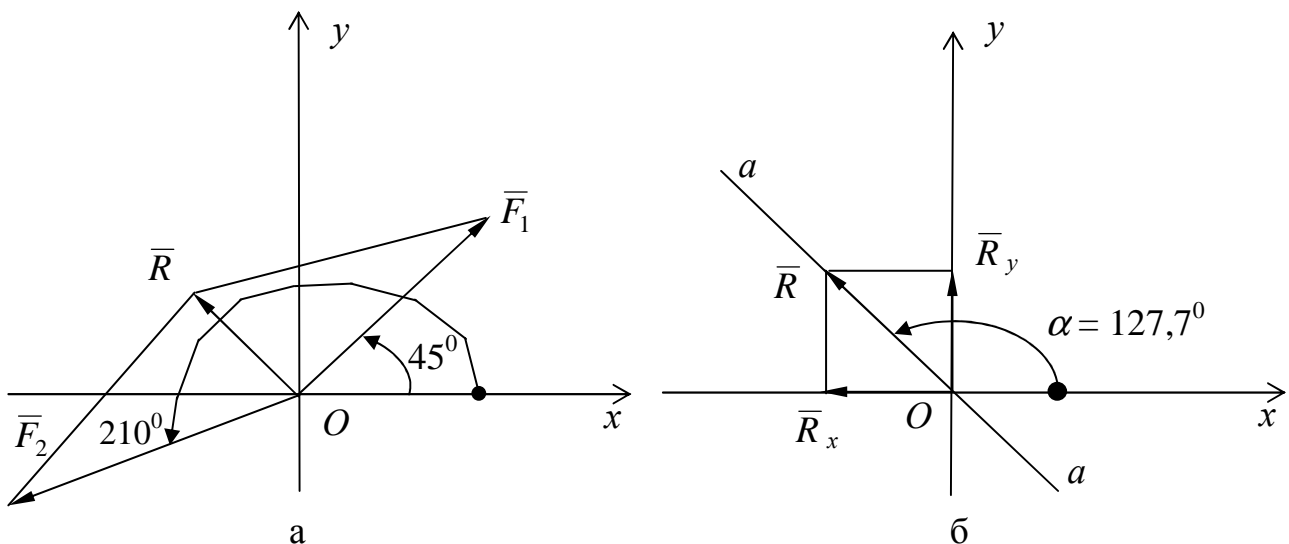


Рис. 3.2

У першому випадку будемо на силах \vec{F}_1, \vec{F}_2 , як на сторонах, паралелограм (рис. 3.2,а), діагональ якого буде шуканою рівнодійною \vec{R} . Величину (модуль) рівнодійної визначаємо за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos 165^\circ} = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot 0,966} = 0,26 \text{ (Н)}.$$

У другому випадку отримаємо: проекції рівнодійної

$$R_x = F_{1x} - F_{2x} = F_1 \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot \cos 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,866 = 0,159 \text{ (Н)},$$

$$R_y = F_{1y} - F_{2y} = F_1 \cdot \sin 45^\circ - F_2 \cdot \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,5 = 0,207 \text{ (Н)},$$

координатні складові рівнодійної:

$$\vec{R}_x = R_x \cdot \vec{i} = -0,159 \cdot \vec{i}, \quad \vec{R}_y = R_y \cdot \vec{j} = 0,207 \cdot \vec{j}.$$

Вектори \vec{R}_x і \vec{R}_y будемо на рис. 3.2,б. Склавши їх за правилом прямокутника, отримаємо шукану рівнодійну \vec{R} .

За правилом «модуль-кут» визначаємо величину рівнодійної

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0,159)^2 + (0,207)^2} = 0,26 \text{ (Н)}, \text{ її напрямний косинус}$$

$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-0,159}{0,26} = -0,61$ і кут $\alpha = 127,7^\circ$. Будемо в площині xOy лінію дії

a - a рівнодійної (рис. 3.2,б), враховуючи визначений кут між нею і віссю Ox .

Далі на лінії дії a - a будемо вектор рівнодійної, який починається в полюсі O системи координат і має величину (довжину) $R = 0,26$ (Н).

3.2. Умови рівноваги системи збіжних сил

Відповідно до теореми про рівнодійну будь-яка система збіжних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ зводиться до прикладеної у точці O збігу сили \bar{R} , рівної геометричній сумі сил системи. За правилом багатокутника сила \bar{R} складає його замикальну сторону.

Під дією лише однієї сили, згідно з аксіомою 1 статички про двійку сил, тіло перебуватиме в рівновазі. Умови його рівноваги формулюються так: для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо¹, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = 0. \quad (3.3)$$

Це геометрична (векторна) умова рівноваги.

Необхідність умови (3.3) очевидна, бо якщо вона не виконується, то тіло знаходиться під дією рівнодійної сили й не перебуватиме у рівновазі.

Достатність цієї умови доведемо так. Якщо рівнодійна системи діючих на тіло сил дорівнює нулю, то за визначенням вона є зрівноваженою (еквівалентною нулю), а тіло під дією такої системи знаходиться у стані спокою безумовно.

Слід зазначити, що з умови $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$ випливає замкненість багатокутника сил: кінець останньої сили \bar{F}_n повинен збігатися з початком першої (точкою O на рис. 3.1,в).

Векторна рівність (3.3) перетворюється, з урахуванням формули (3.1), у аналітичну (алгебраїчну) форму рівноваги просторової системи збіжних сил:

¹ Необхідність означає, що з фізичних умов рівноваги випливають математичні, а достатність, навпаки, - з математичних умов випливають фізичні.

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0; \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0; \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Аналітична форма рівноваги формулюється наступним чином: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій цих сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

Якщо система збіжних сил є плоскою, то з трьох умов рівноваги (3.4) залишаються лише дві, наприклад,

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (3.5)$$

Отримані умови рівноваги у випадку, коли деякі сили в рівностях (3.4), (3.5) є реакціями в'язей, перетворюються в рівняння відносно цих реакцій. При цьому кількість невідомих реакцій в'язів, якщо задача статично визначена, не повинно перевищувати числа рівнянь.

3.3. Теорема про три непаралельні сили

Теорему про рівновагу трьох непаралельних сил застосовують в тих випадках, коли треба знайти дві невідомі сили (реакції в'язів), які зрівноважують третю відому силу (наприклад, силу ваги тіла), якщо відомо точку прикладання однієї з невідомих сил і лінію дії іншої.

Теорема. Якщо тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, з яких принаймні дві лежать в одній площині, то лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці, а вектори сил утворюють замкнений трикутник.

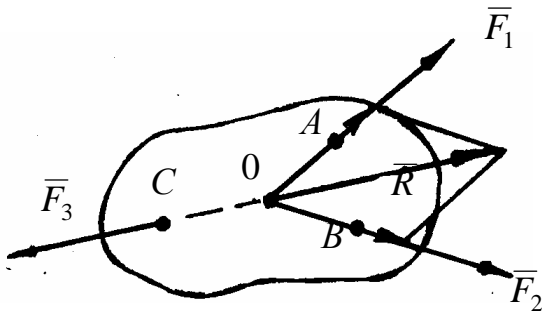


Рис. 3.3

їх рівнодійну $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$. Замінивши сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 їх рівнодійною \bar{R} , одержимо, що дане тіло перебуває в рівновазі під дією тільки двох сил \bar{F}_3 і \bar{R} .

Це можливо, враховуючи аксіому 1 про дві сили, тільки якщо сили \bar{F}_3 і \bar{R} мають спільну лінію дії, тобто коли лінія дії сили \bar{F}_3 проходить через точку O . Теорему доведено.

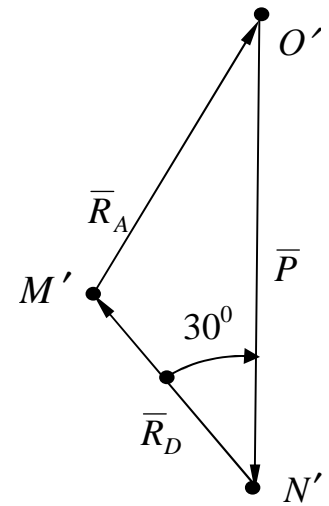
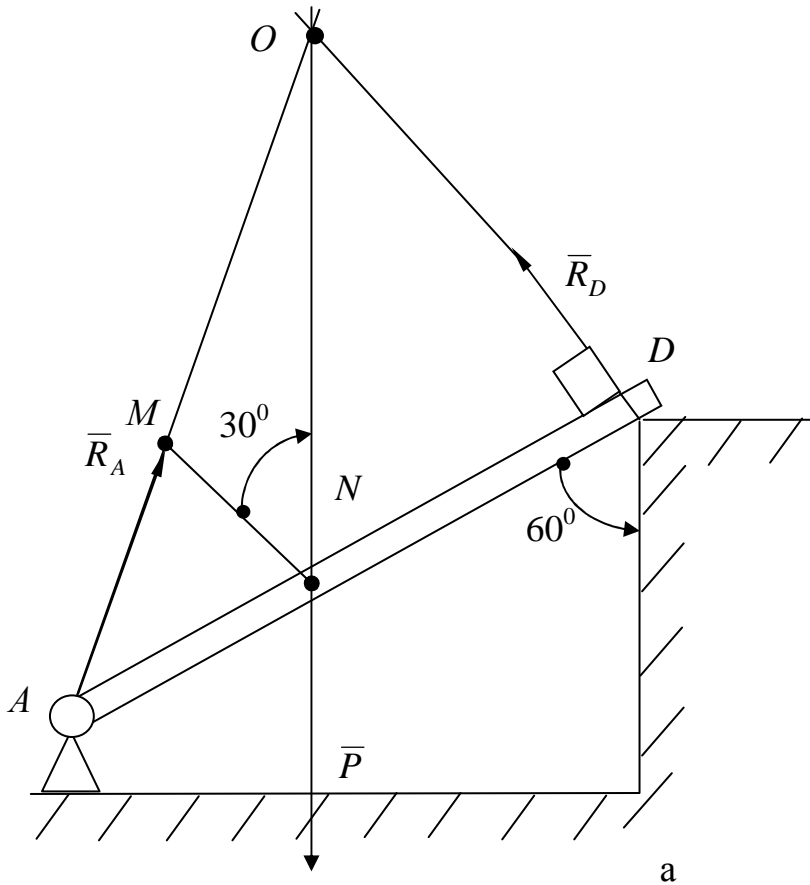
Зауважимо, що доведена теорема визначає необхідну, але не достатню умову рівноваги тіла під дією трьох сил. Дійсно, тіло під дією трьох сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, може і не перебувати в рівновазі, а здійснювати поступальний рівномірний рух, відповідно до першого закону Ньютона.

Застосувавши до заданої системи трьох сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ геометричну умову рівноваги, дістаємо також, що трикутник сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ буде замкнений: кінець третьої сили \bar{F}_3 буде збігатися з початком першої сили \bar{F}_1 .

Приклад. Розглянемо, наприклад, зображену на рис. 3.4,а механічну схему, що складається з бруса вагою P , який спирається кінцем на прямокутний виступ D і закріплений в точці A з підлогою через нерухому шарнірну опору. Визначимо реакції опор, якщо $AN = ND = a$.

Розв'язання. Лінії дії сили ваги \bar{P} і реакції в'язі \bar{R}_D у точці D відомі. Через точку O їх перетину, відповідно до теореми про три сили, повинна проходити невідома лінія дії реакції \bar{R}_A . Будуємо її на схемі. З урахуванням

Доведення. Нехай тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, з яких \bar{F}_1 і \bar{F}_2 лежать в одній площині (рис. 3.3). Продовжимо лінії дії сил \bar{F}_1, \bar{F}_2 і знайдемо їх точку перетину O . Перенесемо сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 вздовж їх ліній дії в точку O і знайдемо



б

Рис. 3.4

визначених ліній дій реакції \bar{R}_A , \bar{R}_D і відомої сили \bar{P} будемо замкнений силний трикутник (рис. 3.4,б) $O'N'M'$, який подібний трикутнику ONM на рис. 3.4,а. Силний трикутник дозволяє визначити не тільки напрями реакцій \bar{R}_A , \bar{R}_D , але і їх величини. Для цього треба використати умови пропорційності

сторін подібних трикутників $\left(\frac{ON}{MN} = \frac{P}{R_D}\right)$, а також теорему косинусів

$$\left(R_A = \sqrt{P^2 + R_D^2 - 2P \cdot R_D \cdot \cos 30^0}\right).$$

4. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. СКЛАДАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ. ПАРА СИЛ, ТЕОРЕМИ ПРО ПАРИ

4.1. Момент сили відносно точки

Силовий фактор, під дією якого тіло може здійснювати обертальний рух, називається *моментом сили відносно точки* (полюса). Це фізичне поняття.

З математичної точки зору момент сили \vec{F} відносно точки O (рис. 4.1) визначається вектором $\vec{M}_0(\vec{F})$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора \vec{r}_A точки A прикладання сили на її вектор \vec{F} :

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}. \quad (4.1)$$

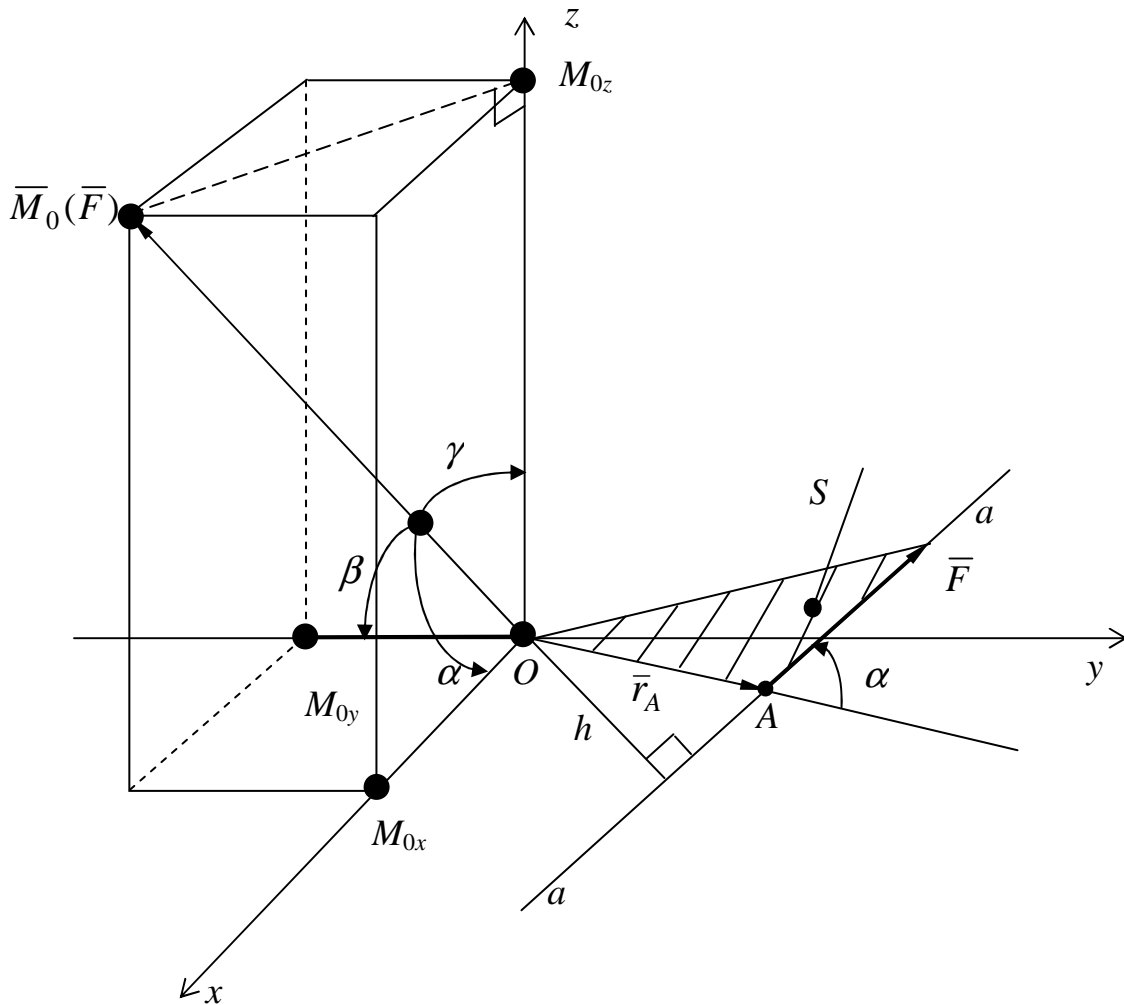


Рис. 4.1

Отже, враховуючи поняття і визначення векторної алгебри, отримаємо наступні властивості моменту сили відносно точки:

- момент сили відносно точки O є зв'язаним у точці вектором, який напрямлений перпендикулярно до площини S , що проходить через точку O і лінію дії a -а сили \vec{F} , у той бік, звідки обертання тіла під дією сили навколо точки видно проти ходу стрілки годинника;

- в координатній формі момент сили обчислюється так:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y) \cdot \vec{i} + (zF_x - xF_z) \cdot \vec{j} + \\ &+ (xF_y - yF_x) \cdot \vec{k} = M_{0x} \cdot \vec{i} + M_{0y} \cdot \vec{j} + M_{0z} \cdot \vec{k}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $\vec{r}_A = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$; $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$; M_{0x} ; M_{0y} ; M_{0z} – проєкції моменту сили відносно точки O на осі системи координат (рис. 4.1);

- основною одиницею вимірювання моменту сили відносно точки є 1 Н·м;

- за величиною момент сили дорівнює модулю вектора $\vec{M}_0(\vec{F})$:

$$M_0(\vec{F}) = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2},$$

або
$$M_0(\vec{F}) = |\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{r}_A \times \vec{F}| = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha = hF, \quad (4.3)$$

де $h = r_A \cdot \sin \alpha$ – плече сили \vec{F} відносно точки O , тобто довжина перпендикуляра, який опущено (рис. 4.1) з точки O на лінію дії a -а сили \vec{F} ;

- відповідно до формули (4.3) момент сили відносно полюса дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через даний полюс (при цьому плече сили $h = 0$);

- момент сили відносно точки умовимось вважати додатним (вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$ моменту сили на рис. 4.2,а спрямуємо перпендикулярно до горизонтальної площини S вертикально догори) у випадку, якщо сила намагається викликати обертання тіла (або плеча h навколо точки) проти ходу стрілки годинника, і від'ємним – навпаки (рис. 4.2,б).

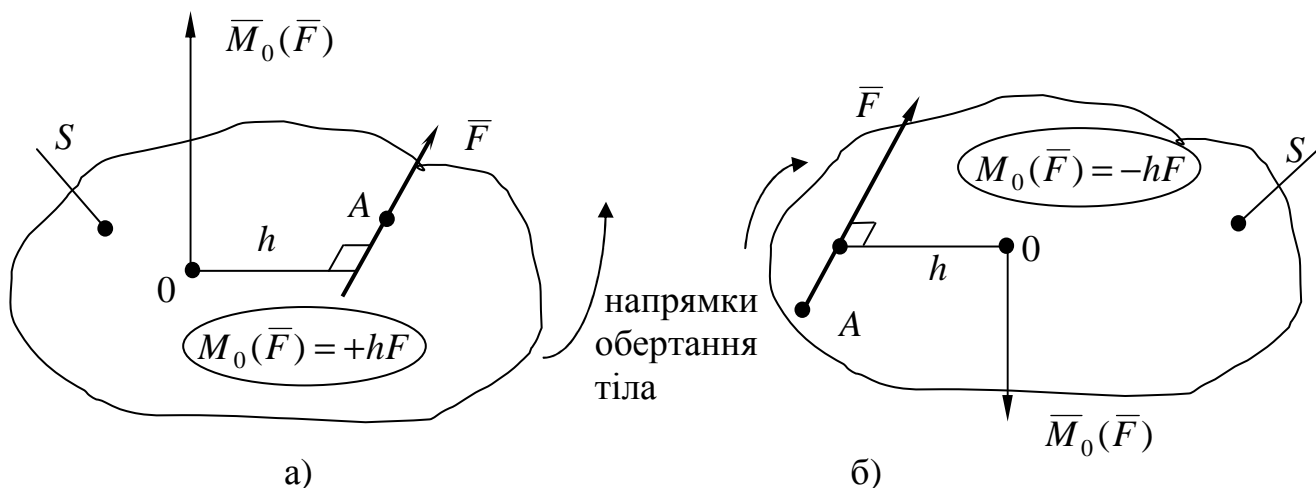


Рис. 4.2

4.2. Момент сили відносно осі

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі. Ним називається проекція на цю вісь вектора $\bar{M}_0(\bar{F})$ моменту сили відносно точки O , що лежить на цій осі (рис. 4.1).

Відповідно до схеми на рис. 4.1 і виразу (4.2) моменти сили \bar{F} відносно координатних осей Ox, Oy і Oz будуть визначитися так:

$$M_{0x}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \alpha; \quad M_{0y}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \beta; \quad M_{0z}(\bar{F}) = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \gamma$$

або $M_{0x} = yF_z - zF_y; \quad M_{0y} = zF_x - xF_z; \quad M_{0z} = xF_y - yF_x$.

На практиці момент сили відносно осі звичайно визначають за наступними правилом:

- проводять площину S , перпендикулярну до осі Oz , і знаходять точку O перетину осі з площиною (рис. 4.3);

- проектують задану силу \bar{F} на зазначену площину, отримуючи силу \bar{F}_s ;

- обчислюють момент сили \bar{F}_s відносно точки O перетину площини S з віссю Oz , враховуючи наведені в розд. 4.2 його властивості: $M_0(\bar{F}_s) = \pm hF_s$;

- момент заданої сили \bar{F} відносно осі Oz визначають за формулою

$$\bar{M}_{0z}(\bar{F}) = \bar{M}_0(\bar{F}_s).$$

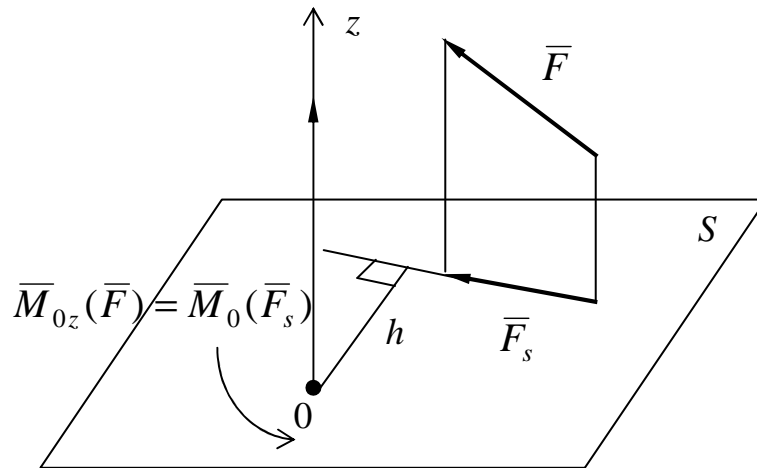


Рис. 4.3

На рис. 4.3 момент $\bar{M}_{0z}(\bar{F})$ – координатна складова \bar{M}_{0z} вектора моменту сили відносно точки O , який згідно з (4.2) дорівнює:

$$\bar{M}_0(\bar{F}) = \bar{M}_{0x} + \bar{M}_{0y} + \bar{M}_{0z}.$$

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

- сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили \bar{F} на площину S дорівнює нулю: $\bar{F}_s = 0$);
- лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече $h = 0$).

4.3. Алгебраїчний момент сили відносно точки

При розв’язанні задач статки у площині при складанні рівнянь моментів використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

Алгебраїчним моментом сили відносно точки називається взятий з відповідним знаком добуток плеча на модуль сили. Береться знак “+”, якщо сила намагається повернути плече проти ходу стрілки годинника.

Таким чином, для визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки треба виконати такі дії (рис. 4.4,а,б):

- 1) провести лінію дії сили;

2) з вибраної точки опустити перпендикуляр до лінії дії сили (довжина перпендикуляра h – плече сили);

3) скласти добуток плеча на модуль сили;

4) взяти знак “+”, якщо сила намагається повернути плече відносно вибраної точки проти ходу стрілки годинника (рис. 4.4,а) і знак “-” – за ходом стрілки годинника (рис. 4.4,б).

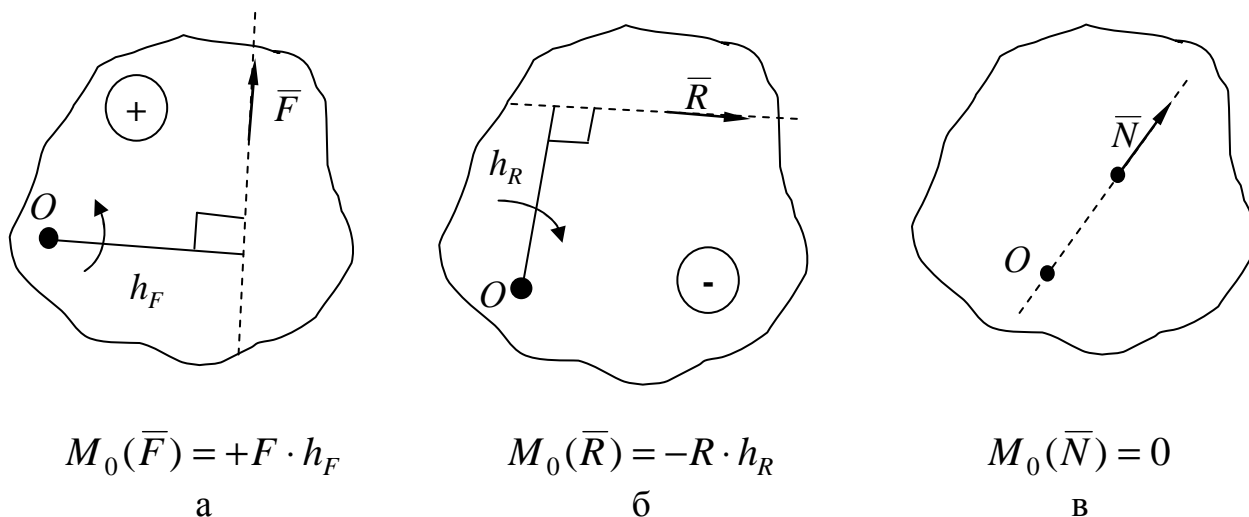


Рис. 4.4

Окремий випадок (рис. 4.4,в): алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тут плече $h = 0$).

Зрівнюючи правила визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки і моменту сили відносно осі, робимо висновок, що алгебраїчний момент сили відносно точки є не чим іншим, як моментом сили відносно осі, яка проходить через точку перпендикулярно до площини рисунка і напрямлена до спостерігача.

4.4. Складання паралельних сил

Прикладами паралельних сил є сили ваги вузлів машини, трамваю (рис. 4.5,а), реакції поверхні шляху на коток (рис. 4.5,б) та ін.

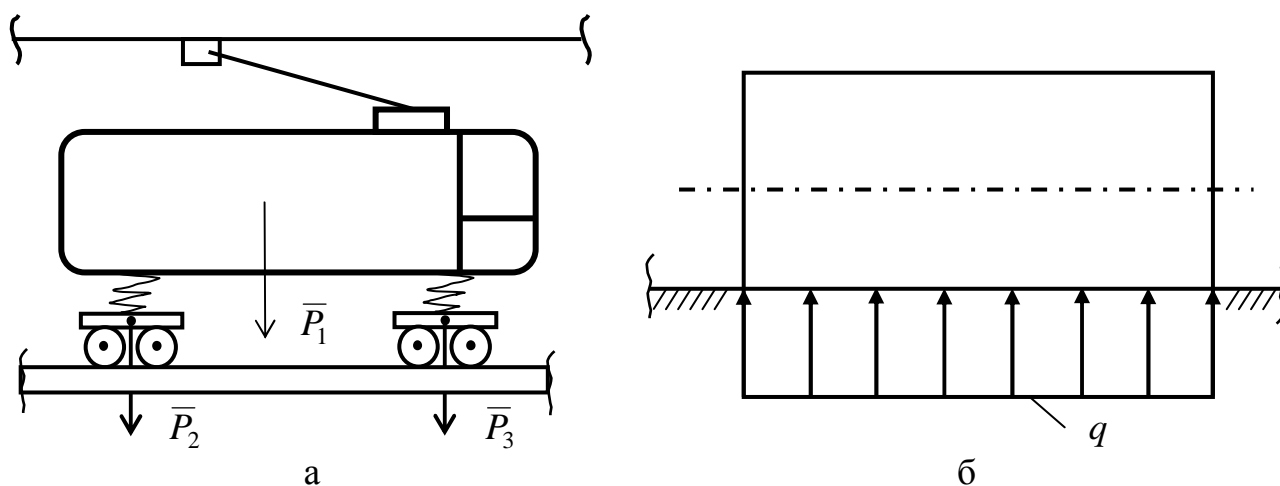


Рис. 4.5

4.4.1. Складання двох сил, напрямлених в один бік

Розглянемо тверде тіло, на яке в точках A і B діють дві паралельні сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 (рис. 4.6). Приведемо вихідну систему паралельних сил до еквівалентної системи збіжних сил \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 . Для цього прикладемо в точках A і B дві зрівноважені, довільні за величиною сили \bar{P}_1 і $\bar{P}_2 = -\bar{P}_1$) і складемо їх за правилом паралелограма. Одержані сили \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 перенесемо до точки O перетину їх ліній дії. Після цього кожен з сил \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 розкладемо на дві складові, кожна з яких дорівнює аналогічним складовим сил \bar{Q}_1 і \bar{Q}_2 у точках A і B . За побудовою і визначенням отримані складові сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 складуть двійку сил, тому їх можна відкинути (закреслено на рис. 4.6). Залишені сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , за побудовою, будуть мати загальну лінію дії. Тому перенесемо їх у точку C перетину зазначеної лінії дії з відрізком AB . У точці C їх складемо і замінюємо рівнодійною:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

Для визначення положення точки C на відрізку AB розглянемо трикутники OAC , OaC , OBC , ObC . Вони подібні за побудовою, тому будуть виконуватись наступні пропорційні співвідношення їх сторін:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{ak}{Ok}, \quad \frac{BC}{OC} = \frac{bm}{Om}. \quad (4.4)$$

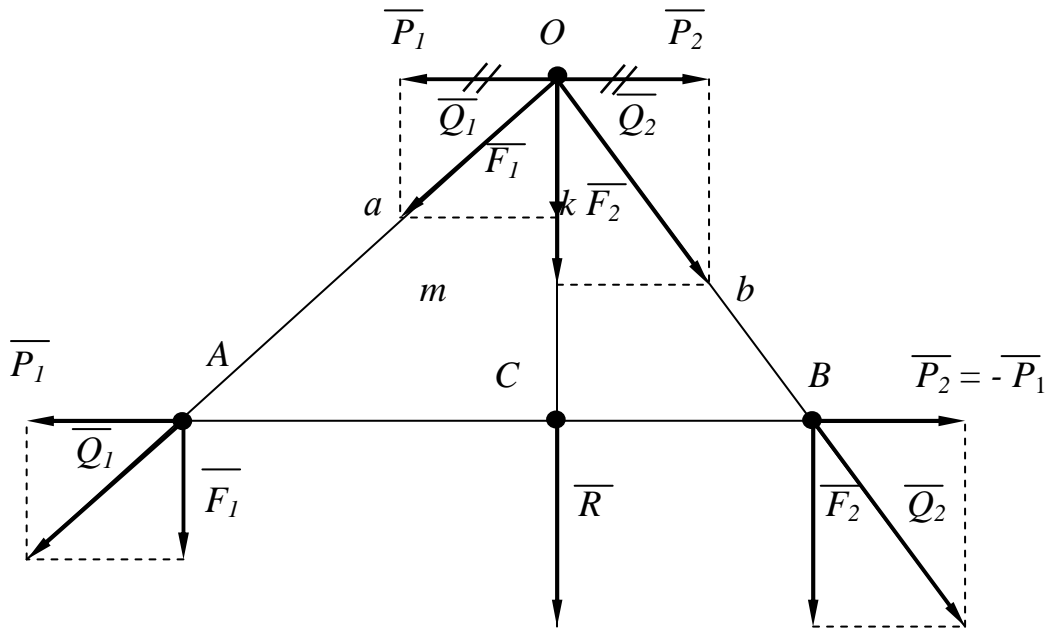


Рис. 4.6

Розв'язавши пропорції (4.4) та враховуючи, що $BC + AC = AB$, а $Ok = F_1$, $Om = F_2$, одержимо

$$BC = AB \cdot \frac{F_1}{F_1 + F_2}; \quad AC = AB \cdot \frac{F_2}{F_1 + F_2}; \quad \frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (4.5)$$

У результаті виконаних перетворень початкову систему паралельних сил \bar{F}_1 , \bar{F}_2 зведено до однієї сили рівнодійної $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$. Отримано також, що рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в один бік, дорівнює за модулем сумі модулів складових сил, їм паралельна і напрямлена у той же бік; лінія дії рівнодійної проходить між точками прикладання складових сил на відстані від цих точок, обернено пропорційній (4.5) силам.

4.4.2. Складання двох сил, напрямлених в різні боки

Зобразимо прикладені до тіла у точках A , B сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , причому нехай за величиною $F_1 > F_2$ (рис. 4.7). Візьмемо на продовженні відрізка BA точку C і

прикладемо в ній двійку сил \bar{R} і \bar{R}' , які паралельні силам \bar{F}_1 і \bar{F}_2 . При цьому модулі сил і положення точки C оберемо так, щоб виконувались рівності:

$$R = F_1 - F_2, \quad \frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \quad (4.6)$$

Отже, складаючи сили \bar{F}_2 і \bar{R}' , знайдемо, що їх рівнодійна $\bar{Q} = \bar{F}_2 + \bar{R}'$, тобто дорівнює за величиною силі \bar{F}_1 , протилежно їй направлена і прикладена в точці A . Сили \bar{F}_1 і \bar{Q} , як зрівноважені, можна відкинути (закреслено на рис. 4.7). У результаті задані сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 будуть замінені однією силою \bar{R} , яка і є їх рівнодійною. Модуль цієї рівнодійної та точка її прикладання C визначається формулами (4.6).

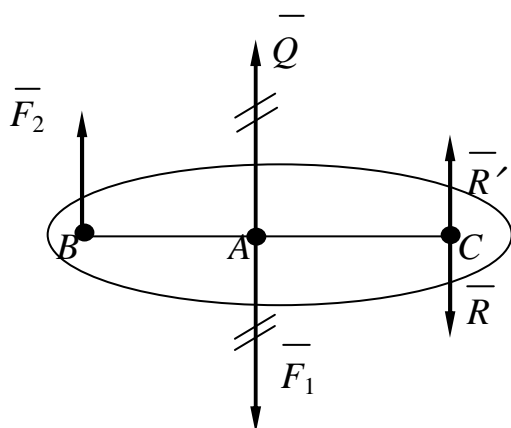


Рис. 4.7

Таким чином, рівнодійна двох напрямлених в різні боки паралельних сил дорівнює за величиною різниці модулів заданих сил, їм паралельна і направлена в бік більшої з сил; лінія дії рівнодійної проходить поза відрізком, який з'єднує точки прикладання складових сил, на відстані, обернено пропорційній силам.

Коли на тіло діють декілька паралельних сил, то їх рівнодійну можна знайти послідовно, використовуюючи правила складання двох паралельних сил.

У випадку розподілених сил діють наступним способом. Силу ваги тіла показують у вигляді рівнодійної, яка має початок у центрі C ваги і спрямована завжди вертикально донизу (рис. 4.8,а). Якщо сили розподілені за довжиною, то діють так: у випадку прямокутної епюри (рис. 4.8,б) сили замінюють рівнодійною $Q = q \cdot l$ (l – довжина відрізка AB прикладання сил), яка прикладена у середині відрізка AB ; при лінійному законі розподілу сили (рис. 4.8,в) рівнодійна $Q = q_1 \cdot l/2$ прикладена у точці з координатою $2l/3$; при

довільному законі (рис. 4.8,г) – величину рівнодійної сили визначають

формулою $Q = \int_0^l q(x)dx$, а координату її прикладання –

$x_c = \left(\int_0^l q(x) \cdot x \cdot dx \right) / \left(\int_0^l q(x)dx \right)$. Однак завжди лінія дії рівнодійної проходить

через центр ваги площі епюри розподілених сил (наприклад, у випадку лінійного закону розподілу сил (рис. 4.8,в) вона проходить через точку перетину медіан трикутника).

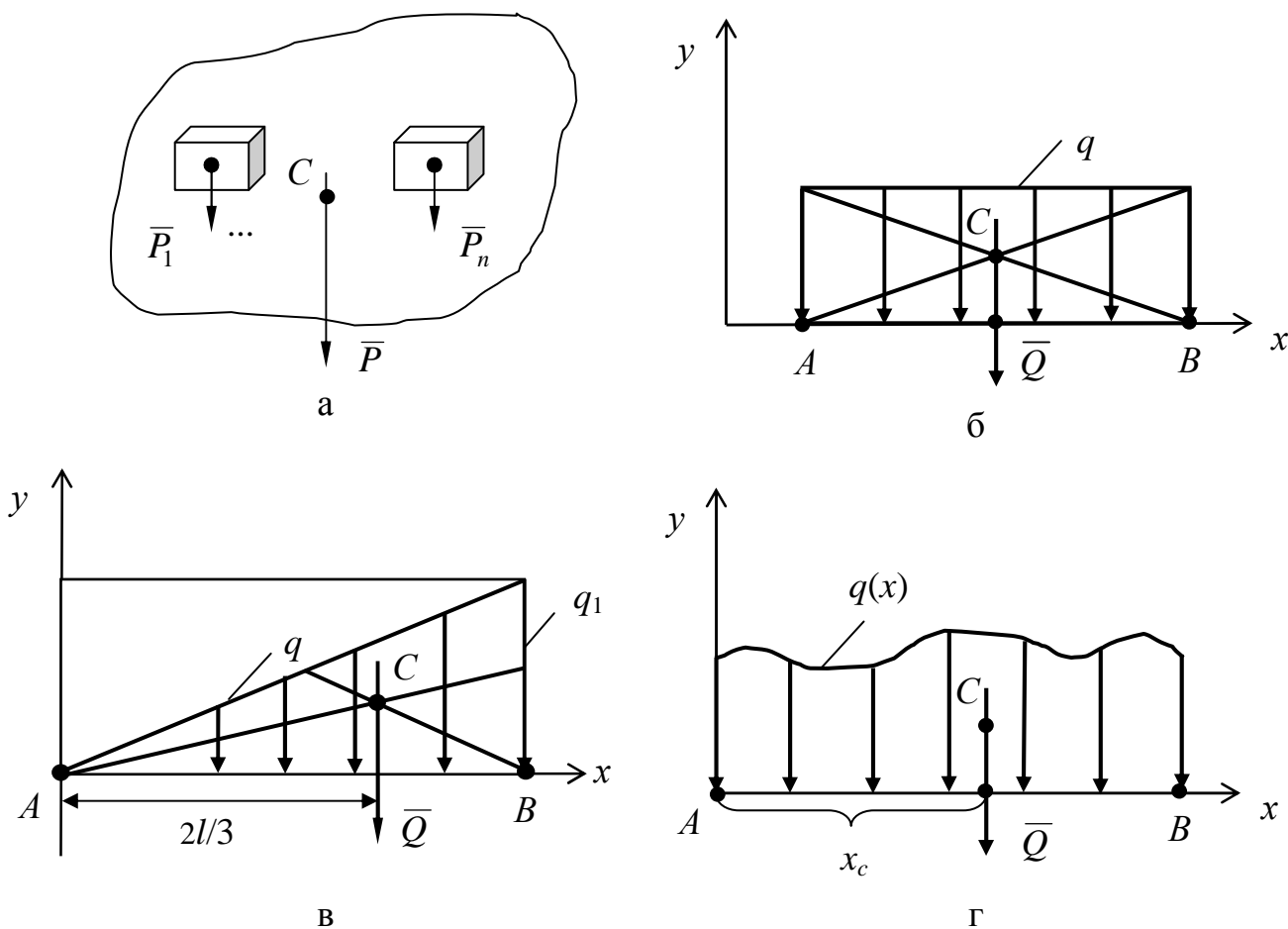


Рис. 4.8

4.5. Пара сил. Момент пари. Теорема про пари сил

4.5.1. Визначення пари сил

Парою сил називається система двох, розташованих в одній площині паралельних сил (\vec{F}, \vec{F}') , які рівні за величиною і протилежно направлені.

Площина S , яка проходить через лінії дії сил пари (рис. 4.8), називається *площиною дії пари*.

Дія пари сил на тіло призводить до його обертання навколо осі, яка перпендикулярна до площини дії пари сил.

Момент пари сил (\vec{F}, \vec{F}') математично визначається вектором $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$ (рис. 4.8),

рівним векторному добутку $\vec{h} \times \vec{F}$. Отже, враховуючи його властивості, отримаємо,

що вектор $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$ моменту пари сил напрямлений перпендикулярно до площини S дії пари сил у той бік, звідки обертання пари відбувається проти ходу стрілки годинника.

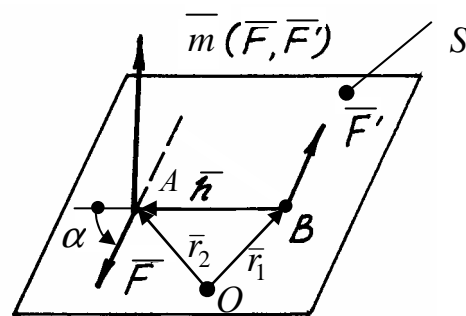


Рис. 4.8

Відповідно до механічної схеми на рис. 4.8 отримаємо наступні властивості моменту пари сил:

- за величиною момент пари сил дорівнюватиме модулю вектора $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$:

$$m(\vec{F}, \vec{F}') = |\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')| = |\vec{h} \times \vec{F}| = h \cdot F \cdot \sin \alpha.$$

Звичайно при побудові схеми на рис. 4.8 приймають кут $\alpha = 90^\circ$, тоді матимемо $m(\vec{F}, \vec{F}') = h \cdot F$. У цьому випадку h визначають *плечем пари сил* (найкоротший відрізок між лініями дії сил, що складають пару);

- пара сил не має рівнодійної, тому що при $\vec{F} = -\vec{F}'$ виконується рівність $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$; при цьому властивості сумісної механічної (обертальної) дії сил пари на тіло зберігаються і проявляються у вигляді моменту $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{h} \times \vec{F}$ пари, рівному сумі моментів $\vec{M}_0(\vec{F}) + \vec{M}_0(\vec{F}')$ заданих сил відносно будь-якої точки O тіла. Нехай, наприклад, точка O на рис. 4.8 – довільна точка простору, а \vec{r}_1, \vec{r}_2 радіуси-вектори точок прикладання сил \vec{F}' і \vec{F} пари. З визначення моменту сили відносно точки маємо

$$\vec{M}_0(\vec{F}') + \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}' + \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F} = \vec{h} \times \vec{F}$$

або
$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_0(\bar{F}) + \bar{M}_0(\bar{F}'). \quad (4.7)$$

З виразу (4.7) виходить, що момент прикладеної до тіла пари сил (\bar{F}, \bar{F}') дорівнює сумі моментів цих сил відносно точки O і не залежить від її положення у просторі.

Інші властивості пари сил визначаються наступними теоремами.

Теорема про еквівалентність пар. Не змінюючи дії на тіло, пару сил можна замінити іншою парою, яка лежить в цій самій площині і має такий самий момент за величиною і напрямом.

Доведення. Нехай на тіло діє пара сил (\bar{F}, \bar{F}') з плечем d_1 (рис. 4.9). Проведемо у площині дії пари сил через довільні точки D і C дві паралельні прямі до перетину їх з лініями дій сил пари в точках A і B . Відстані між прямими AC і BD позначимо як d_2 . Розкладемо сили \bar{F} і \bar{F}' за напрямками AB , BD і AC . За побудовою очевидно, що $\bar{P} = -\bar{P}'$, $\bar{Q} = -\bar{Q}'$, тоді сили \bar{Q} і \bar{Q}' , як зрівноважені, можна відкинути. Сили \bar{P} і \bar{P}' перенесемо уздовж їх ліній дій у точки D і C . У результаті проведених перетворень задану пару сил (\bar{F}, \bar{F}') було замінено новою парою (\bar{P}, \bar{P}') з іншим плечем d_2 та іншими силами.

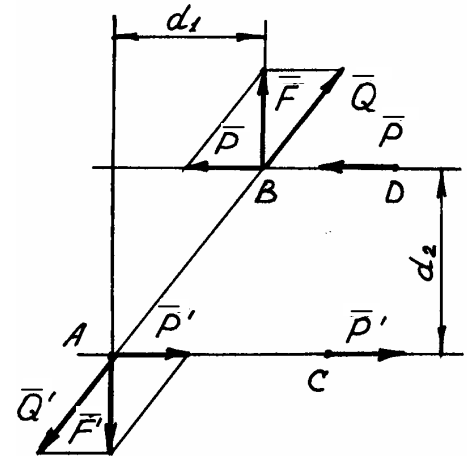


Рис. 4.9

Через довільність вибору точок D , C і напрямків прямих BD і AC нова пара сил може бути розташована у площині її дії де завгодно.

Покажемо, що моменти нової і заданої пар сил (\bar{P}, \bar{P}') і (\bar{F}, \bar{F}') рівні. За побудовою сила $\bar{F} = \bar{P} + \bar{Q}$, а сила \bar{Q} проходить через точку A , тому буде виконуватись:

$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_A(\bar{F}) = \bar{M}_A(\bar{P}) + \bar{M}_A(\bar{Q}) = \bar{M}_A(\bar{P}) = \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}'),$$

тобто
$$\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}'); \quad Fd_1 = Pd_2. \quad (4.8)$$

З рівностей (4.8) випливають такі додаткові властивості пар сил:

- задану пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна переносити як завгодно у площині її дії;
- у заданій парі сил можна змінювати сили і довжину плеча, щоб залишався незмінним її момент;
- дві пари, що лежать в одній площині і мають однакові моменти, є еквівалентними;
- момент пари сил є вільним вектором: його можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла.

Теорема про перенесення пари в паралельну площину. Дія пари сил на

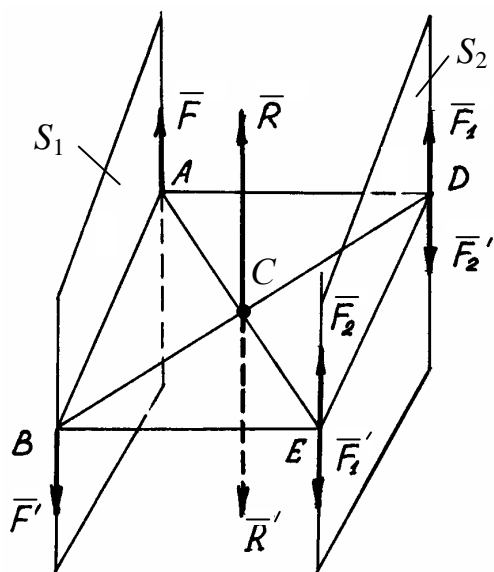


Рис. 4.10

тіло не порушиться, якщо її перенести із заданої площини у довільну іншу площину, яка паралельна заданій.

Доведення. Розглянемо пару сил (\bar{F}, \bar{F}') з площиною дії S_1 (рис. 4.10). Побудуємо площину S_2 , паралельну площині S_1 , і визначимо на ній відрізок ED , рівний і паралельний відрізку AB у площині S_1 . У точках D і E прикладемо двійку сил, в яких $F_1 = F_1' = F_2 = F_2' = F$.

За побудовою фігура $ABED$ є паралелограмом. Далі додамо паралельні сили \bar{F} і \bar{F}_2 . Їх рівнодійна \bar{R} буде прикладена в точці C – середині відрізка AE . Аналогічно сили \bar{F}' і \bar{F}_2' зводяться до рівнодійної \bar{R}' , прикладеної в середині відрізка BD , тобто в точці C . За побудовою і визначенням рівнодійні сили \bar{R} і \bar{R}' будуть рівними і протилежно направлені, тому їх можна відкинути. У результаті задана пара сил (\bar{F}, \bar{F}') перетворюється в пару сил (\bar{F}_1, \bar{F}_1') , яка розміщена у площині S_2 .

З доведеної теореми випливає, що дві пари, які лежать в одній площині або в паралельних площинах і мають однакові моменти, еквівалентні.

Теорема про додавання пар сил. Довільну систему двох пар сил можна замінити рівнодією парою. Момент рівнодіючої пари дорівнює векторній сумі моментів початкових пар.

Доведення. Розглянемо пари сил з моментами \bar{m}_1 і \bar{m}_2 , які лежать у довільних площинах S_1 і S_2 , що перетинаються (рис. 4.11). Визначимо на лінії перетину цих площин відрізок $AB = d$ і позначимо його вектором \overline{AB} .

Визначимо пару сил з моментом \bar{m}_1 силами (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) , а пару сил з моментом \bar{m}_2 – силами (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) , прикладеними в точках A і B . При цьому виконуватиметься $m_1 = F_1 d$, $m_2 = F_2 d$. Додаючи прикладені в точках A і B сили, замінимо системи сил (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) і (\bar{F}_2, \bar{F}'_2) силами \bar{R}, \bar{R}' ,

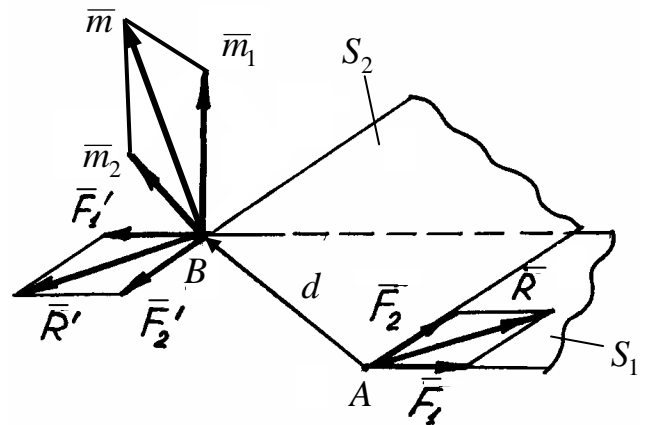


Рис. 4.11

які за визначенням складуть пару сил (\bar{R}, \bar{R}') . Момент рівнодіючої пари (\bar{R}, \bar{R}') , оскільки $\bar{R}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2$, визначатиметься як

$$\bar{m}(\bar{R}, \bar{R}') = \overline{AB} \times \bar{R}' = \overline{AB} \times (\bar{F}'_1 + \bar{F}'_2) = (\overline{AB} \times \bar{F}'_1) + (\overline{AB} \times \bar{F}'_2) = \bar{m}_1 + \bar{m}_2. \quad (4.9)$$

Якщо на тіло діє n пар сил з моментами $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n$, то, застосовуючи послідовно формулу (4.9), одержимо (рис. 4.12), що задана система пар сил зводиться до результуючої пари з моментом

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \quad (4.10)$$

Тут результуючу пару \bar{m} визначають (див. силовий многокутник у розділі 3) замикаючою стороною многокутника векторів \bar{m}_n .

Якщо пари сил лежать в одній площині, то вектори їх моментів будуть паралельні. Тому момент результуючої пари \bar{m} дорівнює алгебраїчній сумі складових моментів:

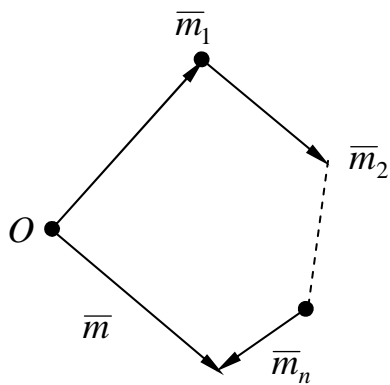


Рис. 4.12

$$m = \sum_{k=1}^n m_k.$$

Момент результуючої пари сил \bar{m} можна визначити аналітично, спроектувавши векторне рівняння (4.10) на осі системи координат:

$$m_x = \sum_{k=1}^n m_{kx} = m_{1x} + \dots + m_{nx};$$

$$m_y = \sum_{k=1}^n m_{ky} = m_{1y} + \dots + m_{ny};$$

$$m_z = \sum_{k=1}^n m_{kz} = m_{1z} + \dots + m_{nz}.$$

Величину (модуль вектора \bar{m}) результуючої пари визначають як

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}.$$

При побудові вектора \bar{m} у просторі, тобто при визначенні площини дії результуючої пари сил звичайно використовують його напрямні косинуси:

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{m}}) = m_x / m, \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{m}}) = m_y / m, \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{m}}) = m_z / m.$$

4.5.2. Умови рівноваги системи пар сил

Враховуючи властивості рівнодійної збіжних сил, результуючої пари сил, властивості вектора моменту пари сил як вільного вектора, а також умови рівноваги збіжної системи сил, отримаємо наступні необхідні й достатні умови рівноваги тіла під дією системи пар сил $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)$:

- векторна (геометрична) форма рівноваги:

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^n m_k = \bar{m}_1 + \dots + \bar{m}_n = 0, \quad (4.11)$$

тобто багатокутник моментів пар сил початкової системи (рис. 4.12) повинен бути замкненим: кінець останнього вектора \bar{m}_n повинен збігатися з початком (точкою O) першого;

- аналітична (алгебраїчна) форма рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \sum_{k=1}^n m_{kx} = m_{1x} + m_{2x} + \dots + m_{nx} = 0; \\ m_y &= \sum_{k=1}^n m_{ky} = m_{1y} + m_{2y} + \dots + m_{ny} = 0; \\ m_z &= \sum_{k=1}^n m_{kz} = m_{1z} + m_{2z} + \dots + m_{nz} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

тобто суми проєкцій m_{kx}, m_{ky}, m_{kz} моментів пар сил системи на кожную з трьох координатних осей (Ox, Oy, Oz) дорівнюватимуть нулю.

5. ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ У ПРОСТОРИ Й ПЛОЩИНІ. ЗВЕДЕННЯ ДО ЗАДАНОГО ЦЕНТРА (ТЕОРЕМА ПУАНСО)

У реальних умовах експлуатації на тіло, нехай-то електродвигун, кузов трамваю, лопатка турбіни, гребля, каркас будинку чи ін., діє система зовнішніх сил.

Існує декілька типових систем сил, що використовуються в розрахунках на практиці. Це довільна система сил у просторі, довільна система сил у площині, система паралельних сил і будь-яка їх комбінація.

Цей розділ присвячено питанням приведення вихідної системи сил у просторі й площині до найпростішого вигляду в загальному і окремих випадках.

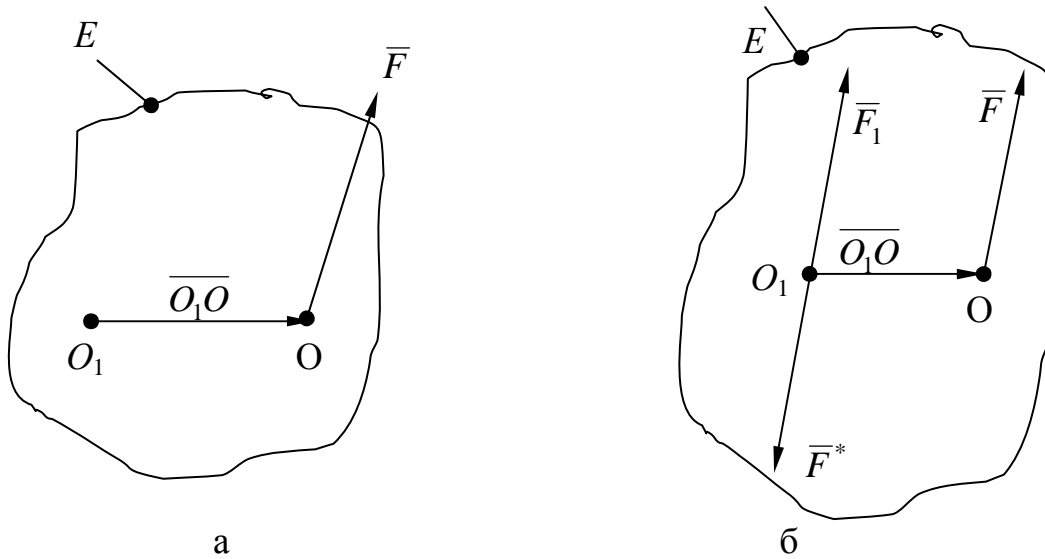
5.1. Лема про паралельне перенесення сили

Відповідно до аксіоми 2 статички (див. розд. 1) прикладену до тіла силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку іншу його точку. При цьому дія сили на тіло, а також стан тіла не змінюються.

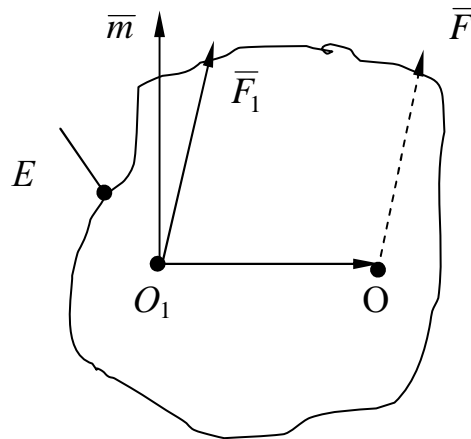
У ряді практичних задач рівноваги, пов'язаних зі спрощенням заданої системи сил, часто виникає необхідність перенесення сили до заданого центра паралельно самій до себе.

На відміну від попереднього випадку паралельне перенесення сили призводить в умовах збереження початкового механічного стану тіла до зміни системи діючих на нього силових факторів: до тіла необхідно додатково додати пару сил, параметри якої визначає наступна лема.

Лема. Прикладену до тіла в точці O (рис. 5.1,а) силу \vec{F} можна перенести паралельно самій собі в будь-яку його іншу точку O_1 (центр приведення), додаючи при цьому, для збереження механічного стану тіла, пару сил (\vec{F}, \vec{F}^*) з моментом $\vec{m}_{O_1} = \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}^*)$, рівним моменту $\vec{M}_{O_1}(\vec{F})$ вихідної сили \vec{F} відносно центра приведення O_1 .



$$\bar{m}_{O_1} = \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}^*) = \bar{M}_{O_1}(\bar{F})$$



в
Рис. 5.1

Доведення. Нехай у точці O (рис. 5.1,а) до тіла прикладена розташована в площині E сила \bar{F} . Позначимо систему сил, діючу на тіло, як (\bar{F}) . Виберемо в тілі, в пл. E , довільну точку O_1 , положення якої визначимо вектором $\overline{O_1O}$. Позначимо її як центр приведення “ O_1 ”. Прикладемо далі в пл. E у цьому центрі (рис. 5.1,б) еквівалентну нулю систему $(\bar{F}_1, \bar{F}^*) \sim 0$ двох сил (двійку сил) з параметрами: $\bar{F}_1 = -\bar{F}^*$, $\bar{F}^* = -\bar{F}$. При цьому, відповідно до аксіоми 2 статки, стан тіла не зміниться, а вихідна система сил (\bar{F}) перетвориться в еквівалентну систему трьох сил: $(\bar{F}) \sim (\bar{F}, (\bar{F}_1, \bar{F}^*)) \sim (\bar{F}_1, (\bar{F}, \bar{F}^*))$.

За побудовою на рис. 5.1,б, сила \bar{F}_1 прикладена в точці приведення O_1 і дорівнює \bar{F} , а система двох сил (\bar{F}, \bar{F}^*) створює пару сил, що називається приєднаною парою сил. Далі в центрі приведення O_1 на рис. 5.1, в побудуємо вектор $\bar{m}_{O_1} = \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}^*) = \overline{O_1O} \times \bar{F}$, рівний моменту отриманої пари сил, і вектор $\bar{M}_{O_1}(\bar{F}) = \overline{O_1O} \times \bar{F}$, рівний моменту вихідної сили \bar{F} відносно полюса O_1 . За визначенням вони є перпендикулярними до пл. E , прикладеними в точці O_1 і рівними. Тобто момент приєднаної пари сил дорівнює моменту вихідної сили відносно нового центра приведення O_1 :

$$\bar{m}_{O_1} = \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}^*) = \bar{M}_{O_1}(\bar{F}). \quad (5.1)$$

Отже лему доведено.

Рівняння (5.1) використовують на практиці при визначенні параметрів приєднаної пари сил (\bar{F}_1, \bar{F}^*) і сили \bar{F}_1 , які в більшості випадків являють собою прикладений до ланки механізму крутний момент і силу тиску ланки на вісь.

Розглянемо, наприклад, барабан радіуса R (рис. 5.2,а), до якого в точці A з боку намотаної нитки прикладено силу \bar{F} . Використуємо для сили \bar{F} доведену лему, прийнявши за центр приведення точку O . У результаті отримаємо, що вихідна система сил (\bar{F}) зводиться: до сили \bar{F}_1 (рівній \bar{F}) і до пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) з моментом $m_0 = m(\bar{F}, \bar{F}^*)$ (рис. 5.2,а). При цьому на барабан діють: момент $m_0 = R \cdot F$, який обертає барабан, і сила \bar{F}_1 , що здійс-

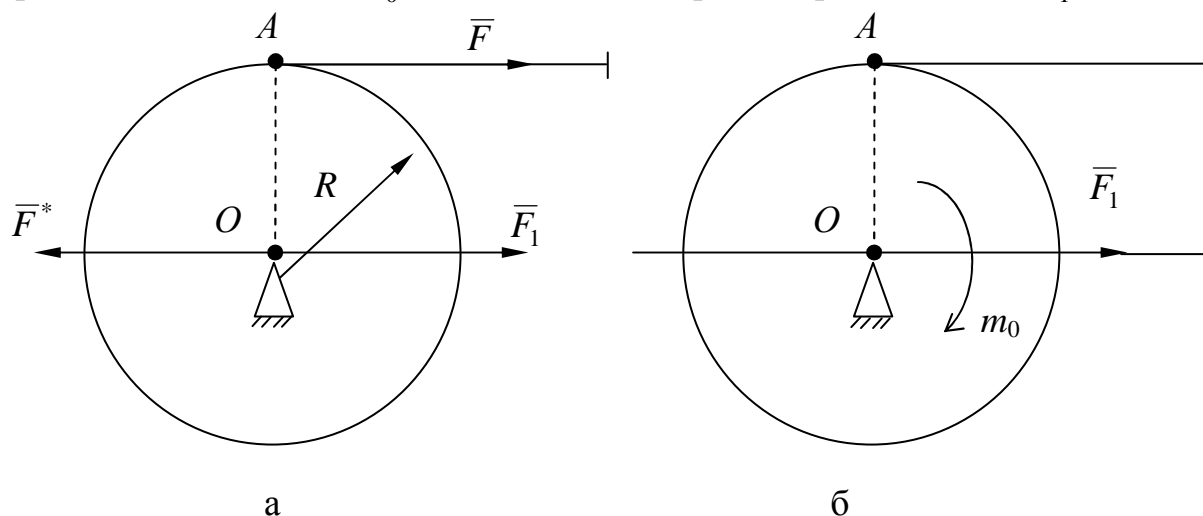


Рис. 5.2

нює тиск на вісь барабану (рис. 5.2,б). Їх величини використовуються в подальшому при розв'язанні задач динаміки і міцності системи “опора - вісь - барабан - нитка”.

5.2. Зведення довільної системи сил у просторі до заданого центра. Теорема Пуансо (Основна теорема статички)

Розглядаючи системи збіжних і паралельних сил у просторі, ми переконалися, що вони приводяться лише до одного силового фактора: рівнодійної сили або до пари сил.

Розглянемо тепер задачу приведення довільної систем сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ у просторі до заданого центра O (теорема належить Пуансо, 1777-1859 рр.).

Теорема: Довільна система сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ у просторі зводиться до заданого центра O сукупністю двох силових факторів: сили \bar{R} , рівній головному вектору \bar{F}_0 вихідної системи сил і прикладеній у центрі приведення O , і пари сил, момент \bar{m}_0 якої дорівнює головному моменту \bar{M}_0 системи сил відносно того ж центра.

Доведення. Розглянемо вихідну довільну систему сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ у просторі (рис. 5.3,а). Нехай сили є прикладеними до тіла в точках $A_{1, \dots, n}$, координати яких визначено радіусами-векторами $\bar{r}_{1, \dots, n}$ у системі координат $Oxyz$, полюс якої співпадає з центром приведення O .

Введемо такі позначення і поняття:

Головний вектор системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ – вектор \bar{F}_0 , який дорівнює геометричній сумі прикладених до тіла сил системи:

$$\bar{F}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (5.2)$$

де індекс O визначає точку прикладання вектора \bar{F}_0 до тіла.

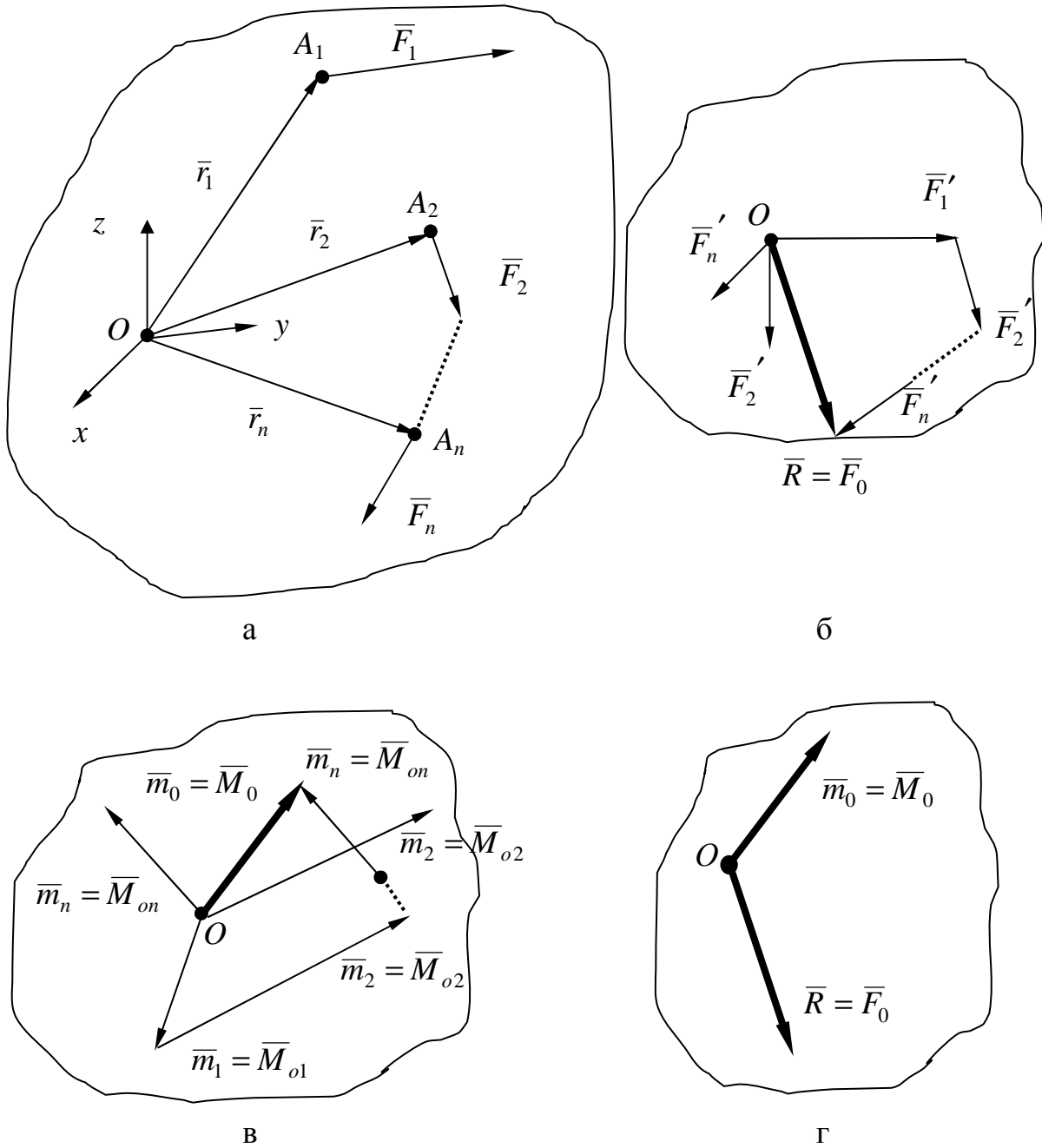


Рис. 5.3

Головний момент системи сил відносно точки O – вектор \bar{M}_0 , що дорівнює геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї ж точки:

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{M}_0(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k. \quad (5.3)$$

Таким чином, за визначенням, вектори \bar{F}_0 і \bar{M}_0 відносяться, з точки зору векторної алгебри, до зв'язаних у точці O векторів.

Для кожної з сил системи використовуємо лему про паралельне перенесення сили у полюс O . У результаті перетворень отримаємо систему збіжних у точці O (рис. 5.3,б) сил $(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n)$, що, як нам відомо, еквівалентна одній силі \bar{R} (рівнодійній), що дорівнює їх геометричній сумі:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}'_k. \quad (5.4)$$

Між векторами \bar{F}'_k збіжної і \bar{F}_k вихідної систем сил існують співвідношення: $\bar{F}'_k = \bar{F}_k$ ($k = \overline{1; n}$). Якщо розглянути геометричну суму векторів \bar{F}_n сил вихідної системи у точці O як вектор математичний і позначити його, відповідно до (5.2), як головний вектор \bar{F}_0 вихідної системи сил, то отримаємо наступну рівність

$$\bar{R} = \bar{F}_0. \quad (5.5)$$

З рівнянь (5.2), (5.4) і (5.5) виходить, таким чином, що сила \bar{R} за математичним змістом дорівнює головному вектору \bar{F}_0 вихідної системи. У свою чергу, на відміну від сили \bar{R} , головний вектор \bar{F}_0 не має, стосовно розглядуваного тіла фізичного змісту, тому що точки A_k прикладання складаючих сил \bar{F}_k (рис. 5.3,а) не співпадають з центром приведення O , в якому прикладений головний вектор.

При паралельному перенесенні сили \bar{F}_k до тіла необхідно приєднати одночасно пару сил (\bar{F}_k, \bar{F}_k^*) з моментом $\bar{m}_k = \bar{m}(\bar{F}_k, \bar{F}_k^*) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k$, прикладеним (рис. 5.3,в) у точці O . Система приєднаних пар $(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)$, відповідно до теореми про додавання пар сил, зводиться до результуючої пари з моментом

$$\bar{m}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k \quad (5.6)$$

у точці O .

Відповідно до (5.3) і (5.6) отримаємо, що момент $\bar{m}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k$ приєднаної

пари дорівнює головному моменту $\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{0k}$ ($\bar{M}_{ok} = \bar{M}_o(\bar{F}_k)$) вихідної системи сил відносно центра приведення O , тобто (рис. 5.3,в)

$$\bar{m}_0 = \bar{M}_0. \quad (5.7)$$

Отже (рис. 5.3,г) вихідну систему сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ зведено в довільно обраній точці O до еквівалентної системи (\bar{R}, \bar{m}_0) двох силових факторів: сили \bar{R} , яка дорівнює головному вектору \bar{F}_0 цієї системи сил, і пари сил з моментом \bar{m}_0 , який дорівнює головному моменту \bar{M}_0 системи сил відносно центра приведення.

Таким чином, теорему доведено. Ця теорема має назву *основної теореми статички* (теорема Пуансо).

З доведеної вище теореми випливає, що дві системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ і $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_k)$ будуть статично еквівалентними, якщо їх головні вектори й головні моменти у довільно обраному центрі приведення рівні між собою. Отже, для характеристики системи діючих на тіло сил є абсолютно достатнім визначити у довільному центрі O головний вектор \bar{F}_0 і головний момент \bar{M}_0 вихідної системи сил і задати їх на розрахунковій схемі (рис. 5.3,г). При цьому будемо враховувати, по-перше, те, що точки приведення сили \bar{R} і моменту \bar{m}_0 , а також точки прикладання головних векторів \bar{F}_0 і \bar{M}_0 співпадають за визначенням, а по-другому, що вектор \bar{R} і вектор \bar{m}_0 , на відміну від зв'язаних у точці O векторів \bar{F}_0 і \bar{M}_0 , є відповідно ковзним і вільним векторами.

5.3. Властивості головного вектора, головного моменту і результуючої приєднаної пари системи сил. Статичні інваріанти

Величини і напрямки головних векторів \bar{F}_0 і \bar{M}_0 у системі координат $Oxyz$ (рис. 5.4) визначаються за правилами векторної алгебри формулами

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}; \quad M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}, \quad (5.8)$$

$$\text{де } F_{0x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad F_{0y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad F_{0z} = \sum_{k=1}^n F_{kz};$$

$$M_{0x} = \sum_{k=1}^n M_{0x}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}); \quad M_{0y} = \sum_{k=1}^n M_{0y}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz});$$

$$M_{0z} = \sum_{k=1}^n M_{0z}(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx});$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0x}}{F_0}; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0y}}{F_0}; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{F}_0}) = \frac{F_{0z}}{F_0};$$

$$\cos(\widehat{Ox, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{Oy, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{Oz, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

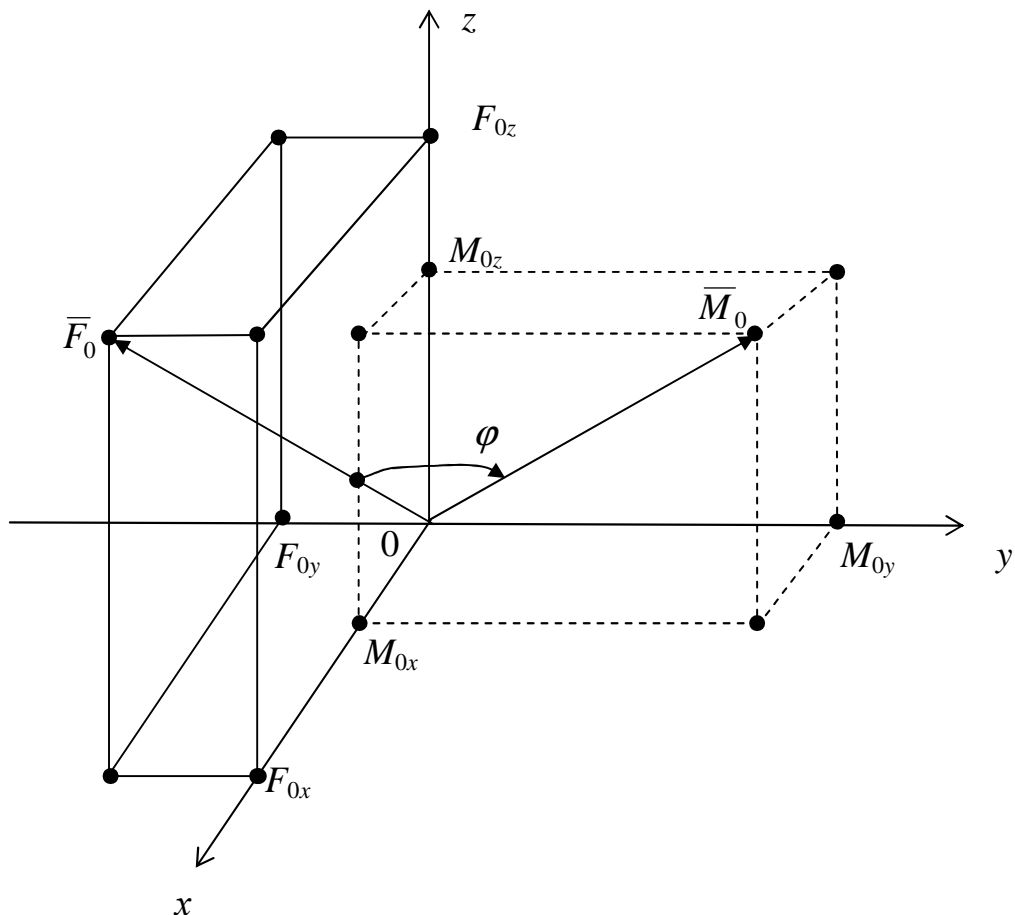


Рис. 5.4

Кут φ між векторами \bar{F}_0 і \bar{M}_0 визначається за допомогою формули їх скалярного добутку:

$$\varphi = \arccos \frac{\bar{F}_0 \cdot \bar{M}_0}{F_0 \cdot M_0} = \arccos \frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_0 \cdot M_0}.$$

Якщо на практиці при вирішенні задач рівноваги твердого тіла виникає питання зміни центра приведення системи сил з точки O у наперед задану точку O_1 , то головний вектор, головний момент і момент результуючої приєднаної пари системи сил мають наступні властивості.

Враховуючи вирази (5.2), (5.8) є очевидним, що головний вектор системи сил ні за величиною, ні за напрямком не залежить від положення центра приведення, тобто завжди виконуватиметься рівність $\bar{F}_{O_1} = \bar{F}_O$ (точка O_1 – новий центр приведення). Це обумовлено тим, що за формулою визначення ($\bar{F}_O = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$) головний вектор є функцією тільки параметрів сил початкової системи і не залежить від положення точки O на тілі.

У механіці головний вектор \bar{F}_O називається *першим статичним інваріантом*. Це означає, що для будь-якої вихідної системи сил його величина і напрямок є сталими величинами, тобто незалежними (інваріантними) до вибору центра приведення:

$$\bar{F}_O = \bar{F}_{O_1} = \dots = \bar{F}_{O_n},$$

де n - номер поточної точки приведення.

Момент результуючої приєднаної пари вихідної системи сил при перенесенні центра приведення буде визначатися (рис. 5.5) за формулою

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_O + \bar{m}_{O_1}, \quad (5.9)$$

де $\bar{m}_{O_1} = \bar{r} \times \bar{R}$ - момент приєднаної пари сил.

На рис. 5.5 вектор \bar{m}_{O_1} є, за правилом векторного добутку, перпендикулярним що площини E , якій належать вектори \bar{r} і \bar{R} , тобто $\bar{m}_{O_1} \perp \bar{R}; \perp \bar{r}$.

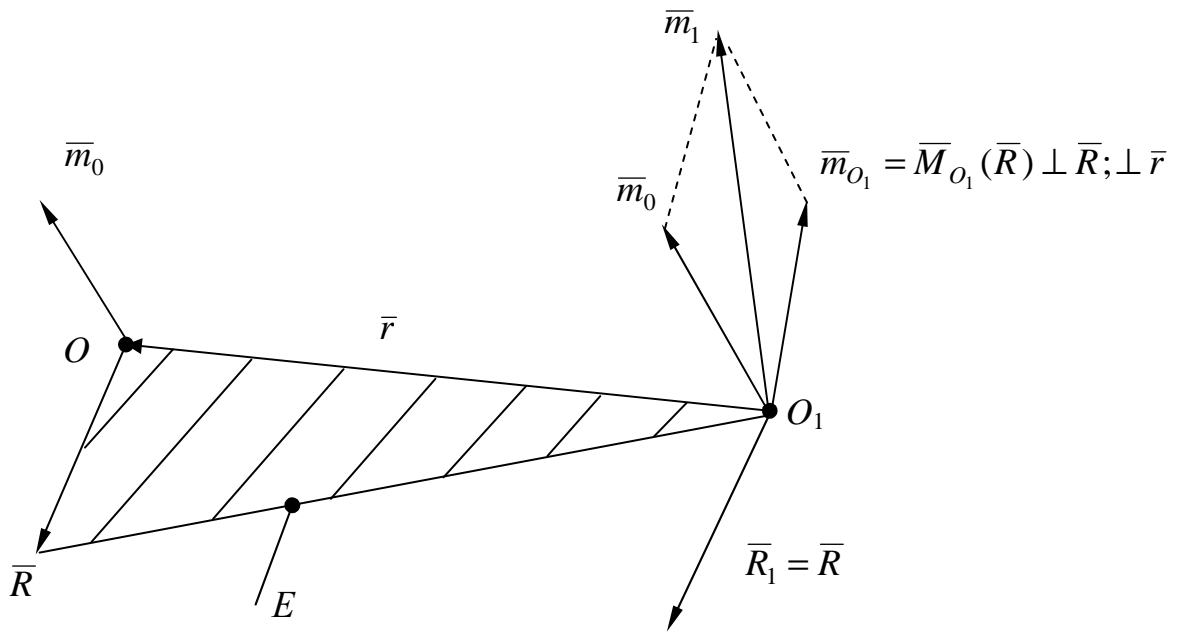


Рис. 5.5

Вираз (5.9) отримано за допомогою наступних еквівалентних системних перетворень:

$$(\bar{R}, \bar{m}_O) \sim (\bar{R}_1, \bar{m}_O, \bar{m}_{O_1} = \bar{M}_{O_1}(\bar{R})) \sim (\bar{R}_1, \bar{m}_1),$$

де $\bar{R}_1 = \bar{R}$.

При цьому використано лему про паралельне перенесення сили \bar{R} в точку O_1 з одночасним додаванням у центрі O_1 пари сил з моментом \bar{m}_{O_1} , рівним моменту $M_{O_1}(\bar{R})$ вихідної сили \bar{R} відносно точки O_1 , а також враховано властивості моменту \bar{m}_O (моменту приєднаної пари сил у точці O) як вільного вектора, який можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла (в даному випадку з точки O у точці O_1). Крім того, використано властивості геометричного додавання векторів моментів пар сил у точці O_1 , тобто:

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_O + \bar{m}_{O_1}. \quad (5.10)$$

З рівняння (5.10) виходить, що момент \bar{m}_O приєднаної пари сил при перенесенні центра приведення змінюється на величину моменту \bar{m}_{O_1} пари сил, рівному моменту сили \bar{R} відносно нового центра приведення O_1 .

Головний момент системи сил при перенесенні центра приведення вихідної системи сил матиме, в свою чергу, наступну властивість.

Враховуючи вираз (5.3) і рис. 5.6, отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_1} &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_{k_1} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{O_1O} + \bar{r}_k) \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{O_1O} \times \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \right) = \\ &= \bar{M}_O + \bar{O_1O} \times \bar{F}_O = \bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O). \end{aligned} \quad (5.11)$$

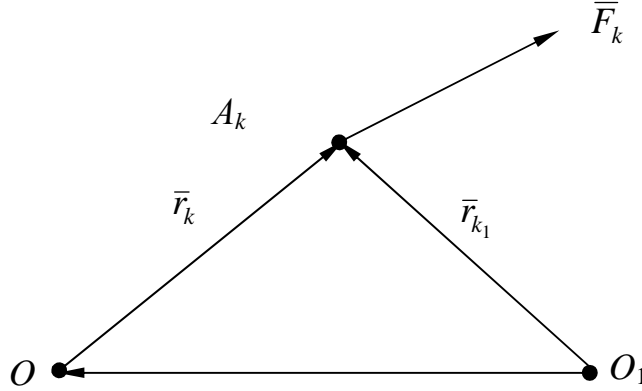


Рис. 5.6

З рівняння (5.11) випливає, що головний момент вихідної системи сил при перенесенні центра приведення до точки O_1 змінюється на величину моменту $\bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O)$ головного вектора \bar{F}_O відносно нового центра приведення O_1 .

Враховуючи рівняння (5.5) і (5.7) отримаємо вирази:

$$\begin{aligned} \bar{m}_O + \bar{m}_{O_1} &= \bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O), \\ \bar{m}_{O_1} &= \bar{M}_{O_1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

З виразу (5.12) випливає рівність моментів результуючої пари і головного моменту системи сил відносно нового центра зведення O_1 , а також справедливості приведених на рис. 5.7 системних перетворень.

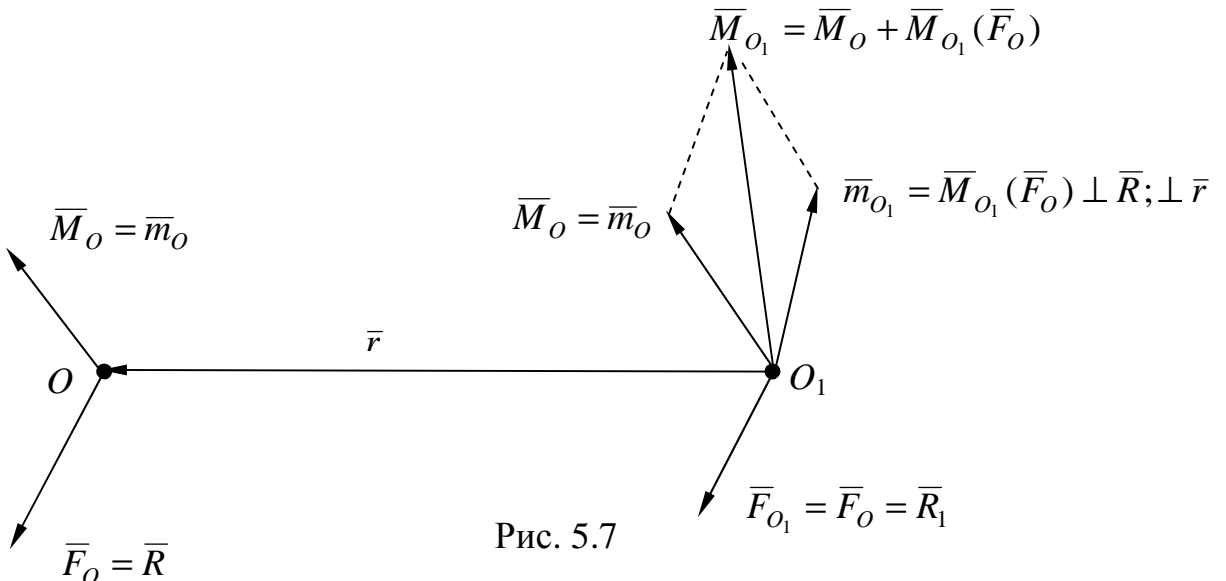


Рис. 5.7

Однак, на практиці виявилось, що більш зручним у використанні є рівняння (5.11), яке стосується головного моменту системи сил.

Розглянемо далі інші властивості головного вектора \bar{F}_O і головного моменту \bar{M}_O системи сил, які мають суттєве теоретичне і практичне значення.

Важливою властивістю головних вектора \bar{F}_O і моменту \bar{M}_O системи сил є незалежність їх скалярного добутку від положення точки приведення на тілі.

Дійсно, для будь-якої точки приведення O_1 отримаємо:

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{F}_{O_1} \cdot (\bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O)) = \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_O + \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O). \quad (5.13)$$

За визначенням вектор $\bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O)$ і вектор \bar{r} (рис. 5.7) є перпендикулярними. Тому формула (5.13) приводиться, враховуючи що $\cos 90^\circ = 0$, до виду

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_O + F_{O_1} \cdot M_{O_1}(\bar{F}_O) \cdot \cos 90^\circ = \bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_O. \quad (5.14)$$

Вираз (5.14), в результаті незалежності головного вектора системи сил від зміни полюса приведення, перетворюється у рівність

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{F}_O \cdot \bar{M}_O, \quad (5.15)$$

яка і доводить зазначену властивість.

У механіці цю властивість скалярного добутку головного вектора і головного моменту системи сил визначають як *другий статичний інваріант* (перша форма).

Розглянемо другу форму другого статичного інваріанта системи діючих на тіло сил, які зведено в центрі O до головного вектора \bar{F}_O і головного моменту \bar{M}_O .

З векторної алгебри відомо, що за величиною скалярний добуток двох векторів може бути визначеним через проекцію одного з векторів добутку на напрямок іншого:

$$\bar{F}_O \cdot \bar{M}_O = F_O \cdot M_O \cdot \cos(\widehat{\bar{F}_O, \bar{M}_O}) = \bar{F}_O \cdot \text{Пр}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O), \quad (5.16)$$

де $\text{Пр}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O) = M_O \cdot \cos(\widehat{\bar{F}_O, \bar{M}_O})$ – проекція вектора \bar{M}_O на напрямок головного вектора \bar{F}_O .

Тоді з формул (5.15), (5.16) випливає вираз

$$\bar{F}_{O_1} \cdot \text{Pr}_{\bar{F}_{O_1}}(\bar{M}_{O_1}) = \bar{F}_O \cdot \text{Pr}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O),$$

який, з урахуванням рівності $\bar{F}_{O_1} = \bar{F}_O$ першого статичного інваріанта, перетворюється до вигляду

$$\text{Pr}_{\bar{F}_{O_1}}(\bar{M}_{O_1}) = \text{Pr}_{\bar{F}_O}(\bar{M}_O). \quad (5.17)$$

Співвідношення (5.17) виявляє, що проекція головного моменту систем сил на напрямок її головного вектора не залежить від положення точки приведення. У механіці цю властивість визначають як *другий статичний інваріант (друга форма)*.

5.4. Окремі випадки зведення просторової системи сил

Відповідно до теореми Пуансо довільна система сил у просторі в загальному випадку зводиться у центрі O до двох силових факторів: сили, яка дорівнює головному вектору \bar{F}_O , і пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту \bar{M}_O вихідної системи сил. Однак, на практиці між параметрами (величинами і взаємним напрямком) векторів \bar{F}_O і \bar{M}_O виникають різні співвідношення, що призводять до окремих випадків приведення довільної системи сил.

5.4.1. *Приведення системи сил до пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) з моментом $\bar{m}_O = \overline{OA} \times \bar{F}$ (рис. 5.8).* У цьому випадку в центрі приведення O головний вектор системи $\bar{F} = 0$, а головний момент $\bar{M}_O = \bar{m}_O$ є перпендикулярним до пл. E дії пари сил (\bar{F}, \bar{F}^*) .

5.4.2. *Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O .* Тут (рис. 5.9) виконується наступне: головний момент системи сил $\bar{M}_O = 0$; головний вектор $\bar{F}_O = \bar{R} \neq 0$ і належить пл. E ; система діючих на тіло сил відноситься до збіжної у точці O .

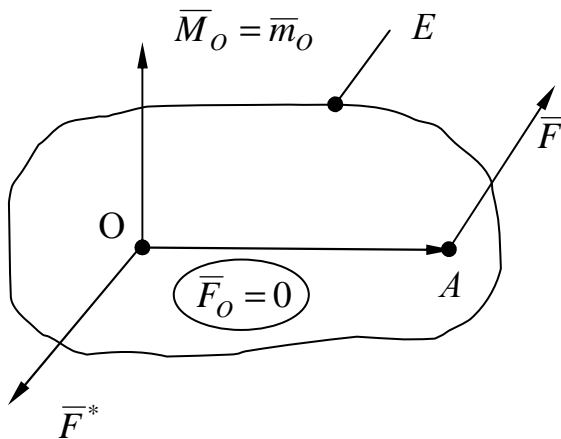


Рис. 5.8

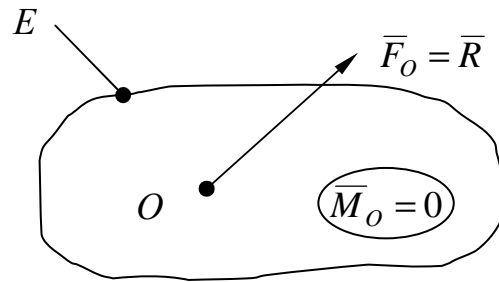


Рис. 5.9

5.4.3. **Зрівноважена (нульова) система сил.** У цьому випадку в центрі приведення O (рис. 5.10, 5.11) отримаємо: головний вектор $\bar{F}_O = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0$ і головний момент $\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_k} = 0$; вихідна система сил у будь-якій точці O тіла зводиться до еквівалентної нулю $((\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0)$ зрівноваженої системи; багатокутники сил вихідної системи і багатокутники векторів моментів сил відносно довільної точки O тіла є замкненими.

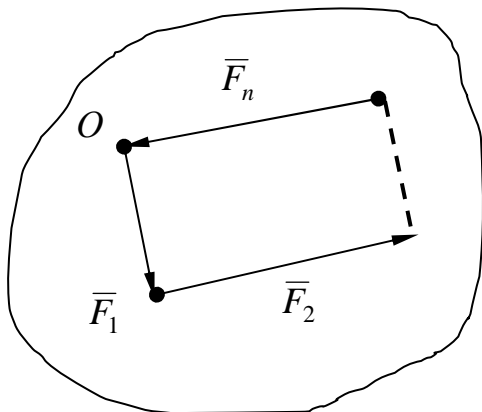


Рис. 5.10

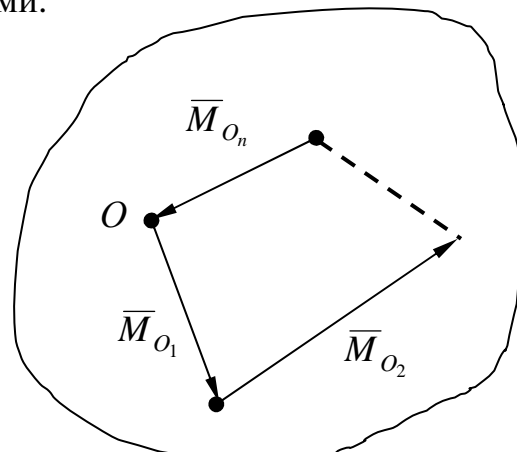


Рис. 5.11

5.4.4. **Приведення системи сил до головного вектора $\bar{F}_O \neq 0$ і головного моменту $\bar{M}_O \neq 0$,** коли $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_O)$. Тут мають місце, залежно від взаємної орієнтації векторів \bar{F}_O і \bar{M}_O , три окремі випадки.

5.4.4.1. *Приведення до динами*, коли вектори \vec{F}_O і \vec{M}_O не є перпендикулярними, тобто (рис. 5.4) кут $\varphi(\widehat{\vec{F}_O, \vec{M}_O}) \neq \pm \frac{\pi}{2}$ і скалярний добуток векторів $\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O \neq 0$.

Розкладемо головний момент \vec{M}_O на дві ортогональні складові ($\vec{M}_O \sim (\vec{M}_1, \vec{M}_2)$), одна з яких спрямована вздовж головного вектора \vec{F}_O .

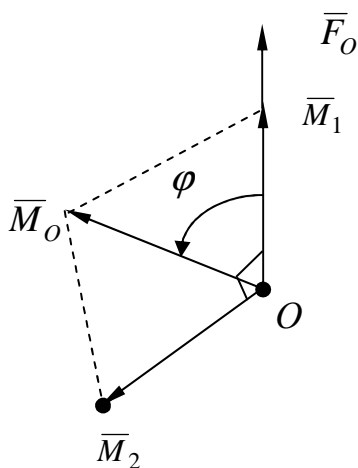


Рис. 5.12

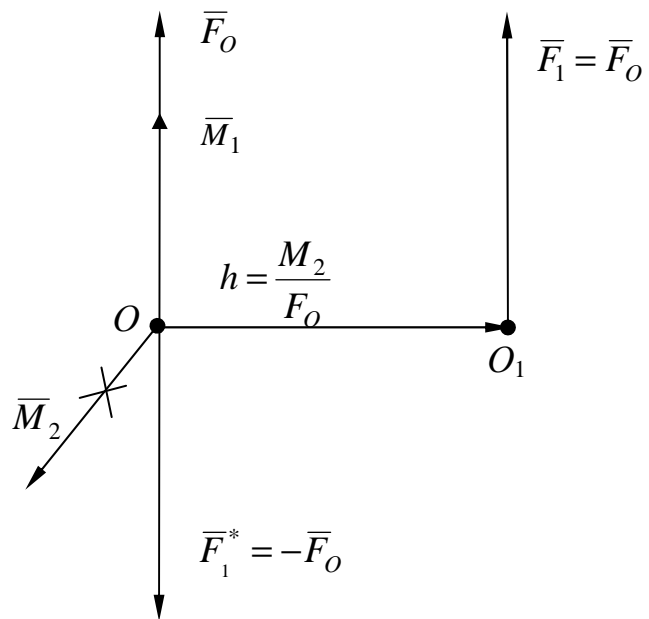


Рис. 5.13

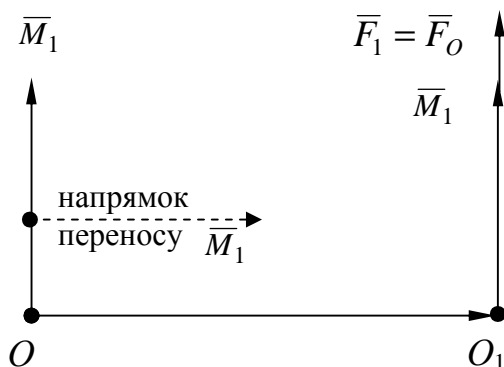


Рис. 5.14

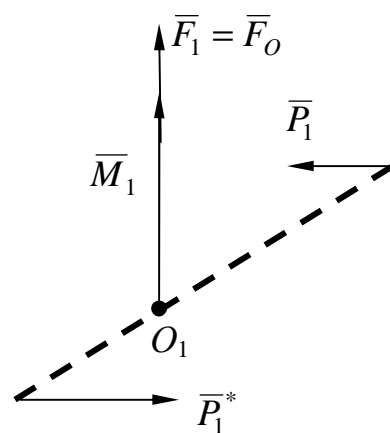


Рис. 5.15

Представимо момент \bar{M}_2 (закреслено на рис. 5.13) у вигляді пари сил (\bar{F}_1, \bar{F}_1^*) , в якій плече $h = \frac{M_2}{F_O}$, а сила $\bar{F}_1 = \bar{F}_O$ прикладена в точці O_1 .

У цьому випадку буде виконуватись умова еквівалентності: $(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, \bar{M}_1, \bar{M}_2) \sim ((\bar{F}_O, \bar{F}_1^*), \bar{M}_1, \bar{F}_1) \sim (\bar{M}_1, \bar{F}_1)$, тому що сили \bar{F}_O і \bar{F}_1^* за визначенням складають двійку сил, тобто $(\bar{F}_O, \bar{F}_1^*) \sim 0$.

Представимо далі вектор \bar{M}_1 у вигляді моменту пари сил і перенесемо його, як вільний вектор, з точки O в точку O_1 прикладання сили \bar{F}_1 (показано на рис. 5.14 штриховою стрілкою).

У результаті початкова система сил перетворилась в центрі O_1 в систему силових факторів (\bar{F}_1, \bar{M}_1) . Тут сила \bar{F}_1 дорівнює головному вектору \bar{F}_O за визначенням, а момент \bar{M}_1 пари сил за величиною – проекції головного моменту \bar{M}_O на напрямок головного вектора \bar{F}_O (рис. 5.12) системи сил: $M_1 = \Pi_{\rho_{\bar{F}_O}}(\bar{M}_O) = M_O \cdot \cos \varphi$. На рис. 5.15 момент \bar{M}_1 для наочності показано одночасно у вигляді пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}_1^*) .

Сукупність діючих на тіло силових факторів у вигляді сили \bar{F}_1 і пари сил (\bar{P}_1, \bar{P}_1^*) , вектори яких колінеарні (лежать на одній прямій), називають *динамою* чи *динамічним гвинтом*. Лінія, яка проходить через центр приведення O_1 вздовж даної прямої, називається *віссю динами*.

У просторі рівняння осі динами отримаємо з урахуванням умови паралельності векторів \bar{F}_1 і \bar{M}_1 (рис. 5.14):

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= \bar{M}_O - \overline{OO_1} \times \bar{F}_O = M_{1x} \cdot \bar{i} + M_{1y} \cdot \bar{j} + M_{1z} \cdot \bar{k} = \\ &= \rho \cdot \bar{F}_1 = \rho \cdot \bar{F}_O = \rho \cdot F_{O_x} \cdot \bar{i} + \rho \cdot F_{O_y} \cdot \bar{j} + \rho \cdot F_{O_z} \cdot \bar{k}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

де векторний добуток $\overline{OO_1} \times \bar{F}_O = \bar{M}_2$, ρ – параметр гвинта (скаляр);

$$\rho = M_1 \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{M_O \cdot F_O} \cdot \frac{1}{F_O} = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{F_O^2}; \quad \cos \varphi = \frac{\bar{M}_O \cdot \bar{F}_O}{M_O \cdot F_O}.$$

Враховуючи (5.18), отримаємо такі співвідношення між координатними складовими векторів \bar{F}_O , \bar{M}_O і \bar{M}_1 :

$$\left. \begin{aligned} M_{1x} &= \rho \cdot F_{O_x} = M_{O_x} - (y \cdot F_{O_z} - z \cdot F_{O_y}) \\ M_{1y} &= \rho \cdot F_{O_y} = M_{O_y} - (z \cdot F_{O_x} - x \cdot F_{O_z}) \\ M_{1z} &= \rho \cdot F_{O_z} = M_{O_z} - (x \cdot F_{O_y} - y \cdot F_{O_x}) \end{aligned} \right\}, \quad (5.19)$$

де x, y, z – координати точки O_1 на осі динами.

Співвідношення (5.19) дозволяють отримати рівняння прямої лінії, осі динами, у формі

$$\begin{aligned} \frac{M_{O_x} - (y \cdot F_{O_z} - z \cdot F_{O_y})}{F_{O_x}} &= \frac{M_{O_y} - (z \cdot F_{O_x} - x \cdot F_{O_z})}{F_{O_y}} = \\ &= \frac{M_{O_z} - (x \cdot F_{O_y} - y \cdot F_{O_x})}{F_{O_z}}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Отже, існує пряма з канонічним рівнянням (5.20) у проекціях, в будь-якій точці якої система діючих на тіло сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ зводиться до динами.

Таким чином встановлено, що прикладена до тіла вихідна довільна система сил, якщо другий статичний інваріант першої форми не дорівнює нулю, тобто при $\bar{F}_O \cdot \bar{M}_O = F_O \cdot M_O \cdot \cos \varphi \neq 0$ ($\varphi \neq \pi/2$), зводиться у точці O_1 до динами, яка є сукупністю двох силових факторів: сили \bar{F}_1 і моменту пари сил \bar{M}_1 , вектори яких колінеарні. При цьому здається, що за величиною момент $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_1$ пари динами у точці O_1 буде найменшим (рис. 5.16), порівняно з моментами \bar{M}_{O_k} у будь-яких інших точках приведення O_k на осі Oy , тобто буде виконуватися співвідношення $M_{O_1} < M_{O_k} < M_O$.

Цю важливу властивість динами використовують на практиці при вирішенні задач зрівноваження твердого тіла, а також відтворенні динамою заданого його руху за допомогою зовнішніх сил найменшої потужності.

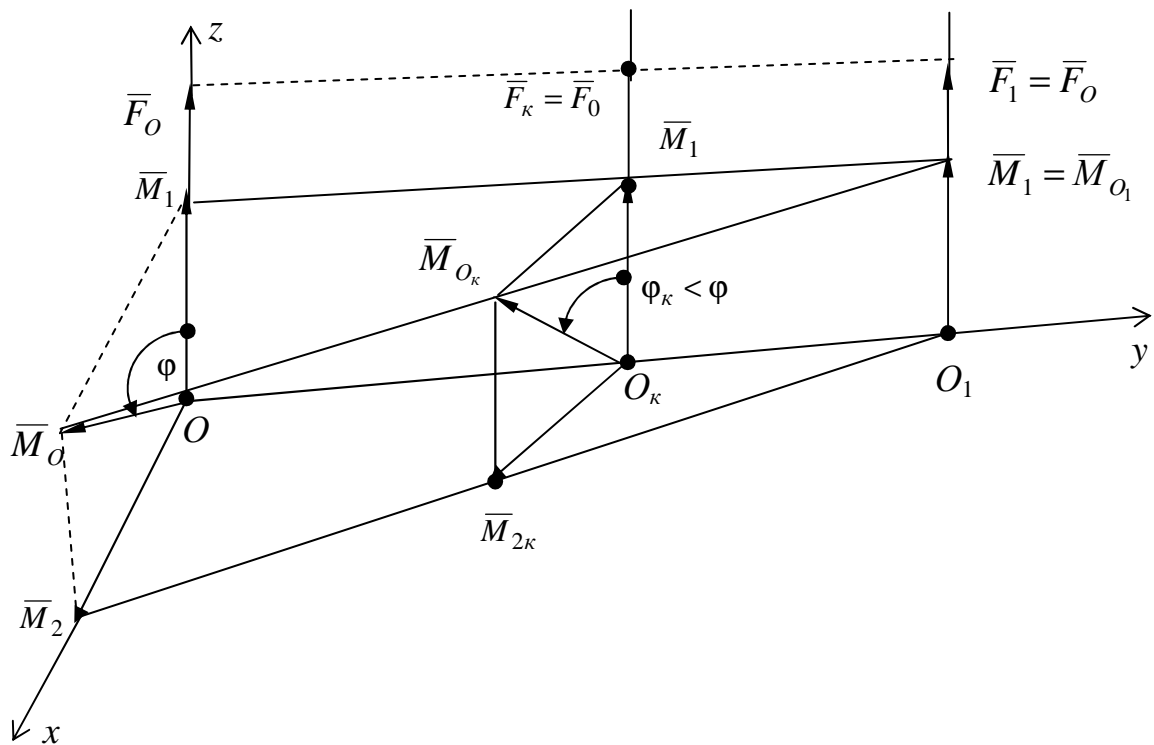


Рис. 5.16

5.4.4.2. **Приведення до схрещеної системи двох сил.** Цей випадок має місце, коли вихідна система сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ приводиться у центрі O до головного вектора \bar{F}_O і головного моменту \bar{M}_O (рис. 5.17), а кут φ між векторами, як і у випадку приведення до динами, задовольняє співвідношенню $\widehat{\varphi}(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

Представимо момент \bar{M}_O (закреслено на рис. 5.17) у вигляді пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) з площиною дії E і плечем $h = \frac{M_0}{P}$ (за величиною сила \bar{P} пари може бути будь-якою). Далі додамо за правилом паралелограма вектори \bar{F}_O і \bar{P}^* , отримавши силу $\bar{Q} = \bar{F}_O + \bar{P}^*$.

Виконані перетворення призводять до наступної, еквівалентної до вихідної системи двох сил \bar{Q} і \bar{P} : $(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, \bar{P}^*, \bar{P}) \sim (\bar{Q}, \bar{P})$.

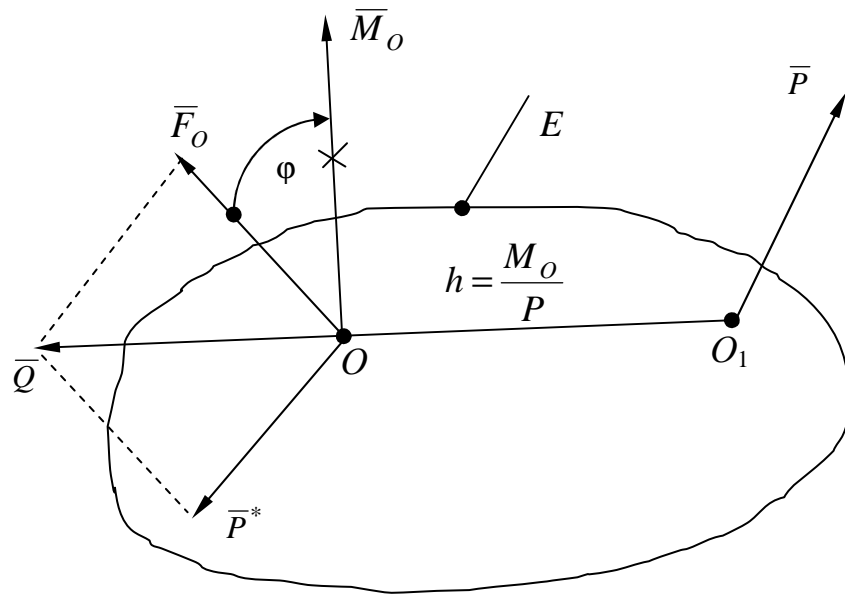


Рис. 5.17

При цьому сила \bar{Q} є прикладеною у центрі приведення O , а точкою прикладання сили \bar{P} є точка O_1 кінця плеча h пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) . Важливою властивістю сили \bar{Q} є, однак, те, що вона не належить площині E дії пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) .

Така сукупність діючих на тіло двох сил складає систему сил, що схрещуються (не лежать в одній площині) і не мають рівнодійної.

На відміну від динами отримана система силових факторів включає лише дві сили \bar{Q} , \bar{P} , тобто тут відсутня пара сил.

5.4.4.3. Приведення до однієї сили (рівнодійної), коли вектори \bar{F}_O і \bar{M}_O є перпендикулярними, тобто $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ (рис. 5.18). У цьому випадку головний вектор \bar{F}_O , лежить у площині E , яка перпендикулярна головному моменту \bar{M}_O системи, тобто в площині дії результуючої приєднаної пари сил.

Представимо момент \bar{M}_O (закреслено на рис. 5.18) у вигляді пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) з плечем $h = \frac{M_O}{F_O}$ і силою $\bar{P}^* = -\bar{F}_O$.

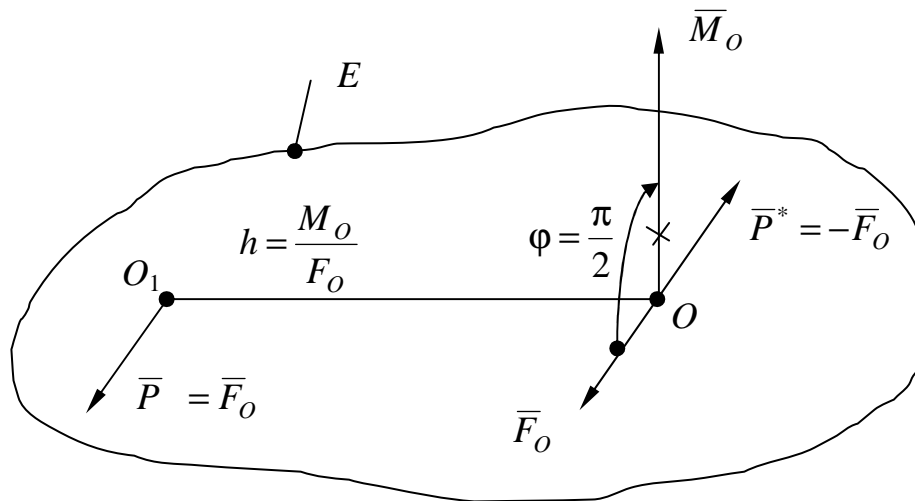


Рис. 5.18

У результаті отримаємо, що сили \bar{F}_O і \bar{P}^* складають двійку сил, тобто систему сил $(\bar{F}_O, \bar{P}^*) \sim 0$, а вихідна система виявляється еквівалентною одній силі \bar{P} , яка належить площині E , прикладена у точці O_1 , що знаходиться на відстані $h = \frac{M_O}{F_O}$ від початкового центра приведення O . Проведені еквівалентні

перетворення мають наступний вигляд:

$$(\bar{F}_O, \bar{M}_O) \sim (\bar{F}_O, (\bar{P}^* = -\bar{F}_O, \bar{P})) \sim ((\bar{F}_O, \bar{P}^*) \sim 0, \bar{P}) \sim (\bar{P}).$$

Вони зводять вихідну систему сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ до однієї сили \bar{P} (рівнодійної), яка дорівнює головному вектору \bar{F}_O системи і прикладена у новому центрі приведення O_1 .

5.5. Довільна система сил у площині

Особливістю розглядуваної системи сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ є приналежність ліній дій всіх сил системи площині E (рис. 5.19,а). У цьому випадку вихідну систему сил, використовуючи теорему Пуансо, в центрі приведення O (рис. 5.19,б) можна звести взагалі до двох силових факторів: сили \bar{R} , яка дорівнює головному вектору \bar{F}_O , і результуючої приєднаної пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) з моментом

\bar{m}_O (показано також дуговою стрілкою на рис. 5.19,б), рівним головному моменту \bar{M}_O вихідної системи сил.

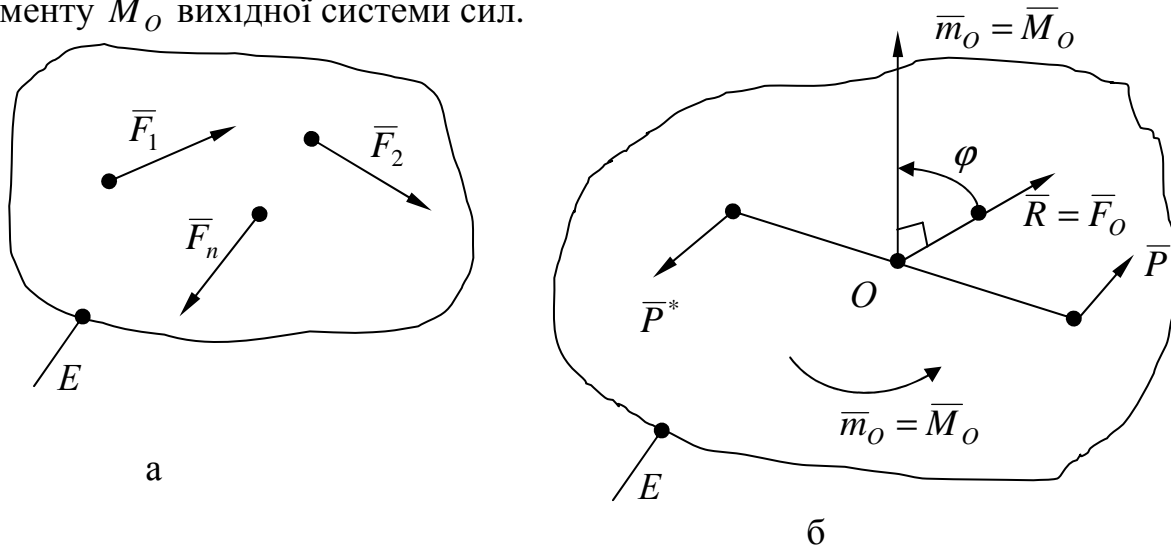


Рис. 5.19

На відміну від довільної системи сил у просторі тут: головний вектор \bar{F}_O довільної плоскої системи сил завжди належить площині E , яка є площиною дії пари (\bar{P}, \bar{P}^*) ; головний момент $\bar{M}_O \perp \bar{F}_O$, тобто кут φ між векторами дорівнюватиме $\varphi(\bar{F}_O, \bar{M}_O) = \pm \frac{\pi}{2}$.

Відповідно до зображених на рис. 5.19,б силових факторів матимуть місце, залежно від величин головних векторів \bar{F}_O , \bar{M}_O зведеної у центрі O системи сил, такі випадки приведення довільної системи сил у площині.

5.5.1. Приведення до пари сил (\bar{P}, \bar{P}^*) , коли головний вектор системи $\bar{F}_O = 0$, а головний момент $\bar{M}_O = \bar{m}(\bar{P}, \bar{P}^*) \neq 0$. Цей випадок за сукупністю діючих на тіло силових факторів повністю співпадає з випадком приведення довільної системи сил у просторі, розглянутому у п. 5.4.1 і на рис. 5.8. Наприклад, для зображених на рис. 5.20,а системи двох сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2 = -\bar{F}_1)$ отримаємо для центру приведення O (рис. 5.20,б): $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}_1 - \bar{F}_1 = 0$; $\bar{M}_O = h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = F_1(h_1 + h_2) \neq 0$; $\bar{M}_O \perp \text{пл. } E$; система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{M}_O$.

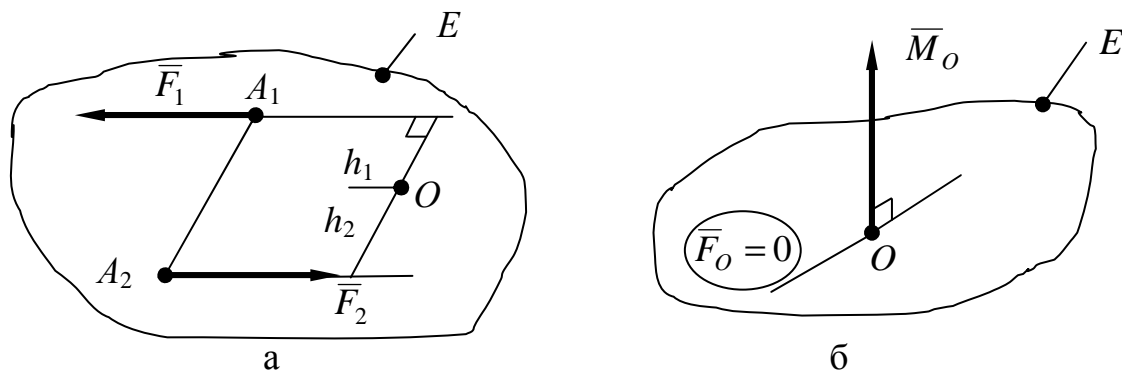


Рис. 5.20

5.5.2. Приведення до рівнодійної \bar{R} у центрі O . Тут головний момент системи $\bar{M}_O=0$, головний вектор $\bar{F}_O \neq 0$, а вихідна система сил зводиться тільки до однієї сили \bar{F}_O , що є рівнодійною \bar{R} , прикладеною у точці O . Випадок ідентичний розглянутому у п. 5.4.2 і на рис. 5.9.

Приклад приведення: $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$ (рис. 5.21,а), $h_1 = h_2$. У точці O буде: $M_O = -h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = 0$; $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \neq 0$ (рис. 5.21,б); рівнодійна сила $\bar{R} = \bar{F}_O$ прикладена у центрі приведення O ; системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{R}$.

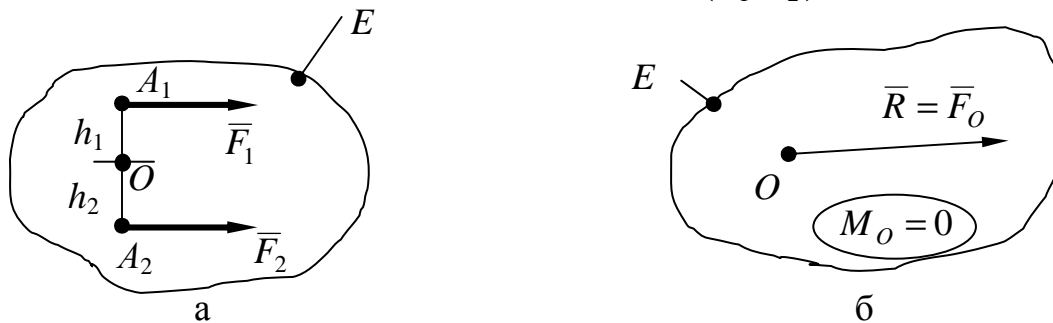


Рис. 5.21

5.5.3. Зрівноважена система сил: у центрі приведення O маємо $\bar{F}_O=0$ і $\bar{M}_O=0$. При цьому (див. п. 5.4.3 і рис. 5.10, 5.11) багатокутники діючих на тіло сил \bar{F}_n і моментів приєднаних пар сил \bar{m}_k є замкненими і вихідна система сил еквівалентна нулю $((\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n) \sim 0)$, тобто є зрівноваженою. Тут, наприклад, для системи двох сил: \bar{F}_1 і $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1$ (рис. 5.22,а), буде: $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{F}_1 - \bar{F}_1 = 0$; $M_O = h_1 \cdot F_1 - h_2 \cdot F_2 = 0$ (рис. 5.22,б); система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$.

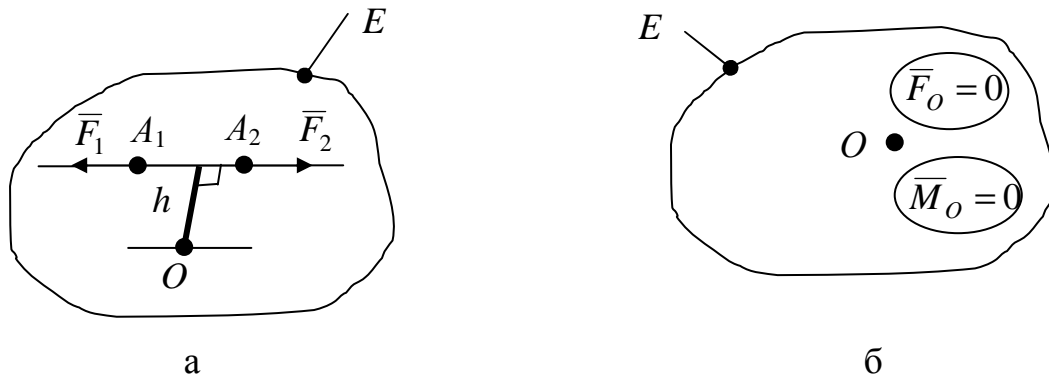
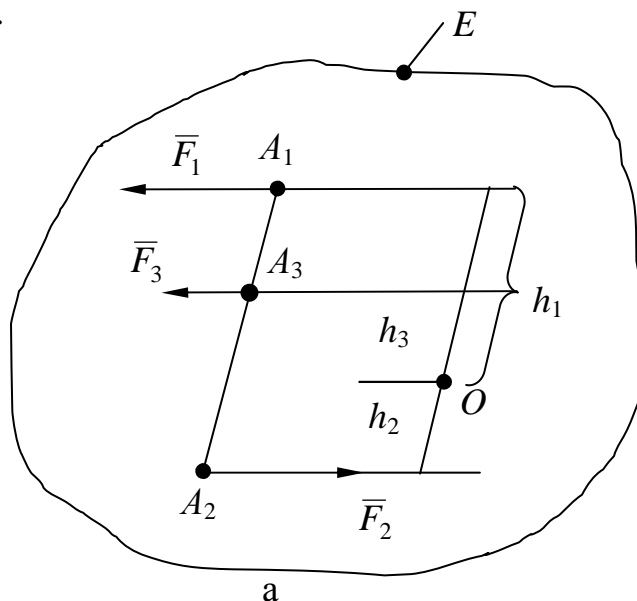


Рис. 5.22

5.5.4. У загальному випадку, зведена в центрі O до головного вектора $\bar{F}_O \neq 0$ і головного моменту $\bar{M}_O \neq 0$ вихідну систему сил можна подальшими спрощеннями звести до однієї сили, рівнодійної $\bar{R} = \bar{F}_O$, яка прикладена, на відміну від п. 5.5.2 у новому центрі O_1 на відстані $h = \frac{M_O}{F_O}$ від точки O . Цей випадок повністю співпадає за доведенням з випадком приведення, який розглянуто стосовно довільної системи сил у просторі у п. 5.4.4.3 і на рис. 5.18. Наприклад, для зображеної на рис. 5.23,а системи трьох сил: ($\bar{F}_1, \bar{F}_2 = -\bar{F}_1, \bar{F}_3 = k\bar{F}_1$) отримаємо у центрах приведення O, O_1 : $\bar{F}_O = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \bar{F}_3$ (рис. 5.23,б); $M_O = h_1 \cdot F_1 + h_3 \cdot F_3 + h_2 \cdot F_2$; $h = \frac{M_O}{F_O}$; $\bar{R} = \bar{F}_O = \bar{F}_3$ (рис. 5.23,в), система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \sim \bar{R}$.



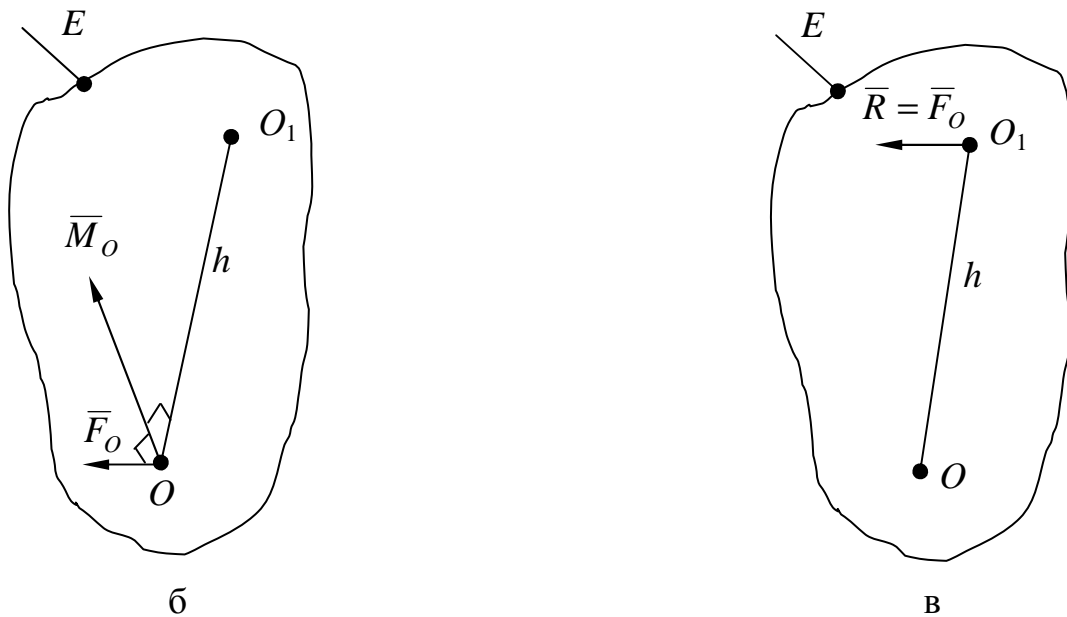


Рис. 5.23

5.6. Теорема Варіньона про момент рівнодійної

На практиці важливе використання, наприклад, при визначенні координат ваги тіла, має наступна властивість головного вектора системи сил (*теорема Варіньона про момент рівнодійної*).

Теорема. Якщо є точка O , в якій система діючих сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ зводиться тільки до головного вектора \bar{F}_O , тобто рівнодійної $\bar{R} = \bar{F}_O$, то момент цієї рівнодійної відносно будь якої іншої точки O_1 дорівнюватиме геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї самої точки O_1 .

При доведенні теореми врахуємо вираз (5.5), а також те, що за умовою в точках O і O_1 на рис. 5.24 вектор $\bar{M}_O = 0$.

У результаті отримаємо:

в точці O $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}_O) \sim (\bar{R});$

в точці O_1 $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_O) = \bar{M}_{O_1}(\bar{R}) = \bar{r} \times \bar{F}_O = \sum_{k=1}^n \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k);$

або $\bar{M}_{O_1}(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{O_1}(\bar{F}_k). \tag{5.21}$

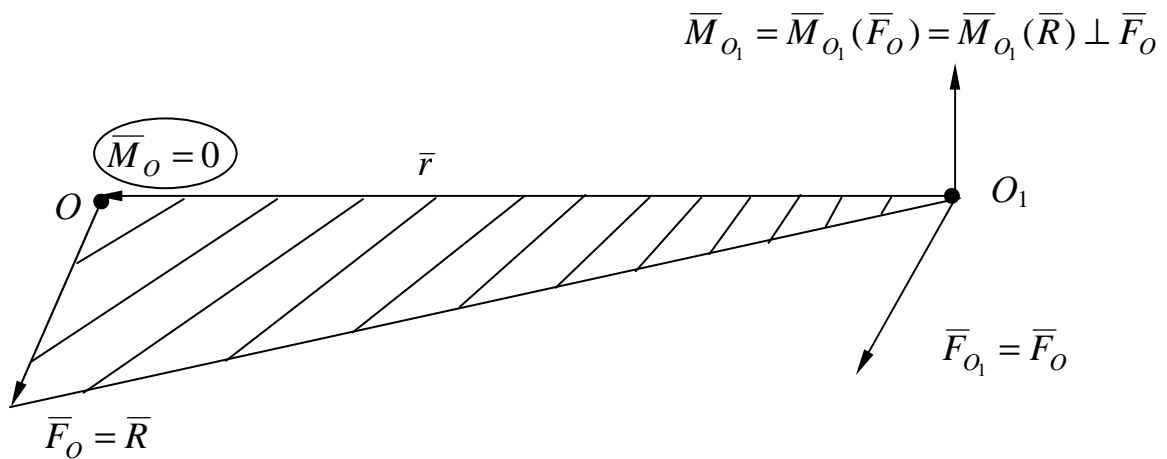


Рис. 5.24

Рівняння (5.20) справедливе для будь-якої точки O_1 тіла в просторі чи площині.

Отже теорему доведено.

Особливості використання теореми Варіньона розглянемо на наступних прикладах.

Приклад 1. Для заданої у площині xO_1y (рис. 5.25,а) рівнодійної \bar{R} з точкою прикладання O визначити рівняння лінії її дії.

Розв'язання. Представимо базове рівняння (5.21) теореми Варіньона у вигляді

$$M_{O_1}(\bar{R}) = xF_{O_1y} - yF_{O_1x}, \quad (5.22)$$

де $F_{O_1x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}$, $F_{O_1y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}$ – проекції головного вектора \bar{F}_O сил

\bar{F}_k ($k = \overline{1, n}$) системи; M_{O_1} – головний момент системи сил відносно точки O_1

$$\left(M_{O_1} = \sum_{k=1}^n M_{O_1}(\bar{F}_k) \right).$$

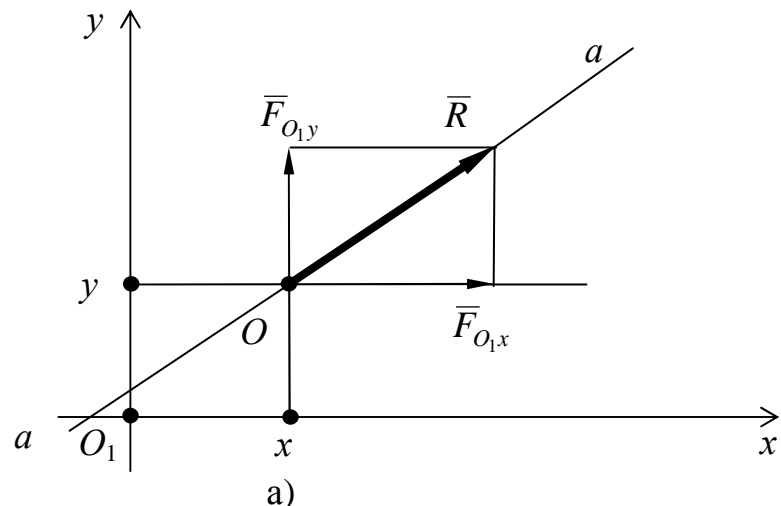


Рис. 5.25

З (5.22) отримаємо рівняння прямої aa у відрізках

$$\frac{x}{\left(\frac{M_{O_1}}{F_{O_1y}}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{M_{O_1}}{F_{O_1x}}\right)} = 1 \quad (5.23)$$

чи з кутовим коефіцієнтом

$$y = \frac{F_{O_1y}}{F_{O_1x}} x - \frac{M_{O_1}}{F_{O_1x}} \quad (5.24)$$

у площині xO_1y .

Рівняння (5.23) і (5.24) використовують на практиці в будівельній механіці при визначенні, наприклад, параметрів (величин і напрямків дії) реакцій в'язів.

Приклад 2. Визначити момент сили $F = 10$ Н відносно точки O початку системи координат xOy (рис. 5.25, б). Точка прикладання сили має координати A ($x_A = 8$ м, $y_A = 10$ м), а лінія її дії складає з віссю Ox кут $\alpha = 30^\circ$.

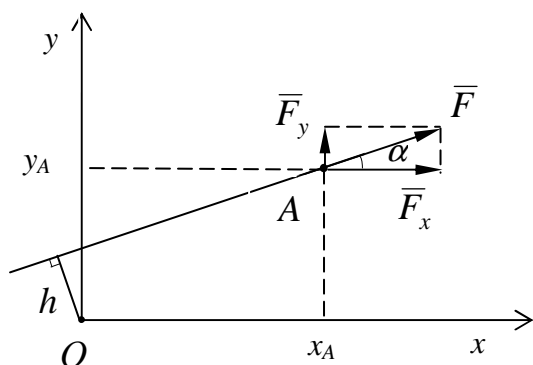
Розв'язання. Розкладемо силу \vec{F} на координатні складові \vec{F}_x і \vec{F}_y .

Визначимо їх величини: $F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66$ Н,

$F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5$ Н. За побудовою сила \vec{F} є рівнодійною сил \vec{F}_x і \vec{F}_y .

Тому для знаходження її моменту відносно точки O використаємо теорему Варіньона:

$$\begin{aligned} M_O(\vec{F}) &= M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y) = x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x = 8 \cdot 5 - 10 \cdot 8,66 = \\ &= 40 - 86,6 = -40,6 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$



б

Рис. 5.25

Тут знак „-” означає, що сила \vec{F} прагне повернути своє плече h за ходом стрілки годинника.

Примітка. Визначити момент сили \vec{F} відносно полюса за загальною формулою $M_O(\vec{F}) = \pm h \cdot F$ дуже складно, тому що невідомим є її плече h відносно точки O . Для його визначення спочатку необхідно скласти рівняння (5.23) або (5.24) лінії дії сили. Потім рівняння перпендикуляра з точки O на цю пряму, і далі визначити його довжину, яка і являтиме собою плече h сили \vec{F} відносно полюса O .

5.7. Приклад розв'язання задач приведення

Приклад. Для зображеної на рис. 5.26 довільної системи сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) у площині визначити в центрі O головний вектор \vec{F}_O , головний момент \vec{M}_O , параметри рівнодійної \vec{R} вихідної системи сил та її рівняння. Початкові дані: $F_1 = F_2$, $\alpha = 45^\circ$, координати точок прикладання сил: $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$.

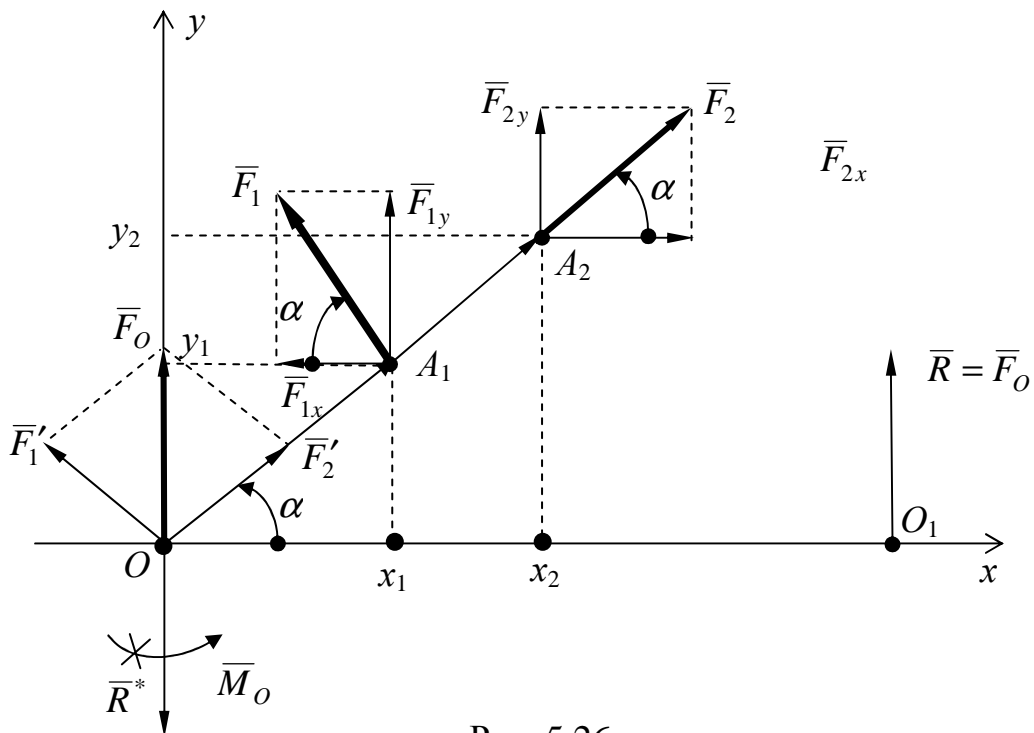


Рис. 5.26

Розв'язання. Визначимо, враховуючи рівняння (5.2) і (5.3), параметри головного вектора і головного моменту заданої системи сил стосовно центра O : $\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\vec{M}_O = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1$ (добуток $\vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 = 0$, тому

що вектори $\overline{OA_2}$ і $\overline{F_2}$ паралельні). Побудуємо вектори $\overline{F_O}$ і $\overline{M_O}$. При побудові головного вектора $\overline{F_O}$ використовуємо методику теореми Пуансо: сили $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$ перенесемо в точку O паралельно самим до себе; отримані $\overline{F_1'}$ і $\overline{F_2'}$ додамо геометрично і результуючу силу визначимо як головний вектор $\overline{F_O}$ вихідної системи сил $(\overline{F_1}, \overline{F_2})$ у центрі O .

Для заданої системи сил у точці O головний момент $M_O > 0$, тому його дугову стрілку спрямуємо у бік проти ходу стрілки годинника.

Проаналізуємо отримані результати.

За величинами $\overline{F_O} \neq 0$ і $\overline{M_O} \neq 0$, тому вихідна плоска система сил зводиться, відповідно до п. 5.5.4, до однієї рівнодійної сили \overline{R} .

Представимо далі момент $\overline{M_O}$ (закреслено на рис. 5.26) у вигляді пари сил $(\overline{R}, \overline{R^*})$, в якій сила $\overline{R^*} = -\overline{F_O}$, а плече $h = OO_1 = \frac{M_O}{F_O}$. За визначенням сили

$\overline{F_O}$ і $\overline{R^*}$ складають двійку сил, тому система сил $(\overline{F_O}, \overline{R^*}) \sim 0$.

Отже вихідну систему сил $(\overline{F_1}, \overline{F_2})$ еквівалентними системними перетвореннями

$$(\overline{F_1}, \overline{F_2}) \sim (\overline{F_O}, \overline{M_O}) \sim (\overline{F_O}, (\overline{R}, \overline{R^*})) \sim (\overline{F_O}, \overline{R^*}), \overline{R}) \sim (\overline{R})$$

зведено до однієї сили, рівнодійної \overline{R} з точкою прикладання O_1 на відстані OO_1 від полюса O в бік додатного відліку координати x . Лінією дії рівнодійної буде пряма з рівнянням $x = OO_1$, де OO_1 - число.

6. УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ СИЛ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ РІВНОВАГИ

6.1. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Як відомо (п. 5.5), довільна система сил у площині в загальному випадку зводиться у центрі O до сили \bar{R} , яка дорівнює головному вектору \bar{F}_0 системи, і пари сил з моментом \bar{m}_0 , який дорівнює головному моменту \bar{M}_0 системи. При цьому головний вектор належить площині дії пари \bar{m}_0 , що співпадає з площиною дії сил системи.

Для цієї системи сил існують три окремі випадки рівноваги.

Перша (основна) форма умов рівноваги. Припустимо, що площина дії системи сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ співпадає з координатною площиною xOy (рис. 6.1) системи координат $Oxyz$.

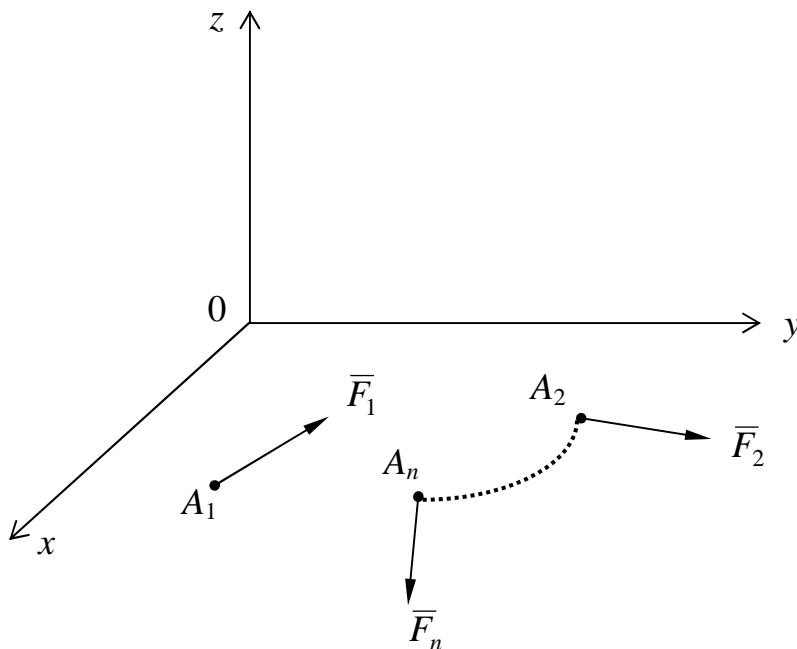


Рис. 6.1

Проекції сил системи, а також радіусів-векторів точок їх прикладання на вісь Oz в даному випадку дорівнюють нулю. Тому система умов рівноваги перетворюється в наступну:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (6.1)$$

Система (6.1) аналітичних (алгебраїчних) умов рівноваги твердого тіла формулюється таким чином: для рівноваги довільної системи сил у площині необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожен з координатних осей Ox і Oy і алгебраїчна сума їх моментів відносно осі Oz (або довільного центра O в площині дії сил системи $\sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0$), дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги. У даному випадку умови рівноваги формулюються так: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів сил відносно будь-яких двох точок у площині дії сил і сума проекцій цих сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю. Для площини E дії сил системи, точок B, C на ній і осі Ox (рис. 6.2) буде:

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad F_{Bx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (6.2)$$

де F_{Bx} - проекція головного вектора системи сил у точці B на вісь Ox .

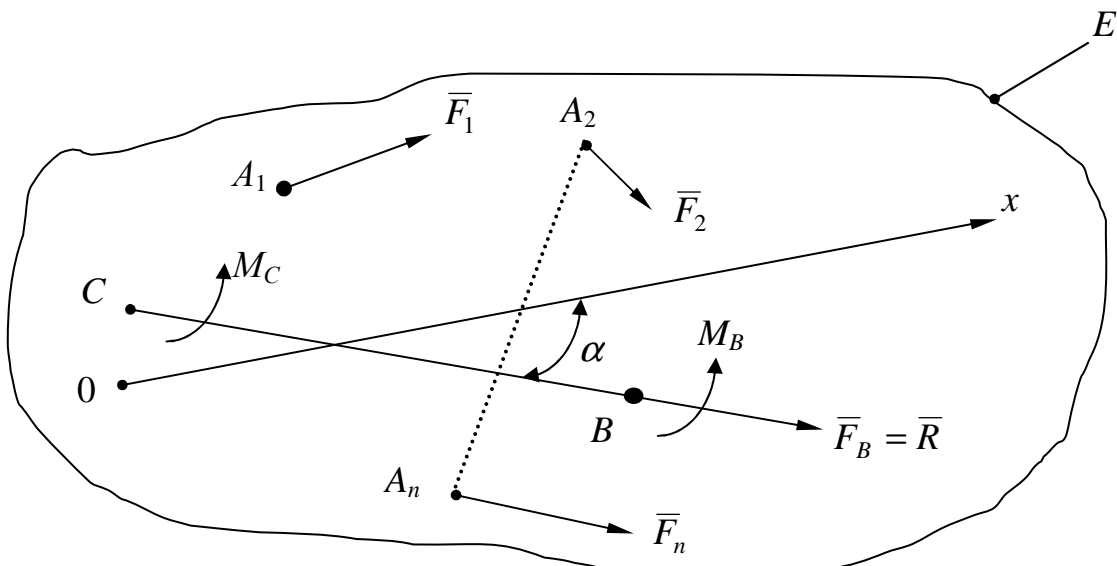


Рис. 6.2

Необхідність цих умов очевидна, бо якщо будь-яка з умов не буде виконуватися, то або в точці B головний вектор системи $\bar{F}_B \neq 0$, або головний момент $\bar{M}_B \neq 0$ (чи $\bar{M}_C \neq 0$) і тоді рівноваги тіла не відбувається.

Достатність умов (6.2) доведемо наступним чином. Якщо виконуються тільки перші з двох умов (6.2), тобто $M_B = 0$ і $M_C = 0$, то така система сил може мати лише рівнодійну $\bar{R} = \bar{F}_B$ (рис. 6.2), лінія дії якої проходить через точки B і C . Оскільки вісь Ox проходить під кутом $\alpha \neq \pi/2$ до відрізка BC , то остання умова (6.2) може бути виконана тільки коли $F_{BX} = F_B \cdot \cos \alpha = R \cdot \cos \alpha = 0$, тобто коли $\bar{R} = \bar{F}_B = 0$. Це призводить до одночасного виконання всіх умов (6.5), що забезпечують рівновагу тіла безумовно.

Третя форма умов рівноваги. Ця форма умов рівноваги формулюється таким чином: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок, наприклад B, C, D , що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю (рис. 6.3):

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad M_D = \sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = 0, \quad (6.3)$$

де B, C, D – точки приведення системи сил.

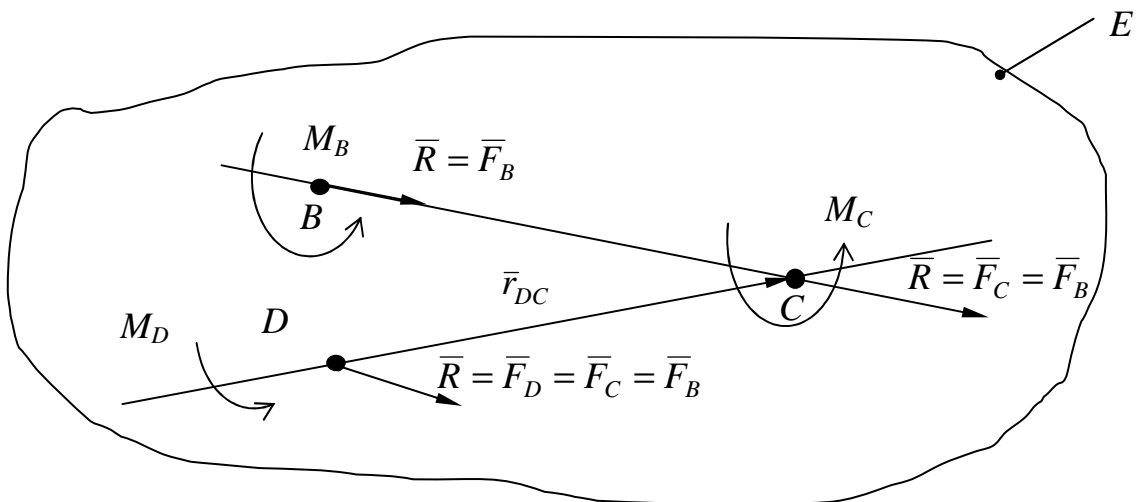


Рис. 6.3

Необхідність цих умов, враховуючи (5.11), очевидна, бо при одночасному виконанні, наприклад двох перших умов, головний момент системи при $\bar{r}_{DC} \neq 0$ може дорівнювати нулю у третій точці D ($\bar{M}_D = \bar{M}_C + \bar{r}_{DC} \times \bar{F}_B$) тільки коли головний вектор \bar{F}_B системи сил дорівнює нулю. Тому при одночасному виконанні умов (6.6) виконуються умови (6.1) рівноваги тіла і воно буде у рівновазі.

Достатність умов (6.3) випливає з того, що при їх виконанні система сил не знаходилася б у рівновазі тільки у випадку, коли її відмінна від нуля рівнодійна \bar{R} проходила одночасно через всі три точки BCD площини E , що неможливо за визначенням.

6.2. Приклади розв'язання задач рівноваги

Приклад 1. Рівновага довільної системи сил у площині.

Початкова схема конструкції наведена на рис. 6.5,а. Тут на балку із защемленим кінцем A на відрізку CD діє рівномірно розподілене навантаження $q = 0,8$ кН/м, в точці B – сила $F = 2$ кН під кутом 45° . Крім того, до балки прикладена пара сил з моментом $m = 1,2$ кН·м. Необхідно визначити реакції защемлення при дії на балку заданої системи зовнішніх силових факторів. Розміри балки в метрах вказані на рисунку.

Розв'язання.

Розрахункова схема наведена на рис. 6.4,б. При її побудові використано принцип звільнення від в'язів, розподілене навантаження замінено зосередженою силою $Q = 3 \cdot 0,8 = 2,4$ кН, а сила \bar{F} – координатними складовими \bar{F}_x , \bar{F}_y з величинами

$$F_x = F \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН},$$

$$F_y = F \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41 \text{ кН}.$$

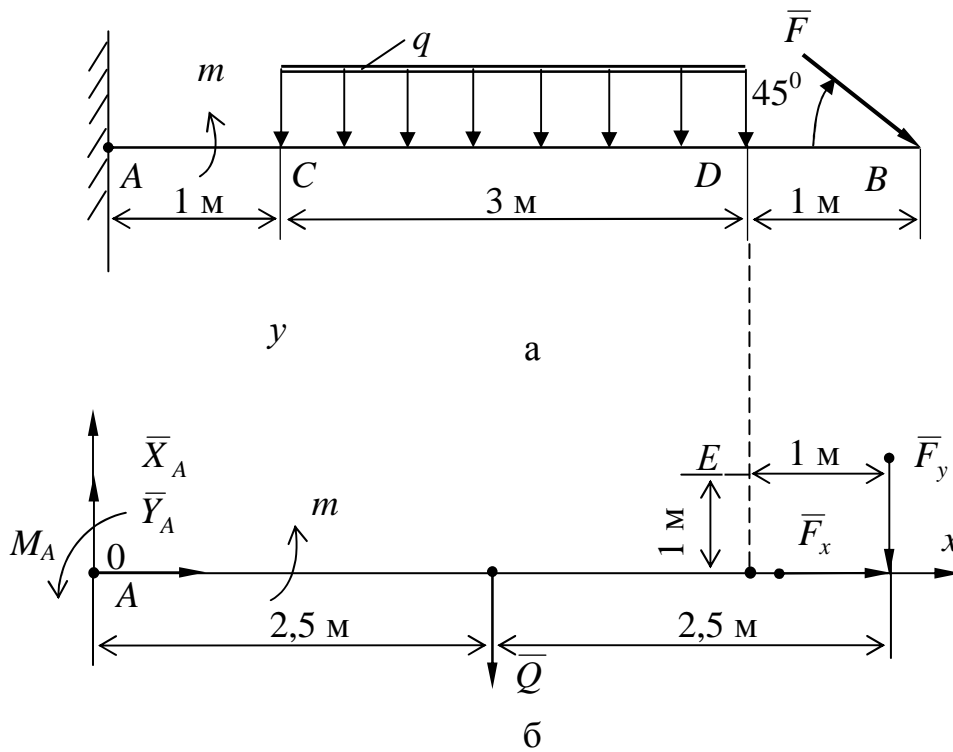


Рис. 6.4

Відповідно до рис. 6.4,б, балка як вільне тверде тіло, перебуває в рівновазі під дією заданих сил $\bar{Q}, \bar{F}_x, \bar{F}_y$, пари сил з моментом m і реакції защемлення у вигляді силових складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A та пари сил з моментом M_A .

Складемо рівняння рівноваги балки, використавши першу форму умов рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + F_x = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - Q - F_y = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad M_A + m - 2,5Q - 5F_y = 0.$$

З отриманих трьох рівнянь можна визначити три невідомі реакції:

з першого рівняння

$$X_A = -F_x = -1,41 \text{ (кН)};$$

з другого рівняння

$$Y_A = Q + F_y = 2,4 + 1,41 = 3,81 \text{ (кН)};$$

з третього рівняння

$$M_A = 5F_y + 2,5Q - m = 5 \cdot 1,41 + 2,5 \cdot 2,4 - 1,2 = 11,87 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Знак (-) отриманої реакції \bar{X}_A показує, що в дійсності вона направлена на розрахунковій схемі у протилежний бік.

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язів складемо рівняння моментів сил відносно точки E , що знаходиться на відстані 1 м від точки B і від балки (рис.6.5, б).

Перевірка.

$$\begin{aligned} \sum M_E &= M_A - Y_A \cdot 4 + m + Q \cdot 1,5 - F_y \cdot 1 + X_A \cdot 1 + F_x \cdot 1 = \\ &= 11,87 - 3,81 \cdot 4 + 1,2 + 2,4 \cdot 1,5 - 1,41 \cdot 1 - 1,44 \cdot 1 + 1,41 \cdot 1 = 18,08 - 18,08 = 0. \end{aligned}$$

6.3. Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним з двох способів:

- 1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що складають конструкцію;
- 2) початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

Приклад 1. Два невагомих стержні ADC і BC з'єднані між собою шарніром C і закріплені нерухомими шарнірами A і B . На конструкцію діють сили $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 20$ кН, розподілене навантаження інтенсивністю $q = 4$ кН/м і пара сил з моментом $M = 50$ кНм. Розміри задані на вихідній схемі (рис. 6.5). Треба визначити реакції опор A і B , а також тиск у проміжному шарнірі C складеної конструкції.

Розв'язання. При розв'язанні задачі першим способом будемо розглядати рівновагу всієї складеної конструкції, а також стержня CB окремо. Побудуємо розрахункову схему: відкинемо опори і замінимо їх реакціями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$,

замінімо розподілене навантаження зосередженою силою $Q=3q$, прикладеною в середину ділянки AD , побудуємо осі координат.

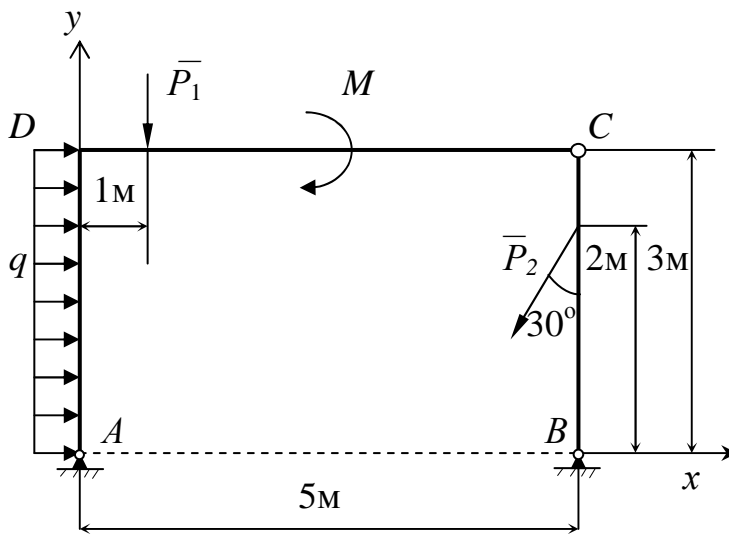


Рис. 6.5

При цьому шарнір C вважатимемо нерухомим (закреслено на рис. 6.6), використавши аксіому 5 затвердіння.

Визначимо величини сил \bar{Q} , \bar{P}_{2x} і \bar{P}_{2y} :

$$Q = 3q = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН},$$

$$P_{2x} = P \cdot \sin 30^\circ, \quad P_{2y} = P \cdot \cos 30^\circ.$$

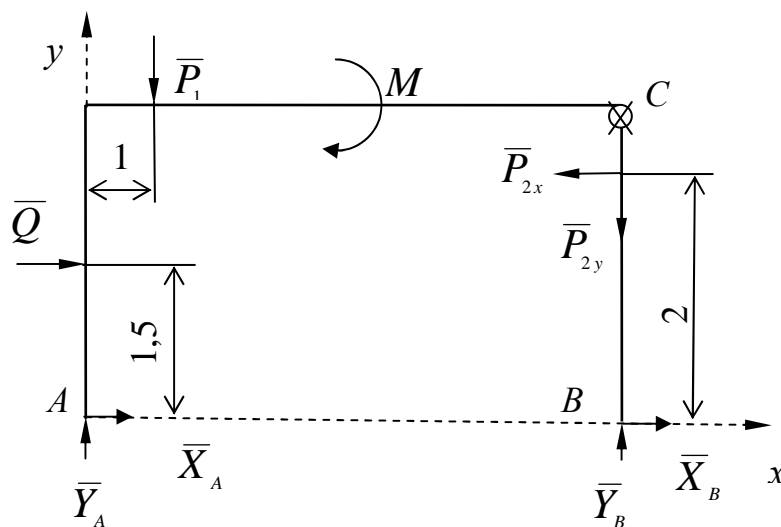


Рис. 6.6

Складемо рівняння рівноваги нерозчленованої конструкції:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_B + Q - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_B - P_1 - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = -Y_A \cdot 5 - Q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 4 - M + P_{2x} \cdot 2 = 0.$$

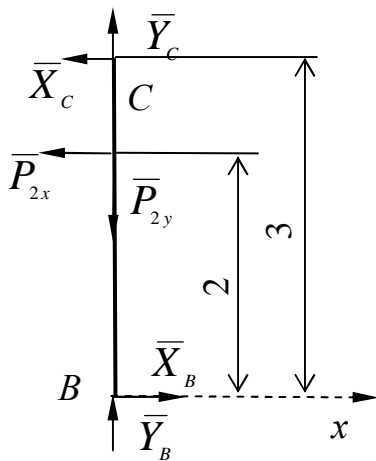


Рис. 6.7

Далі розчленимо конструкцію на складові елементи і розглянемо окремо стержень BC . Дію відкинутої конструкції ADC замінимо реакціями \bar{X}_C, \bar{Y}_C у шарнірі C .

Примітка. Напрямки осей координат на обох розрахункових схемах (рис. 6.6, рис. 6.7) повинні співпадати.

Складемо рівняння рівноваги стержня BC :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_B - X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_B + Y_C - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(F_i) = X_B \cdot 3 - P_{2x} \cdot 1 = 0.$$

Відповідно до розглянутих на рис. 6.6 і рис. 6.7 розрахункових схем ми маємо шість невідомих реакцій опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ та реакції \bar{X}_C, \bar{Y}_C у шарнірі C . Визначимо їх із складених шести рівнянь рівноваги.

Із третього рівняння знаходимо

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot 4 + P_2 \sin 30^\circ \cdot 2 - M - Q \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 4 + 20 \sin 30^\circ \cdot 2 - 50 - 12 \cdot 1,5}{5} = -1,6 \text{ кН},$$

з другого рівняння отримаємо

$$Y_B = -Y_A + P_1 + P_{2y} = -(-1,6) + 10 + 20 \cos 30^\circ = 28,92 \text{ кН}.$$

$$\text{Із шостого рівняння знаходимо } X_B = \frac{P_2 \sin 30^\circ}{3} = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ}{3} = 3,33 \text{ кН},$$

$$\text{з п'ятого отримаємо } Y_C = P_2 \cos 30^\circ - Y_B = 20 \cdot \cos 30^\circ - 28,92 = -11,6 \text{ кН},$$

$$\text{з четвертого - } X_C = X_B - P_2 \sin 30^\circ = 3,33 - 20 \cdot \sin 30^\circ = -6,67 \text{ кН}, \text{ і, нарешті, з}$$

$$\text{першого - } X_A = -X_B - Q + P_2 \sin 30^\circ = -3,33 - 12 + 20 \cdot \sin 30^\circ = -5,33 \text{ кН}.$$

Значення $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ менші нуля, відповідно ці реакції в дійсності спрямовані протилежно зображеним на рисунку.

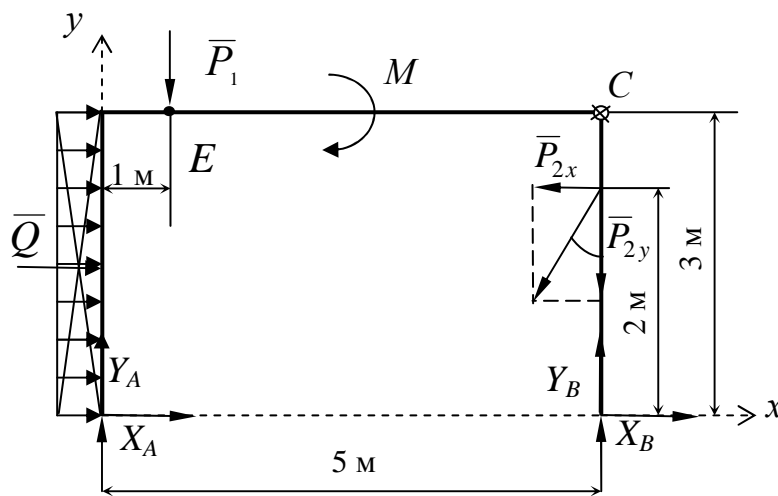


Рис. 6.8

Для перевірки одержаних величин реакцій опор $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ розглянемо складену конструкцію в цілому і складемо рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дій цих реакцій, наприклад, відносно точки E (рис. 6.8). Шарнір C знову будемо вважати нерухомим.

Перевірка.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_E(\bar{F}_i) &= X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 1 + Q \cdot 1,5 - M - P_{2x} \cdot 1 - P_{2y} \cdot 4 + Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 3 = \\ &= -5,33 \cdot 3 - (-1,6) \cdot 1 + 12 \cdot 1,5 - 50 - 20 \sin 30^\circ \cdot 1 - 20 \cos 30^\circ \cdot 4 + 28,92 \cdot 4 + \\ &+ 3,33 \cdot 3 = -15,99 + 8 + 18 + 40 - 50 - 10 + 9,9 = -145,27 + 145,27 = 0. \end{aligned}$$

При цьому рівність нулю суми моментів сил відносно точки E означає правильність визначених реакцій.

Приклад 2. Знайти реакції опор A і B , а також тиск у проміжному шарнірі C складеної конструкції, на яку діють сили $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 10$ кН, розподілене навантаження інтенсивністю $q = 1,4$ кН/м і пара сил з моментом $M = 15$ кНм. Розміри задані на початковій схемі (рис. 6.9), кут $\alpha = 60^\circ$.

Розв'язання. При розв'язанні задачі другим способом будемо розглядати рівновагу стержнів ADC і BC конструкції окремо (рис. 6.10 і 6.11). Побудуємо розрахункові схеми за звичайним правилом. Тут слід враховувати, що відповідно до аксіоми 4 реакції \bar{X}_C, \bar{Y}_C і \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C в шарнірі C задовольняють наступним рівностям: $X_C = X'_C, Y_C = Y'_C$. Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою $Q = 4q$, яку прикладемо в середині ділянки CB .

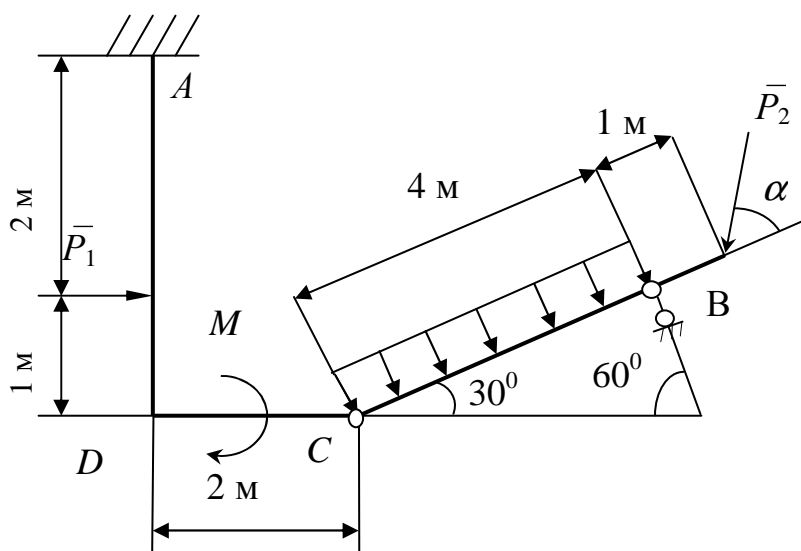


Рис. 6.91

Визначимо величини сил $\bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}, \bar{Q}$, що діють на стержень CB :

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН}, \quad P_{2y} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,7 \text{ кН},$$

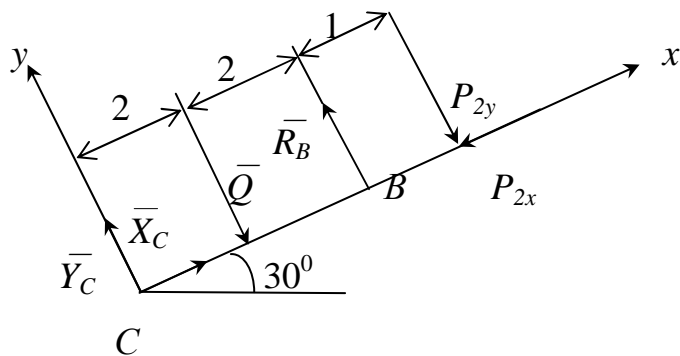


Рис. 6.10

$$Q = 4q = 5,6 \text{ кН.}$$

Складемо рівняння рівноваги стержня BC:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_C - Q + R_B - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_C = -Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_{2y} \cdot 5 = 0.$$

Далі складемо рівняння рівноваги стержня ADC:

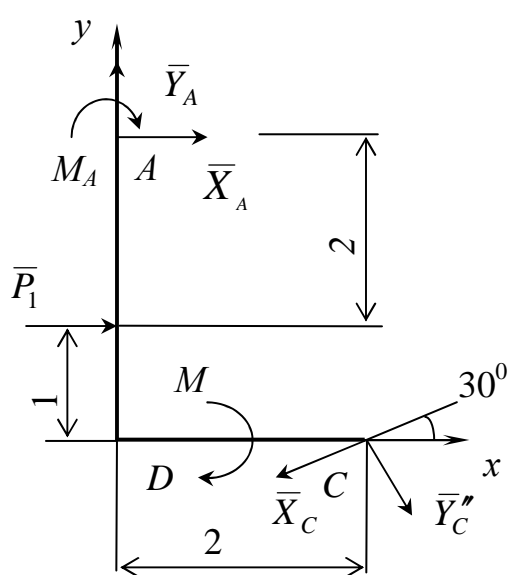


Рис. 6.11

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + P_1 - X_C \cos 30^\circ + Y_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - Y_C \sin 60^\circ - X_C \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = -M_A + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - M - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 - Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = 0. \quad (6)$$

З отриманих шести рівнянь визначимо невідомі реакції:

$$\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C, \bar{R}_B.$$

Із третього рівняння знаходимо

$$R_B = \frac{Q \cdot 2 + P_{2y} \cdot 5}{4} = \frac{5,6 \cdot 2 + 8,7 \cdot 5}{4} = 13,67 \text{ кН,}$$

з першого рівняння $X_C = P_{2x} = 5 \text{ кН,}$

з другого рівняння

$$Y_C = Q - R_B + P_{2y} = 5,6 - 13,67 + 8,7 = 0,63 \text{ кН,}$$

з п'ятого рівняння

$$Y_A = Y_C \sin 60^\circ + X_C \sin 30^\circ = 0,63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 3,05 \text{ кН},$$

з четвертого

$$X_A = -Y_C \cos 60^\circ + X_C \cos 30^\circ - P_1 = -0,63 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 = -1,98 \text{ кН},$$

з шостого

$$\begin{aligned} M_A &= -M + P_1 \cdot 2 - X_C \cos 30^\circ \cdot 3 + Y_C \cos 60^\circ \cdot 3 - X_C \sin 30^\circ \cdot 2 - \\ &- Y_C \sin 60^\circ \cdot 2 = -15 + 6 \cdot 2 - 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + 0,63 \frac{1}{2} \cdot 3 - 5 \frac{1}{2} \cdot 2 - 0,63 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \\ &= -21,14 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

Для перевірки розглянемо конструкцію в цілому і складемо для неї рівняння моментів відносно точки C , через яку не проходять лінії дій визначених реакцій. Шарнір C вважаємо затверділим (рис. 6.12).

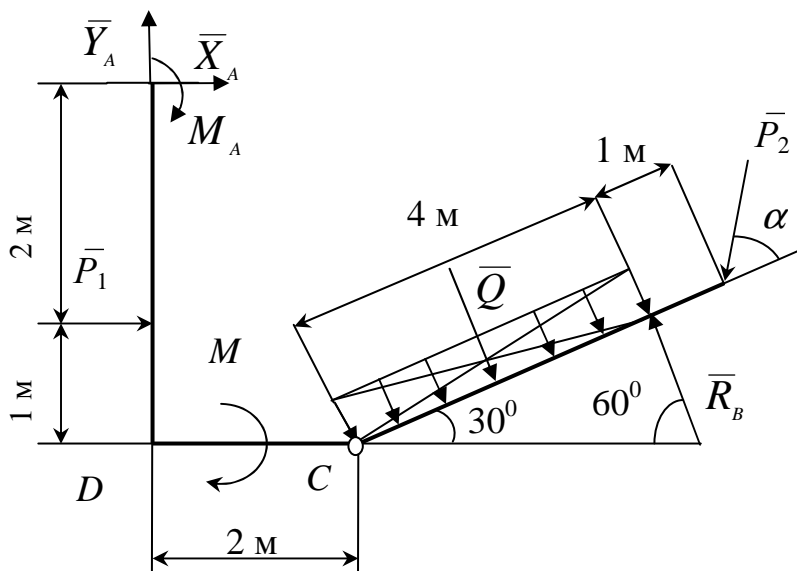


Рис. 6.12

Перевірка.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) &= -M_A - X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 2 - P_1 \cdot 1 - M - Q \cdot 2 + R_B \cdot 4 - P_2 \cdot 4,33 = \\ &= -(-21,14) - (-1,98) \cdot 3 - 3,05 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 15 - 5,6 \cdot 2 + 13,67 \cdot 4 - 10 \cdot 4,33 \approx 0. \end{aligned}$$

Рівність нулю суми моментів сил відносно точки C означає, що задачу розв'язано правильно.

7. РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

7.1. Основні визначення і припущення

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, що складається з прямолінійних стержнів, які з'єднуються між собою за допомогою шарнірів.

Ферми являють собою досить розповсюджені складові частини промислових і цивільних споруд. Їх використовують як опори трубопроводів і ліній електропередач (рис. 7.1), радіовежі (рис. 7.2), конструкції кранів, елементи великих прольотів будівельних та спортивних споруд, елементи мостів (рис. 7.3, 7.4, 7.5) та ін.

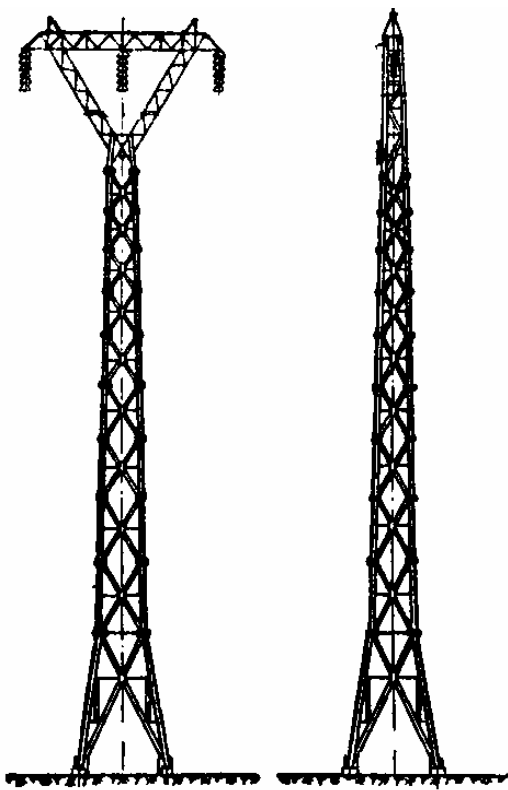


Рис. 7.1 – Опори ЛЕП



Рис. 7.2 – Ейфелева вежа
(Париж, Франція)

Якщо всі стержні ферми розташовані в одній площині, ферму називають *плоскою*. З'єднання стержнів ферми між собою називається *вузлами*.

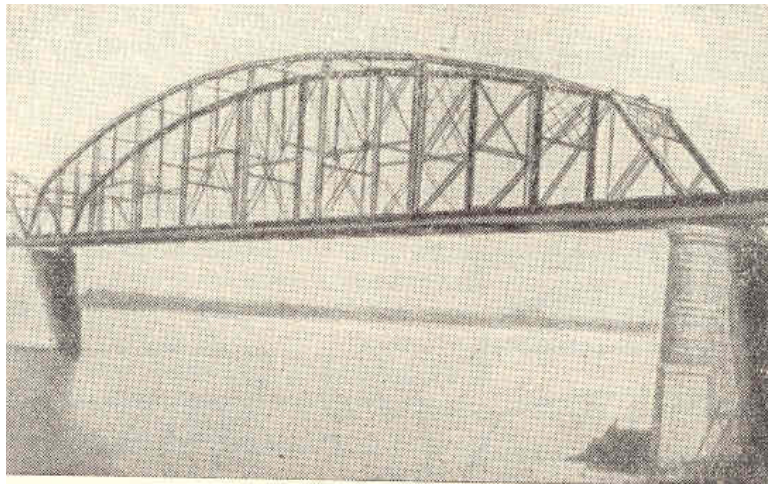


Рис. 7.3 – Мостова ферма

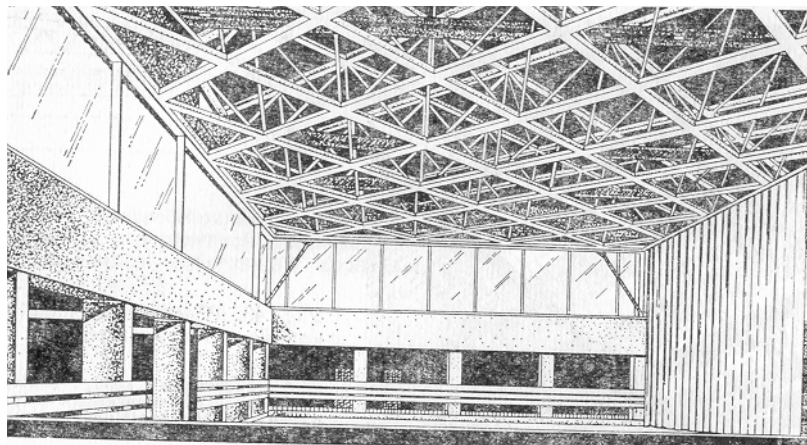


Рис. 7.4 – Елемент даху спортивного залу в Парижі (Франція)



Рис. 7.5 – Залізничний міст в Единбурзі (Шотландія)

Основним завданням розрахунку ферми є визначення зусиль, що виникають у стержнях при дії зовнішнього навантаження. При цьому розрахунки виконують при наступних припущеннях:

- усі зовнішні навантаження прикладені тільки у вузлах;
- вагою стержнів і тертям у вузлах, які є ідеальними шарнірами, нехтують.

Тоді на підставі першої аксіоми статички можна вважати, що стержні ферми працюють тільки на розтяг або стиск. Наведені припущення вносять певну похибку в розрахунки у порівнянні з дійсним напруженим станом стержнів, але ця похибка невелика і отримані результати можна використовувати для технічних розрахунків елементів ферми на міцність.

Найпростішим прикладом ферми є система трьох стержнів, з'єднаних між собою шарнірами (рис. 7.6).

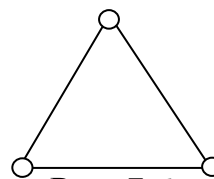


Рис. 7.6

Простою плоскою фермою називається ферма, яка може бути побудована з трикутної шляхом послідовного приєднання кожного нового вузла за допомогою двох нових стержнів (рис. 7.7).

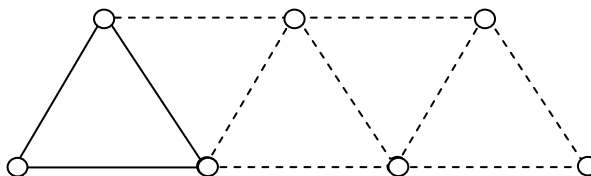


Рис. 7.7

Розглянемо зв'язок між кількістю вузлів n і кількістю стержнів k у простих фермах. Основний трикутник (рис. 7.6) має три вузли і три стержні. Для незмінного з'єднання з основним трикутником кожного з решти $n-3$ вузлів потрібно приєднати два стержні. Отже загальна кількість стержнів у простій ферми з урахуванням трьох стержнів основного трикутника визначається так:

$$k = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \quad (7.1)$$

Покажемо, що проста ферма статично означена, якщо число опорних реакцій дорівнює трьом. Дійсно, для кожного вузла можна скласти два рівняння рівноваги, оскільки на нього діє збіжна система сил. Таким чином, усього можна скласти $2n$ рівнянь рівноваги. У ці рівняння будуть входити k невідомих зусиль у стержнях і три реакції опор. З урахуванням формули (7.1) загальне число невідомих буде:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n,$$

тобто дорівнюватиме числу рівнянь рівноваги. Таким чином, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Зазначимо, що якщо число стержнів k менше, ніж підраховане за формулою (7.1), то така конструкція буде механізмом, тобто матиме можливість рухатися. Якщо число стержнів більше, ніж підраховане за формулою (7.1), або число опорних реакцій більше трьох, ферма буде статично неозначена і для її розрахунку треба застосувати методи будівельної механіки.

7.2. Порядок розрахунку простої ферми

1. Спочатку складаємо три рівняння рівноваги для визначення реакцій опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій бажано скласти перевірочне рівняння.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають у себе умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і реакції опор. Але попереднє визначення опорних реакцій суттєво спрощує розв'язання задачі.

2. Далі визначаємо зусилля у стержнях ферми.

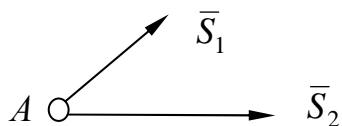
Звичайно використовуємо два способи: вирізання вузлів і Ріттера.

а) Спосіб вирізання вузлів. Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в усіх стержнях ферми. Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги збіжних систем сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох.

Для визначеності припускають, що всі зусилля направлені від вузла, тобто стержні розтягнуті. Якщо в результаті розрахунків значення зусилля буде від'ємним, то це означатиме, що стержень стиснутий. Останній вузол розглядають, як правило, для перевірки.

Зусилля в окремих стержнях можуть виявитись нульовими, тобто стержні будуть ненавантаженими. Такі стержні можна визначити за допомогою кількох лем.

Лема 1. Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються два стержні (рис. 7.8), то зусилля в цих стержнях дорівнюватимуть нулю, тобто



$$S_1 = 0 \text{ і } S_2 = 0.$$

Рис. 7.8

Лема 2. Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються три стержні (рис. 7.9), з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля у третьому стержні дорівнює нулю: $S_3 = 0$.

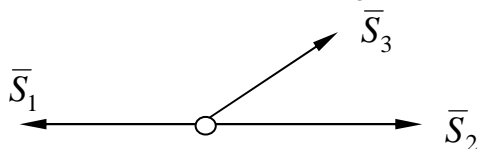


Рис. 7.9

Лема 3. Якщо до вузла, в якому збігаються два стержні, прикладена зовнішня сила \bar{P} у напрямку одного з стержнів (рис. 7.10), то зусилля у другому стержні дорівнює нулю: $S_2 = 0$.

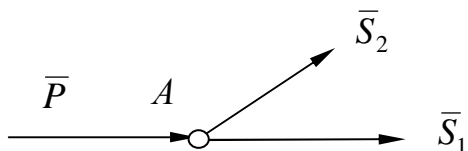


Рис. 7.10

б) Спосіб Риттера. Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в окремих стержнях ферми, зокрема, для перевірочних розрахунків. Згідно з цим способом ферму розподіляють на дві частини перерізом, який проходить не більше, ніж через три стержні, і розглядають рівновагу однієї з частин. Зусилля в перерізаних стержнях направляють від перерізу, тобто припускають (як і в способі вирізання вузлів), що всі стержні розтягнуті. Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стержня, через який пройшов переріз. Для цього складають рівняння моментів відносно точки площини (цю точку називають *точкою Риттера*), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стержнів, які потрапили в переріз. Якщо два інших стержні перерізу виявляються

паралельними, то складають рівняння проекцій сил на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стержнів. Таким чином, спосіб Ріттера дає змогу визначити зусилля в будь-якому стержні ферми незалежно від зусиль в інших стержнях.

Аналізуючи вищезазначені способи визначення зусиль у стержнях, зазначимо, що зусилля способом вирізання вузлів визначають послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Це може призвести до накопичення похибок, тому бажано значення знайдених зусиль при розгляді наступних вузлів брати якомога точнішими. Крім того, помилка у визначенні одного зусилля призведе до неправильних розрахунків усіх інших стержнів, що залишились.

Спосіб Ріттера на відміну від попереднього не призводить до накопичення похибок, бо всі зусилля визначаються незалежно одне від одного. Але одночасно це не дає можливості помітити грубі помилки, що можуть трапитись при обчисленні. У деяких фермах також не всі зусилля можуть бути визначені способом Ріттера незалежно одне від одного.

Таким чином, найкраща методика визначення зусиль у стержнях ферми полягає в поєднанні способів вирізання вузлів і Ріттера. При цьому всі зусилля визначаються за способом вирізання вузлів і деякі з них перевіряють способом Ріттера.

Приклад 1. Визначити зусилля у стержнях ферми (рис. 7.11), на яку діє задана сила $P = 10$ кН. Зусилля у стержнях 2, 3, 4 перевірити способом Ріттера.

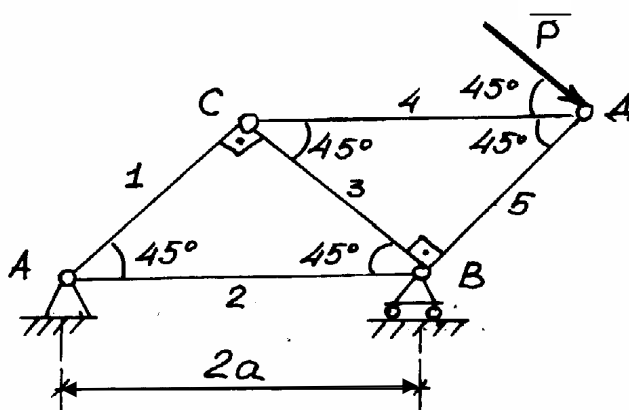


Рис. 7.11

Розв'язання:

1) Розглянемо рівновагу ферми (рис. 7.12) і визначимо реакції опор А і В:

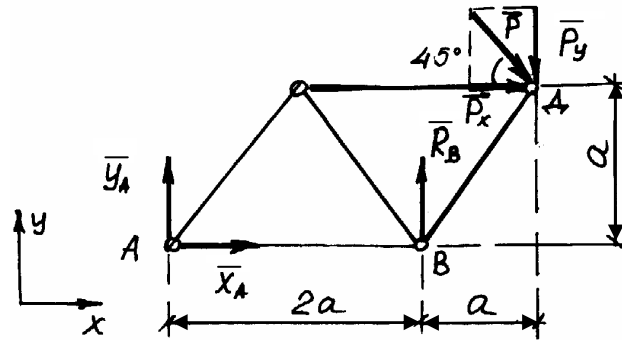


Рис. 7.12

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0,$$

де P_x, P_y - модулі складових сили \bar{P} : $P_x = P \cdot \cos 45^\circ$, $P_y = P \cdot \sin 45^\circ$,

$$R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ кН};$$

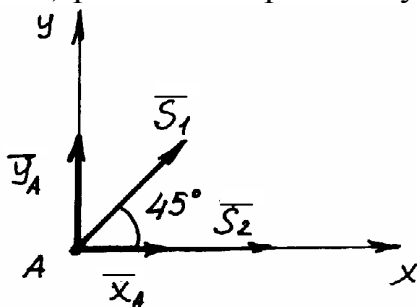
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0;$$

$$Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

Перевірка: $\sum_{i=1}^n M_D(F_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$
 $= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$

2) Визначимо зусилля у стержнях ферми методом вирізання вузлів:

а) розглянемо рівновагу вузла А (рис. 7.13):



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

Рис. 7.13

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0;$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

б) розглянемо рівновагу вузла С
(рис. 7.14):

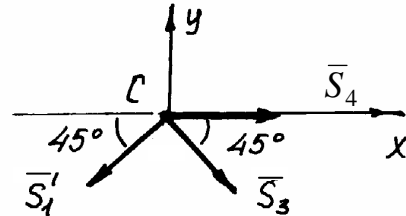


Рис. 7.14

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$-S_1' \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0; S_3 = -S_1' = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S_1 \cdot \cos 45^\circ + S_3' \cos 45^\circ + S_4 = 0;$$

$$S_4 = S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

(за модулем $S_1' = S_1 = 10$ кН);

в) розглянемо рівновагу вузла В (рис. 8.15):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S_2' - S_3' \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

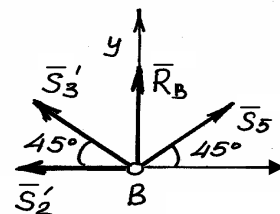


Рис. 7.15

$$S_5 = \frac{S_2' + S_3' \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$

друге рівняння можна використати для перевірки:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iy} &= -S_3' \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ = \\ &= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0; \\ & (S_2' = S_2; S_3' = S_3); \end{aligned}$$

г) для перевірки розглянемо останній вузол Д (рис. 7.16):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S'_4 - S'_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

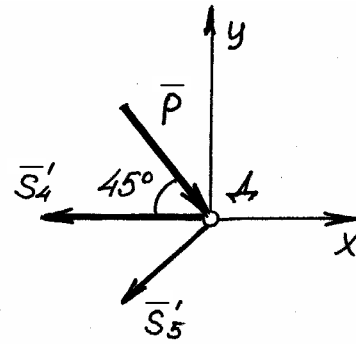


Рис. 7.16

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \sin 45^\circ - S'_5 \sin 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

$$(S'_4 = S_4; S'_5 = S_5);$$

3) Визначимо зусилля у стержнях 2, 3, 4 ферми методом Ріттера. Для цього проведемо переріз через ці стержні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми (рис. 7.17):

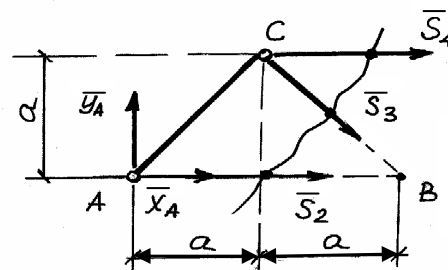


Рис. 7.17

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0;$$

$$S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0; \quad S_4 - 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

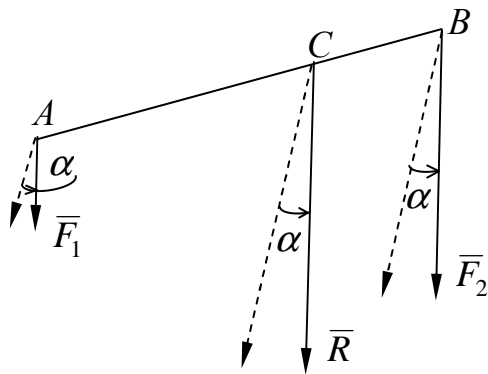
Відповідь: 1) $X_A \approx -7$ кН; $Y_A \approx -7$ кН; $R_B = 14$ кН; знаки «-» означають, що справжнє направлення складових \bar{X}_A, \bar{Y}_A протилежне показаним на рисунках;

2) $S_1 = 10$ кН; $S_2 = 0$; $S_3 = -10$ кН; $S_4 \approx 14$ кН; $S_5 = -10$ кН; стержні 1, 4 - розтягнуті; 3, 5 - стиснуті; 2 - ненавантажений.

8. ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ВАГИ

8.1. Центр паралельних сил

Розглянемо дві паралельні сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 , направлені в один бік (рис. 8.1). Згідно з п. 4.4.1 така система сил зводиться до рівнодійної \bar{R} . При цьому виконуються співвідношення:



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}. \quad (8.1)$$

Якщо сили \bar{F}_1 і \bar{F}_2 повернути на однаковий кут α навколо точок їх прикладання A і B, то рівнодійна \bar{R} повернеться на той самий кут навколо точки

Рис. 8.1

C, оскільки співвідношення (8.1) не зміняться. Такі ж міркування можна привести і для двох паралельних сил, направлених у різні боки.

Точка C, через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо точок їх прикладання на однаковий кут, називається *центром паралельних сил*.

В яких випадках існує така точка C і як знайти їх координати? На це запитання дає відповідь теорема про *центр паралельних сил*.

Теорема. Якщо головний вектор системи паралельних сил не дорівнює нулю, то центр паралельних сил (точка C) існує і його положення визначається за формулою

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k^* \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (8.2)$$

де \bar{r}_k – радіуси-вектори точок прикладання сил; \bar{r}_c – радіус-вектор центра паралельних сил; F_k^* – модулі паралельних сил, які відрізняються знаком для сил, направлених у різні сторони.

Доведення. Розглянемо систему n паралельних сил $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$. Якщо її головний вектор не дорівнює нулю, то, як показано у п. 5.4.4.3, така система паралельних сил зводиться до рівнодійної \bar{R} . Нехай точка O_1 – це якась точка лінії дії цієї рівнодійної (рис. 8.2), \bar{r}, \bar{r}_k – відповідно радіуси-вектори точки O_1 і точок прикладання сил \bar{R} і \bar{F}_k відносно вибраного центра O .

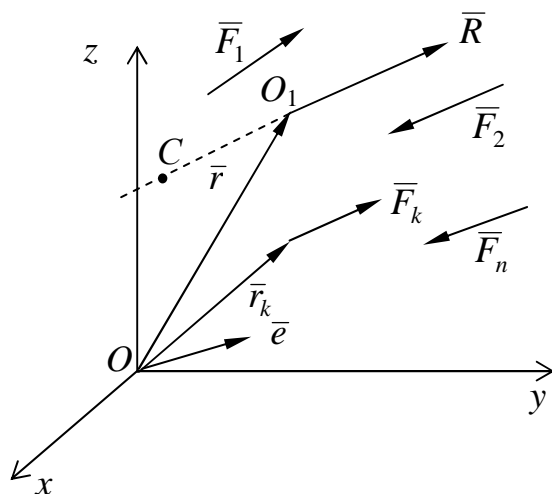


Рис. 8.2

Згідно з теоремою Варіньона про

момент рівнодійної (п. 5.6), отримаємо

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) \text{ або}$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) - \bar{M}_O(\bar{R}) = 0$$

$$\text{або } \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k - \bar{r}) \times \bar{F}_k = 0. \quad (8.3)$$

Рівність (9.3) запишемо у наступній формі

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k - \bar{r} \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0. \quad (8.4)$$

Введемо у розгляд одиничний вектор \bar{e} , паралельний лініям дії сил \bar{F}_k .

Тоді кожна із заданої системи сил може бути виражена через вектор \bar{e} :

$$\bar{F}_k = F_k^* \bar{e}, \quad (8.5)$$

де $F_k^* = F_k$, якщо напрями векторів \bar{F}_k і \bar{e} збігаються, і $F_k^* = -F_k$, якщо ці напрями протилежні. При цьому очевидно, що

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^*. \quad (8.6)$$

Підставляючи (8.5) і (8.6) у рівняння (8.4), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times F_k^* \bar{e} - \bar{r} \times \bar{e} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0,$$

або
$$\left[\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* \right] \times \bar{e} = 0.$$

Остання рівність виконується при будь-якому напрямі сил (напрямі вектора \bar{e}) тільки за умовою, що перший множник дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^* - \bar{r} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0. \quad (8.7)$$

Ця рівність має єдиний розв'язок відносно радіуса-вектора \bar{r} , який визначає точку прикладання рівнодійної. Такою точкою і є центр паралельних сил, чим доводиться його існування. Позначимо радіус-вектор центра паралельних сил як \bar{r}_c . Тоді з рівняння (8.7) отримаємо вираз:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \bar{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}.$$

Теорему доведено.

Формулу (8.2) можна подати у скалярній формі:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*}, \quad (8.9)$$

де $x_c, y_c, z_c, x_k, y_k, z_k$ – відповідно декартові координати центра S паралельних сил і точок прикладання сил \bar{F}_k .

Вирази $\sum_{k=1}^n x_k F_k^*$, $\sum_{k=1}^n y_k F_k^*$, $\sum_{k=1}^n z_k F_k^*$ у формулах (8.9) називаються

відповідно *статичними моментами* заданої системи сил відносно координатних площин yOz , xOz , xOy . Зазначимо, що коли початок координат сумістити з центром паралельних сил, то

$$x_c = y_c = z_c = 0$$

і статичні моменти заданої системи сил дорівнюватимуть нулю.

8.2. Центр ваги твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке знаходиться в полі сил тяжіння. Якщо розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, то можна вважати, що на частки цього тіла діють сили ваги \bar{P}_k , які складають систему паралельних сил (рис. 8.3).

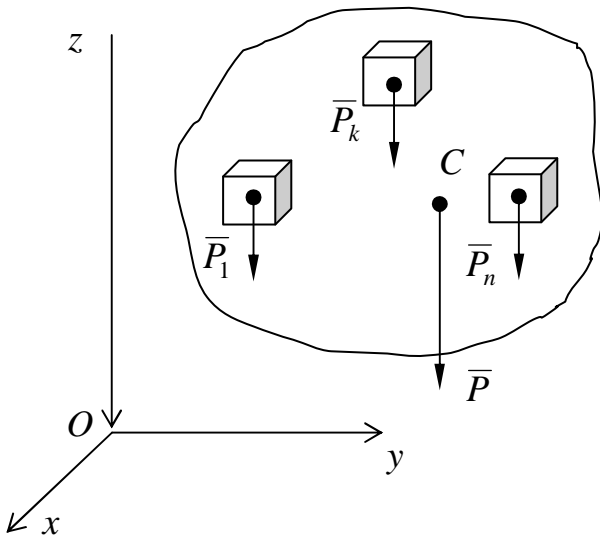


Рис. 8.3

Центром ваги твердого тіла називається центр паралельних сил ваги.

Для центра ваги тіла формули (8.9) набудуть вигляду:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k P_k}{P},$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k P_k}{P}, \quad (8.10)$$

де $P = \sum_{k=1}^n P_k$ – сила ваги (тіла); x_k, y_k, z_k – координати точки прикладання сили ваги \bar{P}_k окремої частини тіла.

8.2.1. Центр ваги однорідного твердого тіла

Якщо тіло однорідне, то вага кожної частки тіла пропорційна його об'єму:

$$P_k = \gamma_1 V_k, \quad (8.11)$$

де V_k – об'єм елементарної частки тіла; γ_1 – вага одиниці об'єму тіла.

Підставивши (8.11) у (8.10), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_1 V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^n x_k V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k V_k}{V}, \\ \text{аналогічно} \quad y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k V_k}{V}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V}, \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

де $V = \sum_{k=1}^n V_k$ – об’єм тіла.

Із формул (8.12) видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів тіла. Тому точку C , яка визначається за формулами (8.12), називають *центром ваги об’єму тіла*.

8.2.2. Центр ваги однорідної пластини

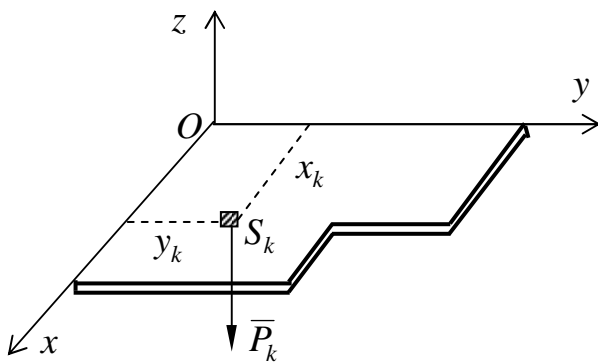


Рис. 8.4

Пластиною називають плоске тіло, один розмір якого (товщина) набагато менше двох інших (довжини і ширини):

$$P_k = \gamma_2 S_k, \quad (9.13)$$

де S_k – площа елементарної частки пластини; γ_2 – вага одиниці площі.

Підставивши (9.13) у (9.10) і вважаючи, що координатна площина xOy збігається з площиною пластини, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_2 S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\gamma_2 \sum_{k=1}^n x_k S_k}{\gamma_2 S} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S}, \\ \text{аналогічно} \quad y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S}, \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

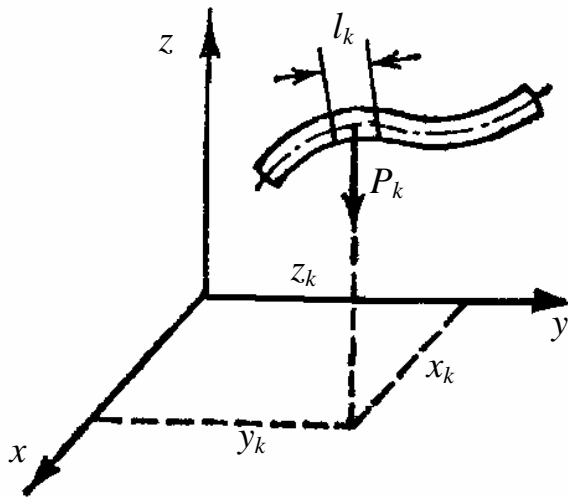
де $S = \sum_{k=1}^n S_k$ – площа пластини.

Точку C , координати якої визначаються за формулами (8.14), називають *центром ваги площі*.

Вирази у чисельниках формулах (8.14) називають відповідно *статичними моментами площі* S_y і S_x відносно осей x і y :

$$S_y = \sum_{k=1}^n x_k S_k = x_c \cdot S, \quad S_x = \sum_{k=1}^n y_k S_k = y_c \cdot S. \quad (8.15)$$

8.2.3. Центр ваги однорідного стержня



Стержнем називають тіло, один розмір якого (довжина) набагато більше двох інших. У цьому випадку вага елементарної частки тіла пропорційна її довжині (рис. 8.5):

$$P_k = \gamma_3 l_k, \quad (8.16)$$

Рис. 8.5

де l_k – довжина елементарної частки стержня; γ_3 – вага одиниці довжини.

Підставивши (9.16) у (9.10), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \gamma_3 l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\gamma_3 \sum_{k=1}^n x_k l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k l_k}{L}, \\ \text{аналогічно } y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k l_k}{L}, \\ z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n z_k l_k}{L}, \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

де $L = \sum_{k=1}^n l_k$ – довжина стержня.

Точку C , координати якої визначаються за формулами (9.17), називають *центром ваги лінії*.

8.3. Способи визначення координат центра ваги

1. *Спосіб симетрії*. Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії.

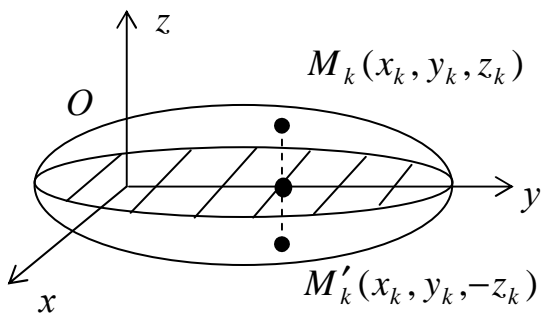


Рис. 8.6

Доведемо це твердження для тіла, що має площину симетрії (рис. 8.6). Розташуємо координатну площину xOy у площині симетрії (на рис. 9.6 ця площина заштрихована). Візьмемо в тілі дві точки M_k і M'_k , які розташовані симетрично відносно площини xOy . У

цих точок збігаються координати x_k, y_k , а координати z_k розрізняються тільки знаком. Виділимо навколо точок M_k, M'_k рівні елементарні об'єми V_k . Підсумуємо додатки:

$$z_k V_k + z'_k V_k = z_k V_k - z'_k V_k = 0.$$

Розглянувши всі елементарні об'єми, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n z_k V_k = 0$$

і обчислимо координату z_c центра ваги тіла за формулою (8.12):

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k V_k}{V} = 0.$$

Це означає, що центр ваги розглядуваного тіла знаходиться у площині симетрії.

Аналогічно можна довести твердження для тіла, що має вісь або центр симетрії.

Приклади. Розглянемо декілька прикладів.

а) прямолінійний стержень

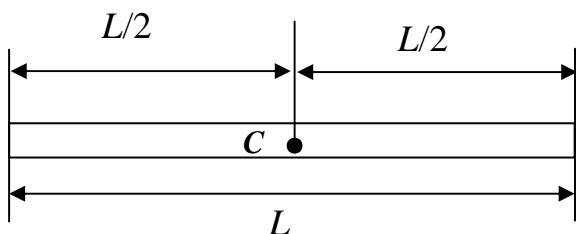


Рис. 8.7

Центр симетрії такого стержня є точка у середині стержня. Отже, центр ваги прямолінійного стержня – точка C – знаходиться у середині стержня (рис. 9.7).

б) прямокутник

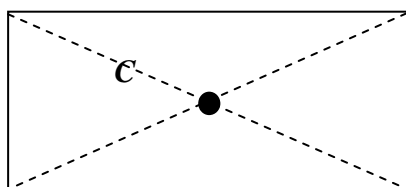


Рис. 8.8

Центром симетрії прямокутника є точка перетину його діагоналей. Тоді центр ваги прямокутника – точка C – також знаходиться у точці перетину діагоналей

(рис. 8.8). Як відомо, діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

в) коло

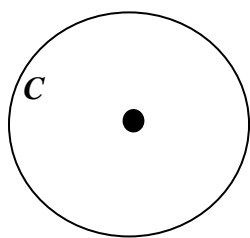


Рис. 8.9

Центром симетрії, а значить і центром ваги кола є його центр (рис. 8.9).

2. Спосіб розбиття.

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для яких положення центрів ваги відомі, то координати центра ваги тіла можна обчислити за формулами (8.10), (8.12), (8.14) або (8.17).

Приклад 1. Визначити координати центра ваги площі (рис. 8.10).

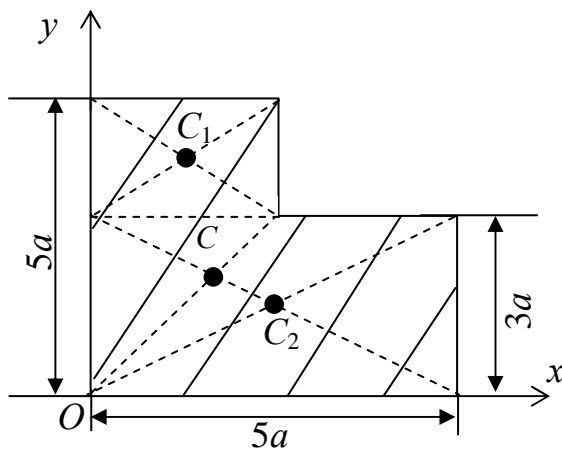


Рис. 8.10

Розв'язання. Розіб'ємо площу на два прямокутники, центри ваги яких C_1 і C_2 знаходяться в точках перетину діагоналей. Виберемо систему координат Oxy . Дані про координати центрів ваги прямокутників і їх площі запишемо в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

k	x_k	y_k	S_k
1	$1,5a$	$4a$	$6a^2$
2	$2,5a$	$1,5a$	$15a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (8.14):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{1,5a \cdot 6a^2 + 2,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{9a^3 + 37,5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a,$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a \cdot 6a^2 + 1,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{24a^3 + 22,5a^3}{21a^2} =$$

$$= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a.$$

Значення координат точки C ($2,2a$; $2,2a$) свідчать, що вона лежить на бісектрисі кута, проведеної з центра координат, яка є лінією симетрії площі.

3. Спосіб доповнення (або від'ємних площин). Якщо тіло має порожнину (виріз), то цю порожнину (виріз) можна розглядати як тіло з від'ємною вагою (площею) і для розрахунків використовувати спосіб розбиття.

Приклад 2. Розглянемо задачу прикладу 1.

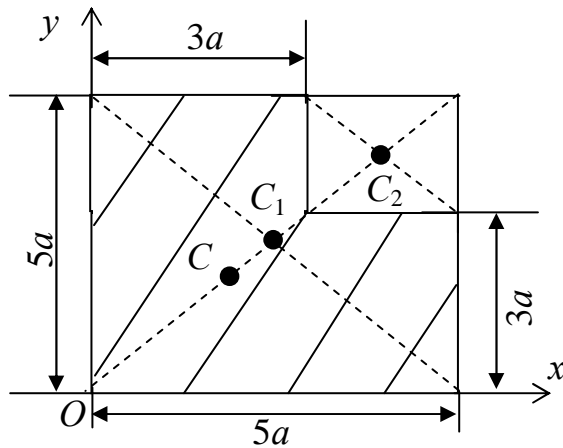


Рис. 8.11

Розв'язання. Уявимо площу як квадрат (1) зі сторонами $5a \times 5a$, з якого вирізали квадрат (2) зі сторонами $2a \times 2a$ (рис. 9.11). Площу останнього квадрата будемо вважати від'ємною. Дані про координати центрів ваги квадратів і їх площі запишемо в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

k	x_k	y_k	S_k
1	$2,5a$	$2,5a$	$25a^2$
2	$4a$	$4a$	$-4a^2$

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (9.14):

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} = \\
 &= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a; \\
 y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62,5a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} = \\
 &= \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a.
 \end{aligned}$$

4. **Спосіб інтегрування.** Якщо тіло неможливо розбити на скінченне число часток, у формулах (8.10), (8.12), (8.14), (8.17) переходять до інтегралів.

Наприклад, формули (8.14) матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned}
 x_c &= \frac{\int x dS}{S} \\
 y_c &= \frac{\int y dS}{S}
 \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

де інтеграли поширюються на площу S .

8.4. Центри ваги простіших фігур

Розглянемо декілька простих фігур, з яких можуть складатись більш складні фігури.

а) трикутник

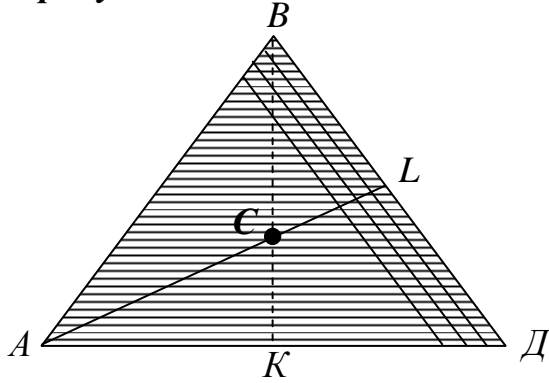


Рис. 8.12

Скористаємось способом розбиття і розділимо трикутник ABD на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні AD (рис. 8.12). Кожну таку смужку можна прийняти за прямокутник, центр симетрії якого лежить у середині, тобто на медіані BK

трикутника. Розглядаючи смужки, паралельні стороні BD , приходимо до висновку, що центр ваги трикутника має лежати на медіані AL . Отже, центр ваги трикутника знаходиться у точці перетину його медіан. Ця точка, як відомо, ділить кожную із медіан у відношенні 1:2, тобто $CK : CB = 1 : 2$, $CL : CA = 1 : 2$.

б) дуга кола

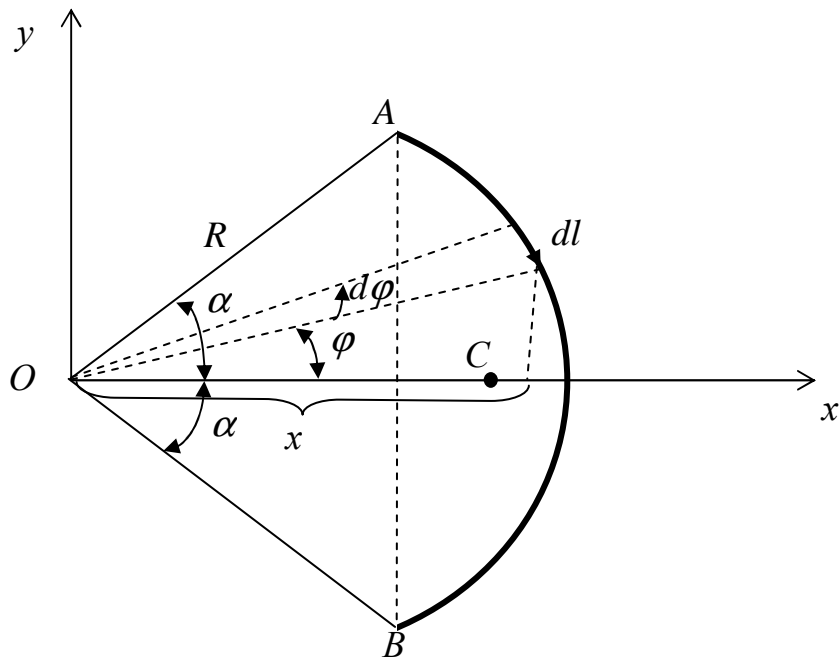


Рис. 8.13

Розглянемо дугу AB кола радіусом R з центральним кутом 2α (рис. 8.13). Направимо вісь Ox по осі симетрії дуги, яка є бісектрисою кута 2α . Центр ваги

дуги кола лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$, і залишається знайти x_c . Для цього скористаємось формулою

$$x_c = \frac{\int_A^B x dl}{L}, \quad (8.19)$$

яка вийде, якщо у формулі (8.17) перейти до інтеграла. Для елементарної частки довжини dl , як виходить з рис. 8.13, $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$, $L = R \cdot 2\alpha$.

Тоді

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \sin \alpha \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R^2 2 \sin \alpha}{R \cdot 2\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (8.20)$$

в) коловий сектор

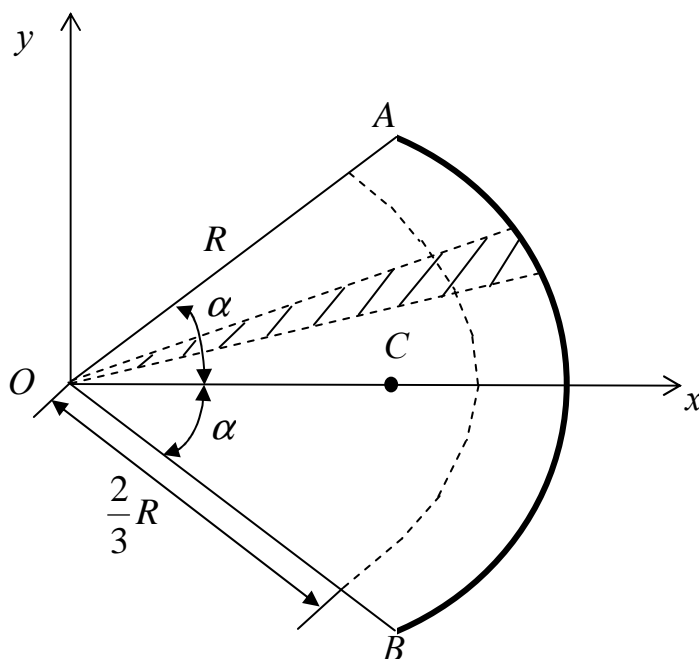


Рис. 8.14

Розглянемо коловий сектор з центральним кутом 2α і радіусом R (рис. 8.14). Направимо вісь Ox по осі симетрії сектора, яка є бісектрисою кута 2α . Центр ваги сектора лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$. Розіб'ємо коловий сектор на елементарні сектори (заштрихований на рис. 8.14), кожен з котрих можна прийняти за рівнобедрений трикутник. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані $\frac{2}{3}R$ від початку координат.

Геометричним місцем центрів ваги всіх елементарних трикутників буде дуга кола радіусом $\frac{2}{3}R$. У цьому випадку можна скористатись формулою для центра ваги дуги кола (8.20):

$$x_c = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (8.21)$$

Зауваження. У формулах (8.20), (8.21) кут α треба брати в радіанах.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що є предметом статички?
2. Дайте фізичне і геометричне визначення поняття сили, вкажіть її розмірність.
3. Яке тіло називається абсолютно твердим?
4. Які системи сил називаються статично еквівалентними? Визначте формулою системи сил, еквівалентні нулю, а також одній силі. Як називається стан тіла, що знаходиться під дією системи сил першого типу? Як називається сила, до якої приводиться система другого типу?
5. Сформулюйте і проаналізуйте аксіоми статички.
6. Чи зміниться стан тіла, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії її дії?
7. Що таке двійка сил ? Чому вона еквівалентна?
8. Дайте визначення в'язі.
9. Яке тіло називається вільним?
10. Наведіть приклади технічної реалізації в'язів. Що таке реакція в'язі ? Покажіть реакції типових в'язів: абсолютно гладка поверхня, нитка, ідеальний стержень, циліндричний шарнір, сферичний шарнір, нерухома опора з циліндричним шарніром, рухома опора з циліндричним шарніром, жорстке заземлення.
11. У чому полягає «Принцип визволення від в'язів»? Наведіть приклад.
12. Дайте визначення системи сил, що сходиться у просторі і на площині. Що таке точка сходу системи сил?
13. Чому еквівалентна система сил, що сходяться ? Покажіть це на прикладі трьох сил.
14. Проаналізуйте на прикладі теореми про три сили (приклад задається викладачем).
15. Дайте визначення проекції сили на вісь і площину. Визначте проекції сил, що паралельні, перпендикулярні й розташовані під кутом до горизонтальної осі Ox .
16. Як формулюють умови рівноваги системи сил, що сходяться, у геометричній і алгебраїчній формах?

17. Визначте момент сили відносно точки і проаналізуйте його властивості. Що таке плече сили?
18. Як направлений вектор – момент сили відносно даної точки?
19. Запишіть векторну формулу, яка визначає модуль і напрям вектора моменту сили відносно даної точки.
20. Визначте момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості.
21. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
22. Яка залежність між моментом сили відносно точки і моментом тієї ж сили відносно осі, яка проходить через цю точку?
23. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
24. При якому напрямі сили її момент відносно даної осі є найбільшим?
25. Дайте визначення алгебраїчного моменту сили.
26. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, і точку її прикладання.
27. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, і точку її прикладання.
28. Знайдіть рівнодіючу системи рівномірно розподілених сил за довжиною для прямокутної епюри їхнього розподілу.
29. Знайдіть рівнодіючу системи розподілених за довжиною сил для трикутної епюри їхнього розподілу при $q(0) = 0$.
30. Дайте визначення центра паралельних сил. Запишіть формули для визначення координат центра паралельних сил у геометричній формі в просторі й в алгебраїчній формі – у площині xOy .
31. Дайте визначення центра ваги твердого тіла. Як знайти координати центра ваги тіла.
32. Як визначають координати ваги однорідної пластини.
33. Сформулюйте способи визначення координат центра ваги твердого тіла (площі, лінії), дайте їхню математичну інтерпретацію.
34. Якою формулою визначається положення центра ваги площини сектора кола?
35. Як визначається положення центра ваги складеного тіла.
36. Дайте визначення пари сил. Чому пара сил не має рівнодіючої?
37. Які властивості мають пари сил? Сформулюйте теорему про перенесення пари сил у паралельну площину.
38. Чи залежить момент пари сил від її розташування у площині?
39. Складіть дві пари сил, що лежать у пересічних площинах.
40. Які пари сил називають еквівалентними? Коли дві пари будуть еквівалентними?
41. Як формулюють умови рівноваги системи пар сил у геометричній і алгебраїчній формах?
42. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
43. Дайте визначення головного вектора системи сил.
44. Що називається головним моментом системи сил?
45. Чому дорівнюють головний момент і головний момент відносно даної точки довільної системи сил.

46. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор системи сил і рівнодійна?
47. До яких двох силових факторів можна звести довільну систему сил у просторі?
48. Які можливі випадки зведення просторової системи сил?
49. Що називається динамою (силовим гвинтом)?
50. У чому суть необхідних і достатніх умов рівноваги твердого тіла?
51. Як змінюється головний вектор системи сил при перенесенні центра зведення?
52. Якою властивістю володіє головний момент системи сил при перенесенні центра зведення?
53. Коли плоска довільна система сил приводиться тільки до пари сил?
54. Сформулюйте умови зведення плоскої довільної системи сил тільки до однієї сили (рівнодійної).
55. Як орієнтовані в просторі головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил? Наведіть їх механічну схему.
56. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, що за визначенням еквівалентна нулю?
57. Сформулюйте геометричні й алгебраїчні умови рівноваги твердого тіла.
58. Скільки рівнянь рівноваги в алгебраїчній формі для довільної просторової системи сил? Запишіть їх.
59. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої довільної системи сил.
60. Сформулюйте першу форму умов рівноваги для плоскої довільної системи сил.
61. Сформулюйте другу форму умов рівноваги плоскої довільної системи сил.
62. Сформулюйте третю форму умов рівноваги довільної системи сил у площині.
63. Дайте поняття ферми як технічної конструкції. Наведіть приклади статично визначених плоских ферм,
64. Сформулюйте принцип розрахунку плоскої ферми методом вирізання вузлів.
65. Як розраховують плоскі ферми методом Ріттера? Чим він відрізняється від методу вирізання вузлів?

9. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, що вивчає геометричні властивості руху тіл, які розглядаються як чисто геометричні об'єкти – точки і тіла – без урахування їх матеріальних характеристик (маси та ін.). При цьому не розглядаються причини (дій на тіло сили), що викликають і змінюють рух об'єкта.

Під рухом у механіці розуміється зміна з плином часу взаємного положення в просторі даного тіла відповідно якого-небудь іншого тіла. Характер руху, що спостерігається, істотно залежить від вибору тіла, з яким пов'язаний спостерігач. З твердим тілом, відповідно якого вивчається рух, жорстко з'єднують систему координат, що утворює разом з ним *систему відліку*. Простір у механіці, в якому відбувається рух тіл, розглядається як евклідовий. Час вважається «універсальним», тобто він припускається однаковим для всіх розглянутих систем відліку. У задачах кінематики час (скалярна величина, що безупинно змінюється) приймають за незалежну перемінну. Відлік часу ведеться від деякого умовно початкового моменту, вибір якого в кожному випадку обумовлюється.

Для рішення задач кінематики треба, щоб досліджуваний рух був заданий (описаний математичним виразом).

Кінематично задати рух точки (тіла) – означає задати положення цієї точки (тіла) відносно даної системи відліку в будь-який момент часу. Якщо положення точки (тіла) визначається якими-небудь координатами (параметрами), то треба задати залежність даних координат від часу t . Ця залежність називається кінематичним рівнянням руху або законом руху.

Основною задачею кінематики є встановлення завдання руху точок (тіл) і методів визначення кінематичних величин, які характеризують цей рух.

9.1. Способи завдання руху точки

Для завдання руху точки в просторі можна застосовувати один з трьох способів: векторний, координатний та натуральний.

Векторний спосіб завдання руху точки

Положення точки M , що рухається відносно системи відліку $Oxyz$, можна визначити, задаючи її радіус-вектор \vec{r} , проведений з початку координат O в дану точку M (рис. 9.1). При русі точки M її радіус-вектор \vec{r} буде з плином часу змінюватися за модулем, і напрямом, тобто буде вектором-функцією:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (9.1)$$

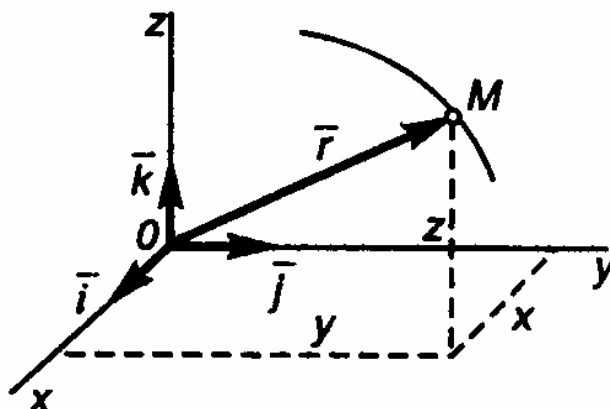


Рис. 9.1

Рівність (9.1) визначає положення точки M у просторі, а отже, закон її руху у векторній формі.

Неперервна лінія, яку описує точка, що рухається, відносно даної системи відліку, називається *траєкторією точки*. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, рух точки називається прямолінійним, а якщо крива – криволінійним.

При векторному способі задання руху траєкторією точки є геометричне місце кінців її радіуса-вектора \vec{r} (годографа цього вектора).

Координатний спосіб завдання руху точки

Положення точки у просторі можна визначити також її декартовими координатами x, y, z , які під час руху точки будуть змінюватися з плином часу.

Отже рівняння руху точки в будь-який момент часу має вигляд

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (9.2)$$

Функціональні залежності (9.2) є рівняннями руху (законом руху) точки в прямокутних декартових координатах. Зазначимо, що задати рух точки можна й іншими системами координат, наприклад, полярними, сферичними і т.д.

Рівняння руху (9.2) можна розглядати як рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де параметром є час t . Вилучивши з рівнянь руху час t , можна визначити рівняння траєкторії в звичайній координатній формі, тобто у вигляді залежності між координатами x, y, z точки.

Перехід від координатного способу завдання руху точки до векторного, і навпаки, може бути здійснений у такий спосіб.

Задаючи одиничні вектори (орти) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координатних осей і позначаючи проекції радіуса-вектора \bar{r} на ці осі $r_x = x, r_y = y, r_z = z$ (рис. 9.1), одержимо для вектора \bar{r} вираз

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (9.3)$$

Приклад. Нехай рух точки в площині Oxy задано рівняннями

$$x = 2t, \quad y = 1,5t^2. \quad (9.4)$$

За цих рівнянь можна визначити, що в момент часу $t_0 = 0$ точка знаходиться в положенні $M_0 (0, 0)$, а в момент часу $t_1 = 1$ с – у положенні $M_1 (2; 1,5)$ і т.д. Даючи часу t різні значення і зображуючи відповідні положення точок, можемо побудувати її траєкторію (рис. 9.2).

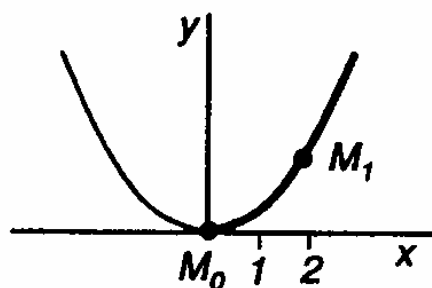


Рис. 9.2

Іншим шляхом траєкторію можна знайти, вилучивши t з рівнянь (9.4). З першого рівняння знаходимо $t = x/2$ і, підставляючи це значення t у друге

рівняння, одержуємо $y = (3/8)x^2$. Отже, точка рухається по дузі параболи, вершина якої розташована на початку координат. Траєкторією руху буде тільки права вітка параболи (оскільки при $t \geq 0$ буде $x \geq 0$).

Натуральний спосіб завдання руху точки

Цей спосіб завдання руху може бути застосований, якщо заздалегідь відома траєкторія руху точки (наприклад, заздалегідь відома траєкторія, залізничного вагона, що рухається по рейках, і т.д.). Нехай крива AB є траєкторією точки M щодо системи відліку $Oxyz$ (рис. 9.3). Зазначимо на траєкторії нерухому точку O' , яку приймемо за початок відліку дугової координати s , і домовимося про напрямки додатного і від'ємного відліку координати s .

Отже, на рис. 9.3 координата s для точок, що знаходяться на траєкторії праворуч початку відліку O' , буде вважатися додатною, ліворуч O' – від'ємною.

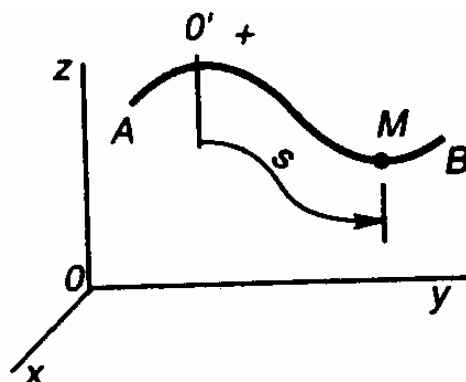


Рис. 9.3

Тоді, щоб визначити положення точки в будь-який момент часу, треба знати залежність дугової координати від часу:

$$s = f(t). \quad (9.4)$$

Рівняння (9.4) описує закон руху точки M уздовж траєкторії. Зазначимо, що величина s у рівнянні (9.4) визначає положення точки на лінії її руху, через відстань від точки O до точки M , вимірювану уздовж дуги траєкторії і взяту з відповідним знаком, а не пройдений точкою, що рухається, шлях.

9.2. Визначення швидкості та прискорення точки

Основними кінематичними характеристиками руху точки є векторні величини – швидкість і прискорення точки.

Визначення швидкості та прискорення точки при векторному способі завдання руху точки. Нехай точка, що рухається, знаходиться в момент часу t у положенні M , обумовленому радіусом-вектором \vec{r} , а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – у положенні M_1 , обумовленому радіусом-вектором \vec{r}_1 (рис. 9.4,а). Переміщення точки за проміжок часу Δt визначається вектором переміщення точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$. Відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу Δt дає векторну величину, що називається середньою за модулем і напрямом швидкістю точки за проміжок часу Δt :

$$\vec{V}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (9.5)$$

Вектор \vec{V}_{cp} , відповідно до виразу (9.5), спрямований так само, як і вектор $\Delta\vec{r}$, тобто уздовж хорди MM_1 у бік руху точки.

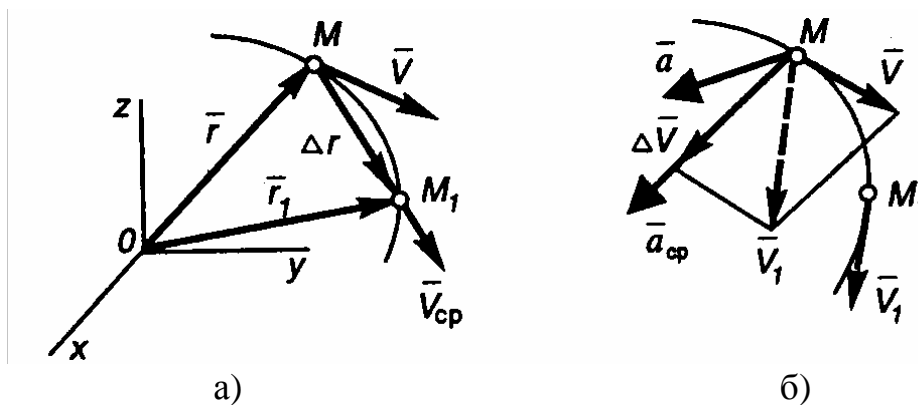


Рис. 9.4

Швидкістю точки в даний момент часу t називається векторна величина \vec{V} , до якої прямує середня швидкість \vec{V}_{cp} , якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{V}_{cp}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) \text{ або } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (9.6)$$

Отже, вектор швидкості точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від радіуса-вектора точки за часом.

Оскільки граничним напрямом січної MM_1 є дотична (по ній спрямований також вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$), то вектор швидкості в даний момент часу теж спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік її руху (рис. 9.4,а).

При криволінійному русі точки в загальному випадку змінюється і напрям вектора швидкості та його модуль (числове значення). При прямолінійному русі точки вектор швидкості увесь час спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка, і, отже, може змінюватися лише величина швидкості. Розмірність швидкості – м/с, км/ч.

Зміну вектора швидкості \vec{V} з плином часу характеризує векторна величина \vec{a} , яка має назву *прискорення \vec{a} точки*.

Нехай у деякий момент часу t точка, що рухається, знаходиться в положенні M і має швидкість \vec{V} , а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ переміщується у положення M_1 і має швидкість \vec{V}_1 (рис. 9.4,б). Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ швидкість точки отримала зміну $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Зазначимо, що вектор $\Delta\vec{V}$ завжди спрямований в бік угнутості розглянутої траєкторії точки. Вектор середнього прискорення точки за проміжок часу Δt :

$$\vec{a}_{cp} = \Delta\vec{V} / \Delta t. \quad (9.7)$$

Він має той самий напрям, що й вектор $\Delta\vec{V}$, тобто спрямований у бік угнутості ділянки траєкторії.

Прискоренням точки в даний момент часу t є векторна величина \vec{a} , до якої прямує середнє прискорення \vec{a}_{cp} , якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \right) = d\vec{V} / dt \quad (9.8)$$

або з урахуванням рівняння (1.6)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (9.9)$$

Отже, вектор прискорення точки в даний момент часу дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом. Розмірність прискорення – м/с².

З формули (9.9) маємо, що вектор прискорення \bar{a} буде спрямований за напрямом елементарного приросту вектора швидкості $d\bar{V}$. Виходячи з цього, встановимо розташування вектора \bar{a} відносно траєкторії точки. При прямолінійному русі вектор \bar{a} спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка. При криволінійному русі вектор \bar{a} спрямований у бік угнутості траєкторії (рис. 9.4,б) і розташовується в дотичній площині. Для різних точок просторової кривої положення дотичної площині буде своє. Якщо траєкторією точки є плоска крива, то дотична площина збігається з площиною цієї кривої.

Визначення швидкості та прискорення точки при координатному способі завдання руху точки. Загальні формули (9.6) і (9.9), котрі визначають величини \bar{V} і \bar{a} , містять похідні від вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Диференціюючи за часом цей вираз, одержимо

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \quad (9.10)$$

або

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}. \quad (9.11)$$

Звідси маємо, що проекція швидкості точки на координатні осі дорівнює першим похідним від координат точки за часом:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad (9.12)$$

де точка над буквою є символом диференціювання за часом.

Модуль швидкості та її напрям у просторі (позначивши кути, що утворить вектор \bar{V} з осями x, y, z відповідно α, β, γ) знайдемо за формулами

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos \alpha = V_x / V, \quad \cos \beta = V_y / V, \quad \cos \gamma = V_z / V. \quad (9.13)$$

Вектор прискорення \bar{a} відповідно знайдемо диференціюванням за часом виразу (9.10) або (9.11). Одержимо

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}$$

або

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \bar{i} + \frac{dV_y}{dt} \bar{j} + \frac{dV_z}{dt} \bar{k},$$

або

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \quad (9.14)$$

Звідси випливає, що проекції вектора прискорення точки на осі координат дорівнюють першим похідним від відповідних проекцій вектора швидкості або другим похідним від відповідних координат точки за часом:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}. \quad (9.15)$$

Модуль і напрям прискорення будуть

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha_1 = a_x / a; \quad \cos \beta_1 = a_y / a; \quad \cos \gamma_1 = a_z / a, \quad (9.16)$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути між вектором \bar{a} і координатними осями x, y, z .

Визначення швидкості й прискорення точки при натуральному способі задання руху точки. При натуральному способі задання руху задається траєкторія точки і закон її руху уздовж траєкторії у вигляді $s = f(t)$. У цьому випадку значення векторів \bar{V} і \bar{a} визначають за їх проекціями не на осі нерухомої системи відліку $Oxyz$, а на осі рухомої прямокутної системи координат $M\tau nb$, що має початок у точці M і рухається разом з нею по траєкторії (рис. 9.5). Ці осі є осями натурального тригранника, спрямовані в такий спосіб: вісь $M\tau$ (дотична) – по дотичній до траєкторії у бік додатного відліку відстані s ; вісь Mn (головна нормаль) – по нормалі до траєкторії, що лежить у дотичній площині, в бік угнутості траєкторії; вісь Mb (бінормаль) – перпендикулярна до перших двох осей, утворюючи з ними праву систему осей.

Тут $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – відповідно орти (одичні вектори) осей системи координат $M\tau nb$.

Вектор швидкості при натуральному способі завдання руху точки буде

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad (9.17)$$

де ds – елементарне переміщення точки по дузі траєкторії.

Введемо одичний вектор $\bar{\tau} = d\bar{r}/ds$, спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік додатного відліку відстані s .

Тоді

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} \text{ або } \bar{V} = V_{\tau} \cdot \bar{\tau}, \quad (9.18)$$

де

$$V_{\tau} = ds/dt = \dot{s}, \quad (9.19)$$

тобто V_{τ} – числове (алгебраїчне) значення швидкості в даний момент часу, яке дорівнює першій похідній від відстані (криволінійної координати) s цієї точки за часом.

Величина V_{τ} , будучи проекцією вектора \bar{V} на дотичну, матиме знак плюс або мінус: якщо $V_{\tau} > 0$, то швидкість спрямована у бік додатного відліку відстані s ; якщо $V_{\tau} < 0$ – у протилежну сторону. Отже, знак V_{τ} визначає напрям вектора \bar{V} відносно осі τ . На рис. 9.5 вектор \bar{V} зображений для випадку, коли $V_{\tau} > 0$, тобто напрями вектора \bar{V} й осі τ збігаються. З (9.18) маємо, що модуль швидкості \bar{V} буде $V = |\bar{V}| = |V_{\tau}|$.

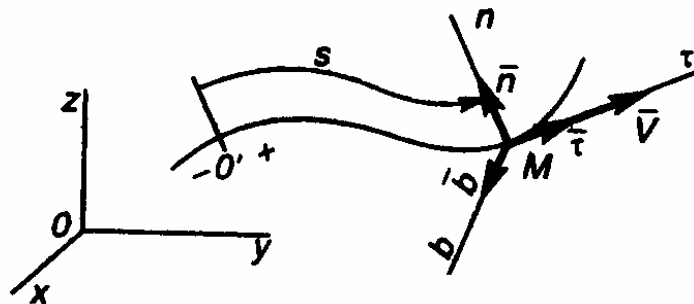


Рис. 9.5

Визначимо прискорення точки за формулою (9.9), продиференціюючи за часом вираз (9.18):

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(V_\tau \cdot \bar{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt} \bar{\tau} + V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (9.20)$$

Знайдемо

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту вектора $\bar{\tau}$; ρ – радіус кривини траєкторії в розглянутій точці.

Підставивши цей вираз в (9.20), маємо

$$\bar{a} = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \quad (9.21)$$

Отже, прискорення точки дорівнює геометричній сумі двох векторів, один з яких \bar{a}_τ спрямований по дотичній (дотичне прискорення), а другий – вектор \bar{a}_n спрямований по головній нормалі (нормальне прискорення):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (9.22)$$

Площина, що проходить через дотичну і головну нормаль, є дотичною до розташованого в ній вектора прискорення точки.

Проекції вектора \bar{a} на осі натурального тригранника визначають за формулами:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}; \quad a_b = 0. \quad (9.23)$$

Оскільки складові \bar{a}_τ і \bar{a}_n взаємно перпендикулярні, для модуля вектора \bar{a} одержимо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (9.24)$$

На підставі формул (9.23) маємо: величина a_τ (проекція вектора \bar{a} на напрям τ) може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю; величина a_n по криволінійній траєкторії завжди додатна. Цим визначається, що складова \bar{a}_n

буде завжди спрямована у бік угнутості кривої; величина a_b (проекція прискорення на бінормаль) дорівнює нулю.

Кут μ відхилення вектора \bar{a} від нормалі Mn визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg}\mu = a_\tau / a_n, \quad (9.25)$$

його значення може бути в інтервалі $-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$.

Якщо $a_\tau < 0$, то $\mu < 0$ і вектор \bar{a} відхилений від нормалі M в сторону, протилежну додатному напрямку осі $M\tau$ (рис. 9.6,а); при $a_\tau > 0$ кут $\mu > 0$ і вектор \bar{a} відхиляється від нормалі за напрямом осі $M\tau$ (рис. 9.6,в); якщо $a_\tau = 0$, то $\mu = 0$ і вектор \bar{a} спрямований по нормалі Mn (рис. 9.6,б).

У загальному випадку руху точки може змінюватися і модуль, і напрям вектора швидкості. Аналіз формул (9.23) приводить до висновку: *дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною, нормальне прискорення – зміну напрямку вектора швидкості.*

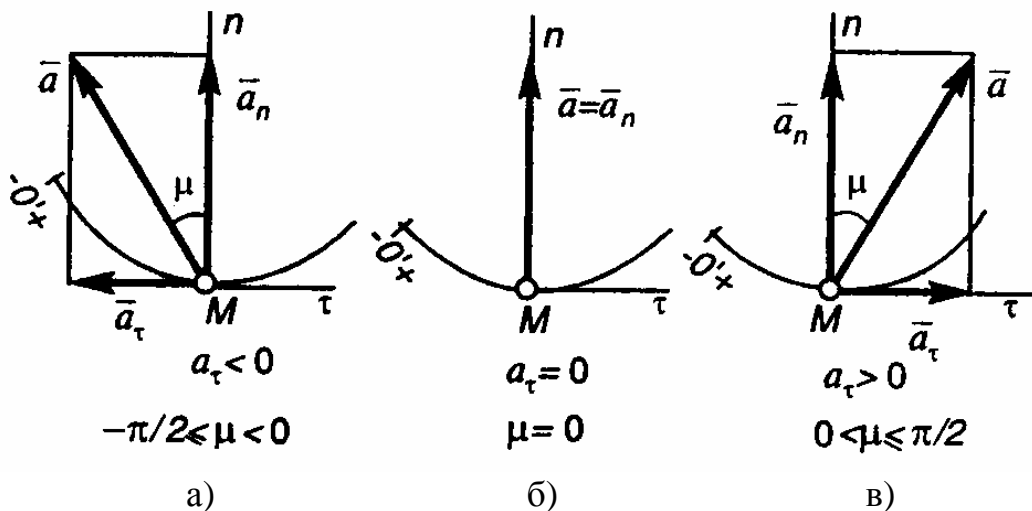


Рис. 9.6

Окремі випадки руху точки

Рівномірний рух. Рівномірним називається рух точки по траєкторії, при якому числове значення швидкості увесь час залишається постійним; отже $V_\tau = \text{const}$. Тоді

$$a_\tau = dV_\tau / dt = 0.$$

Якщо рівномірний рух криволінійний, то прискорення точки буде представлено лише нормальною складовою $\bar{a} = \bar{a}_n$ і $a = a_n = V^2/\rho$. У даному випадку прискорення обумовлене тільки зміною вектора швидкості точки за напрямом.

Якщо рівномірний рух точки відбувається по прямолінійній траєкторії, то $\rho = \infty$ й $a_n = V^2/\rho = 0$. У цьому випадку $a_n = a_\tau = 0$, а отже $a = 0$. Визначимо, що рівномірний прямолінійний рух є єдиним рухом, у якому прискорення точки увесь час дорівнює нулю.

Знайдемо закон рівномірного руху. З формули (9.19) маємо $ds = V_\tau \cdot dt$. Якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ точка має координату s_0 , то, беручи від лівої і правої частин рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $V_\tau = const$), отримаємо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t V_\tau \cdot dt \quad \text{або} \quad s - s_0 = V_\tau t.$$

Остаточно знаходимо закон рівномірного руху точки у вигляді

$$s = s_0 + V_\tau t. \quad (9.26)$$

Рівнозмінний рух. Рівнозмінним називається рух точки по траєкторії, при якому дотичне прискорення залишається увесь час постійним: $a_\tau = const$.

Знайдемо закон цього руху, вважаючи, що при $t_0 = 0$ виконується $s = s_0$ і $V_\tau = V_0$. Відповідно до першої з формул (9.23) $dV_\tau = a_\tau dt$. Беручи від обох частин цього рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $a_\tau = const$), отримаємо закон зміни швидкості точки при рівнозмінному русі:

$$V_\tau = V_0 + a_\tau t. \quad (9.27)$$

Формулу (9.27) подамо у вигляді

$$ds/dt = V_0 + a_\tau t \quad \text{або} \quad ds = V_0 \cdot dt + a_\tau \cdot dt.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, знайдемо закон рівнозмінного руху точки:

$$s = a_\tau t^2 / 2 + V_0 t + s_0. \quad (9.28)$$

Величина швидкості при рівнозмінному русі змінюється за законом (91.27). Якщо модуль швидкості зростає, то рух називається *прискореним*, а якщо зменшується – *уповільненим*. При прискореному русі величини V_τ і a_τ мають однакові знаки (кут між векторами \bar{V} і \bar{a} – гострий, рис. 9.7,а), при уповільненому русі величини V_τ і a_τ мають різні знаки (кут між векторами \bar{V} і \bar{a} тупий, рис. 9.7, б).

У випадку рівнозмінного прямолінійного руху точки $a_n = 0$ і у виразах (9.27), (9.28) слід приймати $a_\tau = a = const$.

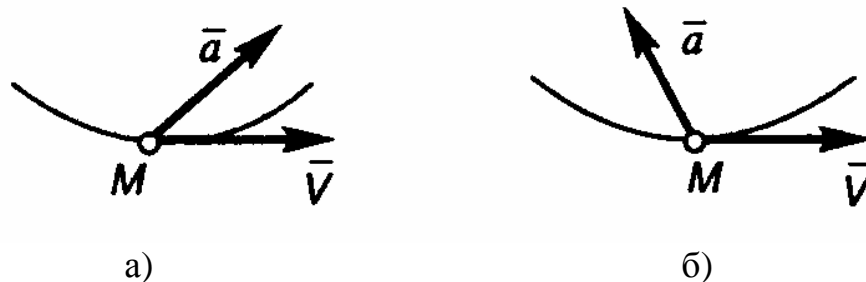


Рис. 9.7

9.3. Приклади розв'язання задач

Задача 1. Закон руху точки M в площині Oxy заданий рівняннями $x = 4 \sin(\pi t / 6) - 1$, $y = 3 \cos(\pi t / 6) + 2$, де x, y – у сантиметрах, t – у секундах.

Визначити рівняння траєкторії точки; для моменту часу $t_1 = 2$ с знайти швидкість і прискорення точки, її дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії у відповідній її точці. Траєкторію і знайдені векторні величини відобразити на схемі.

Розв'язання. Рівняння траєкторії точки будемо шукати у вигляді залежності між координатами точки (в координатній формі). Для вилучення з рівнянь руху часу t , що входить в аргументи тригонометричних функцій, використовуємо формулу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ або, вважаючи } \alpha = \pi / 6,$$

$$\sin^2(\pi / 6) + \cos^2(\pi / 6) = 1. \quad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вираз відповідних функцій і підставляємо в рівняння (1). Отримаємо

$$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+1}{4}, \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y-2}{3},$$

звідки

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1. \quad (2)$$

Отже, траєкторією точки є еліпс, центр C якого має координати $(-1, 2)$, а розміри півосей, паралельних осям x і y , відповідно 4 і 3 см (рис. 9.8, а).

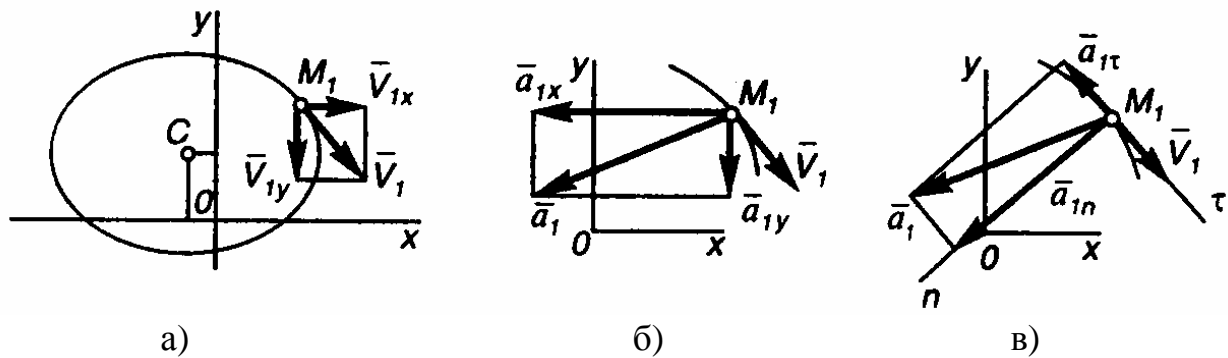


Рис. 9.8

Швидкість точки знайдемо за її проекціями на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = \frac{2}{3}\pi \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad V_y = \dot{y} = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

Підставивши ці вирази у формулу

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad (3)$$

після спрощень отримуємо величину швидкості точки:

$$V = \frac{\pi}{6} \sqrt{9 + 7 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)}. \quad (4)$$

При $t_1 = 2$ с буде $V_{1x} = 1,05$ см/с, $V_{1y} = -1,36$ см/с і $V_1 = 1,72$ см/с.

Використовуючи отримані результати, побудуємо на схемі вектор \bar{V}_1 , попередньо визначивши координати точки M_1 : $x_1 = 2,46$ см, $y_1 = 3,5$ см (рис. 9.8,а).

Знайдемо далі прискорення точки:

$$a_x = \dot{V}_x = -\frac{\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad a_y = \dot{V}_y = -\frac{\pi^2}{12} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

При $t_1 = 2$ с буде $a_{1x} = -0,95$ см/с², $a_{1y} = -0,41$ см/с² і $a_1 = 1,02$ см/с².

За цими результатами будуюмо вектор \bar{a}_1 (рис. 9.8,б).

Визначимо тепер дотичне і нормальне прискорення точки, тобто проєкції вектора \bar{a} на осі τ і n .

Дотичне прискорення знайдемо, продиференціюючи за часом рівняння (3):

$$\dot{V} = (2V_x \dot{V}_x + 2V_y \dot{V}_y) / 2V.$$

Тоді, враховуючи, що $\dot{V} = a_\tau$, $\dot{V}_x = a_x$, $\dot{V}_y = a_y$, маємо

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення величин для $t_1 = 2$ с, отримуємо $a_{1\tau} = -0,26$ см/с².

Нормальне прискорення точки при відомих значеннях величин a і a_τ обчислимо за формулою $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

Підставивши значення a_1 , $a_{1\tau}$, маємо $a_{1n} = 0,98$ см/с².

Зобразимо на рис. 9.8,в координатні складові $\bar{a}_{1\tau}$ і \bar{a}_{1n} , які знайдемо шляхом розкладання вектора \bar{a}_1 на напрями дотичної τ і головної нормалі n . Напрямок осі τ встановлюємо відповідно до знаку проєкції $a_{1\tau}$ (оскільки $a_{1\tau} < 0$, то вісь $M_1\tau$ протилежна вектору $\bar{a}_{1\tau}$), вісь M_1n спрямована до неї перпендикулярно у бік угнутості траєкторії.

Радіус кривини траєкторії визначимо за формулою $\rho = V^2 / a_n$. Підставляючи числові значення V_1 і a_{1n} , знайдемо, $\rho_1 = 3,0$ см.

Відповідь: $V_1 = 11,72$ см/с; $a_1 = 11,02$ см/с²; $a_{1\tau} = -0,26$ см/с²;
 $a_{1n} = 0,98$ см/с²; $\rho_1 = 3,0$ см.

Задача 2. Матеріальна точка рухається у площині Oxy . Початкова швидкість \bar{V}_0 утворює з горизонталлю кут α . Рух точки задано рівняннями:

$$x = V_0 t \cos \alpha; \quad y = V_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2,$$

де g – постійна величина.

Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, а також висоту траєкторії і час підйому з початкового положення (точки O) до найвищої точки траєкторії.

Розв'язання. Для визначення траєкторії потрібно знайти залежність між координатами x і y точки, що рухається. Визначивши з першого рівняння $t = x / V_0 \cdot \cos \alpha$ і підставивши в друге, маємо рівняння траєкторії

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Траєкторія точки – парабола (рис. 9.9).

Диференціюючи рівняння руху за часом, знайдемо:

$$V_x = \dot{x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = \dot{y} = V_0 \sin \alpha - gt, \quad (2)$$

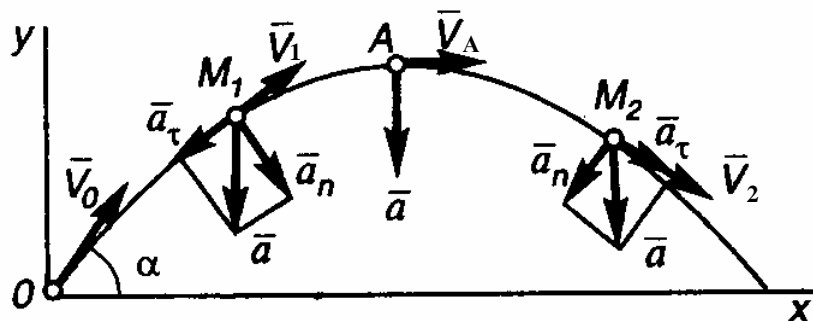


Рис. 9.9

звідки

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}. \quad (3)$$

Визначаємо прискорення точки. Для проєкцій прискорення \bar{a} на осі координат маємо:

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = -g. \quad (4)$$

Таким чином, точка рухається з постійним за модулем і напрямом прискоренням, паралельним вертикальній осі Oy (g – це прискорення вільного падіння). Звертаємо увагу на те, що оскільки $a = const$, рух точки не є рівнозмінним, оскільки умовою рівнозмінності руху є не $a = const$, а $a_\tau = const$. У розглянутому русі, як далі буде визначено, значення a_τ не постійно.

Знаходимо a_τ диференціюючи вираз (3):

$$a_\tau = \dot{V} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{V}.$$

Тепер визначимо висоту траєкторії руху, тобто координату y_A найвищої точки (рис. 1.9). Оскільки $V_{Ay} = 0$ (вектор швидкості \bar{V}_A є перпендикулярним осі y), то підставивши це значення в друге рівняння (2), знайдемо час руху з точки O в точку A (час підйому): $t_A = V_0 \sin \alpha / g$. Підставивши значення $t = t_A$ в друге із заданих рівнянь руху, після спрощень отримуємо висоту траєкторії:

$$y_A = (V_0^2 / 2g) \sin^2 \alpha.$$

Оскільки розглянутий рух відбувається з постійним прискоренням $\bar{a} = \overline{const}$, але воно є змінним, то на гілці підйому (від точки O до точки A) рух буде уповільненим (в точці M_1 вектори \bar{a}_τ і \bar{V}_1 спрямовані протилежно), а на гілці спуску – прискореним (в точці M_2 вектори \bar{a}_τ і \bar{V}_2 спрямовані в один бік).

10. ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

У вивченні кінематики твердого тіла можна виділити дві задачі:

- 1) задання руху і визначення кінематичних характеристик руху тіла в цілому;
- 2) визначення кінематичних характеристик руху окремих точок тіла.

10.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається при русі паралельною своєму початковому напрямку, тобто не повертається.

Точки тіла, що рухається поступально, можуть мати траєкторії будь-якого виду: прямолінійні або криволінійні.

Властивості поступального руху тіла визначаються наступною теоремою: *при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують геометрично однакові (при накладенні співпадаючі) траєкторії і мають у кожний момент часу однакові за модулем і напрямом швидкості й прискорення.*

Для доказу розглянемо тіло, що робить поступальний рух (рис. 10.1). Для радіусів-векторів двох довільних точок A і B тіла справедлива рівність

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (10.1)$$

Слід мати на увазі, що довжина вектора AB постійна, як відстань між точками абсолютно твердого тіла, а його напрям залишається незмінним при поступальному русі тіла, отже $\overline{AB} = const.$

Тоді з рівняння (10.1) отримуємо, що годограф радіуса-вектора точки A , що є траєкторією цієї точки, зміщений відносно годографа радіуса-вектора точки B (траєкторії точки B) на постійний вектор \overline{AB} і ці траєкторії при накладенні збігаються.

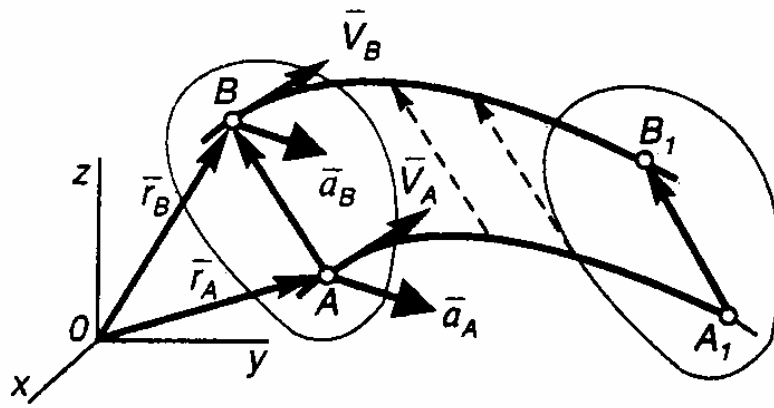


Рис. 10.1

Продиференціювавши обидві частини рівняння (10.1), врахувавши при цьому, що $d(\overline{AB})/dt = 0$, маємо

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A \text{ і } \overline{a}_B = \overline{a}_A. \quad (10.2)$$

Отже, теорема доведена.

З теореми випливає, що поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї з його точок. Отже, вивчення кінематики поступального руху зводиться до задачі кінематики точки, нами вже розглянутої.

З огляду на вищенаведені властивості поступального руху, однакову для всіх точок тіла швидкість \overline{V} називають швидкістю поступального руху тіла, а прискорення точок \overline{a} – прискоренням поступального руху тіла.

Зазначимо, що поняття «швидкість тіла» і «прискорення тіла» мають сенс тільки при поступальному русі тіла, оскільки тільки в цьому випадку ці характеристики однакові для всіх точок тіла.

10.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому всі точки, що лежать на деякій прямій, незмінно зв'язаній з тілом, залишаються під час руху нерухомими (рис. 10.2). Ця пряма

називається віссю обертання. Траєкторіями всіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

Відзначимо також, що всі прями тіла, паралельні осі обертання (наприклад, пряма mm' на рис. 10.2), рухаються поступально, залишаючись паралельними цієї осі.

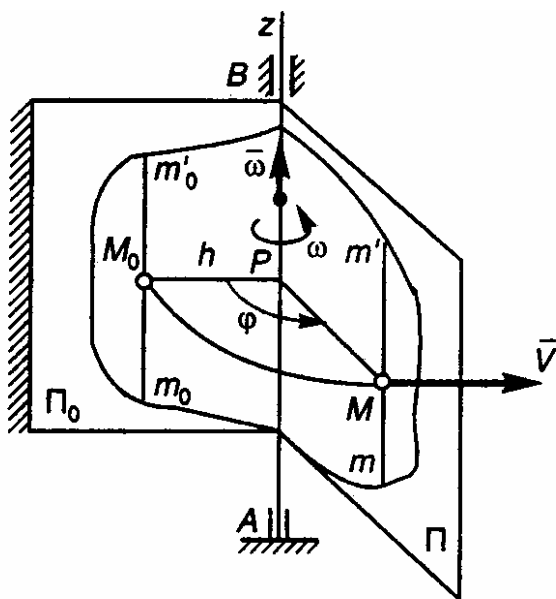


Рис. 10.2

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла

Проведемо через вісь обертання Az тіла (рис. 10.2) дві півплощини: півплощину Π , незмінно зв'язану з тілом і обертову разом з ним, та нерухому в просторі півплощину Π_0 . Тоді положення тіла в будь-який момент часу визначається узятим з відповідним знаком кутом φ між цими півплощинами, що називається *кутом повороту тіла*. Кут вважається додатним, якщо він відлічений від нерухомої півплощини в напрямку проти ходу годинникової стрілки (для спостерігача, який дивиться з позитивного кінця осі Az), і від'ємним, якщо він відлічений за ходом годинникової стрілки. Вимірюється кут φ у радіанах: $[\varphi] = \text{рад}$.

Щоб знати положення тіла в будь-який момент часу, треба знати залежність кута φ від часу t , тобто

$$\varphi = f(t). \quad (10.3)$$

Рівняння (10.3) виражає закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є його кутова швидкість ω і кутове прискорення ε .

Кутова швидкість характеризує зміну з часом кута повороту тіла, а її числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кута повороту за часом:

$$\omega = d\varphi/dt \text{ або } \omega = \dot{\varphi}. \quad (10.4)$$

Знак ω визначає напрям обертання: якщо $\omega > 0$, то обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки, якщо $\omega < 0$, то тіло обертається за ходом годинникової стрілки. Ця обставина відбивається і зображенням величини ω за допомогою дугової стрілки (рис. 10.2). Розмірність кутової швидкості – рад/с.

У техніці кутову швидкість часто визначають числом обертів за хвилину, зазначаючи цю величину через n об/хв. Оскільки за один оберт тіло повертається на кут 2π рад, а $1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$, то

$$\omega = 2\pi n / 60 = \pi n / 30.$$

Усі параметри кутової швидкості тіла можна відобразити у вигляді вектора $\vec{\omega}$, модуль якого дорівнює $|\dot{\varphi}|$ і який спрямований уздовж осі обертання у той бік, звідки видно, що обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.2; 2.3).

Кутове прискорення характеризує зміну з часом кутової швидкості тіла, а його числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла за часом:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (10.5)$$

Розмірність кутового прискорення – 1 рад/с^2 .

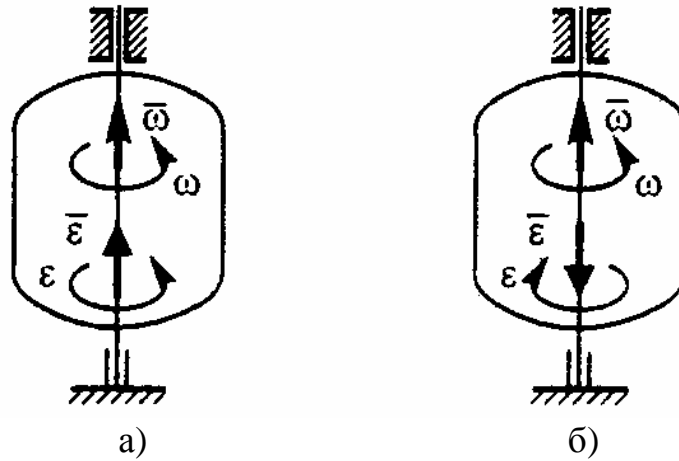


Рис. 10.3

При збіжності знаків ε і ω їх дугові стрілки спрямовані однаково (рис. 10.3,а), при різних знаках – дугові стрілки будуть спрямовані взаємно протилежно (рис. 10.3,б). Кутове прискорення тіла можна зобразити у вигляді вектора $\vec{\varepsilon}$, спрямованого уздовж осі обертання. При цьому

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega} / dt. \quad (10.6)$$

Коли тіло обертається прискорено, то величини ω і ε мають однакові знаки і напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямом вектора $\vec{\omega}$ (рис. 10.3,а). Коли тіло обертається уповільнено, то величини ω і ε мають різні знаки і вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ спрямовані уздовж осі обертання в протилежні боки (рис. 10.3,б).

Якщо кутова швидкість тіла залишається за весь час руху постійною ($\omega = const$), то обертання тіла називається *рівномірним*.

Інтегруючи рівність $d\varphi = \omega \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$), одержимо *закон рівномірного обертання*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (10.7)$$

Якщо кутове прискорення тіла за весь час руху залишається постійним ($\varepsilon = const$), то обертання називається *рівнозмінним*.

Інтегруючи рівність $d\omega = \varepsilon \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$), одержимо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (10.8)$$

Представляючи цей вираз як $d\varphi/dt = \omega_0 + \varepsilon t$ або у вигляді $d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt$ і вдруге інтегруючи, знайдемо закон рівнозмінного обертання:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \quad (10.9)$$

Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Як було відзначено раніше, прямі, проведені в тілі паралельно осі обертання (наприклад, пряма mm' на рис. 10.2), здійснюють поступальний рух, тобто, швидкості та прискорення усіх точок кожної такої прямої будуть однакові. Отже для вивчення кінематичних характеристик точок тіла досить визначити відповідні величини для точок перетину, проведеного перпендикулярно осі обертання.

Траєкторіями усіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

Розглянемо яку-небудь точку M тіла, що знаходиться на відстані h від осі обертання (рис. 10.2). Якщо за час dt відбувається елементарне обертання тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому здійснює по своїй траєкторії елементарне переміщення $ds = h \cdot d\varphi$. Тоді числове (алгебраїчне) значення швидкості точки відповідно до формули (1.19) буде

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \text{ або } V = h\omega. \quad (10.10)$$

Таким чином, алгебраїчне значення величини швидкості точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання. Вектор швидкості \vec{V} спрямований по дотичній до описуваного точкою кола (або перпендикулярно площині Π , що проходить через вісь обертання і точку M , або перпендикулярно прямої MP , що з'єднує точку M з віссю обертання) по напрямку руху, що збігається з напрямом дугової стрілки кутової швидкості (рис. 10.2).

Вектори швидкостей усіх точок перерізу, перпендикулярного осі обертання, будуть розташовуватися в його площині, утворюючи поле швидкостей, вид якого зображений на рис. 10.4.

Відзначимо, що:

- 1) вектори швидкостей точок перпендикулярні прямим, що з'єднують точки з віссю обертання, і спрямовані у бік обертання тіла (дугової стрілки ω);
- 2) модулі швидкостей точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання.

Швидкість \bar{V} точки тіла, що обертається, іноді називають лінійною або коловою на відміну від кутової швидкості тіла.

Для знаходження прискорення точки M скористаємося формулами $a_\tau = dV_\tau / dt$, $a_n = V^2 / \rho$. Підставляючи до них значення V з рівності (10.10) і з урахуванням того, що в нашому випадку $\rho = h$, одержимо: $a_\tau = h\dot{\omega}$, $a_n = h^2\omega^2 / h$ або остаточно:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \quad (10.11)$$

Дотична складова прискорення \bar{a}_τ спрямована по дотичній до траєкторії точки у бік дугової стрілки кутового прискорення ε , нормальна складова \bar{a}_n спрямована по радіусу MP до осі обертання (рис. 10.5).

Повне прискорення точки M буде

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \text{або} \quad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (10.12)$$

Відхилення вектора \bar{a} від радіуса описуваного точкою кола (від нормалі до траєкторії) визначається кутом μ , що обчислюється за формулою (9.25)

$tg\mu = a_\tau / a_n$ і, використовувавши рівняння (10.11), одержимо

$$tg\mu = \varepsilon / \omega^2. \quad (10.13)$$

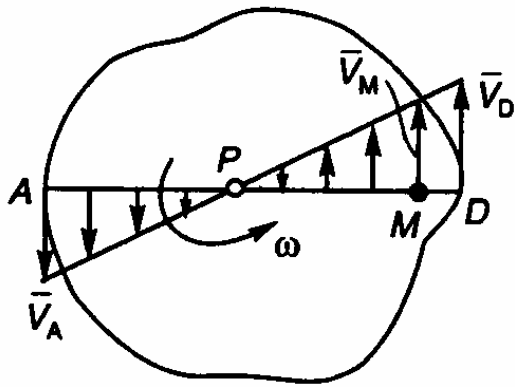


Рис. 10.4

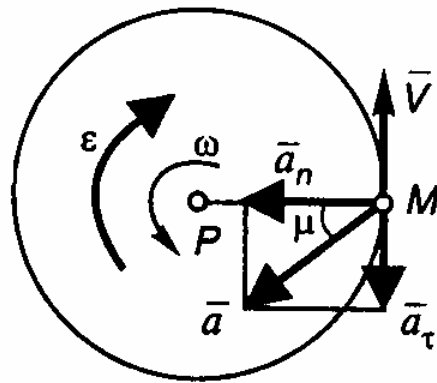


Рис. 10.5

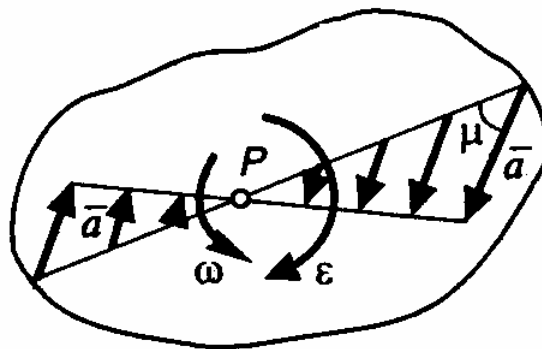


Рис. 10.6

Зазначимо, що при обчисленні кінематичних характеристик різних точок тіла, що обертається, у формули (10.12), (10.13) для даного моменту часу будуть підставлятися ті самі значення величин ω і ϵ , оскільки вони є характеристиками руху всього тіла. Звідси випливає, що в даний момент часу кут μ для векторів прискорень усіх точок однаковий, а модулі прискорень точок пропорційні їх відстаням від осі обертання.

Поле прискорень точок тіла показано на рис. 10.6.

Приведемо також векторні вирази швидкості та прискорення точки тіла, що обертається.

Нехай тіло здійснює обертальний рух і в даний момент часу відомі характеристики його руху $\bar{\omega}$ і $\bar{\epsilon}$ (рис. 10.7). З довільної точки O осі обертання проведемо радіус-вектор \bar{r} точки M (причому $\angle MPO = 90^\circ$ і $MP = h = r \sin \alpha$).

З побудови на рис. 10,7,а випливає, що вектор швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки (формула Ейлера):

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (10.14)$$

Модуль цього вектора $|V| = |\omega|r \sin \alpha = |\omega|h$ збігається з раніше отриманим за формулою (10.10).

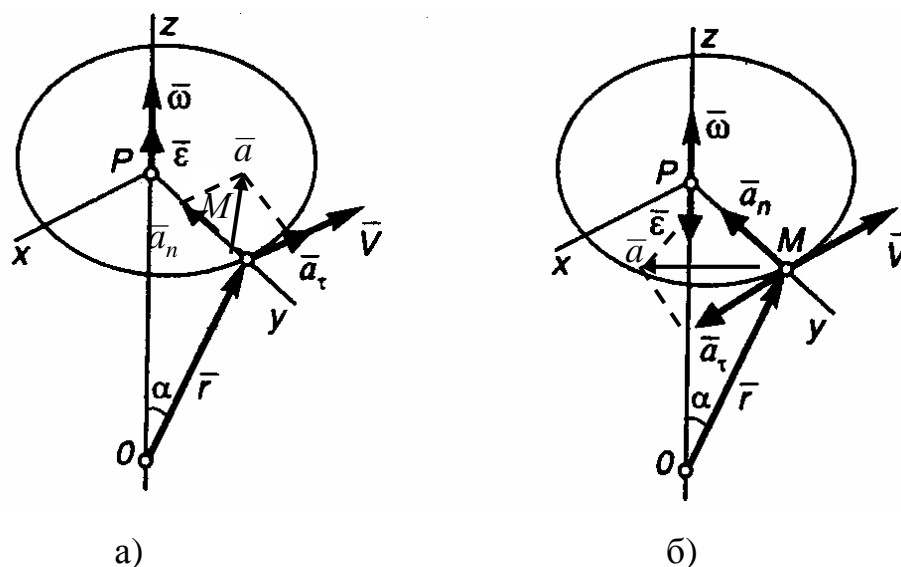


Рис. 10.7

Вектор прискорення точки M визначимо як похідну вектора швидкості за часом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

або

$$\vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (10.15)$$

Формулу (2.15) називають формулою Рівальса, з якої випливає, що вектор прискорення точки \vec{a} дорівнює векторній сумі двох векторів. Перший доданок $\vec{\epsilon} \times \vec{r}$ називають *обертальною* складовою прискорення. При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор $\vec{\epsilon} \times \vec{r}$ спрямований по дотичній до траєкторії точки M , тому його позначимо \vec{a}_t , а його модуль буде $|\vec{\epsilon} \times \vec{r}| = \epsilon r \sin \alpha = \epsilon h$. Другий доданок у формулі (10.15) називають *доосьовою* складовою прискорення. При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор добутку $\vec{\omega} \times \vec{V}$

спрямований уздовж MP , тобто по головній нормалі до траєкторії точки M (позначимо його в цьому випадку \bar{a}_n), а його модуль буде

$$|\bar{\omega} \times \bar{V}| = \omega V \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h.$$

З урахуванням формул (10.11), (10.15) робимо висновок, що

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V}, \quad \bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (10.16)$$

Формули (10.16) є векторними виразами дотичного, нормального і повного прискорень точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Розташування цих векторів показано на рис. 10.7,а – при прискореному обертанні, рис. 10.7,б – при уповільненому обертанні).

10.3. Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі

Таке перетворення обертальних рухів широко розповсюджене в техніці. Якщо осі обертання паралельні чи перетинаються, то обертання паралельні чи перетинаються, то обертання можна передати за допомогою зубчастих або фрикційних передач. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім (рис. 10.8,а,в), так і внутрішнім (рис. 10.8,б,г).

Перетворення обертальних рухів з паралельними осями можна реалізувати також і за допомогою пасових або ланцюгових передач. При цьому пасова передача із неперехресним рухом паса (рис. 10.9,а) еквівалентна внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, а з перехресним рухом паса (рис. 10.9,б) – зовнішньому зчепленню. При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають провідним або ведучим, друге – веденим, а весь механізм називають передавальним.

Основною для кінематичного розрахунку цих передач (рис. 10.8, 10.9), є припущення, що в системі немає ковзання, зазорів між зубцями коліс, а паси, ланцюги тощо не деформуються. Це означає, що швидкості на ободі зубчастих коліс, які знаходяться у зчепленні, й швидкості на ободах шківів пасових і

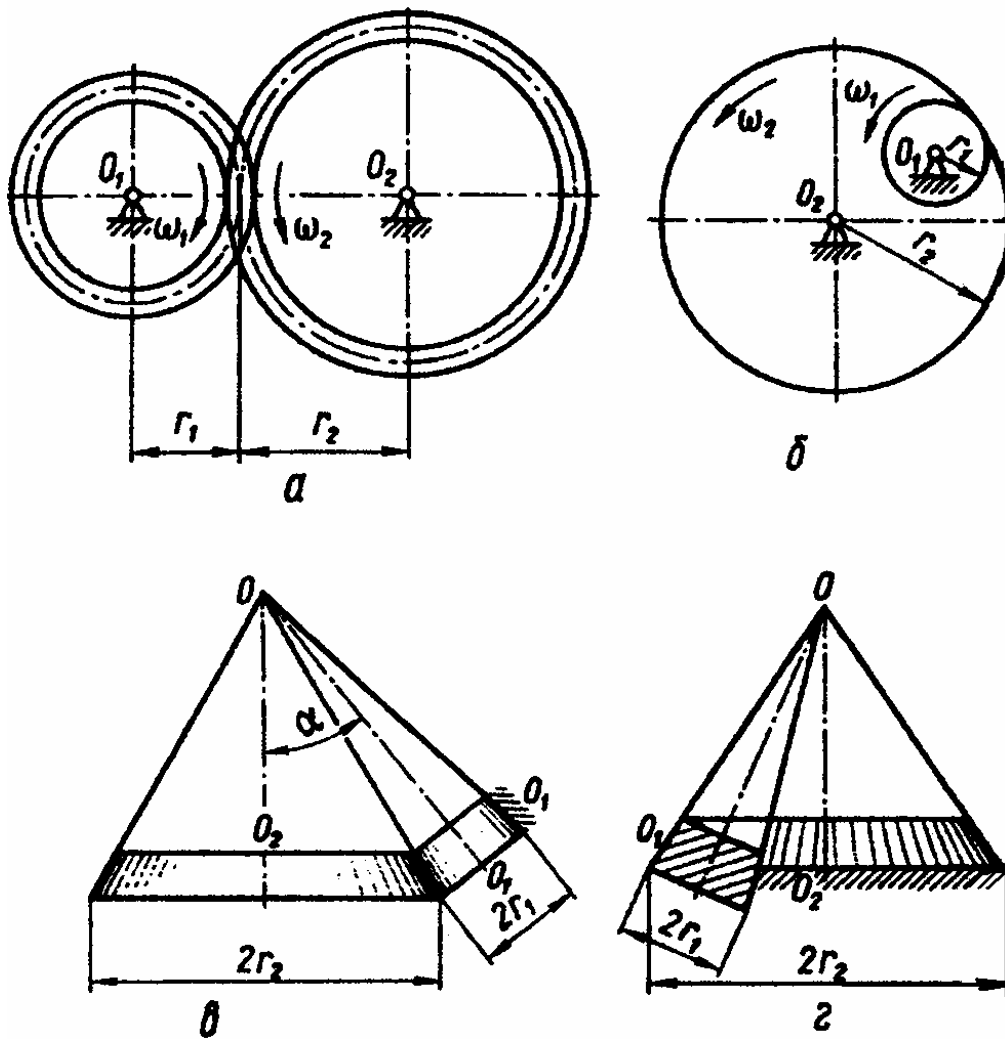


Рис. 10.8

ланцюгових передач однакові. Тобто в цих випадках має місце співвідношенням

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (10.17)$$

Отже кутові швидкості коліс зубчастих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.18)$$

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передаточним числом:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.19)$$

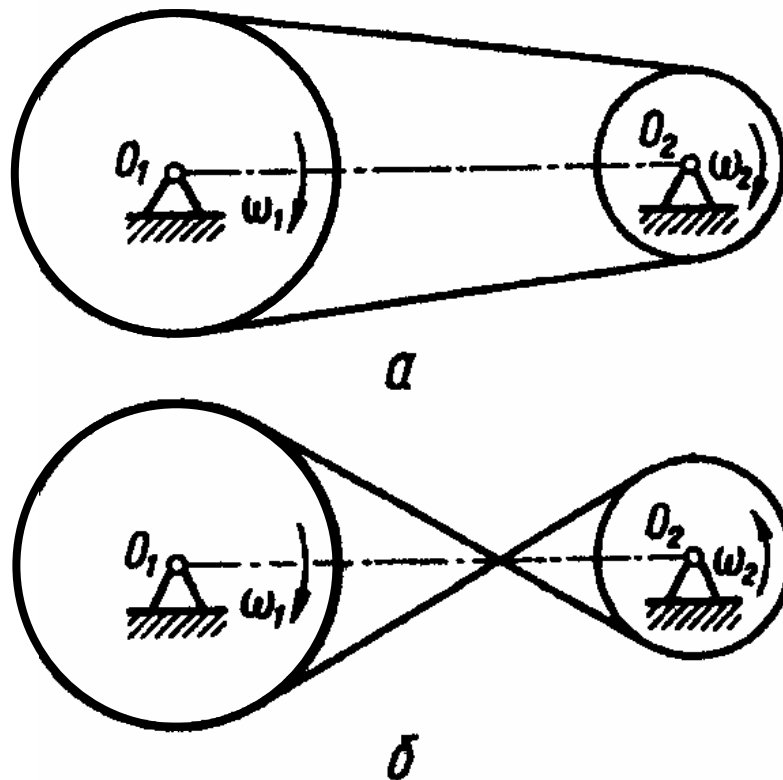


Рис. 10.9

Коли врахувати, що число зубців пропорційно довжинам кіл, а значить і радіусам, то передаточне число можна визначити через відповідне відношення числа зубців:

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (10.20)$$

10.4. Приклади розв'язання задач

Задача 1. Маховик, що робить $n = 60$ об/хв, після вимикання двигуна ($t_0 = 0$) обертається рівноуповільнено і зупиняється через $t_2 = 20$ с. Визначити, скільки обертів зробив маховик до повної його зупинки, а також швидкість і прискорення точки, що лежить на ободі маховика радіуса $R = 0,4$ м, через $t_1 = 10$ с після вимикання двигуна.

Розв'язання. Оскільки маховик обертається рівноуповільнено, то для нього, вважаючи при $t_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$, справедливі такі залежності:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Початкова кутова швидкість дорівнює $\omega_0 = \pi n / 30 = 2\pi$ рад.с⁻¹.

У момент зупинки при $t_2 = 20$ с кутова швидкість маховика $\omega_2 = 0$. Підставляючи ці значення в друге з отриманих рівнянь, визначимо кутове прискорення маховика (ця величина під час розглянутого руху постійна):

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t_2 \text{ або } 0 = 2\pi + \varepsilon \cdot 20, \text{ відкіля } \varepsilon = -0,1\pi \text{ рад. с}^{-2}.$$

Якщо позначити через N число обертів, зроблених маховиком за час $t_2 = 20$ с, то кут повороту за той же час буде дорівнювати $\varphi_2 = 2\pi N$. Підставивши знайдені значення ε і ω_0 у перше з отриманих рівнянь, одержимо

$$2\pi N = 2\pi t_2 + (-0,1\pi)t_2^2 / 2,$$

відкіля, з урахуванням значення t_2 , знайдемо $N = 10$ об.

Для визначення в момент часу $t_1 = 10$ с швидкості та прискорення точки, що лежить на ободі маховика, необхідно визначити ще кутову швидкість ω_1 . Використовуючи друге рівняння, одержимо:

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 \text{ або } \omega_1 = 2\pi - 0,1\pi \cdot 10 = \pi \text{ рад. с}^{-1}.$$

Визначимо швидкість й прискорення точки на ободі маховика:

$$V = \omega_1 R = \pi \cdot 0,4 = 1,26 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = |\varepsilon| R = 0,1\pi \cdot 0,4 = 0,126 \text{ м/с}^2; \quad a_n = V^2 / R = 1,26^2 / 0,4 = 3,97 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 3,98 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $N = 10$ об; $V = 1,26$ м/с; $a = 3,98$ м/с².

Задача 2. У механізмі, зображеному на рис. 10.10, обертання колеса 1 радіуса R_1 передається на двоступінчасте колесо 2 радіуса R_2 за допомогою пасової передачі; вантаж 3 прив'язаний до кінця нитки, намотаної на ступінь меншого діаметра r_2 колеса 2. Закон обертання колеса 1 $\varphi_1 = 5t - t^2$, радіуси $R_1 = 4$ см, $R_2 = 8$ см, $r_2 = 6$ см. Визначити: $\bar{V}_B, \bar{a}_B, \bar{V}_D, \bar{a}_D$ у момент часу $t_1 = 2$ с.

Розв'язання. У розглянутому механізмі колеса 1, 2 з'єднані пасом і здійснюють обертальні рухи. Частина паса, що охоплюють колеса (дуга $K_1K'_1$

на колесі 1 і дуга $K_2K'_2$ на колесі 2), здійснюють разом з ними обертальний рух; частини паса K_1K_2 і $K'_1K'_2$ рухаються поступально. Відрізок DE нитки, як і вантаж 3, рухається поступально.

Визначаємо спочатку кутові швидкості коліс 1, 2 і швидкості точок D (вантаж 3), B (колеса 2). Знаючи закон обертання колеса 1, знаходимо його кутову швидкість

$$\omega_1(t) = \dot{\phi}_1(t) = 5 - 2t. \quad (1)$$

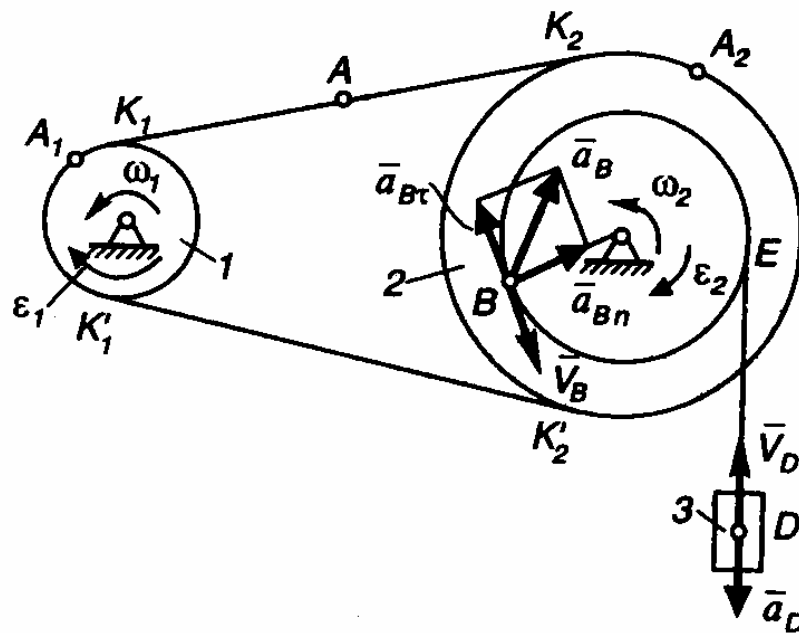


Рис. 10.10

Вважаючи, що пас по ободу коліс не ковзає, одержимо, що швидкості всіх точок паса і, отже, точок на ободах охоплених пасом кожного з коліс, у даний момент часу чисельно однакові, тобто

$$V_{A1} = V_A = V_{A2}.$$

Але швидкості точок A_1 і A_2 можна виразити через кінематичні характеристики руху коліс 1 і 2 таким чином: $V_{A1} = \omega_1 R_1$, $V_{A2} = \omega_2 R_2$. Підставивши ці вирази в попереднє рівняння, одержимо

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \quad (2)$$

звідси знаходимо $\omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2$.

У момент часу $t_1 = 2$ с одержимо $\omega_2 = 0,5$ рад. с^{-1} .

Оскільки $V_D = V_B = \omega_2 r_2$, то при $t_1 = 2$ с одержимо $V_D = V_B = 3$ см/с. Зображуємо на рис. 2.8 вектори \vec{V}_D і \vec{V}_B .

Для визначення прискорень точок B , D встановимо залежність між кутовими прискореннями коліс 1, 2, зв'язаних пасовою передачею. Оскільки рівність (2) справедлива для будь-якого моменту часу, то, беручи похідну від обох її частин, одержимо:

$$\frac{d\omega_1}{dt} R_1 = \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \text{ або } \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2 \text{ або } \varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2. \quad (3)$$

Знаходимо далі $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1(t) = -2$ рад. с^{-2} . Для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо також $\varepsilon_2 = -1$ рад. с^{-2} .

На рис. 10.10 для моменту часу $t_1 = 2$ с величини ω і ε кожного колеса зображено дуговими стрілками відповідно до знаків їх числових значень.

Визначаємо прискорення точки B : $\vec{a}_B = \vec{a}_{B\tau} + \vec{a}_{Bn}$, де чисельно $a_{B\tau} = |\varepsilon_2| r_2$, $a_{Bn} = \omega^2 r_2$. Тоді для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо $a_{B\tau} = 6$ см/с², $a_{Bn} = 1,5$ см/с², $a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = 6,18$ см/с².

Прискорення точки D чисельно дорівнює дотичному прискоренню точки B : $a_D = a_{B\tau} = 6$ см/с².

Вектори прискорень точок B і D зображуємо на рис. 10.8.

Відповідь: $V_B = V_D = 3$ см/с, $a_B = 6,18$ см/с², $a_D = 6$ см/с².

11. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

11.1. Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються у площинах, паралельних деякій площині, нерухомій в розглянутій системі відліку.

При такому русі тіла будь-яка пряма, перпендикулярна нерухомій площині Π (наприклад, прямі aa' , bb' на рис. 11.1), буде здійснювати поступальний рух, отже, всі кінематичні характеристики точок, що лежать на цій прямій, будуть тотожні. Звідси робимо висновок, що для вивчення руху всього тіла досить досліджувати як рухається в площині Oxy переріз цього тіла, що утворює деяку плоску фігуру. Тут площина Oxy є нерухомою і паралельною площині Π .

Положення плоскої фігури в площині Oxy визначається положенням будь-якого проведеного на цій фігурі відрізка AB (рис. 11.2). У свою чергу, положення відрізка AB визначається, наприклад, координатами x_A , y_A точки A та величиною кута φ між відрізком AB і віссю x . Точку A , яку вибрано для визначення положення плоскої фігури, називають *полюсом*.

Закон руху плоскої фігури в її площині, а отже, і плоскопаралельного руху твердого тіла щодо системи координат Oxy визначається трьома рівняннями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (11.1)$$

Аналізуючи залежності (11.1), можна зробити висновок, що рух плоскої фігури в її площині є сукупність двох рухів: поступального руху, при якому всі точки рухаються так само, як і полюс A , і обертального руху навколо цього полюса (при цьому фігура обертається навколо осі, що проходить через точку A перпендикулярно площині Π).

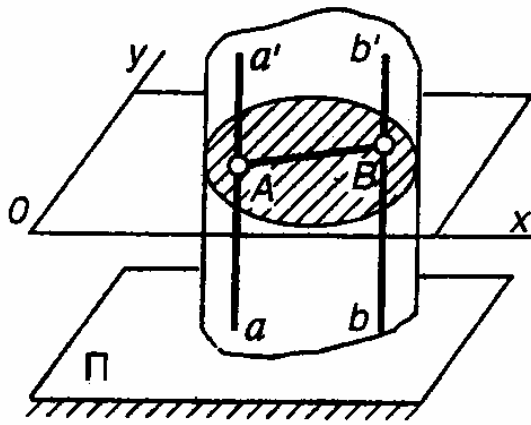


Рис. 11.1

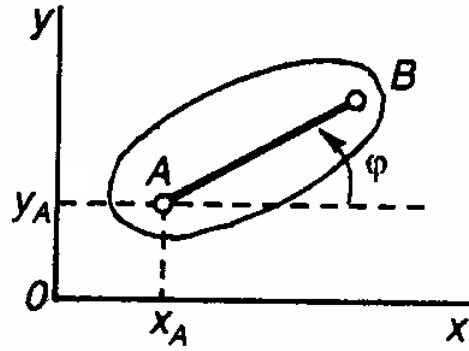


Рис. 11.2

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла є швидкість і прискорення полюса (\bar{V}_A, \bar{a}_A – характеристики поступальної складової руху), а також кутова швидкість і кутове прискорення тіла (ω, ε – характеристики обертальної складової руху).

Як полюс можна вибирати будь-яку точку фігури. При зміні точки, вибраної за полюс, характеристики поступальної складової руху змінюються (швидкість і прискорення іншої точки фігури в загальному випадку будуть відрізнятися від \bar{V}_A і \bar{a}_A), а характеристики обертальної складової руху ω і ε залишаються незмінними (оскільки яка-завгодно пряма перерізу, паралельного площині Π при плоскопаралельному русі твердого тіла повертається на один і той же кут).

11.2. Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Нагадаємо, що рух плоскої фігури можна розглядати як складову з поступального руху разом з полюсом і обертального руху навколо полюса. Відповідно до цього швидкість довільної точки M плоскої фігури геометрично складається із швидкості будь-якої точки A , що прийнята за полюс, і швидкості, яку точка M одержує при обертанні фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}. \quad (11.2)$$

При цьому швидкість \vec{V}_{MA} визначається за величиною і напрямом так само, якби тіло здійснювало обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку A , тобто

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{AM}, \quad \text{де} \quad V_{MA} = \omega \cdot AM, \quad \vec{V}_{MA} \perp \vec{AM}. \quad (11.3)$$

Таким чином, якщо відомі швидкість полюса \vec{V}_A і кутова швидкість тіла ω , то швидкість будь-якої точки M тіла визначається, відповідно до рівності (11.2), діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах \vec{V} і \vec{V}_{MA} , як на сторонах (рис. 11.3), а модуль швидкості V_M обчислюється за формулою:

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A \cdot V_{MA} \cdot \cos \gamma}, \quad (11.4)$$

де γ - кут між векторами \vec{V}_A і \vec{V}_{MA} .

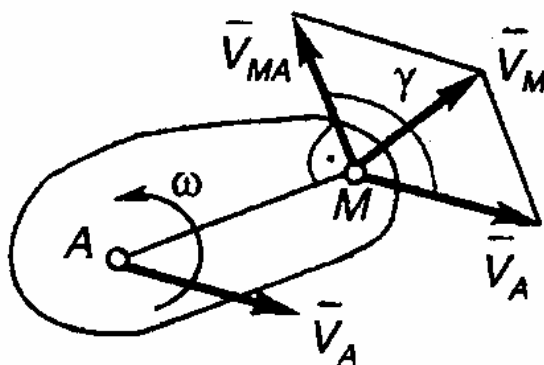


Рис. 11.3

Теорема про проєкції швидкостей двох точок твердого тіла

Відповідно до рівняння (11.2) для двох довільних точок A і B твердого тіла справедлива формула $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, згідно з якою виконуємо побудову, зображену на рис. 11.4. Проектуючи обидві частини цього рівняння на вісь Ax , спрямовану по відрізку AB , і, з урахуванням, що вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний прямій AB , знаходимо

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha. \quad (11.5)$$

Цей результат і виражає теорему: проєкції швидкостей двох точок твердого тіла на вісь, що проходить через ці точки, рівні між собою.

Природно, що рівність проекцій векторів означає рівність цих проекцій за їх модулем і знаком.

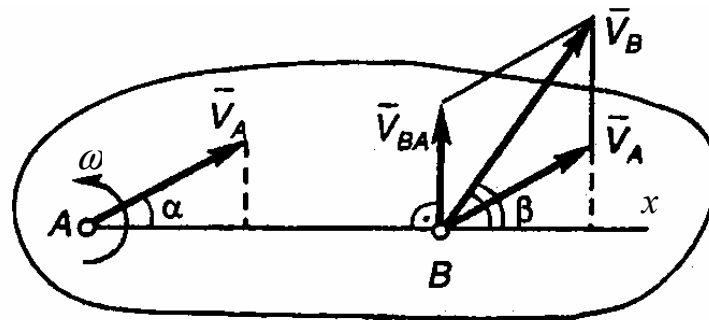


Рис. 11.4

Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ)

Для визначення швидкостей точок плоскої фігури виберемо за полюс будь-яку точку P . Тоді відповідно до формули (11.2) швидкість довільної точки M визначається як сума двох векторів \vec{V}_P і \vec{V}_{MP} :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}, \quad \text{де} \quad V_{MP} = \omega \cdot MP, \quad \vec{V}_{MP} \perp \overline{MP}.$$

Якби виявилось, що швидкість полюса P в даний момент часу дорівнює нулю, то права частина цього рівняння була б представлена одним доданком \vec{V}_{MP} , а швидкість будь-якої іншої точки визначалася б як її лінійна швидкість при обертанні тіла навколо полюса P :

$$V_M = \omega \cdot MP, \quad \vec{V}_M \perp \overline{MP}. \quad (11.6)$$

Отже якщо вибрати як полюс точку P , швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, то модулі швидкостей усіх інших точок фігури будуть пропорційні їхнім відстаням від полюса P , а напрями векторів швидкостей цих точок будуть перпендикулярні прямим, що з'єднують розглянуту точку і полюс P . Природно, що розрахунок швидкостей точок за формулами (11.6) значно простіше розрахунку за загальною формулою (11.2).

Точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається *миттєвим центром швидкостей (МЦШ)*. Легко

переконатися, що коли фігура рухається непоступально, то така точка в кожний момент часу існує і при цьому єдина. Розглянемо способи визначення положення миттєвого центра швидкостей.

Спосіб 1. Нехай у момент часу t для плоскої фігури відомі її кутова швидкість ω і швидкість \vec{V}_A будь-якої її точки A (рис. 11.5,а). Тоді, вибираючи точку A за полюс, швидкість шуканої нами точки P можна визначити за формулою $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}$. Задача полягає в тому, щоб знайти таку точку P , у якій лінійна швидкість $\vec{V}_P = 0$, а отже, $\vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = 0$ і звідси $\vec{V}_{PA} = -\vec{V}_A$. Тоді для точки P швидкість \vec{V}_{PA} , яку точка P одержує при обертанні фігури навколо полюса A , і швидкість \vec{V}_A полюса A будуть рівні за модулем ($V_{PA} = V_A$) і протилежні за напрямом. Крім того, точка P повинна лежати на перпендикулярі до вектора швидкості \vec{V}_A . Визначення положення точки P , що відповідає зазначеним умовам, здійснюється такою побудовою: з точки A (рис. 11.5,б) відновимо перпендикуляр до вектору \vec{V}_A і відкладемо на ньому відстань $AP = V_A / \omega$ у той бік від точки A , куди «покаже» вектор \vec{V}_A , якщо його повернути в напрямку дугової стрілки ω на 90° .

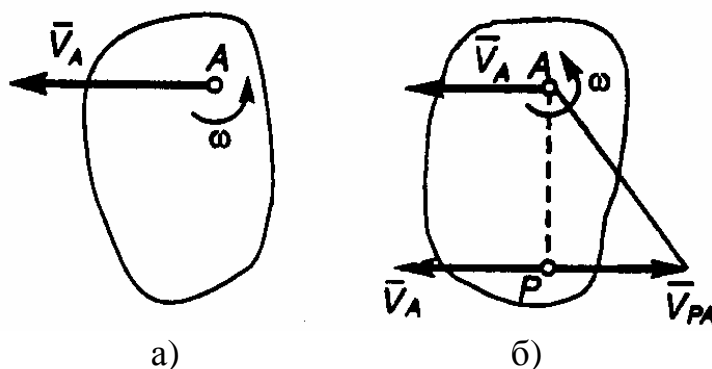


Рис. 11.5

Зазначимо, що миттєвий центр швидкостей може бути розташований як на самій фігурі, так і на її уявному продовженні (тобто поза фігурою). Миттєвий центр швидкостей є єдиною точкою плоскої фігури, швидкість якої в

даний момент часу дорівнює нулю. В інший момент часу миттєвим центром швидкостей буде вже інша точка плоскої фігури.

Спосіб 2. Якщо відомі напрями швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B двох точок A і B плоскої фігури, то миттєвий центр швидкостей буде знаходитися в точці перетину перпендикулярів, відновлених з точок A і B до векторів їх швидкостей. Така побудова виконана на рис. 11.6. Вона обґрунтована тим, що для будь-яких точок A і B фігури застосовані положення (11.6):

$$V_A = \omega \cdot AP, \quad \vec{V}_A \perp \overline{AP} \quad \text{і} \quad V_B = \omega \cdot BP, \quad \vec{V}_B \perp \overline{BP}.$$

З цих рівностей випливає, що

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (11.7)$$

Отже, якщо МЦШ визначено, то швидкості точок плоскої фігури визначаються, начебто ця фігура в даний момент часу обертається навколо миттєвого центра швидкостей (точки P).

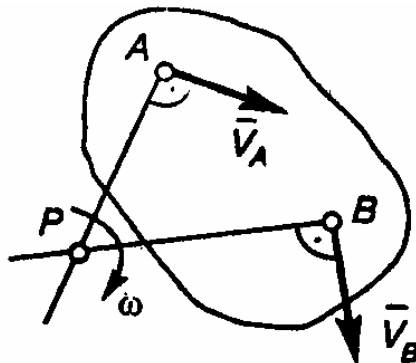


Рис. 11.6

Спосіб 3. Якщо швидкості точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, то можливі три варіанти, зображені на рис. 11.7.

При цьому у випадку, коли швидкості точок A і B паралельні й пряма AB не перпендикулярна \vec{V}_A (рис. 11.7, в), то миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності ($AP = \infty$), тобто фактично не існує, а кутова швидкість обертання фігури $\omega = V_A / AP = V_A / \infty = 0$. Тут швидкості всіх точок фігури в даний момент часу рівні одна одній і фігура має розподіл швидкостей

як при поступальному русі. Такий стан руху тіла називають *миттєво поступальним*.

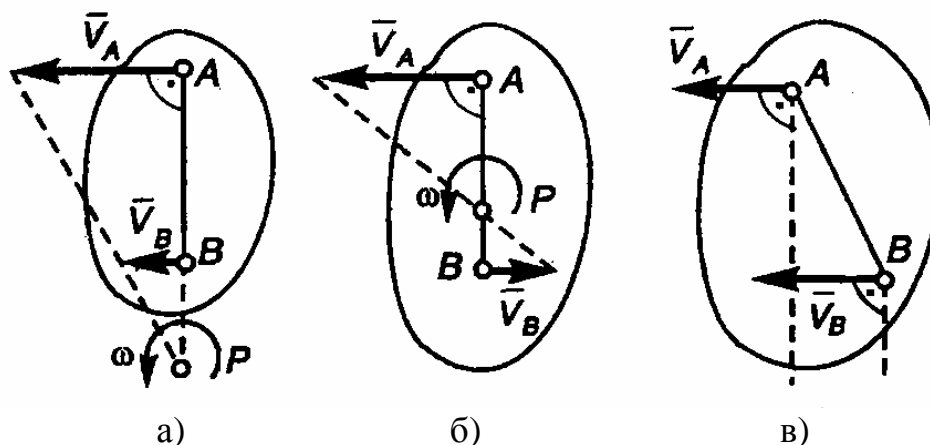


Рис.11.7

Спосіб 4. Якщо плоский рух тіла здійснюється шляхом кочення без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 11.8), то точка дотику P буде миттєвим центром швидкостей.

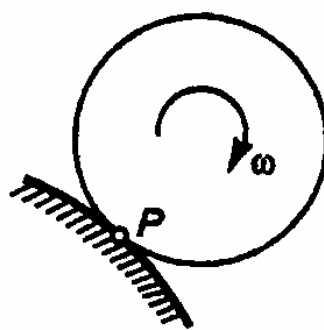


Рис. 11.8

11.3. Визначення прискорень точок плоскої фігури

Прискорення будь-якої точки M плоскої фігури геометрично складається з прискорення будь-якої точки A , прийнятої за полюс, і прискорення, що точка M одержує при обертанні фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \quad (11.8)$$

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (11.9)$$

де ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення фігури.

При розв'язанні задач зручніше вектори в правій частині рівняння (11.8) представити як суми дотичних і нормальних складових. Тоді отримаємо

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n, \quad (11.10)$$

де $\bar{a}_{A\tau}, \bar{a}_{An}$ – дотичне і нормальне прискорення точки A ; $\bar{a}_{MA}^{\tau}, \bar{a}_{MA}^n$ – дотична і нормальна складова прискорення \bar{a}_{MA} точки M в її обертанні сумісно з тілом навколо полюса A .

При цьому модулі векторів \bar{a}_{MA}^{τ} і \bar{a}_{MA}^n , як прискорення точки тіла, що обертається, визначаються відповідно до формул (10.11):

$$a_{MA}^{\tau} = MA \cdot \varepsilon; \quad a_{MA}^n = MA \cdot \omega^2. \quad (11.11)$$

Тут вектор \bar{a}_{MA}^{τ} спрямований перпендикулярно MA у бік дугової стрілки ε , а вектор \bar{a}_{MA}^n спрямований від точки M до полюсу A .

Якщо точка M рухається криволінійно, то вектор \bar{a}_M в лівій частині рівності (11.10) треба замінити сумою складових за напрямом координатних осей: \bar{a}_{Mx} і \bar{a}_{My} .

Подальші особливості використання рівняння (11.10) розглянемо при розв'язанні конкретних задач.

11.4. Приклади розв'язання задач з визначення швидкостей точок тіла

Задача 1. Колесо радіуса R котиться по нерухомій поверхні без ковзання (рис. 11.9, а). Знайти швидкість точок K і D колеса, якщо відомі швидкість \bar{V}_C центра C колеса і відстань $KC = b$ і кут α .

Розв'язання. Розглянутий рух колеса за визначенням є плоскопаралельним. Приймаючи точку C за полюс (оскільки її швидкість відома) відповідно до загального рівняння (11.2) для точки K матимемо

$$\bar{V}_K = \bar{V}_C + \bar{V}_{KC}, \quad \text{де} \quad \bar{V}_{KC} \perp \overline{KC}, \quad V_{KC} = \omega \cdot KC.$$

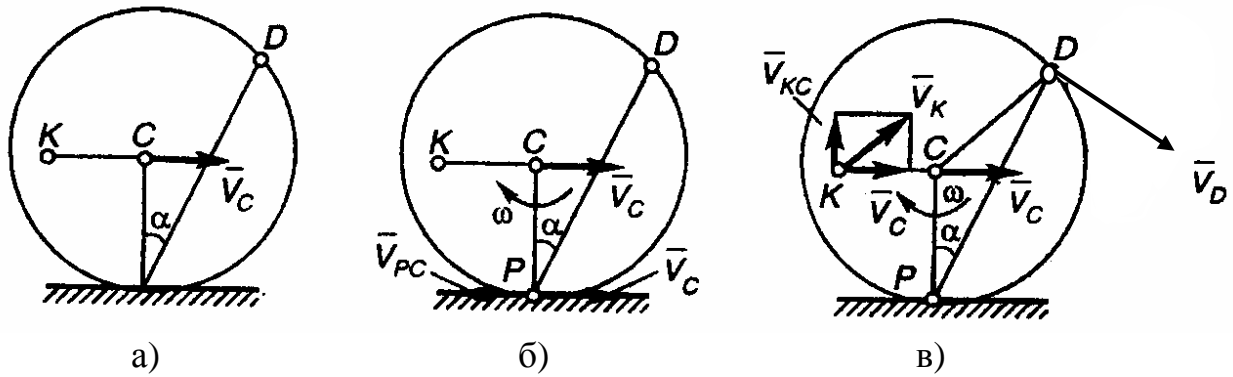


Рис. 11.9

Для визначення кутової швидкості ω розглянемо лінійну швидкість точки P дотику колеса з нерухомою поверхнею (рис. 11.9,б). Для цієї точки можна записати рівняння

$$\bar{V}_P = \bar{V}_C + \bar{V}_{PC}, \quad \text{де} \quad \bar{V}_{PC} \perp \overline{PC}, \quad V_{PC} = \omega \cdot PC.$$

Особливістю точки P є те, що в даний момент часу її швидкість $V_P = 0$, оскільки колесо котиться без ковзання. Тоді отримане рівняння дає вираз

$$0 = \bar{V}_C + \bar{V}_{PC}.$$

Звідси випливає наступне: 1) швидкості \bar{V}_{PC} і \bar{V}_C повинні бути спрямовані в протилежні сторони; 2) з рівності модулів $V_{PC} = V_C$ одержуємо $\omega \cdot PC = V_C$,

звідси знайдемо величину $\omega = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_C}{R}$. Відповідно до напрямку вектора \bar{V}_{PC}

визначаємо напрям ω і зображуємо його на кресленні.

Тепер повертаємося до визначення V_k . Знаходимо $V_{KC} = \omega \cdot KC = \frac{V_C \cdot b}{R}$.

Знаючи напрям кутової швидкості ω , виконуємо побудову прямокутника на векторах \bar{V}_C і \bar{V}_{KC} (рис. 11.9,в). Остаточного знаходимо

$$V_K = \sqrt{V_C^2 + V_{KC}^2} = V_C \sqrt{1 + (b/R)^2}.$$

Швидкість точки D на ободі колеса визначимо за формулою (11.7), враховуючи, що точка P дотику колеса і поверхні є його МЦШ:

$$V_D = \omega \cdot DP = \frac{V_C}{R} \cdot (2R \cdot \cos \alpha) = 2V_C \cos \alpha, \quad \vec{V}_D \perp \overline{DP}.$$

Задача 2. Повзуни A і B з'єднані стержнем з шарнірами на кінцях, переміщуються по взаємно перпендикулярних напрямних (рис. 11.10,а). Визначити при даному куті α швидкість точки B , якщо відома швидкість \vec{V}_A .

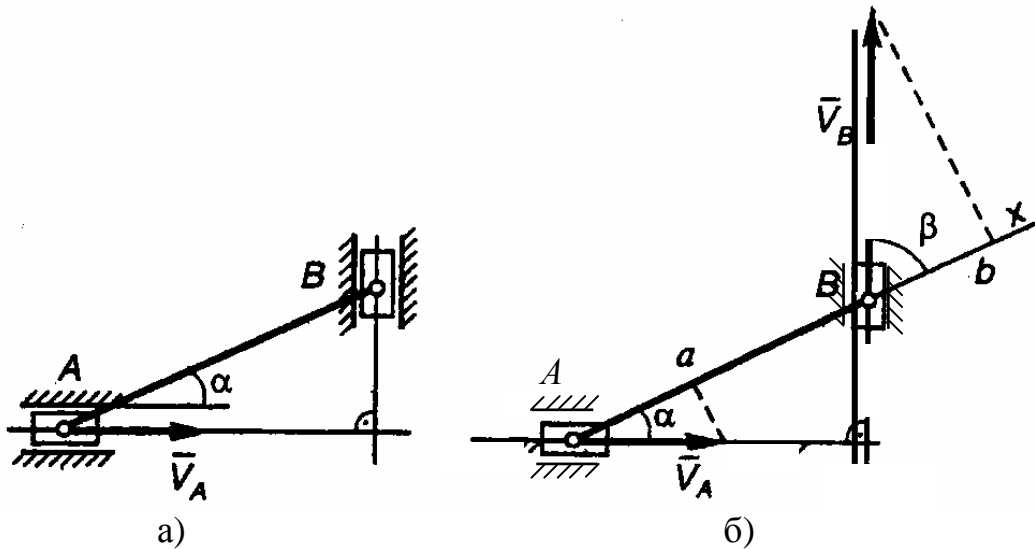


Рис. 11.10

Розв'язання. Проведемо вісь Ax через точки A і B . Знаючи напрям \vec{V}_A , знаходимо проекцію цього вектора на цю вісь: $V_{Ax} = V_A \cos \alpha$ (на рис. 11.10,б це буде відрізок Aa). Далі на схемі від точки B відкладаємо відрізок $Bb = Aa$ і, відновлюючи в точці b перпендикуляр до осі Ax , знаходимо точку C його перетину з віссю вертикальних напрямних, яка і буде визначати кінець невідомого вектора швидкості \vec{V}_B точки B .

Відповідно до теореми про проекції швидкостей: $V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$.

Звідси остаточно визначимо (врахувавши, що $\beta = 90^\circ - \alpha$)

$$V_B = V_A \cos \alpha / \cos(90^\circ - \alpha) \text{ або } V_B = V_A \operatorname{ctg} \alpha.$$

Задача 3. Плоский механізм складається із стержнів $1, 2, 3, 4$ і повзуна B (рис. 11.11), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами в точках O_1 і O_2 шарнірами; точка D знаходиться всередині стержня AB . Довжини стержнів: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 0,7$ м, $l_4 = 0,3$ м. Кутова швидкість стержня 1 у

заданому положенні механізму $\omega_1 = 2 \text{ рад. с}^{-1}$ і спрямована проти ходу годинникової стрілки. Визначити $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_D, \vec{V}_E, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Розв'язання. У розглянутому механізмі стержні 1, 4 здійснюють обертальний рух відповідно навколо точок O_1 і O_2 , повзун B – поступальний в своїх напрямних, а стержні 2, 3 – плоскопаралельний рух.

Швидкість точки A визначимо як приналежну стержню 1, який здійснює обертальний рух:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp \overline{O_1 A}.$$

Розглянемо рух стержня 2. Швидкість його точки A визначена, а напрям швидкості точки B співпадає з віссю напрямних, це обумовлено тим, що вона належить одночасно стержню 2 і повзуну, що рухається уздовж напрямних. Далі, відновлюючи з точок A і B перпендикуляри до \vec{V}_A і напрямку швидкості повзуна B , знаходимо положення точки P_2 – МЦШ стержня 2.

За напрямом вектора \vec{V}_A визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_2 стержня 2 і знаходимо її числову величину

$$AP_2 = AB \cdot \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м (одержимо при розгляді } \Delta AP_2 B),$$

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = 0,8 / 1,04 = 0,77 \text{ рад. с}^{-1}.$$

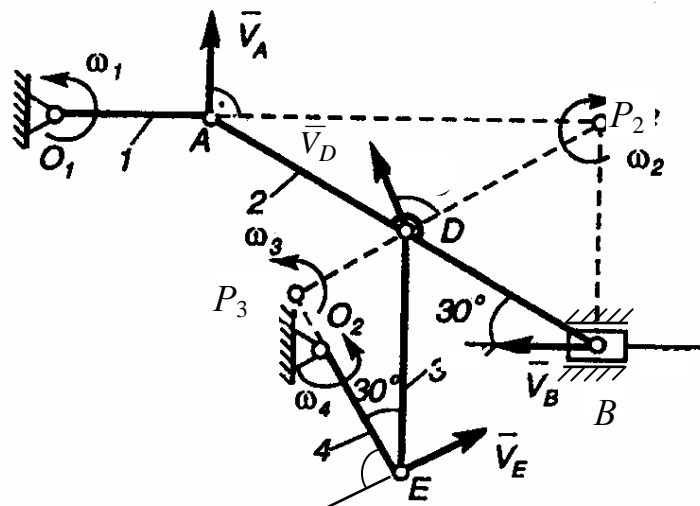


Рис. 11.11

Тепер визначаємо числові значення і напрями швидкостей точок B і D стержня 2 (з урахуванням, що $\triangle DP_2B$ – рівнобічний і $BP_2 = AB \cdot \cos 60^\circ = 0,6$ м, а $DP_2 = BP_2 = 0,6$ м):

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 0,62 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_B \perp \overline{P_2B};$$

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 = 0,62 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_D \perp \overline{P_2D}.$$

Розглянемо далі рух стержня 3. Швидкість точки D відома. Оскільки точка E належить одночасно і стержню 4, що обертається навколо точки O_2 , то лінія дії швидкості V_E буде перпендикулярною $\overline{O_2E}$. Тоді, відновлюючи в точках D і E перпендикуляри до швидкості \vec{V}_D і лінії дії швидкості \vec{V}_E , знаходимо положення точки P_3 – МЦШ стержня 3. За напрямом вектора \vec{V}_D визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_3 стержня 3. Її чисельну величину знаходимо (попередньо визначивши з прямокутного $\triangle DP_3E$ відрізок $DP_3 = DE \cdot \sin 30^\circ = 0,35$ м) так:

$$\omega_3 = V_D / P_3D = 1,77 \text{ рад. с}^{-1}.$$

Далі, обчисливши $P_3E = ED \cdot \cos 30^\circ = 0,605$ м, визначаємо швидкість $V_E = \omega_3 \cdot P_3E = 1,07$ м/с; $\vec{V}_E \perp \overline{P_3E}$. За напрям дугової стрілки ω_3 визначаємо напрям вектора швидкості \vec{V}_E .

Розглянемо тепер рух стержня 4, що обертається навколо точки O_2 . Знаючи напрям і чисельну величину \vec{V}_E , знаходимо напрям і величину кутової швидкості ω_4 : $\omega_4 = V_E / O_2E = V_E / l_4 = 3,57$ рад. с⁻¹.

Відповідь: $V_A = 0,8$ м/с, $V_B = V_D = 0,63$ м/с, $V_E = 1,07$ м/с, $\omega_2 = 0,77$ рад.с⁻¹; $\omega_3 = 1,77$ рад. с⁻¹; $\omega_4 = 3,57$ рад. с⁻¹, напрями цих величин показано на рис. 11.11.

Задача 4. Плоский механізм складається із стержнів 1, 2, 3 і катка, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 11.12,а). З'єднання стержнів між собою і стержня 3 з катком у точці D – шарнірні. Довжини стержнів: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 0,6$ м, $l_3 = 0,8$ м. При кутах $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, відомих величинах і

напрямах кутової швидкості $\omega_1 = 2 \text{ рад. с}^{-1}$ і швидкості центра O катка $V_0 = 0,346 \text{ м/с}$, $\angle ABD = 90^\circ$ визначити швидкість точки B і кутову швидкість ω_2 стержня 2.

Розв'язання. Аналіз принципу дії механізму показує наступне: стержень 1 виконує обертальний навколо точки O_1 рух; стержні 2, 3, а також каток – плоскопаралельні рухи.

Розглядаючи рух стержня 1, знаходимо напрям і величину швидкості точки A : $V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0,8 \text{ м/с}$; $\vec{V}_A \perp \vec{O_1A}$. Напрямок вектора швидкості \vec{V}_A визначаємо за напрямом дугової стрілки ω_1 .

Розглянемо далі рух катка. Його миттєвий центр швидкостей розташований в точці P дотику катка і поверхні, тоді V_D знайдемо як

$$V_D = V_0 \cdot DP / OP.$$

Оскільки в трикутнику $\triangle DOP$ за визначенням, кут $\beta = 30^\circ$, то $DP = 2 \cdot OP \cdot \cos 30^\circ = OP \cdot \sqrt{3}$. Тоді швидкість $V_D = V_0 \cdot DP / OP = V_0 \cdot \sqrt{3} = 0,6 \text{ м/с}$. При цьому вектор \vec{V}_D спрямований перпендикулярно DP у бік дугової стрілки ω_1 стержня 1.

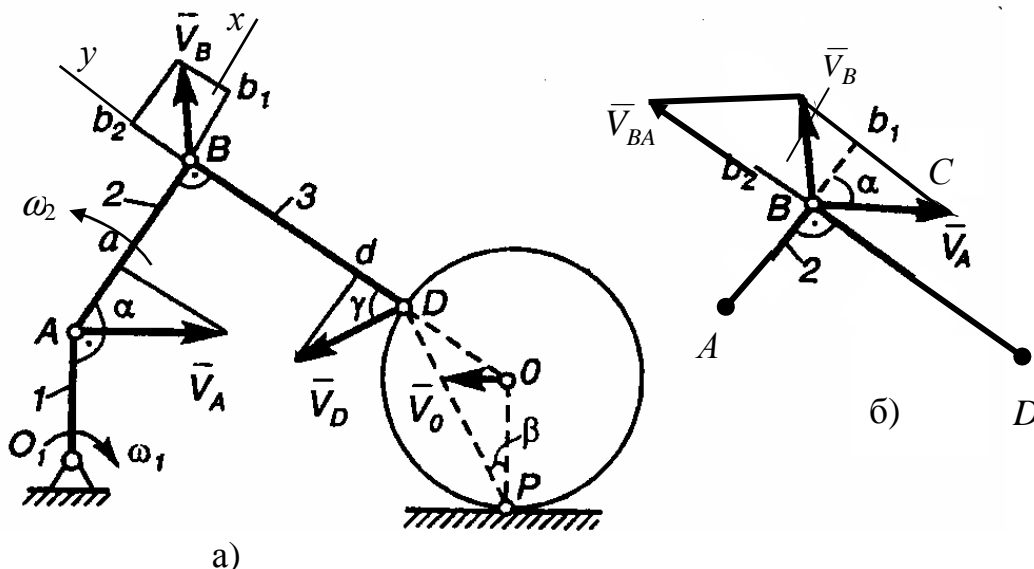


Рис. 11.12

Тому що точка B механізму належить одночасно стержням AB і BD , то за теоремою про проекції швидкостей повинно виконуватись: 1) проекція вектора \vec{V}_B на вісь Ax дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{V}_A (відрізок Aa на

рис. 11.12, а), тобто $Aa = V_A \cos \alpha = 0,4$ м/с; 2) проекція вектора \vec{V}_B на вісь Dy дорівнює проекції на цю вісь вектора \vec{V}_D (відрізок Dd на рис. 11.12,а), тобто $Dd = V_D \cos \gamma = 0,3$ м/с ($\gamma = 60^\circ$ за побудовою).

Далі вирішуємо задачу графічно. Відкладаємо від точки B у відповідних напрямках відрізки $Bb_1 = Aa$ і $Bb_2 = Dd$. Відновлюємо з точки b_1 перпендикуляр до Bb_1 , а з точки b_2 – перпендикуляр до Bb_2 . Точка перетину цих перпендикулярів визначає кінець шуканого вектора \vec{V}_B .

Оскільки відрізки Bb_1 і Bb_2 у даному випадку взаємно перпендикулярні, то

$$V_B = \sqrt{(Bb_1)^2 + (Bb_2)^2} = 0,5 \text{ м/с.}$$

Визначаємо ω_2 . На рис. 3.12,б графічно зображено векторну рівність:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad \vec{V}_{BA} \perp \overline{AB},$$

де вектори \vec{V}_A і \vec{V}_B визначені, а за напрямом вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний стержню AB . Зі схеми (рис. 3.12, б) знаходимо

$$V_{BA} = Bb_2 + Cb_1 = V_D \cos \gamma + V_A \sin \alpha = 0,3 + 0,693 = 0,993 \text{ м/с.}$$

Остаточно $\omega_2 = V_{BA} / AB = 1,66$ рад. с^{-1} (напрямок дугової стрілки ω_2 , враховуючи напрям швидкості \vec{V}_{BA} – проти ходу годинникової стрілки).

Відповідь: $V_B = 0,5$ м/с; $\omega_2 = 1,66$ рад. с^{-1} .

11.5. Приклади розв'язання задач з визначення прискорень точок тіла

Задача 1. Механізм (рис. 11.13) складається із стержнів $1,2$ і повзуна B , з'єднаних один з одним і з нерухомою опорою O шарнірами. Стержень 1 обертається навколо точки O за законом $\varphi = 0,5(3t - t^2)$ рад. У момент часу $t_1 = 1$ с механізм займає положення, зображене на рис. 11.13: кути $\alpha = \beta = 30^\circ$, а кут $\angle OAB = 120^\circ$.

Визначити для цього положення механізму швидкість \bar{V}_B і прискорення \bar{a}_B повзуна B , а також кутову швидкість ω_2 і кутове прискорення ε_2 стержня 2, якщо довжини стержнів $l_1 = 2$ м, $l_2 = 4$ м.

Розв'язання. Знаходимо кутову швидкість і кутове прискорення стержня 1 як функції часу: $\omega_1 = \dot{\varphi} = 0,5(3 - 2t)$, $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = -1$. Тоді для моменту часу $t_1 = 1$ с одержимо $\omega_1 = 0,5$ рад. с^{-1} , $\varepsilon_1 = -1$ рад. с^{-2} . Відповідно до знаків цих величин зображуємо їх на рис. 11.13 дуговими стрілками: ω_1 проти ходу годинникової стрілки, ε_1 – за ходом годинникової стрілки.

Визначимо швидкість точки A \bar{V}_A , розглядаючи обертальний рух стержня 1:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 1 \text{ м/с}, \quad \bar{V}_A \perp \overline{OA}.$$

Кутову швидкість ω_2 стержня 2, а також швидкість його точки B визначимо методом МЦШ. Для цього будуємо МЦШ стержня 2, відновлюючи перпендикуляри в точках A і B до \bar{V}_A і лінії швидкості точки B повзуна, яка співпадає з віссю напрямних останнього. Точка P_2 перетину перпендикулярів і буде МЦШ стержня 2.

З рис. 11.13 випливає, що всі кути трикутника AP_2B дорівнюють 60° , а трикутник є рівнобічним, тому отримаємо $P_2A = P_2B = AB = 4$ м, а також

$$\omega_2 = V_A / P_2A = 0,25 \text{ рад. } \text{с}^{-1}, \quad V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{ м/с}.$$

Прискорення точки A , яка належить стержню 1, що здійснює обертання навколо точки O , представимо як (11.10)

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An},$$

де числові значення

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_{An} = \omega_1^2 l_1 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Тут вектор \bar{a}_{An} спрямований уздовж AO від точки A до точки O , а $\bar{a}_{A\tau}$ перпендикулярний AO і спрямований у напрямку дугової стрілки ε_1 .

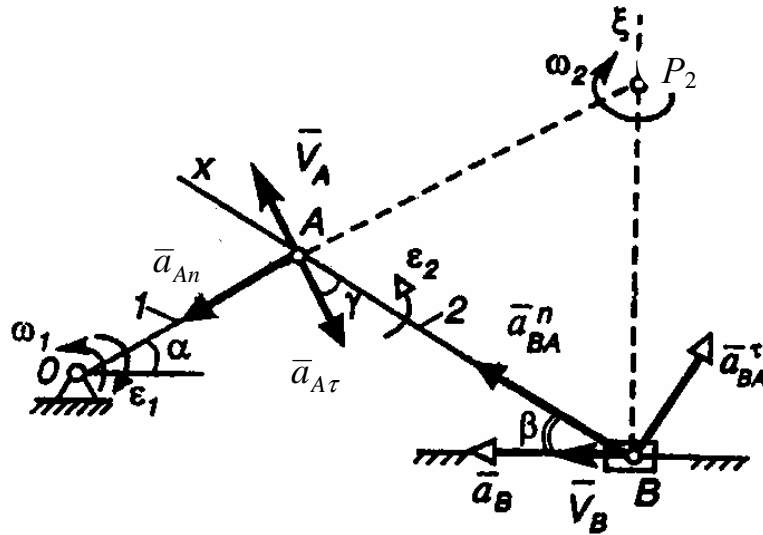


Рис. 11.13

Оскільки точка B цього стержня одночасно належить і повзуну, що рухається у напрямних прямолінійно, то вектор \bar{a}_B належить осі напрямним повзуна. Зображуємо вектор \bar{a}_B на схемі, припускаючи, що він спрямований у той же бік, що і \bar{V}_B .

Для визначення прискорення \bar{a}_B приймемо точку A як полюс і скористаємося формулою (11.10):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Зображуємо на схемі вектор \bar{a}_{BA}^n (уздовж відрізка BA від точки B до точки A) і знаходимо його числове значення (11.11):

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Числове значення \bar{a}_{BA}^τ , відповідно до (11.11), могло б бути визначено як $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, але в даному випадку кутове прискорення ε_2 невідомо. Для вектора \bar{a}_{BA}^τ можемо вказати на кресленні його напрям (припустивши, що ε_2 спрямовано проти ходу годинникової стрілки). Зображуємо цей вектор перпендикулярно AB у відповідний бік.

Отже, з величин, що входять для \bar{a}_B , невідомі тільки числові значення двох величин a_B і a_{BA}^τ . Їх можна знайти, спроектувавши векторне рівняння на будь-які дві осі.

Щоб визначити a_B , спроектуємо спочатку обидві частини рівняння на вісь Bx :

$$a_B \cos \beta = -|a_{A\tau}| \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n.$$

Підставивши у рівняння числові значення усіх величин, знайдемо $a_B = -1,34 \text{ м/с}^2$. Оскільки $a_B < 0$, то, вектор \bar{a}_B буде насправді спрямованим протилежно зображеному на рис. 11.13.

Визначаємо далі кутове прискорення стержня 2. Щоб знайти ε_2 , варто спочатку визначити a_{BA}^τ . Для цього обидві частини рівняння спроектуємо на напрям вісь $B\xi$:

$$0 = -|a_A^\tau| \cos \alpha - a_A^n \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \beta + a_{BA}^n \sin \beta.$$

Підставивши в рівняння числові значення усіх величин, знайдемо $a_{BA}^\tau = 2,43 \text{ м/с}^2$. Оскільки одержали $a_{BA}^\tau > 0$, то дійсний напрям вектора \bar{a}_{BA}^τ збігається з тим, що передбачалося при розрахунку.

Тепер з рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$ одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 0,61 \text{ рад.с}^{-2}$. Напрямок ε_2 буде проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на схемі.

Відповідь: $V_B = 1 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,25 \text{ рад.с}^{-1}$, $a_B = -1,34 \text{ м/с}^2$ (знак указує, що напрям a_B насправді протилежний показаному на рис. 11.13), $\varepsilon_2 = 0,61 \text{ рад.с}^{-2}$.

Задача 2. Механізм (рис. 11.14,а) складається із стержнів 1, 2, 3, з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами. Довжини стержнів $l_1 = 2 \text{ м}$, $l_2 = 4 \text{ м}$, $l_3 = 1,25 \text{ м}$. У момент часу, коли $\alpha = \beta = 30^\circ$, і $\angle O_1AB = 120^\circ$, для стержня 1 відомі величини і напрями кутової швидкості і кутового прискорення: $\omega_1 = 0,5 \text{ рад.с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 1 \text{ рад.с}^{-2}$. Для даного положення механізму визначити швидкість і прискорення точки B , кутові швидкості та кутові прискорення стержнів 2 і 3.

Розв'язання. Визначення \bar{V}_B і ω_2 цілком збігаються з тим, що виконано при розв'язанні задачі 1:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}, \quad \gamma = 30^\circ, \quad \omega_2 = V_A / P_2A = 0,25 \text{ рад.с}^{-1},$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{ м/с}.$$

Оскільки стержень 3 здійснює обертальний рух навколо осі O_2 , то

$$\omega_3 = V_B / l_3 = 0,8 \text{ рад.с}^{-1}.$$

Визначаємо прискорення точки B . Точка B рухається по колу радіуса O_2B , тому напрям прискорення \bar{a}_B заздалегідь невідомий.

У цьому випадку вектор \bar{a}_B варто представити як суму двох його складових $\bar{a}_{B\tau}$ і \bar{a}_{Bn} . Прийнявши для стержня 2 точку A за полюс, одержимо

$$\bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn} = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

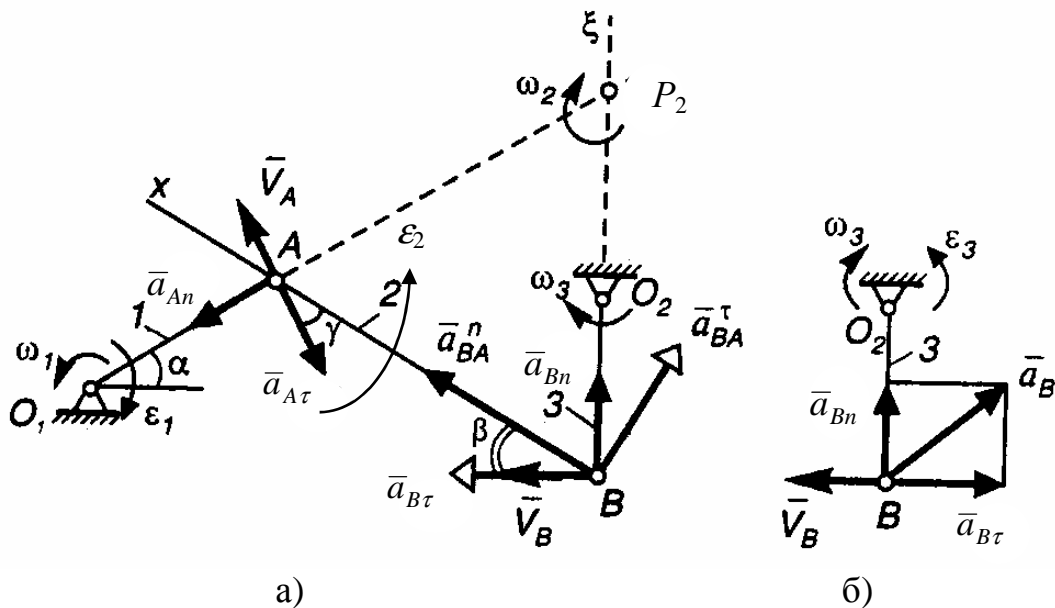


Рис. 11.14

Для векторів, зазначених у правій частині цього рівняння, отримаємо

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \quad a_{An} = \omega_1^2 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2 = 0,25 \text{ м/с}^2,$$

напрями цих векторів показано на рис. 11.14, а.

Вектори лівої частини рівняння визначаються для точки B , яка належить стержню 3, що робить обертальний рух навколо точки O_2 . Вектор \bar{a}_{Bn} буде спрямований уздовж BO_2 від точки B до точки O_2 і чисельно

$$a_{Bn} = V_B^2 / l_3 = \omega_3^2 l_3 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Невідомий вектор $\bar{a}_{B\tau}$ направимо перпендикулярно стержню 3 у бік, за ходом годинникової стрілки.

Отже, з величин, що входять у векторне рівняння, невідомі тільки числові значення $a_{B\tau}$ і a_{BA}^τ , які можна знайти, спроектувавши обидві частини рівняння на вісь Bx :

$$a_{B\tau} \cos \beta + a_{Bn} \sin \beta = -a_{A\tau} \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n.$$

Підставивши числові значення усіх величин, знайдемо $a_{B\tau} = -1,8 \text{ м/с}^2$. Знак мінус указує, що напрям $\bar{a}_{B\tau}$ в дійсності є протилежним зображеному на рис. 11.14,а.

Тепер обчислюємо величину прискорення

$$a_B = \sqrt{(a_{B\tau})^2 + (a_{Bn})^2} = 1,97 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо кутове прискорення стержня 2. Спроектувавши обидві частини рівняння на напрям осі $B\xi$, одержимо

$$a_{Bn} = -a_{A\tau} \cos \alpha - a_{An} \sin \alpha + a_{BA}^n \sin \beta + a_{BA}^\tau \cos \beta.$$

Підставивши числові значення величин, знайдемо $a_{BA}^\tau = 3,36 \text{ м/с}^2$. Оскільки $a_{BA}^\tau > 0$, то фактично вектор \bar{a}_{BA}^τ спрямований, як показано на рис. 11.14,а. Тепер, користуючись формулою $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$, одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 0,84 \text{ рад.с}^{-2}$, напрям ε_2 – проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на рис. 11.14,а.

Визначаємо кутове прискорення стержня 3. Стержень 3 (рис. 11.14,б) здійснює обертальний рух навколо точки O_2 . З рівняння $a_{B\tau} = \varepsilon_3 l_3$ одержимо

$\varepsilon_3 = |a_B^\tau|/l_3 = 1,44 \text{ рад.с}^{-2}$, напрям ε_3 – проти ходу годинникової стрілки.

Показуємо його на рис. 11.14,б.

Відповідь: $V_B = 1 \text{ м/с}$, $\omega_2 = 0,25 \text{ рад.с}^{-1}$, $\omega_3 = 0,8 \text{ рад.с}^{-1}$, $a_B = 1,97 \text{ м/с}^2$,
 $\varepsilon_2 = 0,84 \text{ рад.с}^{-2}$, $\varepsilon_3 = 1,44 \text{ рад.с}^{-2}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняється дугова координата s точки від пройденого нею шляху? Коли вони збігаються?
2. Чи залежить напрям орта $\bar{\tau}$ дотичної до траєкторії від напрямку руху точки?
3. Які зміни вектора швидкості характеризують дотичне і нормальне прискорення?
4. Чи може точка, що рівномірно рухається, мати прискорення?
5. Чи однакові поняття «рух точки з прискоренням» і «прискорений рух точки»?
6. Як визначити, рух точки є прискореним чи уповільненим?
7. Як напрямлена швидкість точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
8. Як напрямлене прискорення точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
9. Якими способами можна задати рух точки?
10. Як можна охарактеризувати рух точки, якщо її дотичне прискорення не від'ємне?
11. В якому випадку руху точки її дотичне і нормальне прискорення одночасно дорівнюють нулю?
12. Який рух точки називають рівномірним, рівнозмінним?
13. Що таке траєкторія руху точки?
14. Дайте визначення механічного руху точки.
15. Швидкості та прискорення двох точок тіла за весь час його руху однакові за модулями і напрямками. Чи можна стверджувати, що дане тіло рухається поступально?
16. Траєкторії всіх точок тіла є колами. Чи можна стверджувати, що тіло здійснює обертальний рух; поступальний рух?
17. Тіло обертається рівномірно. Чи можна стверджувати, що для всіх його точок $\vec{V} = const$?
18. Прискорення яких точок тіла, що обертається: а) мають рівні модулі; б) мають однакові напрями; в) однакові за модулем і напрямом?
19. Чи можливо таке обертання тіла навколо нерухомої осі, при якому вектори швидкості та прискорення довільної точки тіла взаємно перпендикулярні? Спрямовані по одній прямій?

20. Чи можна визначити, що обертання тіла прискорене або уповільнене, за знаком тільки ω або тільки ε ?
21. Вектор прискорення точок диска, що обертається, спрямований під кутом $\mu = 45^\circ$ до його радіуса. Яке співвідношення між модулями кутової швидкості та кутового прискорення цього диска?
22. Як перевести кутову швидкість, яка виражена в об/хв, у рад/сек?
23. Як спрямовані вектори кутової швидкості і кутового прискорення при уповільненому та прискореному обертаннях?
24. З яких рухів складається плоскопаралельний рух твердого тіла?
25. Що є основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла?
26. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла залежать / не залежать від вибору полюса?
27. Що називається миттєвим центром швидкостей?
28. Як розподілені швидкості точок плоскої фігури відносно МЦШ?
29. Скільки миттєвих центрів швидкостей може мати плоска фігура у певний момент часу?
30. Чи можлива ситуація, коли плоска фігура не має у певний момент часу миттєвого центра швидкостей?
31. Як можна побудувати миттєвий центр швидкостей у загальному випадку. Яка інформація потрібна для цієї побудови?
32. В якому випадку рух плоскої фігури називають миттєво поступальним?
33. Де знаходиться МЦШ для колеса, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні?
34. Як визначається швидкість точки плоскої фігури?
35. Як визначається прискорення точки плоскої фігури?

12. ДИНАМІКА ТОЧКИ

12.1. Основні поняття і визначення. Закони динаміки

Динамікою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальної точки, матеріальних тіл під дією сил.

У класичній механіці задачі динаміки поділяють традиційно умовно на два типи.

У першому типі задач звичайний рух тіла (або механічної системи) є заданим і треба визначити сили під дією яких здійснюється цей рух (пряма задача динаміки).

Другий тип задач за умовою звичайно має протилежний зміст: в них заданими є сили, а шуканим – рух тіла (обернена задача динаміки).

12.1.1. Основні поняття і визначення

У теоретичній механіці під *матеріальною точкою* розуміють тіло кінцевої маси, розмірами і різницею в русі окремих точок якого можна знехтувати. Наприклад, тіло, що поступально рухається, можна розглядати матеріальною точкою з масою, рівною масі всього тіла. Звичайно матеріальну точку моделюють геометричною точкою, яку наділяють кінцевою масою.

Класична механіка Ньютона використовує поняття *«абсолютна» система координат* і *«абсолютний» час*.

«Абсолютна» система координат – це абсолютно нерухома система координат, до якої справедлив закон інерції Галілея. Тобто система координат, по відношенню до якої виконується закон інерції називається *інерціальною*.

«Абсолютний» час – це час, який не залежить від руху тіл і систем відліку, тобто однаковий для всіх спостерігачів, де б вони не знаходились і як би не рухались.

Досвід і спостереження показують, що інерціальною системою координат є геліоцентрична система, полюс якої знаходиться в центрі мас Сонця, а осі направлено на нерухомі зірки.

Будь-яка система координат, що рухається по відношенню до інерціальної нерухомої системи координат поступально, прямолінійно і рівномірно, також виявляється інерціальною.

12.1.2. Закони динаміки

В основі динаміки лежать три закони І.Ньютона, викладені в «Математических началах натуральной философии» (1687 р.). Закони Ньютона встановлені шляхом узагальнення і систематизації незлічених результатів досвідів і спостережень.

Перший закон динаміки (закон інерції Галілея). В якості першого закону динаміки в класичній механіці прийнято перший закон Ньютона. Він, в свою чергу, є узагальненням принципу інерції Галілея на базі понять абсолютно нерухомої системи координат і абсолютного часу.

Згідно з першим законом динаміки: ізолювана матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Властивість ізолюваної матеріальної точки зберігати стан рівномірного і прямолінійного руху при відсутності сил називається рухом за інерцією.

Закон інерції відображає одне з основних властивостей матерії – перебувати незмінно в русі.

Із закону інерції також виходить: якщо сила, що діє на точку, дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), то точка перебуває у стані спокою ($\vec{V} = 0$) або рухається з постійною за величиною і напрямом швидкістю ($\vec{V} = const$). Прискорення точки при цьому дорівнює нулю ($\vec{a} = 0$).

Другий закон динаміки (основний закон динаміки). Якщо рух точок ні є рівномірним і прямолінійним, то на точку діє сила. Закон встановлює, як змінюється швидкість точки при дії на неї сили. Ним визначається кількісний зв'язок між прикладеною силою та викликаємим прискоренням.

У теоретичній механіці другий закон динаміки сформульовано на базі другого закону Ньютона: сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке пропорційне величині сили і має однаковий з нею напрям.

Другий закон динаміки, як і перший, має місце лише по відношенню до інерціальної системи координат.

Математично цей закон виражається у вигляді наступного основного рівняння динаміки вільної матеріальної точки:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (12.1)$$

де m, \bar{a} – маса і прискорення точки; \bar{F} – сила, що діє на точку (сила \bar{F} у загальному випадку є рівнодійною активних сил і реакцій в'язей).

Рівняння (1.1) виражає кількісне співвідношення між трьома фізичними величинами: силою, масою і прискоренням. Відповідно, точки при дії однакових сил отримують однакові прискорення лише тоді, коли будуть рівними їх маси. При різних масах точка з більшою масою отримує менше прискорення. Тому маса матеріальної точки є мірою її інертних властивостей. Під *інертністю* розуміють властивості точки отримувати під дією сили більше прискорення при меншій масі.

Експериментально доведено, що поблизу земної поверхні маса тіл визначається виразом

$$m = \frac{P}{g}, \quad (12.2)$$

де P – сила ваги тіла; g – прискорення вільного падіння.

У міжнародній системі (СІ) за одиницю маси приймають 1 кг (один кілограм), за одиницю довжини, часу і сили, відповідно, 1 м (один метр), 1 с (одну секунду), 1 Н (один Ньютон). Тому, з урахуванням (1.1), один Ньютон – це сила, що надає масі в 1 кг прискорення 1 м/с²: 1 Н = 1 кг · 1 м/с².

Третій закон динаміки (закон рівності дії і протидії). У теоретичній механіці як третій закон динаміки застосовують третій закон Ньютона. Ним встановлюється характер механічної взаємодії між матеріальними тілами.

На відміну від перших двох, третій закон динаміки справедливий у будь-якій системі координат, а не тільки в інерціальній, бо він не містить кінематичних характеристик руху тіл.

Для двох матеріальних точок (рис. 12.1) він формулюється таким чином: сили взаємодії двох точок (дія і протидія) рівні за величиною, протилежно напрямлені і мають загальну лінію дії. Тут m_1, m_2 – маси точок, що взаємодіють;

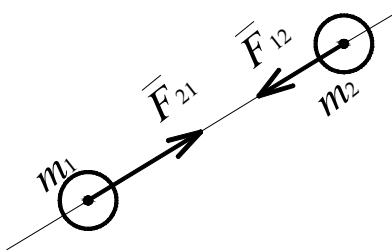


Рис. 12.1

\bar{F}_{12} – сила, що діє на тіло 2 з боку тіла 1, а \bar{F}_{21} – навпаки. Слід зазначити, що сила \bar{F}_{12} і \bar{F}_{21} , тобто ця взаємодія, не створює зрівноважену систему сил (двійку сил [22]), тому що прикладені до різних об'єктів.

Четвертий закон динаміки (закон незалежності дії сил або принцип суперпозиції). Якщо на точку діє водночас декілька сил $\bar{F}_k (k = 1, \dots, n)$, то вони

еквівалентні одній силі [22] – рівнодійної $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$.

Припустимо, що прикладені до точки сили діють незалежно одна від одної. Тоді, використовуючи основне рівняння динаміки точки (12.1), отримаємо

$$m\bar{a} = \bar{R},$$

де $\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k$ – прискорення точки; \bar{a}_k – прискорення, яке отримує точка при дії k -ї сили \bar{F}_k .

Згідно з четвертим законом динаміки: прискорення матеріальної точки, що виникає при дії на неї декількох сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, яких надають точці окремі сили.

12.2. Диференціальні рівняння динаміки точки

12.2.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної точки мають форму, що залежить від способу задання її руху. Тому розглянемо кожен з форм окремо.

Векторна форма

Положення точки M масою m в інерціальній системі координат $Oxyz$

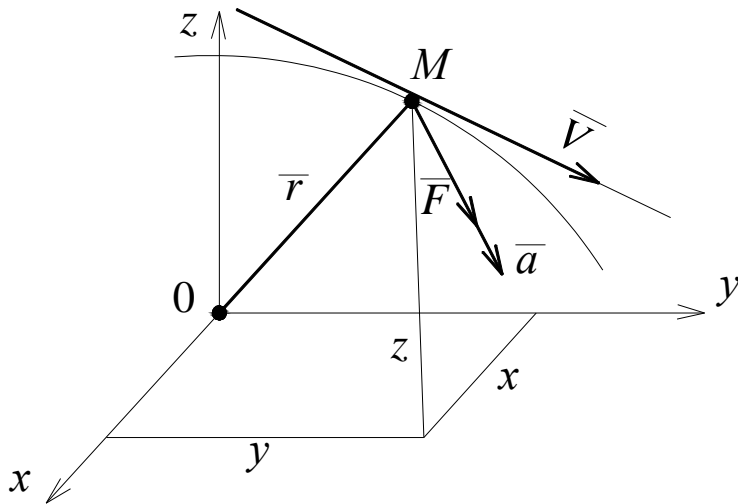


Рис. 12.2

визначимо радіусом-вектором \bar{r} (рис. 12.2). У загальному випадку сила $\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}})$, що діє на точку, може залежати від часу t , положення \bar{r} і швидкості $\bar{V} = \dot{\bar{r}}$. Тому рівняння (12.1) набере вигляду

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}). \quad (12.3)$$

Координатна форма

Якщо рух точки M задано в координатній формі (рис. 12.2) рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то, спроектувавши рівняння (12.3) на координатні осі, отримаємо

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (12.4)$$

При русі точки в площині, наприклад Oxy , одержимо $z = 0$, $F_z = 0$ і наступні два рівняння руху:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y.$$

У випадку руху точки вздовж прямої лінії, що співпадає з віссю, наприклад Ox , отримаємо одне диференціальне рівняння прямолінійного руху: $m\ddot{x} = F_x$.

Натуральна форма

Спроектуємо основне рівняння динаміки (12.1) на натуральні осі і врахувавши, що прискорення $a_\tau = \dot{V}$, $a_n = V^2 / \rho$, $a_b = 0$, одержуємо:

$$m\dot{V} = F_\tau, \quad mV^2 / \rho = F_n, \quad 0 = F_b, \quad (12.5)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії в точці M (рис. 2.2).

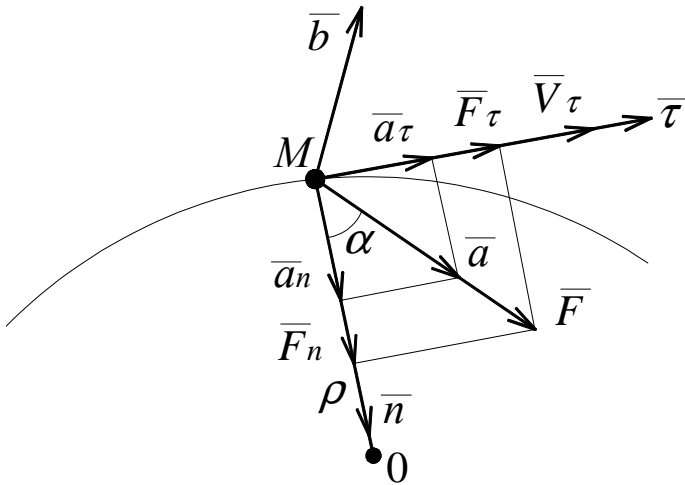


Рис. 12.3

Якщо траєкторія точки є плоскою, то отримаємо

$$m\dot{V}_\tau = F_\tau, \quad mV^2 / \rho = F_n.$$

Рівняння (12.5) називаються також диференціальними рівняннями руху точки у формі Ейлера [12].

12.2.2. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

При дослідженні руху матеріальної точки розглядаються і розв'язуються звичайно дві основні задачі динаміки.

Пряма (перша) задача динаміки: задано масу m і закон руху точки, треба визначити рівнодійну прикладених до точки сил.

Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), то враховуючи рівняння (12.4) проєкції рівнодійної визначаються за формулами

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Отже модуль (величина) і напрямні косинуси рівнодійної сили будуть наступні:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos(\widehat{\bar{F}}, \widehat{Ox}) = F_x / F; \quad \cos(\widehat{\bar{F}}, \widehat{Oy}) = F_y / F; \\ \cos(\widehat{\bar{F}}, \widehat{Oz}) = F_z / F.$$

Якщо рух матеріальної точки задано в натуральній формі, то за рівняннями (2.3) і рис. 2.2 отримаємо:

$$F_\tau = m\dot{V}_\tau = m\ddot{\sigma}; \quad F_n = mV^2 / \rho,$$

де σ – дугова координата точки.

Модуль сили і напрям визначимо (рис. 12.3) при цьому за формулами

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Друга (обернена) задача динаміки: задано масу m точки, прикладену до неї силу \bar{F} , а також початкове положення (x_0, y_0, z_0) точки та її початкова швидкість $(V_{0x} = \dot{x}_0, V_{0y} = \dot{y}_0, V_{0z} = \dot{z}_0)$, треба визначити рівняння руху точки.

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (12.3), (12.4) і (12.5).

В загальному випадку, якщо рух точки задано в координатній формі (12.4), друга задача динаміки призводить до необхідності розв'язання системи трьох взаємозалежних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Проінтегрувавши систему рівнянь (12.6), отримаємо розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, \dots, C_6), \\ y &= y(t, C_1, \dots, C_6), \\ z &= z(t, C_1, \dots, C_6), \end{aligned} \quad (12.7)$$

де C_{1-6} – сталі інтегрування.

Кількість сталих інтегрування в окремому розв'язку системи (12.7) визначається в кожному конкретному випадку ступенем взаємозв'язності рівнянь початкової системи (12.6). Ця кількість може змінюватися від двох до шести.

Сталі інтегрування у розв'язку (12.7) визначаються завданням початкових умов руху точки, тобто значень координат точки і проекцій її швидкості в початковий момент часу $t = t_0$ (звичайно приймають $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (12.8)$$

За для використання початкової швидкості точки при визначенні сталих інтегрування продиференціюємо за часом рівняння руху (12.4):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{12.9}$$

Якщо тепер в (12.7) і (12.9) підставимо початкові умови руху точки (12.8), то одержимо систему шести алгебраїчних рівнянь з шістьма невідомими сталими інтегрування:

$$\begin{aligned}x_0 &= x(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{x}_0 &= \dot{x}(t_0, C_1, \dots, C_6); \\ y_0 &= y(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{y}_0 &= \dot{y}(t_0, C_1, \dots, C_6); \\ z_0 &= z(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{z}_0 &= \dot{z}(t_0, C_1, \dots, C_6).\end{aligned}\tag{12.10}$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно сталих C_i ($i = 1, \dots, 6$), знайдемо

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (12.7), одержимо закон руху точки, що відповідає заданим початковим умовам (12.9):

$$\begin{aligned}x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).\end{aligned}$$

Розглядаючи рух точки в натуральній формі для розв'язання другої задачі динаміки застосовують рівняння (12.5). Початковими умовами руху в цьому разі є значення дугової координати $\sigma(t_0) = \sigma_0$ і початкової швидкості $V_\tau(t_0) = \dot{\sigma}_0$ при $t = t_0$. Розв'язок першого з рівнянь (12.5) стосовно дугової координати матиме вигляд

$$\sigma = \sigma(t, C_1, C_2).\tag{12.11}$$

Постійні інтегрування знаходимо з рівнянь

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sigma(t_0, C_1, C_2), \\ \dot{\sigma}_0 &= \dot{\sigma}(t_0, C_1, C_2).\end{aligned}\tag{12.12}$$

Розв'язок алгебраїчних рівнянь (12.12) надає сталі інтегрування

$$C_i = C_i(t_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0) \quad (i=1,2), \quad (12.13)$$

що залежать від заданих початкових умов σ_0 і $\dot{\sigma}_0$.

Підставивши співвідношення (12.13) у вираз (12.11) одержимо закон зміни дугової координати за часом:

$$\sigma = \sigma(t_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0).$$

Далі визначають звичайно радіус кривини ρ траєкторії рухомої точки з другого рівняння (12.5), приймаючи

$$V_\tau = \dot{\sigma}(t, \sigma_0, \dot{\sigma}_0).$$

Отже, узагальнена методика розв'язання другої задачі динаміки матеріальної точки включає наступні етапи:

- 1) складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовою задачі;
- 2) інтегрування одержаних рівнянь;
- 3) визначення відповідних значень сталих інтегрування;
- 4) знаходження закону руху точки, а також інших шуканих в задачі величин.

12.2.3. Диференціальні рівняння руху невольної матеріальної точки

Рух точки, на який накладено певні обмеження з боку накладених в'язей, є невольним [22]. Отже будемо називати матеріальну точку невольною, а її рух – невольним рухом, якщо внаслідок тих чи інших обмежень вона виконує рух в строго фіксованій частині простору: по строго фіксованій лінії, площині, або поверхні.

При вивченні невольного руху точки застосовують звичайно теорему при звільненні від в'язей [22], замінюючи їх дію реакціями в'язей. У такому випадку точку можна вважати вільною, але такою, на яку діють не тільки активні сили \bar{F} , а також і реакції в'язей \bar{R} .

В даному випадку основне рівняння динаміки (12.1) у векторній формі можна записати у вигляді

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}. \quad (12.14)$$

Векторному рівнянню (12.14) при координатній формі завдання руху точки відповідають, враховуючи (12.14), рівняння

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (12.15)$$

Особливістю цих рівнянь є те, що в них реакції в'язей R_x, R_y, R_z є невідомими функціями часу. Тому розв'язати їх неможливо. В даному разі треба скласти ще три додаткових рівняння, які враховували б властивості в'язей, та їх відповідні реакції. Тому розглянемо особливості розв'язання задач динаміки невіЛЬНОї точки, коли, наприклад, вона рухається по ідеальній гладкій нерухомій поверхні, по ідеально гладкій нерухомій кривій.

Рух невіЛЬНОї точки по ідеально гладкій нерухомій поверхні

Для вивчення руху матеріальної точки M по ідеально гладкій нерухомій поверхні під дією сили \bar{F} застосуємо наступне положення статки [22]: реакція \bar{R} абсолютно гладенької поверхні S спрямована завжди (рис. 12.4) перпендикулярно до поверхні у точці стику.

У випадку координатного способу задання руху точки M використовуємо рівняння (12.4):

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (12.16)$$

Тут координати точки $M(x, y, z)$ повинні задовольняти рівнянню поверхні S :

$$f(x, y, z) = 0. \quad (12.17)$$

Додатково використаємо властивості в'язі точки – її ідеальність [12]:

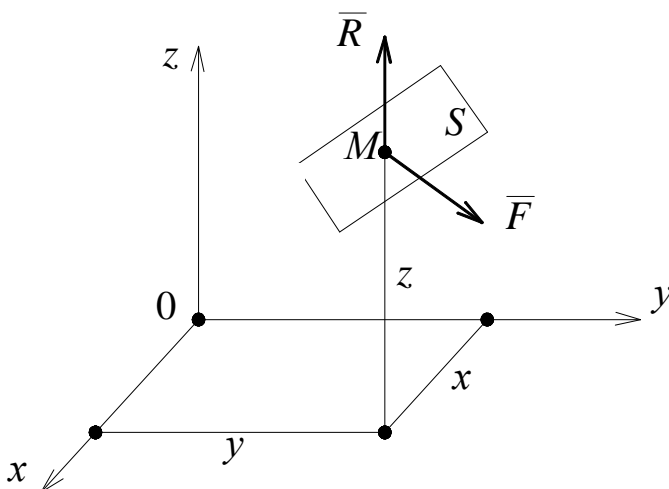


Рис. 12.4

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (12.18)$$

де λ – коефіцієнт, що відповідає умовам колінеарності векторів \bar{R} та $\overline{\text{grad}f}$.

З урахуванням (12.18) рівняння (12.16) набуває вигляду

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (12.19)$$

Приєднуючи до цих рівнянь рівняння в'язі (12.17), отримаємо систему з чотирма невідомими: x, y, z і λ .

Рівняння (12.19), з урахуванням (12.17), називаються рівняннями Лагранжа першого роду.

Після знаходження невідомих x, y, z, λ , а також за формулами (12.18) проєкцій реакції в'язі, визначають її модуль

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Рух невільної точки по ідеально гладкій нерухомій кривій

Врахуємо, що криволінійна траєкторія точки M утворюється внаслідок перетину двох поверхонь (рис. 12.5):

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0. \quad (12.20)$$

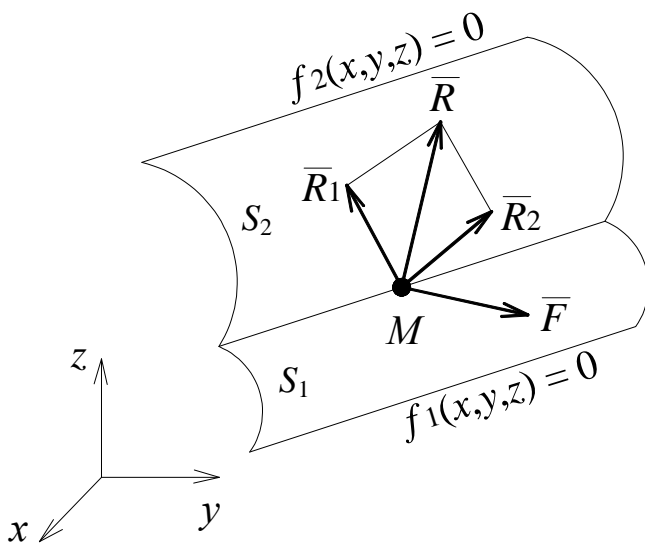


Рис. 12.5

У цьому випадку в рівняннях (12.16) реакцію \bar{R} слід розглядати як суму реакцій:

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2, \quad (12.21)$$

де \bar{R}_1, \bar{R}_2 – реакції поверхонь S_1 і S_2 .

Тому диференційні рівняння точки M матимуть вигляд

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_{1x} + R_{2x}; \\ m\ddot{y} &= F_y + R_{1y} + R_{2y}; \\ m\ddot{z} &= F_z + R_{1z} + R_{2z}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Приєднаємо до рівнянь (12.22) два рівняння в'язей (поверхонь) та умови ідеальності в'язей (колінеарності векторів \bar{R}_1 і $\overline{grad}f_1$ [12]) отримаємо дев'ять рівнянь з дев'ятьма невідомими. З цих рівнянь виключимо проекції в'язей, використавши доданки Лагранжа λ_1 та λ_2 :

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}; & F_{1y} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}; & F_{1z} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}; \\ F_{2x} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; & F_{2y} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; & F_{2z} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}$$

У результаті рівняння (21) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; & m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Система рівнянь (12.23) разом з рівняннями в'язей (12.20) утворює систему п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$.

12.2.4. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

У класичній механіці диференціальні рівняння (12.3), (12.4), (12.5) і (12.14) описують абсолютний рух вільної або невільної матеріальної точки незмінної маси в інерціальній нерухомій системі координат. Але на практиці часто виникає необхідність дослідити рух матеріальної точки відносно довільної неінерціальної системи координат, тобто визначення диференціальних рівнянь відносного руху точки в системі координат, що зв'язана з тілом, котре виконує в загальному випадку складний рух.

Тому представимо абсолютний рух точки сукупністю відносного та переносного рухів. При цьому, відповідно до теореми про додавання прискорень (теореми Коріоліса), абсолютне прискорення точки \bar{a}_a дорівнює векторній сумі відносного \bar{a}_r , переносного \bar{a}_e прискорень та прискорення Коріоліса \bar{a}_c [22]:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (12.24)$$

Уявимо далі інерційну систему координат $Oxyz$ (рис. 12.6), яку вважатиме нерухомою. Відносно неї рухається система координат $O_1x_1y_1z_1$, зв'язана з деяким несучим тілом. Розглянемо рух матеріальної точки M масою m , на яку діють активна сила \bar{F} і реакція в'язі \bar{R} з боку несучого тіла. Рух цієї точки відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ є абсолютним, а відносно рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ – відносним. Характер переносного руху точки встановлюється при цьому рухом рухомої системи координат відносно нерухомої.

Підставимо далі (12.24) в диференціальне рівняння руху (12.14) невільної матеріальної точки:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c) = \bar{F} + \bar{R},$$

звідки одержимо

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c, \quad (12.25)$$

де $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_c$, $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ – відповідно переносна і коріолісова сила інерції.

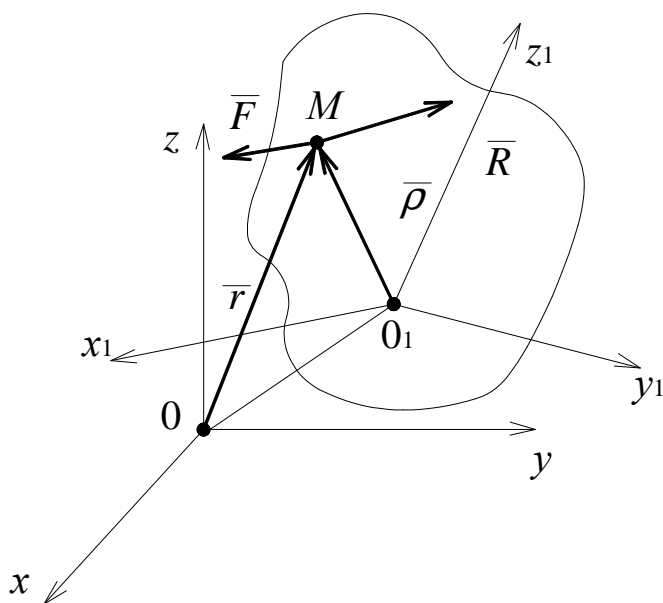


Рис. 12.6

Рівняння (12.25) називається *основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки*. На відміну від звичайних сил (наприклад, сили ваги) переносна $\bar{\Phi}_e$ і коріолісова $\bar{\Phi}_c$ сили інерції залежать від вибору неінерціальної

системи координат $O_1x_1y_1z_1$, її розташування на несучому тілі. Їх прикладають до точки фіктивно, виключно за для моделювання рівняння (12.25) у формі другого закону Ньютона.

Розглянемо окремі випадки відносного руху точки.

Якщо матеріальна точка відносно рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ рухається рівномірно та прямолінійно, то відносна швидкість $\bar{V}_r = const$, а відносне прискорення $\bar{a}_r = 0$. Тому за (12.25) матиме

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c = 0.$$

Якщо матеріальна точка перебуває у стані спокою відносно рухомої системи координат, то її відносні швидкості і прискорення та коріолісове прискорення дорівнюють нулю. Отже дістанемо рівність

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0,$$

що виражає умову відносної рівноваги матеріальної точки.

Якщо рухома система координат здійснює відносно інерціальної системи координат поступальний, рівномірний і прямолінійний рух, то у цьому разі переносна та коріолісова сили інерції дорівнюють нулю. Тоді основне рівняння динаміки відносно руху набере вигляду

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R}. \quad (12.26)$$

Це рівняння за формою збігається з рівнянням (12.14) для невіЛЬНОї точки, Тобто прискорення точки відносно рухомої і інерційної систем ткоординат співпадають. Отже другий закон Ньютона справедливий у даному випадку і для відносного руху матеріальної точки. Тому рухома система координат $O_1x_1y_1z_1$, що рухається поступально, рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної нерухомої системи координат $Oxyz$ є також інерціальною. Ця особливість виражає принцип відносності класичної механіки, який стверджує: за однакових початкових умов механічні явища в різних інерціальних системах координат відбуваються однаково.

Приклад 12.1. Важка точка M піднімається по шорсткій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. У початковий момент швидкість точки

дорівнювала 15 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$. Який шлях пройде точка до зупинки? За який час точка пройде цей шлях?

Розв'язання

Нарисуємо ділянку руху AB і зобразимо матеріальну точку M в довільному положенні (рис. 12.7).

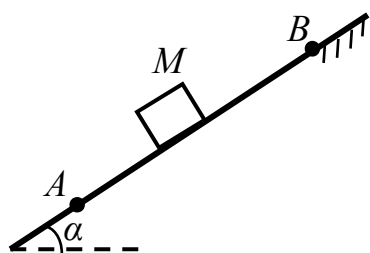


Рис. 12.7

Виберемо систему координат Ax , помістивши її початок у початковій точці A ділянки AB і спрямував вісь Ax уздовж прямої AB у бік руху (рис. 12.8). При такому виборі системи координат початкові умови будуть наступними:

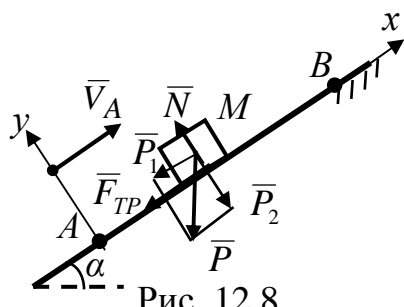


Рис. 12.8

$$x_0 = 0,$$

$$V_{0x} = V_{Ax} = V_A.$$

У кінцевій точці B ділянки:

$$x_B = AB, \quad V_{Bx} = V_B = 0,$$

де $V_B = 0$, тому що точка M за умовою задачі зупиняється в кінцевій точці B ділянки.

Покажемо швидкість \bar{V}_A на схемі руху. Швидкість $V_B = 0$, тому на схемі руху її не показано.

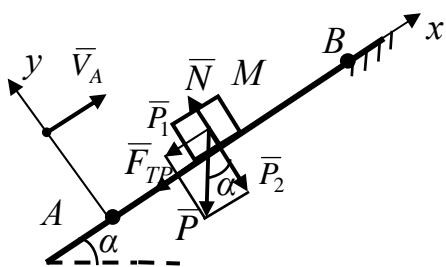


Рис. 12.9

Покажемо сили і реакції в'язей (рис. 12.9). На точку M будуть діяти: сила ваги \bar{P} , яку розкладемо на координатні складові \bar{P}_1 ($P_1 = P \cdot \sin \alpha$) і \bar{P}_2 ($P_2 = P \cdot \cos \alpha$), нормальна реакція поверхні \bar{N} ; сила тертя ковзання \bar{F}_{TP} ($F_{TP} = fN$) спрямована у бік, протилежний руху точки.

Складемо диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P_1 - F_{TP}; \\ 0 = N - P_2 \Rightarrow N = P_2 = P \cos \alpha. \end{cases} \quad (12.27)$$

Спочатку виразимо силу ваги $P = mg$ через масу точки m і прискорення вільного падіння g , а силу тертя визначимо, скориставшись другим рівнянням системи (12.27):

$$F_{TP} = fN = fP \cos \alpha = fmg \cos \alpha.$$

Тоді перше рівняння (12.27) набуде вигляду

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

Скоротимо обидві частини рівняння на m :

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Для інтегрування отриманого диференціального рівняння замінімо \ddot{x} на $\frac{d\dot{x}}{dt}$ і розділимо змінні:

$$d\dot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot dt.$$

Візьмемо невизначені інтеграли від обох частин рівняння:

$$\int d\dot{x} = \int -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot dt.$$

Вираз $-g(\sin \alpha + f \cos \alpha) = const$, тому його можна винести з-під знака інтеграла. У результаті одержимо

$$\dot{x} = V_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1, \quad (12.28)$$

де C_1 - постійна інтегрування.

Представивши $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ і зробивши аналогічні дії, одержимо

$$x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad (12.29)$$

де C_2 - постійна інтегрування.

Підставимо початкові умови ($V_{ox} = V_A$, $x_0 = 0$) у вирази (12.28) і (12.29):

$$\begin{cases} V_A = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 \\ 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2. \end{cases} \quad (12.30)$$

Розв'язавши рівняння (12.30), визначимо постійні інтегрування:

$$C_1 = V_A; \quad (12.31)$$

$$C_2 = 0.$$

Підставивши (12.31) у (12.28) і (12.29), одержимо:

$$\dot{x} = V_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot t + V_A; \quad (12.32)$$

$$x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + V_A t.$$

Підставимо далі умови в кінцевій точці B ділянки ($V_B = 0$, $x_B = AB$) у вираз (2.30):

$$\begin{cases} 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \tau + V_A \\ AB = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau. \end{cases} \quad (12.33)$$

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (12.33), визначимо шукані величини τ й AB .

З першого рівняння (12.33)

$$\tau = \frac{V_A}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{15}{10 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,87)} = \frac{15}{5,87} = 2,5 \text{ (с)}.$$

З другого рівняння (12.32):

$$\begin{aligned} AB &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau = -5,87 \cdot \frac{15^2}{2 \cdot 5,87^2} + 15 \cdot \frac{15}{5,87} = \\ &= \frac{15^2}{5,87} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{15^2}{5,87 \cdot 2} = \frac{225}{11,74} = 20 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Відповідь: Точка до зупинки пройде шлях $AB = 20$ м за час $\tau = 2,5$ с.

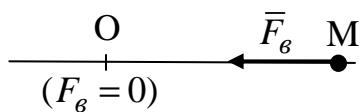
12.3. Прямолінійні коливання матеріальної точки

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються *механічними коливаннями*. При цьому на матеріальну точку можуть діяти відновлююча сила (сила, що залежить від положення точки і намагається повернути точку в положення рівноваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, та збурююча сила, задана функцією часу. Розглянемо один з простіших випадків руху – прямолінійні коливання матеріальної точки.

Залежно від комбінації цих сил в лінійних системах розрізняють такі види коливального руху: вільні незатухаючі, затухаючі і вимушені.

12.3.1. Вільні незатухаючі коливання

Існує клас сил, що називаються *відновлюючими*, модулі яких в лінійних задачах є пропорційними відхиленню точки від положення, де ці сили дорівнюють нулю, і напрямленими до цього положення:


$$F_g = c \cdot MO, \quad (12.34)$$

де c – коефіцієнт пропорційності.

Як буде показано в подальшому, відновлюючі сили надають руху точки коливальний характер. Коливання, які відбуваються під дією тільки відновлюючої сили, називаються *вільними незатухаючими*.

Фізична природа відновлюючих сил може бути різною. Це може бути пружна сила пружини, сила Архімеда у випадку тіла, що плаває на поверхні рідини та ін. У подальшому як відновлюючу будемо розглядувати силу пружності пружини, за допомогою якої, до речі, моделюються пружні властивості реальних тіл. У лінійних задачах сила пружності відповідає закону Гука:

$$F_{np} = c \cdot \lambda, \quad (12.35)$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини, що показує, яку силу треба прикласти до кінця пружини для її деформації на одиницю довжини; λ - деформація

пружини (різниця між довжиною пружини у даному стані (розтягнутому або стиснутому) і недеформованому).

Розглянемо вертикальні коливання вантажу маси m , що підвішений до пружини жорсткості c і здійснює поступальний рух. В такому випадку вантаж можна вважати матеріальною точкою маси m . Визначимо рівняння руху точки.

Для цього зобразимо точку на розрахунковій схемі у довільному положенні (рис. 12.10). Тут \bar{P} – сила ваги ($P = m \cdot g$); \bar{F}_{np} – сила пружності.

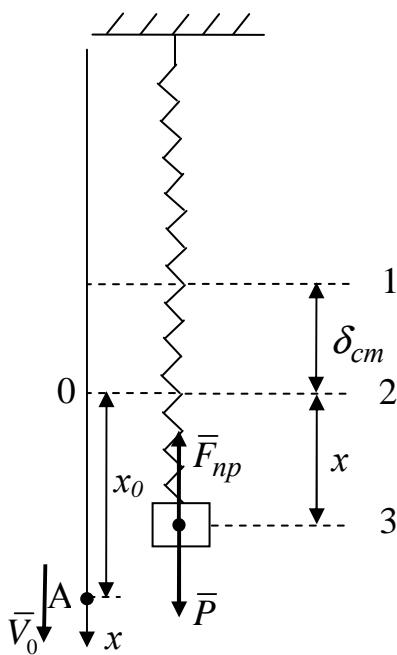


Рис. 12.10

Послідовно відмітимо на схемі три характерних рівня:

Рівень 1 – відповідає вільному кінцю недеформованої пружини (в цьому положенні $F_{np} = 0$);

Рівень 2 – положення статичної рівноваги точки, рух якої досліджується (це положення буде нижчим за рівень 1, оскільки при приєднанні вантажу до кінця недеформованої пружини остання буде розтягнутою під дією сили ваги \bar{P} точки). Відстань між рівнями 1 (недеформованої пружини) і 2 (статичної рівно-

ваги точки) називається *статичною деформацією пружини* і позначається δ_{cm} .

У положенні рівноваги точки $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$, або $P - F_{np} = 0$. Остання рівність,

враховуючи формулу (12.35), де деформація пружини $\lambda = \delta_{cm}$ набуде вигляду

$$P - c \cdot \delta_{cm} = 0. \quad (12.36)$$

Рівень 3 – довільне положення точки під час коливань (звичайно рівень 3 зображують так, щоб рівні 1, 2, 3 йшли на схемі послідовно).

Початок системи координат вибираємо в положенні рівноваги точки (рівень 2), а вісь x направляємо у бік зростання цифр 1, 2, 3 на схемі

(рис. 12.10). В такому разі довільне положення буде знаходитись в області додатних значень координати x .

Складемо диференціальне рівняння руху точки. Для цього спроектуємо основне рівняння динаміки

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

на вісь x :

$$m\ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{ct} + x),$$

де $\lambda = \delta_{ct} + x$ - повна деформація пружини у довільному положенні. З урахуванням рівності (12.26) права частина останнього рівняння спроститься:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (12.37)$$

Після перетворень *диференціальне рівняння вільних коливань* матеріальної точки набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12.38)$$

де $\omega_0 = \sqrt{c/m}$.

Таким чином, рух матеріальної точки під дією тільки відновлюючої сили описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння (12.38). Оскільки корені характеристичного рівняння $z^2 + \omega_0^2 = 0$, що відповідає рівнянню (12.38), є уявними ($z_{1,2} = \pm i\omega_0$, де $i = \sqrt{-1}$), то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (12.38) буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \quad (12.39)$$

де C_1, C_2 - сталі інтегрування.

Отримаємо далі похідну за часом від координати x :

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (12.40)$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначимо, склавши початкові умови. Припустимо, що матеріальна точка почала рухатись, маючи додатні значення початкової координати (точка А на рис. 12.10) і проекції швидкості:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0. \quad (12.41)$$

Підставляючи умови (12.41) у вирази функцій координати (12.39) і швидкості (12.40) точки, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}$.

Після підставки сталих інтегрування вираз (12.39), набуде вигляду

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (12.42)$$

Рівняння (12.42) називається *рівнянням вільних незатухаючих коливань* матеріальної точки.

Проаналізуємо їх властивості.

Для зручності аналізу перетворимо рівняння (12.39) (або (12.42)), вводячи позначки $C_1 = A \cdot \sin \varphi_0$, $C_2 = A \cdot \cos \varphi_0$, у форму

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.43)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ (або з урахуванням початкових умов $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}}$,

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0}{V_0}).$$

У законі коливань точки (12.43) параметр A є *амплітудою коливань* (найбільше відхилення точки від положення рівноваги), аргумент $\omega_0 t + \varphi_0$ називається *фазою коливань*, а величина φ_0 – *початковою фазою*. Параметр ω_0 має назву *колової частоти коливань* (або *власної частоти*). Колова частота визначає число коливань за проміжок часу 2π секунд і вимірюється у *рад/с* (або *1/с*). Слід зазначити, що в технічній літературі використовується і звичайна частота f , яка визначає число коливань за 1 секунду, вимірюється в *Гц* (Герц) і зв'язана з коловою частотою співвідношенням $\omega_0 = 2\pi f$.

Побудуємо графік вільних коливань (функції (12.43)).

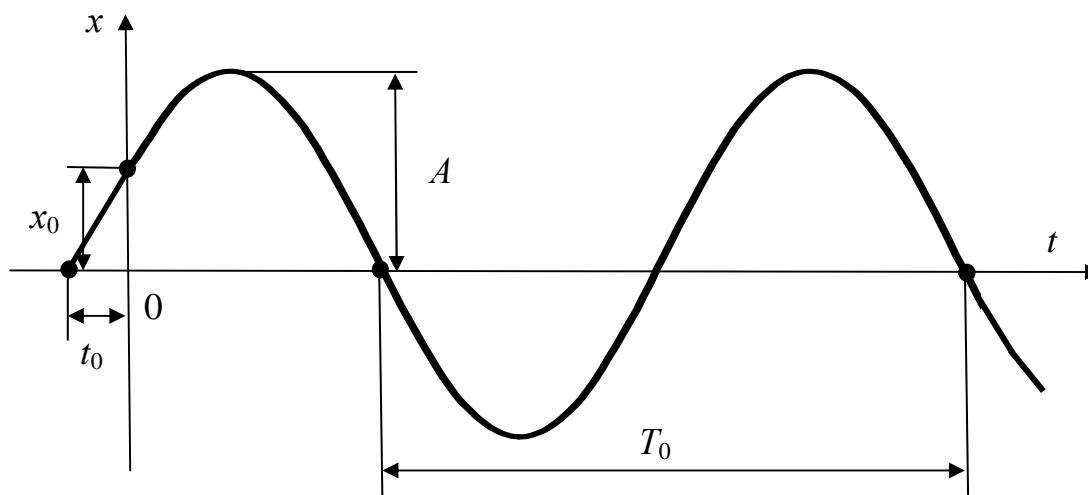


Рис. 12.11

На рис. 12.11 маємо: x_0 - початкове відхилення точки від положення її рівноваги; A - амплітуда коливань; t_0 - інтервал часу, $t_0 = \varphi_0 / \omega_0$; T_0 - період коливань (проміжок часу, протягом якого відбувається повне коливання).

Залежність між періодом і коловою частотою визначається з умови періодичності руху і має вигляд

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f}. \quad (12.44)$$

Вільні коливання мають наступні властивості:

1. Згідно з формулою (12.43) вільні коливання є незатухаючими *гармонійними*, бо здійснюються за законом синуса з власною частотою ω_0 . Це обумовлено дією на точку лише консервативної сили \bar{F}_{np} пружини. Тому розглянута на рис. 12.10 механічна система називається *консервативною*.

2. Як видно з формул (12.37) і (12.44), власна частота ω_0 і період T_0 від початкових умов не залежать, а визначаються тільки параметрами системи (жорсткістю c і масою m). Така властивість механічної системи має назву *ізохронності* коливань.

3. Амплітуда A і початкова фаза φ_0 , як витікає зі співвідношень (12.43), залежать від початкових умов. При $x_0 = 0$; $V_0 = 0$ коливання не виникають.

На практиці в реальних вузлах, агрегатах машин пружини (амортизатори), які з'єднують вантаж з основою, можуть утворювати систему паралельно, послідовно і паралельно-послідовно (змішано) з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку початкові механічні схеми системи необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість c_e . Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при паралельному з'єднанні пружних елементів (рис. 12.12,а) буде мати жорсткість $c_e = c_1 + c_2$ (рис. 12.12,б). При послідовному з'єднанні пружних елементів (рис. 12.13) еквівалентна жорсткість $c_e = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2)$. При змішаному з'єднанні елементів (рис. 12.14) отримаємо $c_e = (c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3) / (c_1 + c_2 + c_3)$ (рис. 12.14).

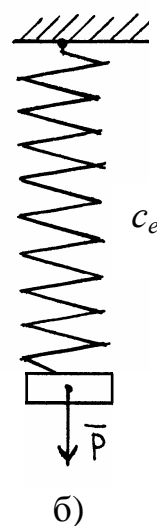
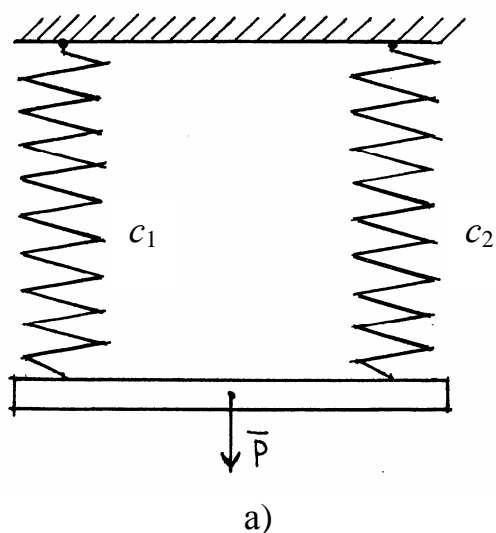


Рис. 12.12

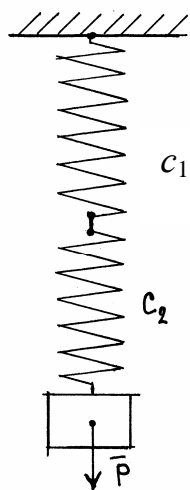


Рис. 12.13

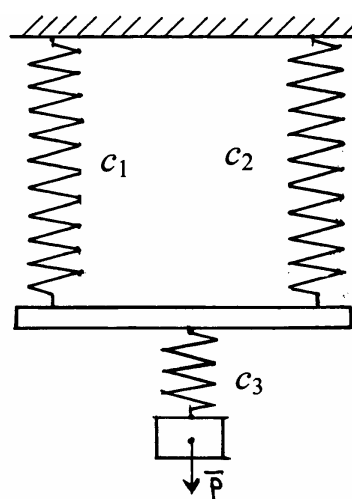


Рис. 12.14

12.3.2. Вільні коливання при наявності сил опору (затухаючі коливання)

У випадку з'єднання вантажу з основою за допомогою металевих амортизаторів, а також при русі в середовищі (рідині) на матеріальну точку діє сила опору, яку при малих швидкостях руху вважають прямо пропорційною швидкості точки і напрямленою в бік, протилежний швидкості: $\bar{R} = -b\bar{V}$, де b - коефіцієнт опору середовища, його розмірність Н·с/м або кг/с. Коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору (в'язкого тертя), називаються *затухаючими*, а механічна схема називається дисипативною.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як і на рис. 12.10, тільки додається сила опору \bar{R} (при зображенні сили опору вважаємо, що точка рухається в бік додатного напрямку осі x) (рис. 12.15). Умовні позначення на рис. 12.10 і 12.15 співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки матиме вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R}$$

або

$$m\ddot{x} = P - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x},$$

або, враховуючи (12.36),

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Розділимо всі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad (12.45)$$

де h - коефіцієнт демпфірування коливань, його розмірність c^{-1} .

Тоді диференціальне рівняння вільних коливань при наявності сил опору буде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (12.46)$$

Характеристичне рівняння для (12.46) має

вигляд

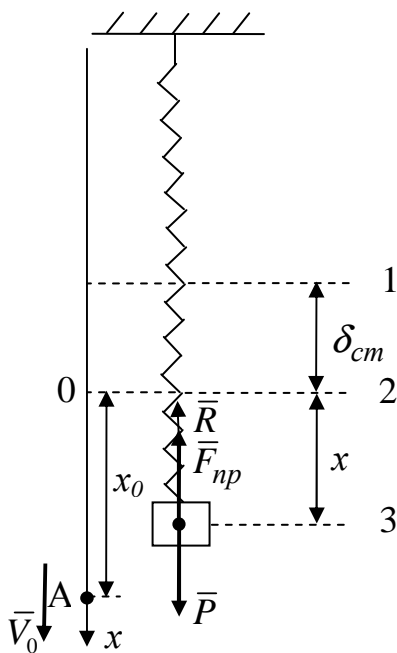


Рис. 12.15

$$z^2 + 2hz + \omega_0^2 = 0,$$

а його корені дорівнюють

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (12.47)$$

Із (12.47) видно, що характер руху точки істотним чином залежить від співвідношення h і ω_0 : якщо $h \geq \omega_0$, то корені характеристичного рівняння дійсні, якщо $h < \omega_0$ - то комплексні. Розглянемо ці випадки.

При $h > \omega_0$ (випадок великого опору) загальний розв'язок диференціального рівняння (12.46) матиме вид

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (12.48)$$

Це рівняння описує *аперіодичний (не коливальний) затухаючий рух*. Координата x точки при $t \rightarrow \infty$ монотонно зменшується по експоненті (оскільки корені p_1 і p_2 від'ємні), і точка наближається до положення статичної рівноваги. Графіки функції (12.48) при різних початкових умовах (криві 1, 2, 3 при $V_0 > 0$; $V_0 \leq 0$ і $|V_0| < |p_2| x_0$; і $V_0 > 0$ і $|V_0| > |p_2| x_0$ відповідно) наведені на рис. 12.16.

Якщо $h = \omega_0$ (граничний випадок), то загальний розв'язок диференціального рівняння (12.46) матиме вид

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t), \quad (12.49)$$

де $C_1 = x_0$; $C_2 = \dot{x}_0 + h \cdot x_0$.

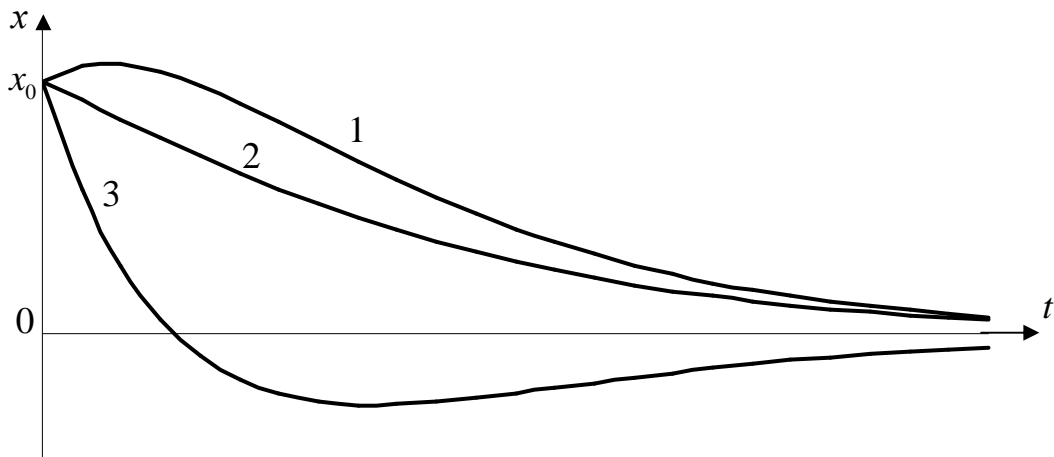


Рис. 12.16

Такий рух також є *аперіодичним згасаючим* ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

При $h < \omega_0$ (випадок *малого опору*) загальний розв'язок диференціального рівняння (12.46) матиме вид

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t), \quad (12.50)$$

де C_1, C_2 - сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов ($C_1 = x_0; C_2 = (V_0 + hx_0) / \omega_0^*$), а величина

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \quad (12.51)$$

Рівняння (12.50) називається рівнянням *згасаючих коливань* матеріальної точки. Для зручності графічного аналізу перетворимо рівняння (12.51), аналогічно (12.43), у форму

$$x = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(\omega_0^* t + \varphi_0), \quad (12.52)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ (або з урахуванням початкових умов

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + hx_0)^2}{\omega_0^{*2}}}, \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0^*}{V_0 + hx_0}.$$

З рівняння (12.52) видно, що рух точки має *згасаючий коливальний характер* (оскільки $e^{-ht} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$), а величина ω_0^* є *коловою частотою згасаючих коливань*. Графік функції (12.52) наведений на рис. 12.17.

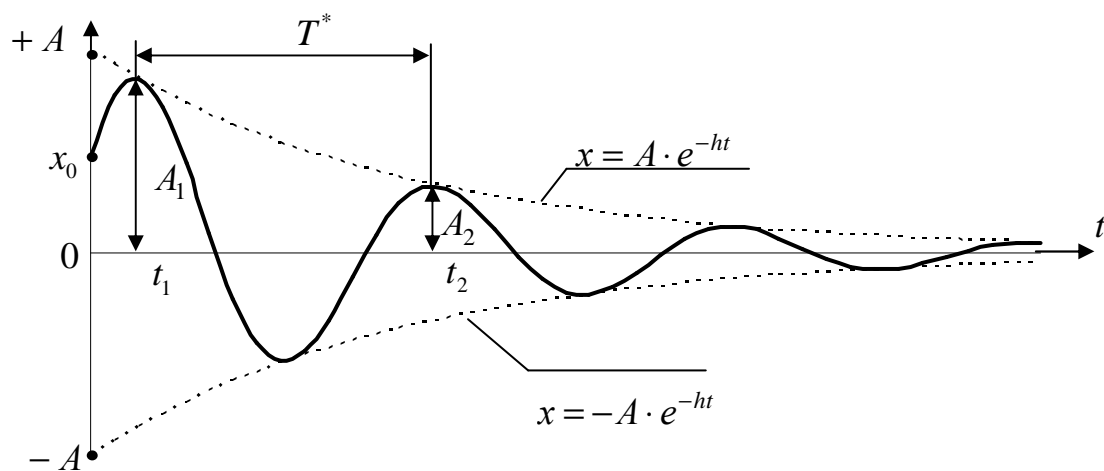


Рис. 12.17

На рис. 12.17 $x_0 = A \cdot \sin \varphi_0$, а криві $x = A \cdot e^{-ht}$ і $x = -A \cdot e^{-ht}$ є границями області, усередині якої розташовується графік руху. Рух точки є коливальним, але не періодичним, оскільки з часом послідовні максимальні відхилення точки від положення рівноваги A_1, A_2, \dots зменшуються. Проте проміжок часу T^* між цими відхиленнями є величиною сталою і дорівнює

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (12.53)$$

Величину T^* умовно називають *періодом затухаючих коливань*. Зрівнюючи формули (12.44) і (12.53), можна зробити висновок, що період затухаючих коливань більший за період відповідних вільних незатухаючих коливань точки, тобто завжди $T^* > T$.

Розглянемо відношення послідовних максимальних відхилень точки від положення рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{\cancel{A} \cdot e^{-ht_2} \cdot \sin(\omega_0^* t_2 + \varphi_0)}{\cancel{A} \cdot e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-h(t_1+T^*)} \cdot \sin(\omega_0^* (t_1 + T^*) + \varphi_0)}{e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \\ &= \frac{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot e^{-hT^*} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + 2\pi + \varphi_0)}{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-hT^*} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)}}{e^{-ht_1} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)}} = e^{-hT^*}. \end{aligned}$$

Таким чином, відношення послідовних амплітуд затухаючих коливань стало і дорівнює

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = e^{-hT^*}. \quad (12.54)$$

Величина η (знаменник геометричної прогресії, за якою спадають амплітуди затухаючих коливань) називається *декрементом затухаючих коливань*, а модуль натурального логарифма цієї величини

$$\Lambda = |\ln \eta| = hT^* \quad (12.55)$$

називається *логарифмічним декрементом затухаючих коливань*. Поняття про декремент затухаючих коливань використовують при експериментальному визначенні коефіцієнта опору середовища.

12.3.3. Вимушені коливання

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім відновлюючої сили, діє збурювання, яке змінюється за часом, або якщо відбувається переміщення точки прикріплення до основи пружини чи пружного тіла.

12.3.3.1. Силове збудження коливань

В даному випадку коливання виникають у разі безпосередньої дії на точку збурюючої сили. Ця сила може бути довільною функцією часу, проте розглянемо простіший, але практично важливий випадок, коли сила змінюється за гармонійним законом

$$Q = H_B \cdot \sin \omega_B t, \quad (12.56)$$

де H_B , ω_B – амплітуда і колова частка збурюючої сили.

Випадок консервативної системи

Механічна система, яка моделює такий випадок коливань зображена на рис. 12.18. Умовні позначення на рис. 12.10 и 12.18 співпадають, однак тут до матеріальної точки окрім сил ваги \bar{P} і пружності \bar{F}_{np} прикладена збурююча сила \bar{Q} .

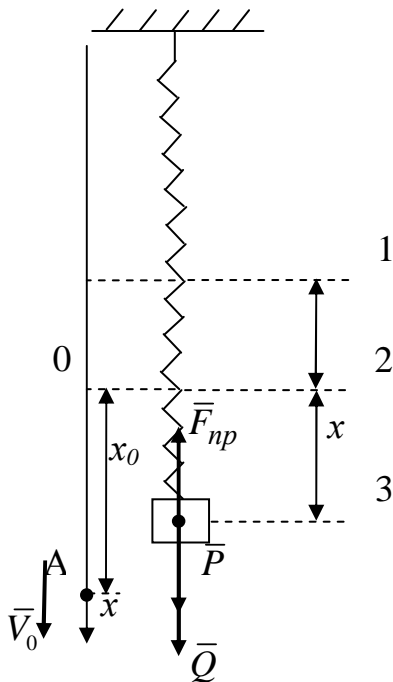


Рис. 12.18

Отже рівняння динаміки точки матиме вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_y + \bar{Q}$$

$$\text{або } m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) + H_B \sin \omega_B t,$$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + cx = H_B \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{H_B}{m}. \quad (12.57)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуває вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (12.58)$$

Рівняння (12.58) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (12.58) подамо у вигляді

$$x = x_1 + x_2, \quad (12.59)$$

де x_1 - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; x_2 - частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид (12.39):

$$x_1 = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t. \quad (12.60)$$

При визначенні частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_B \neq \omega_0; \quad \omega_B \approx \omega_0; \quad \omega_B = \omega_0.$$

У випадку $\omega_B \neq \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота механічної системи різні) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot \sin \omega_B t. \quad (12.61)$$

Підставляючи (12.59) у (12.56), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$-\omega_B^2 A_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_0^2 A_B \cdot \sin \omega_B t = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Це рівняння виконується для будь якого t , якщо

$$A_B = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2}. \quad (12.62)$$

Підставляючи (12.60) у (12.59), а (12.59) і (12.587) у (12.57), отримаємо загальний розв'язок рівняння (12.56):

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (12.63)$$

Визначимо сталі інтегрування C_1, C_2 , які входять у формулу (12.63), за допомогою початкових умов (12.41). Для цього продиференціюємо за часом формулу (12.61):

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.64)$$

Підставляючи початкові умови (12.41) у вирази (12.63) і (12.64), отримаємо

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

З останніх рівнянь сталі інтегрування будуть:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right).$$

Підставляючи знайдені сталі інтегрування у вираз (12.63), отримаємо

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (12.65)$$

Рівняння (12.65) називається *рівнянням вимушених коливань* матеріальної точки без урахування сил опору або *рівнянням вимушених коливань консервативної системи*.

Проаналізуємо *властивості вимушених коливань*:

- вимушені коливання є *бігармонійними* (типовий графік коливань наведено на рис. 12.19), тобто складаються з вільних коливань з частотою ω_0 (описуються першими двома доданками рівняння (12.65)) і чисто вимушених коливань з частотою збуджуючої сили ω_B (останній доданок рівняння (12.65));

- особливим є те, що при наявності збуджуючої сили вільні коливання збуджуються і при нульових умовах (коли $x_0 = 0, V_0 = 0$);

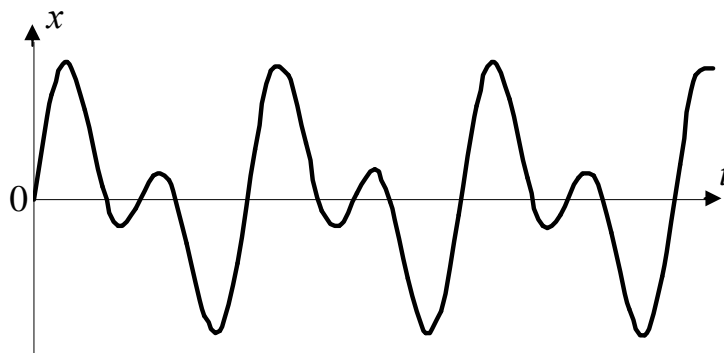


Рис. 12.19

- амплітуда чисто вимушених коливань (модуль виразу (12.62)) не залежить від початкових умов, а визначається параметрами збурюючої сили і механічної системи.

Розглянемо далі випадок, коли частота збурюючої сили і власна частота близькі за значенням: $\omega_B \approx \omega_0$.

Припустимо, що початкові умови нульові ($x_0 = 0, V_0 = 0$). Тоді, поклавши $\omega_B/\omega_0 \approx 1$, але $\omega_0^2 - \omega_B^2 \neq 0$ і $\omega_0 + \omega_B \approx 2\omega_B$, з виразу (12.65) отримаємо

$$x = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot (\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t) = 2 \cdot \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.66)$$

Графік цього руху наведено на рис. 12.20.

Такий рух називається *биттям*: коливальних рух, який відбувається з частотою ω_B збурюючої сили та амплітудою, що є періодичною (з частотою $(\omega_B - \omega_0)/2$) функцією часу.

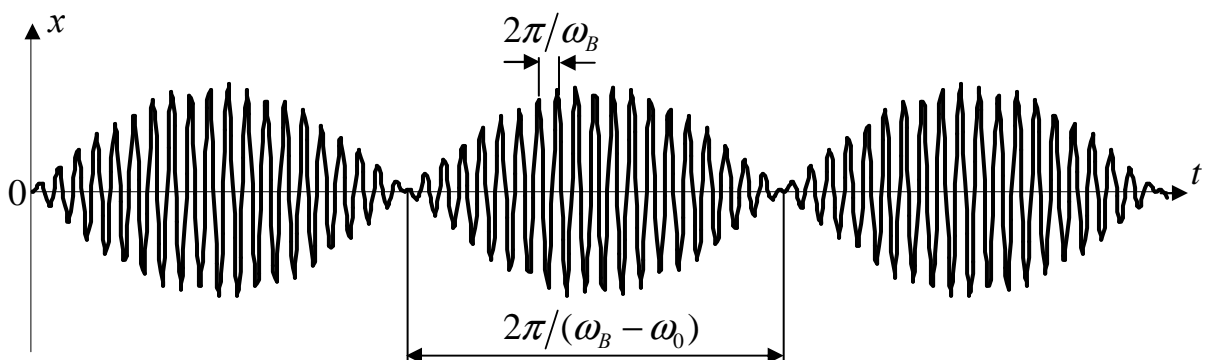


Рис. 12.20

При виконанні $\omega_B = \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота співпадають) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot t \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.67)$$

Підставляючи (12.67) у (12.58), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$A_B \cdot (-t \cdot \omega_B^2 \cdot \cos \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_B^2 \cdot t \cdot \cos \omega_B t) = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Оскільки $\sin \omega_B t \neq 0$ для довільного t , то справедливе рівняння

$$A_B(-2\omega_B) = H,$$

звідки

$$A_B = -\frac{H}{2\omega_B}. \quad (12.68)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (12.58) матиме вид:

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{H \cdot t}{2\omega_B} \cdot \cos \omega_B t. \quad (12.69)$$

Як неважко помітити, амплітуда чисто вимушених коливань $\frac{H \cdot t}{2\omega_B}$

збільшується прямо пропорційно часу і при $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається *резонансом*, а рівність $\omega_B = \omega_0$ - *умовою резонансу*. Графік залежності частинного розв'язка (12.69) від часу показаний на рис. 12.21.

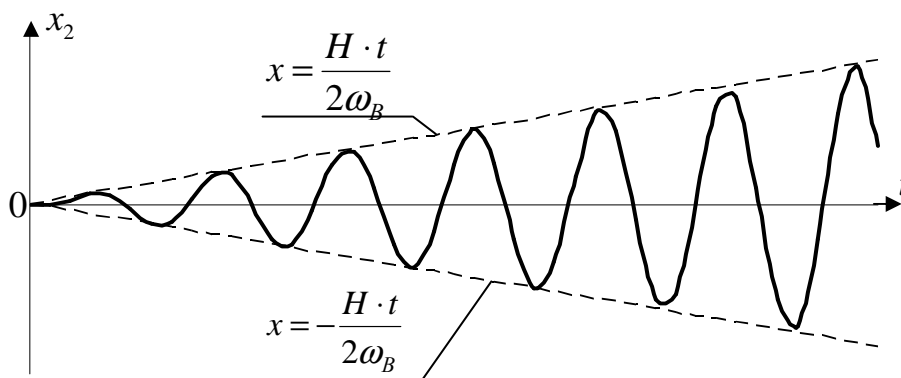


Рис. 12.21

У реальних будівельних конструкціях транспортних машин, явище резонансу може служити причиною їхнього руйнування. Однак в вібраційних машинах технологічного призначення його використовують за для зменшення потужності, що споживається.

Випадок дисипативної системи

Механічна система, яка моделює (рис. 12.22) в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як на рис. 12.20, тільки додається сила опору \bar{R} . Умовні позначення на рис. 12.20 і 12.22 співпадають.

Рівняння динаміки точки має вигляд

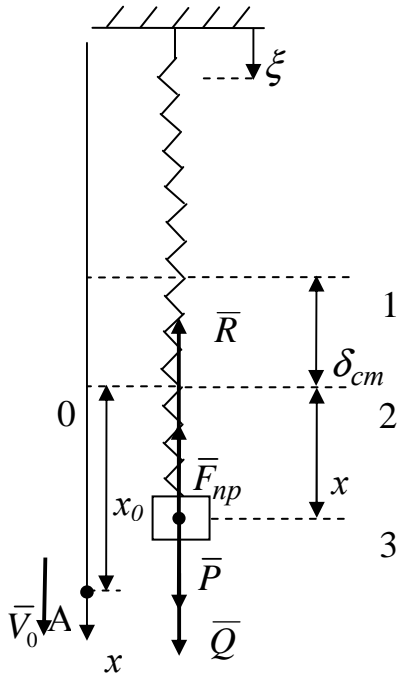


Рис. 12.22

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R} + \bar{Q}$$

або $m\ddot{x} = mg - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x} + H_B \sin \omega_B t$,

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H_B \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad H = \frac{H_B}{m}. \quad (12.70)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань з урахуванням опору набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (12.71)$$

Загальне розв'язання неоднорідного диференціального рівняння (8.38) складається з суми розв'язків

$$x = x_1 + x_2, \quad (12.72)$$

де x_1 - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, x_2 - частинний розв'язок неоднорідного рівняння. У даному випадку загальний розв'язок x_1 визначається отриманим раніше виразом (12.50). Частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x_2 = A_B \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B).$$

Амплітуду A_B і початкову фазу φ_B розв'язку x_2 визначимо методом комплексних амплітуд [23].

Для цього праву частину виразу (12.71) подамо в комплексній формі:

$$H \cdot \sin \omega_B t = \text{Im}(H \cdot e^{j\omega_B t}) = \text{Im}(H \cos \omega_B t + jH \sin \omega_B t),$$

де j – уявна одиниця; Jm – уявна частина комплексного числа.

Відповідно до [23] отримаємо

$$x_2 = Jm \left(\frac{H}{|D(j\omega_B)|} \cdot e^{j\varphi_B} \cdot e^{j\omega_B t} \right), \quad (12.73)$$

де $|D(j\omega_B)| = \left((\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2 \right)^{1/2}$ – модуль комплексного числа

$$D(j\omega_B) = (\omega_0^2 - \omega_B^2) + j2h\omega_B;$$

$$\varphi_B = -\arctg \frac{Jm(D(j\omega_B))}{Re(D(j\omega_B))} = -\arctg \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2};$$

$Re(D(j\omega_B)) = \omega_0^2 - \omega_B^2$, $Jm(D(j\omega_B)) = 2h\omega_B$ – дійсна і уявна частини комплексного числа $D(j\omega_B)$.

У формулі (12.73) комплексне число $D(j\omega_B)$ отримується, якщо підставити в операторну форму $D(p) = p^2x + 2hp x + \omega_0^2x$ лівої частини рівняння (12.71) замість оператора p вираз: $p = j\omega_B$.

Після перетворень (12.73) матиме

$$x_2 = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2}} \sin(\omega_B t + \varphi_B) = A_B \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B), \quad (12.74)$$

де $A_B = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2}}$, $\varphi_B = -\arctg \frac{2h\omega_B}{(\omega_0^2 - \omega_B^2)}$ – амплітуда і зсув фаз вимушених коливань точки.

Підставляючи (12.74) у (12.72) отримаємо загальний розв’язок у вигляді

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2}} \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B). \quad (12.75)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо за допомогою початкових умов (12.41). Після перетворень матиме:

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} \cdot \sin \varphi_B;$$

$$C_2 = \frac{V_0 + x_0 h}{\omega_0^*} - \frac{h \cdot \sin \varphi_B + \omega_B \cdot \cos \varphi_B}{\omega_0^*} \cdot \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}}.$$

З рівняння руху (12.75) витікає, що коливання точки є бігармонійними (двочастотними): вони відбуваються одночасно як з частотою ω_0^* затухаючих коливань, так і з частотою ω_B чисто вимушених коливань. На відміну від вільних коливань (12.52) згасаючі коливання матеріальної точки з частотою ω_0^* виникають і в випадку рівності нулю початкових умов x_0 і V_0 . Наявність множника e^{-ht} у першому доданку призводить до швидкого затухання коливального руху точки з частотою ω_0^* . Проте чисто вимушені коливання з частотою збурюючої сили ω_B (другий доданок в рівнянні (12.75)) відбуваються

постійно, незалежно від часу, з амплітудою $A_B = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}}$ і зсувом

фази $\varphi_B = -\arctg \left(\frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right)$, величини яких визначаються параметрами системи і

збурюючої сили.

12.3.3.2. Кінематичне збудження коливань

При кінематичному збудженні коливань заданий рух здійснює основа у точці прикріплення до нього кінця пружини за законом

$$\xi = A_\xi \cdot \sin \omega_B t, \quad (12.76)$$

де A_ξ - амплітуда переміщення основи, ω_B - її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), зображена на рис. 12.23. Умовні позначення на рис. 12.10 і 12.23 співпадають.

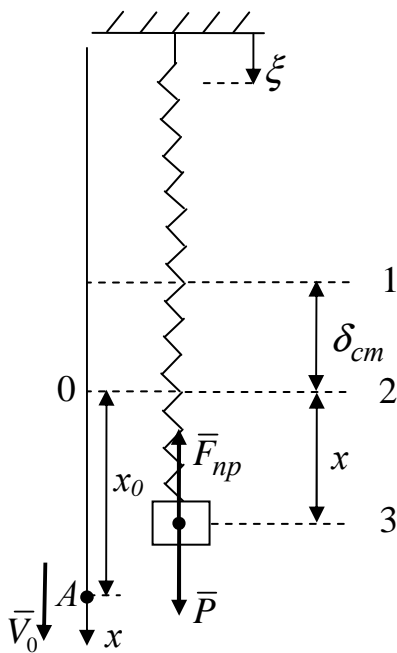


Рис. 12.23

Для консервативної системи диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

або $m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ct} + x - \xi),$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + cx = c \cdot a_{\xi} \cdot \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{c \cdot a_{\xi}}{m}. \quad (12.77)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (12.78)$$

Диференціальне рівняння повністю співпадає з рівнянням (12.58). Отже, закон вимушених коливань консервативної системи при кінематичному збудженні і його властивості будуть такими же, як і при силовому (див. п. 12.3.3.1).

Частотні і динамічні характеристики коливальних систем

При дослідженні динамічної поведінки, визначенні очікуваних параметрів вібрації, власних частот, форм і коефіцієнтів демпфірування коливальних механічних систем аналізують звичайно залежності амплітуди і звусу фаз процесу $x(t)$ від частоти збуджуючої сили $\bar{Q}(t)$. З виразу (12.73) отримаємо функції

$$W(\omega) = \frac{1}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2},$$

які мають назву: відповідно амплітудно-частотна (АЧХ) і фазово-частотна (ФЧХ) характеристики. Вказані характеристики не залежать від параметрів збурюючої сили \bar{Q} , тому є універсальними для механічної системи.

На практиці використання АЧХ і ФЧХ дозволяє визначити амплітуду і зсув фаз чисто вимушених коливань матеріальної точки, збільшивши амплітуду і фазу коливань збурюючої сили у $W(\omega_B)$ раз і на $\varphi(\omega_B)$ відповідно.

Графіки залежностей $W(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ наведено на рис. 12.24. Аналіз графіків дисипативної системи (рис. 12.24,а) показує наступне.

При частоті збурюючої сили $\omega_B = 0$ отримуємо $W(0) = \frac{1}{c}$ і зсув фаз $\varphi(0) = 0$.

При частоті збурення $\omega_B = \omega_0$ буде $\varphi(\omega_0) = -\arctg \frac{2h\omega_0}{0} = -\frac{\pi}{2}$. В системі виникає явище резонансу.

При частоті збудження $\omega_B \rightarrow \infty$ маємо $W(\omega_B) \rightarrow 0$, а $\varphi(\omega_B) \rightarrow -\pi$.

Дослідження на екстремум функції $W(\omega)$ надає наступні значення частоти ω_{\max} , АЧХ і ФЧХ:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}; \quad W(\omega_{\max}) = \frac{1}{2mh\omega_0}; \quad \varphi(\omega_{\max}) = -\arctg \frac{\omega_{\max}}{h}.$$

У випадку консервативної системи (враховуючи (12.71) і умову $h \rightarrow 0$) отримуємо наступні вирази для частотних характеристик:

$$W(\omega) = \frac{1}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}; \quad \varphi(\omega_{\max}) = -\arctg \frac{Im(D(j\omega_B))}{Re(D(j\omega_B))},$$

залежність яких від частоти зображено на рис. 12.24,б.

АЧХ і ФЧХ консервативної системи мають наступні особливості. В діапазоні частот $\omega_B \in [0; \omega_0)$ виконується $Im(D(j\omega_B)) = 0$, а $Re(D(j\omega_B)) \in [\omega_0^2; 0)$

і залишається завжди більше нуля, тому зсув фаз $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{0}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = 0$ для

будь якого значення частоти збурюючої сили.

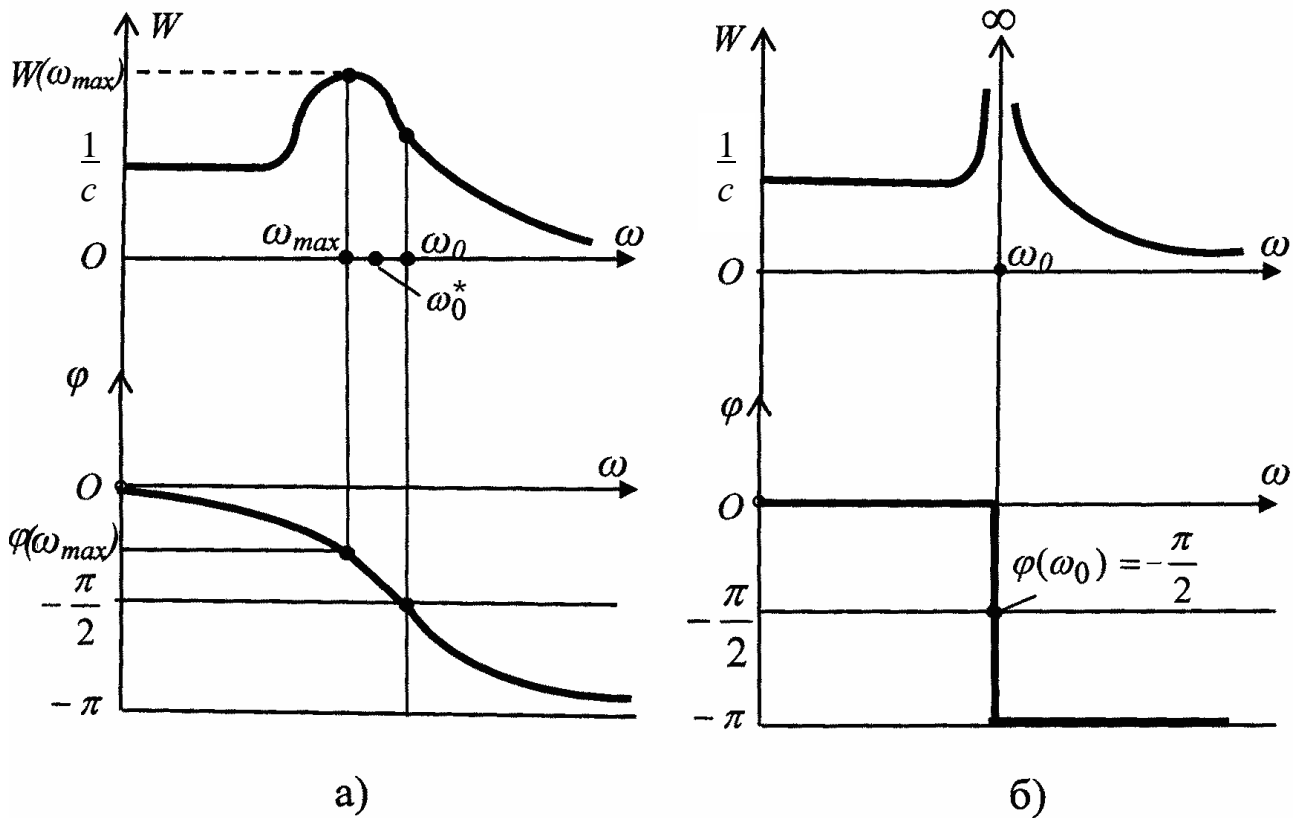


Рис. 12.24. АЧХ і ФЧХ дисипативної (а) і консервативної (б) систем

При частоті збудження $\omega_B = \omega_0$ отримаємо при $h \rightarrow 0$, що

$$\text{Im}(D(j\omega_B)) \rightarrow 0, \quad \text{Re}(D(j\omega_B)) = 0, \quad \text{а} \quad \varphi(\omega_B = \omega_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Якщо $\omega_B \in (\omega_0, +\infty)$, то буде $\text{Im}(D(j\omega_B)) = 0$ і $\text{Re}(D(j\omega_B)) \in (0; -\infty)$, а зсув фаз $\varphi(\omega) = -\pi$ для частоти $\omega_B > \omega_0$.

На практиці при розв'язанні прикладних задач теорії коливань і, зокрема, задач віброзахисту використовують поняття коефіцієнта динамічності механічної системи. За для цього перетворюють вираз амплітуди чисто вимушених коливань A_B , помноживши і поділивши її праву частину на величину ω_0^2 :

$$A_B = \frac{\frac{H}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{h^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}}}.$$

Величина у чисельнику $\frac{H}{\omega_0^2} = \frac{H \cdot m}{c} = \frac{H_B}{c} = x_{cm}$ є статичним переміщенням точки під дією сталої сили H_B , що дорівнює амплітуді збудуючої сили (12.56).

Введемо позначення: $z = \frac{\omega_B}{\omega_0}$ - безрозмірна частота коливань; $\beta = \frac{h}{\omega_0}$ - безрозмірний коефіцієнт демпфірування.

Тоді

$$A_B = \frac{x_{cm}}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (12.79)$$

Коефіцієнтом динамічності μ називається відношення амплітуди вимушених коливань (8.46) до статичного переміщення x_{cm} :

$$\mu = \frac{A_B}{x_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (12.80)$$

Він є власною характеристикою коливальної системи, яка не залежить від амплітуди збурення, і показує, у скільки разів амплітуда вимушених коливань перевершує статичне переміщення, тобто характеризує динамічний ефект стосовно амплітуди коливань, що викликається збудуючою силою. Графік залежності $\mu(z)$ при вирівнюванні коефіцієнта демпфірування β наведений на рис. 12.25.

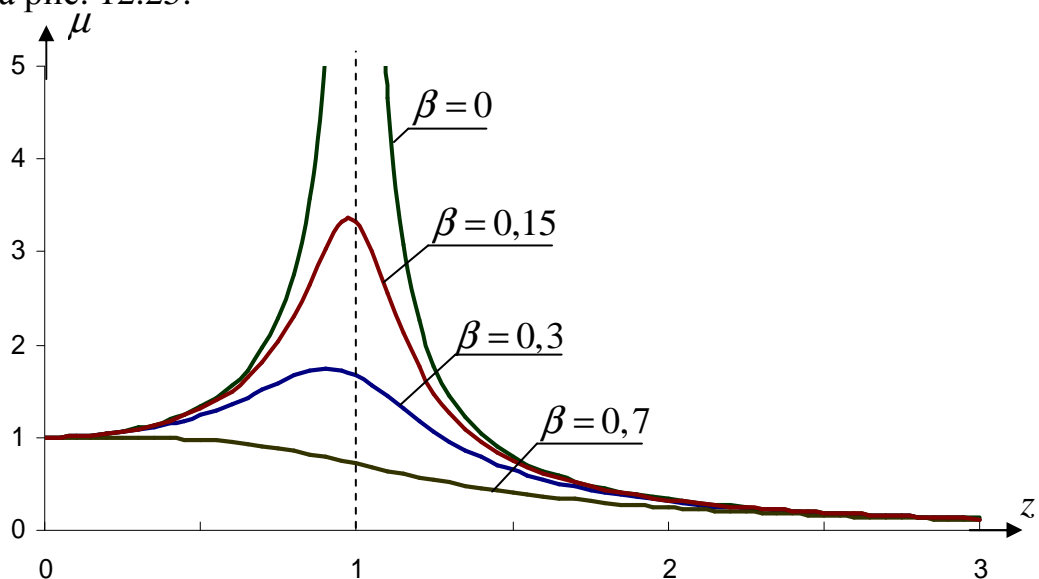


Рис. 12.25

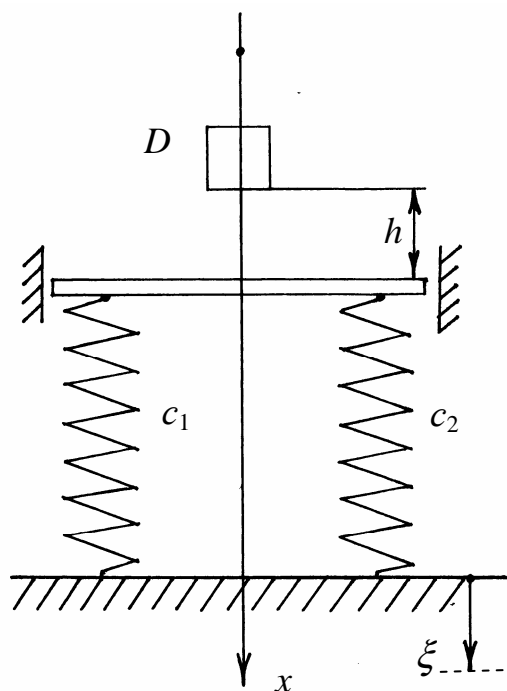
Аналізуючи рис. 12.25, можна зробити такі висновки:

- 1) коефіцієнт динамічності набуває максимуму при значенні $z = \sqrt{1 - 2\beta^2}$;
- 2) При значенні коефіцієнта опору $\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ зростання амплітуди

вимушених коливань в зоні резонансу не відбувається, більше того, за будь-якою частоти збурюючої сили амплітуда вимушених коливань не перевищує статичне переміщення $x_{ст}$.

12.3.4. Приклади розв'язання задач з дослідження коливального руху матеріальної точки

Приклад 1. Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі x з моменту дотику ним плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рухи плити та основи вважати поступальними (рис. 12.26).



Умови задачі. Пролетівши без початкової швидкості відстань $h = 0,2$ м, вантаж D ($m_D = 20$ кг) з'єднується у момент часу $t = 0$ з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 100$ Н/см, $c_2 = 200$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа починає здійснювати рух за законом $\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t = 0,5 \cdot \sin 30t$ (см).

Рис. 12.26

Розв'язання

Спочатку розглянемо допоміжну задачу про вільне падіння матеріальної точки (вантаж) з висоти $h = A_0A$ до моменту дотику з плитою.

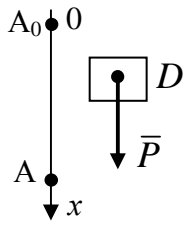


Рис. 12.27

Розрахункова схема цієї задачі наведена на рис. 12.27. Диференціальне рівняння руху має вид: $m_D \ddot{x} = P$ або $m_D \ddot{x} = m_D g$, або $\ddot{x} = g$. Інтегруючи за часом обидві частини останнього рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = gt + C_1, \\ x = gt^2/2 + C_1t + C_2. \end{cases}$$

При нульових початкових умовах сталі інтегрування C_1, C_2 дорівнюють нулю. Записуючи функції \dot{x}, x у кінцевій точці А відрізка руху A_0A , матимемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} V_A = g\tau, \\ h = g\tau^2/2, \end{cases}$$

звідки, виключаючи час руху на відріжку падіння τ , отримаємо розрахункову формулу для швидкості точки в момент дотику з плитою

$$V_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} = 2 \text{ (м/с)}.$$

Розглянемо основну задачу про коливання матеріальної точки (вантажю).

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 12.28, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу і його довільне положення під час коливань, точка А – положення вантажу в момент дотику плити, δ_{cm} - статична деформація пружини під дією вантажу, \bar{P}, \bar{F}_{np} - відповідно сила ваги вантажу й сила пружності пружини, ξ - напрямок кінематичного збудження в точці кріплення пружини до рухомої опори.

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис. 12.12):

$$c = c_1 + c_2 = 100 + 200 = 300 \text{ Н/см} = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}.$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$\begin{aligned} m_D \ddot{x} &= P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x - \xi) = \\ &= P - c\delta_{cm} - cx + c\xi = -cx + ca\xi \sin \omega_B t, \end{aligned}$$

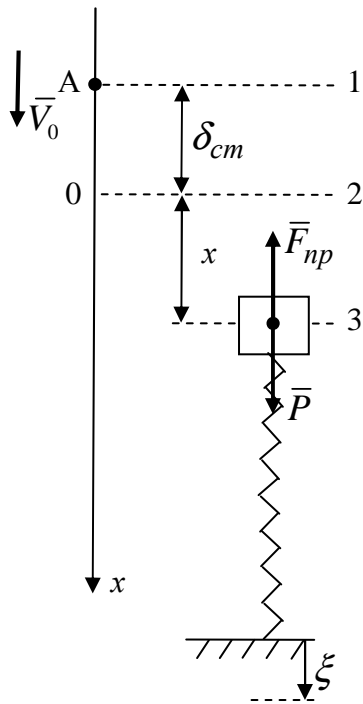


Рис. 8.19

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = ca_\xi \sin \omega_B t$$

або
$$\ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = \frac{ca_\xi}{m_D} \sin \omega_B t.$$

Позначимо $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$, $H = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D}$, тоді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t.$$

Отримане рівняння має форму (12.58) диференціального рівняння вимушених коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (12.63), (12.64):

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови. В точці A на рис. 12.28:

$$x|_{t=0} = -\delta_{cm}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$:

$$\begin{cases} -\delta_{cm} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = -\delta_{cm}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right).$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -\delta_{cm} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_0 t.$$

Визначимо далі

$$\text{величину статичної деформації } \delta_{cr} = \frac{g \cdot m_D}{c} = \frac{10 \cdot 20}{3 \cdot 10^4} = 0,67 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$\text{значення власної частоти } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^4}{20}} = 38,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$H = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{20} = 7,5 \frac{\text{М}}{\text{с}^2},$$

$$\frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{7,5}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} = \frac{7,5}{1500 - 900} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{1}{38,7} \cdot \left(2 - \frac{7,5 \cdot 30}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} \right) = \frac{1}{38,7} \cdot (2 - 0,375) = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t \text{ (м).}$$

Перевірка: При $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,67 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Графік залежності координати x від часу t наведено на рис. 12.29.

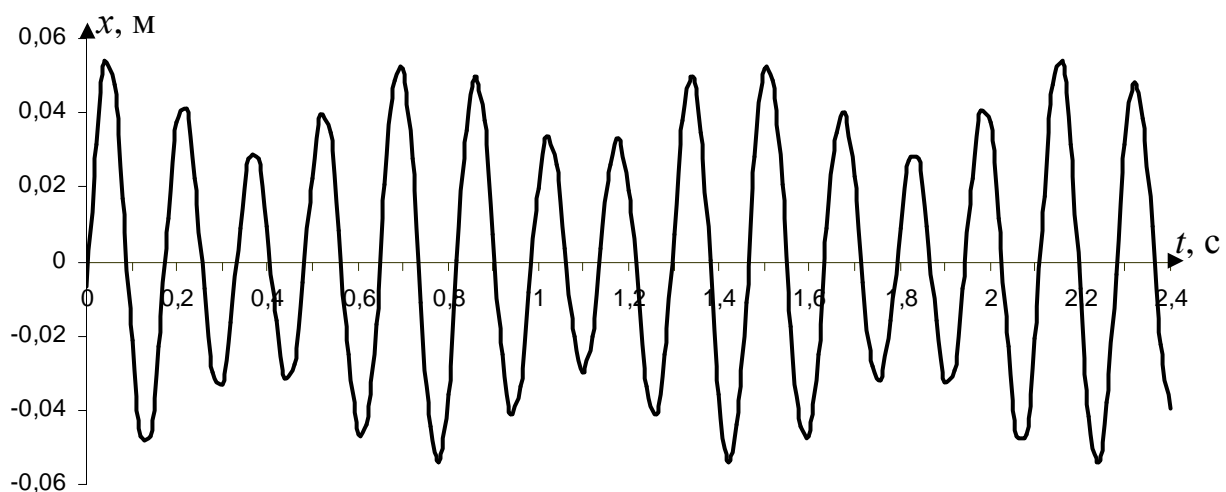


Рис. 12.29

Відповідь: Вантаж здійснює вимушені коливання за законом $x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t$ (м), з коловими частотами 38,7 і 30 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Приклад 2. Знайти рівняння коливального руху вантажу D по гладенькій похилій площині у напрямку осі x , що співпадає з віссю двох послідовно з'єднаних пружин (рис. 12.30).

Умова задачі. Система встановлених на пружинах вантажів D ($m_D = 20$ кг) і E ($m_E = 10$ кг) знаходиться в положенні статичної рівноваги.

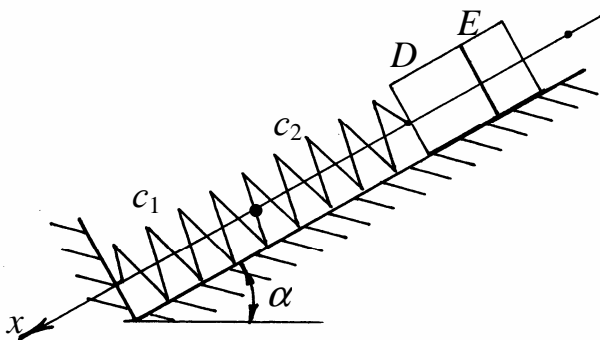


Рис. 12.30

У момент часу $t = 0$ вантаж E знімають з вантажу D . Одночасно вантажу D надають початкову швидкість $V_0 = \dot{x}_0 = 0,1$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x . Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють $c_1 = c_2 = 400$ Н/см. Кут $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 12.31, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D в момент початку коливань (положення рівноваги системи вантажів D і E), δ_{cm_D} – статична деформація пружини під дією вантажу D , $\bar{P}_D, \bar{N}, \bar{F}_{np}$ – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні та сила пружності пружини.

У даній схемі в положенні статичної рівноваги вантажу D сила пружності \bar{F}_{np} пружини зрівноважує не всю силу ваги вантажу \bar{P}_D , а тільки її складову $P_{Dx} = P_D \cdot \sin \alpha$ у напрямку осі Ox , яка співпадає з віссю пружини.

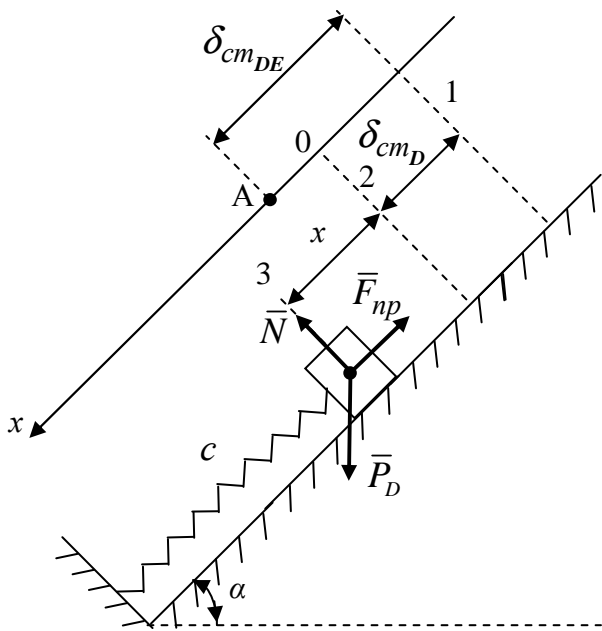


Рис. 12.31

Знаходимо еквівалентну жорст-

кість c (див. рис. 12.13):

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{400 \cdot 400}{400 + 400} = 200 \text{ Н/см} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне

рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = P_D - F_{np} = P_D \cdot \sin \alpha - c(\delta_{cm_D} + x) = P_D \cdot \sin \alpha - c\delta_{cm_D} - cx = -cx,$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = 0 \text{ або } \ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

$$\text{або } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{c}{m_D}.$$

Отримане рівняння має форму (12.38) диференціального рівняння вільних коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (12.39), (12.40)

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 12.31):

$$x|_{t=0} = \delta_{cm_{DE}} - \delta_{cm_D} = \delta_{cm_E}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$:

$$\begin{cases} \delta_{cm_E} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0; \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = \delta_{cm_E}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = \delta_{cm_E} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

величина статичної деформації

$$\delta_{cm_E} = \frac{m_E g \cdot \sin \alpha}{c} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

значення власної частоти $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{20}} = \sqrt{1000} = 31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$

величину $\frac{V_0}{\omega_0} = \frac{0,1}{31,6} = 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t \text{ (м)}.$$

Перевірка: При $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь: Вантаж здійснює вільні коливання за законом $x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t$ (м), з коловою частотою $31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Графік залежності координати x від часу t наведений на рис. 12.32.

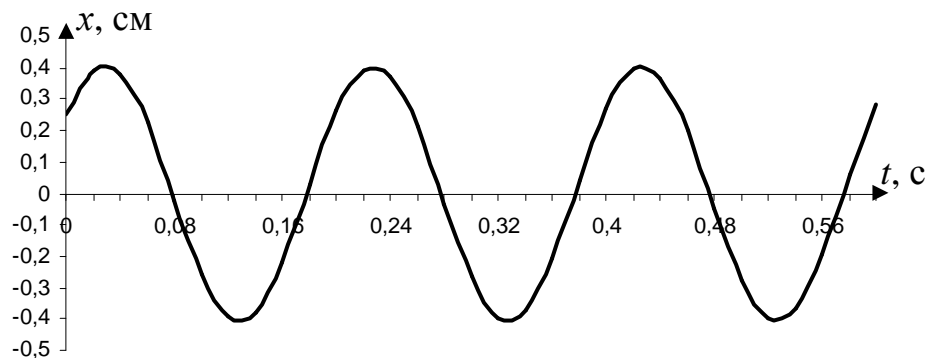


Рис. 12.32

Приклад 3. Знайти рівняння коливального руху вантажу D (рис. 12.33), вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі x . Брусок,

який зв'язує пружину і демпфер, є невагомим. Рух бруска, який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним.

Умова задачі. Маса вантажу $m_D = 4$ кг. Коефіцієнти жорсткості двох пружин $c_1 = 2$ Н/см, $c_2 = 3$ Н/см, коефіцієнт опору демпфера $b = 16$ Н·с/м.

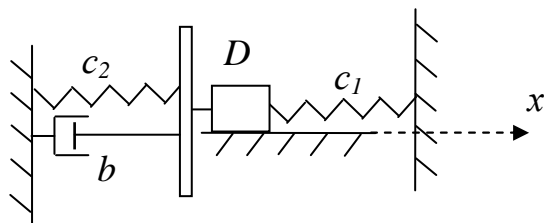


Рис. 12.33

Перед початком руху вантаж відхиляють на величину $\lambda = 3$ см у напрямку від'ємного відліку координати x , надаючи йому у момент часу $t = 0$ початкову швидкість $V_0 = 0,6$ м/с, спрямовану вліво.

Розв'язання

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 12.34, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D (яке для горизонтальної пружини співпадає з рівнем 1; в цьому разі $\delta_{cm} = 0$) і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D в момент початку коливань, \vec{V}_0 – вектор початкової швидкості, $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{np}, \vec{R}$ – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні, сила пружності пружини й сила опору. Демпфер на рис. 12.34 не показано.

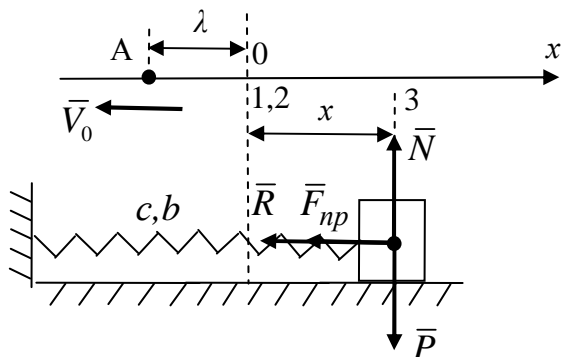


Рис. 12.34

Схема розташування вантажу поміж двома пружинами еквівалентна паралельному з'єднанню пружних елементів (див. рис. 12.12).

Знаходимо еквівалентну жорсткість c :

$$c = c_1 + c_2 = 2 + 3 = 5 \text{ Н/см} = 5 \cdot 10^2 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = -F_{np} - R = -cx - b\dot{x},$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + b \dot{x} + cx = 0, \text{ або } \ddot{x} + \frac{b}{m_D} \dot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

або $\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, де $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$, $2h = \frac{b}{m}$.

Отримане рівняння має форму (12.44) диференціального рівняння вільних коливань при наявності опору. Підрахуємо значення власної частоти вільних

коливань
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^2}{4}} = \sqrt{125} = 11,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

та коефіцієнта демпфірування
$$h = \frac{b}{2m} = \frac{16}{2 \cdot 4} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Зрівнюючи ці параметри, маємо $h < \omega_0$ - випадок малого опору. В цьому разі функція $x(t)$ і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t),$$

$$\dot{x} = -h \cdot e^{-ht} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega_0^* t + C_2 \cdot \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin \omega_0^* t + C_2 \cdot \cos \omega_0^* t).$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 12.34):

$$x|_{t=0} = -\lambda, \quad \dot{x}|_{t=0} = -V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\lambda = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ -V_0 = -h \cdot e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0). \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = -\lambda; \quad C_2 = \frac{-V_0 - h\lambda}{\omega_0^*}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -e^{-ht} \cdot \left(\lambda \cdot \cos \omega_0^* t + \frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} \cdot \sin \omega_0^* t \right).$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

значення власної частоти затухаючих коливань

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{125 - 4} = \sqrt{121} = 11 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

величину
$$\frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} = \frac{0,6 + 2 \cdot 0,03}{11} = \frac{0,66}{11} = 0,06 \text{ м.}$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t) \text{ (м)}.$$

Перевірка: При $t = 0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,03$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь: Вантаж здійснює затухаючі коливання за законом $x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t)$ (м) з коловою частотою $11 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t наведений на рис. 12.35.

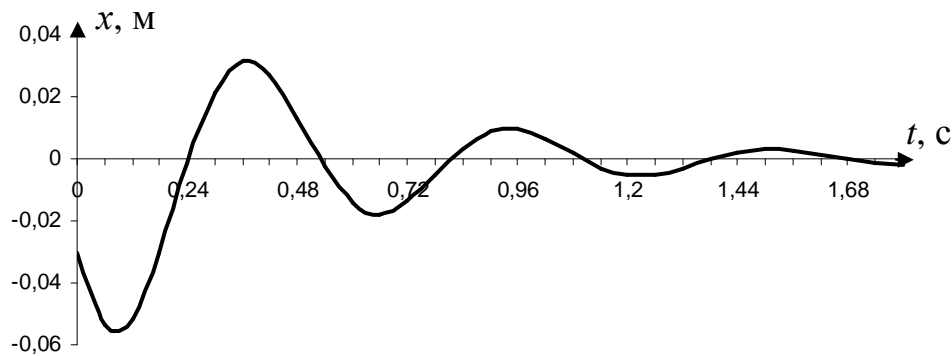


Рис. 12.35

12.4. Метод кінетостатики. Принцип Д'аламбера

Принцип Д'Аламбера називають також методом кінетостатики і він дає узагальнений підхід до дослідження руху будь-якої матеріальної точки і механічної системи. Цей метод є особливо зручним, якщо треба визначити реакції в'язей при заданих законах руху точки і діючих сил.

12.4.1. Принцип Д'Аламбера для невідільної матеріальної точки

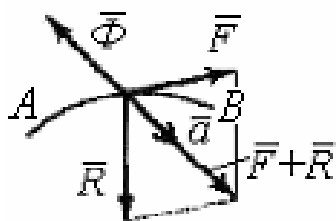


Рис. 12.36

Нехай на матеріальну точку, яка рухається вздовж траєкторії AB , діє рівнодіюча \bar{F} активних сил і рівнодіюча реакцій в'язей \bar{R} (рис. 12.36). Диференціальне рівняння руху точки має вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}.$$

Запишемо цю рівність як

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0. \quad (12.81)$$

Доданок $(-m\bar{a})$ називають силою інерції матеріальної точки і позначають через $\bar{\Phi}$. Тому вектор сили інерції $\bar{\Phi}$ дорівнює добутку маси точки m на її прискорення \bar{a} і напрямлений він протилежно напрямку прискорення \bar{a} , тобто

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (12.82)$$

З урахуванням цього позначення рівність (12.81) матиме вигляд

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (12.83)$$

Це рівняння і виражає розглядаємий принцип Даламбера: для невідільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакцій в'язей і сили інерції дорівнює нулю.

Це рівняння називають також рівнянням кінетостатики, а метод дослідження динаміки точки – методом кінетостатики.

Сили \bar{F} , \bar{R} , $\bar{\Phi}$ утворюють для точки систему збіжних сил і рівняння (12.83) виражає умову рівноваги цієї системи сил.

Отже якщо до всіх діючих на матеріальну точку сил додати силу інерції (12.82), то в кожний момент руху отримаємо зрівноважену систему сил $\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}$. Зазначимо, що поняття «сила інерції» є формальним і не пов'язане з реальними силами, якими є тільки активні сили і реакції в'язей. Сила інерції $\bar{\Phi}$ реально до точки не прикладена, її введено умовно (віртуально) виключно лише для моделювання умови статичної рівноваги матеріальної точки.

Тому метод кінетостатики є лише формальним віртуальним способом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статики. Проте для розв'язання ряду практичних задач такий спосіб досить зручний.

Зазначимо, що сила інерції (12.82), яка дорівнює добутку маси точки на прискорення, завжди напрямлена в бік, протилежний прискоренню, але не руху. Тільки в разі уповільненого прямолінійного руху сила інерції збігатиметься з напрямком руху.

У проєкціях на осі інерціальної системи координат рівність (12.83) має вигляд

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0, \quad F_y + R_y + \Phi_y = 0, \quad F_z + R_z + \Phi_z = 0, \quad (12.84)$$

де $\Phi_x = -ma_x = -m\dot{v}_x = -m\ddot{x}$, $\Phi_y = -ma_y = -m\dot{v}_y = -m\ddot{y}$, $\Phi_z = -ma_z = -m\dot{v}_z = -m\ddot{z}$ – проєкції сили інерції $\bar{\Phi}$ на осі інерціальної системи координат Ox, Oy, Oz .

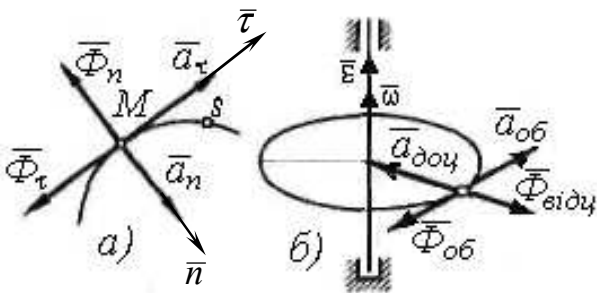


Рис. 12.37

Якщо спроектувати рівняння (12.83) на осі натурального тригранника (рис. 12.37,а), то отримаємо

$$\left. \begin{aligned} F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau &= 0, \\ F_n + R_n + \Phi_n &= 0, \\ F_b + R_b &= 0, \end{aligned} \right\} (12.85)$$

де $\Phi_\tau = -ma_\tau = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$, $\Phi_n = -ma_n = -m \frac{v^2}{\rho}$ – дотична і нормальна сили інерції.

Проєкція сили інерції на бінормаль дорівнює нулю, тому що проєкція прискорення на цю вісь завжди дорівнює нулю ($a_b = 0$).

При рівномірному русі по будь-якій траєкторії буде $\Phi_\tau = 0$, тому що $a_\tau = 0$. Отже сила інерції в такому разі визначається тільки нормальною силою інерції, яка напрямлена вздовж нормалі до траєкторії від центра кривизни.

Якщо матеріальна точка є однією з точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω і з кутовим прискоренням ϵ (рис. 12.37,б), то доцентрове прискорення буде збігатися з нормальним, а

обертальне – з дотичним (тангенціальним). Відповідні до цих прискорень обертальну й відцентрову сили інерції:

$$\Phi_{об} = -m a_{об} = -m \varepsilon r, \quad \Phi_{відц} = -m a_{відц} = -m \omega^2 r,$$

де r – відстань точки від осі її обертання.

12.4.2. Принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок

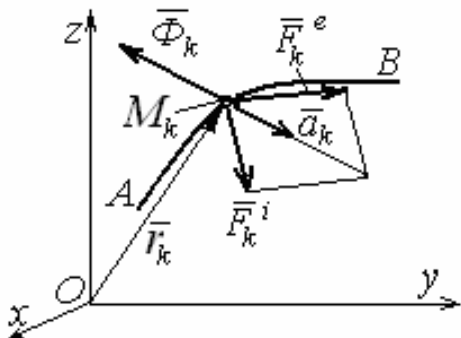


Рис. 12.38

Покажемо сили, що діють на деяку точку M_k системи, які дамо як рівнодійні зовнішніх \bar{F}_k^e і внутрішніх \bar{F}_k^i сил по відношенню до всієї системи (рис. 12.38). Запишемо для точки M_k рівняння Д'Аламбера (12.83):

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (12.86)$$

Помножимо далі це рівняння зліва векторно на радіус-вектор \bar{r}_k , тобто визначимо моменти сил відносно центра O :

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (12.87)$$

Підсумовуючи для всієї системи рівняння (12.86) і (12.87) за індексом k і враховуючи, що внутрішні сили системи задовольняють умовам

$$\sum_1^n \bar{F}_k^i = 0, \quad \sum_1^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0,$$

дістанемо рівняння принципу Д'Аламбера для системи в такому вигляді:

$$\sum_1^n \bar{F}_k^e + \sum_1^n \bar{\Phi}_k = 0, \quad (12.88)$$

$$\sum_1^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \sum_1^n \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (12.89)$$

Визначимо далі головні вектори зовнішніх сил і сил інерції відповідно через

$$\bar{F}^e = \sum_1^n \bar{F}_k^e, \quad \bar{\Phi}^{in} = \sum_1^n \bar{\Phi}_k, \quad (12.90)$$

а головний момент зовнішніх сил і сил інерції відносно деякого центра O як

$$\overline{M}_O^F = \sum_1^n (\overline{r}_k \times \overline{F}_k^e); \quad \overline{M}_O^{in} = \sum_1^n (\overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k). \quad (12.91)$$

Вирази (7.8) і (7.9) запишемо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \overline{F}^e + \overline{\Phi}^{in} &= 0, \\ \overline{M}_O^F + \overline{M}_O^{in} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.92)$$

Рівняння (12.92) виражають принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок і можуть бути сформульовані так: *векторні суми головних векторів зовнішніх сил і сил інерції, а також головного моменту зовнішніх сил і головного моменту сил інерції відносно будь-якого центра O дорівнюють нулю.*

Спроекуємо рівняння (12.88), (12.89) на осі інерціальної системи координат:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n F_{kx}^e + \sum_1^n \Phi_{kx} &= 0, & \sum_1^n M_{0x}(\overline{F}_k^e) + \sum_1^n M_{0x}(\overline{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_1^n F_{ky}^e + \sum_1^n \Phi_{ky} &= 0, & \sum_1^n M_{0y}(\overline{F}_k^e) + \sum_1^n M_{0y}(\overline{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_1^n F_{kz}^e + \sum_1^n \Phi_{kz} &= 0, & \sum_1^n M_{0z}(\overline{F}_k^e) + \sum_1^n M_{0z}(\overline{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.93)$$

До зовнішніх сил належать активні сили \overline{F}_a й реакції в'язей \overline{R} :

$$\begin{aligned} \overline{F}^e &= \overline{F}^a + \overline{R}, \\ \overline{M}^{in} &= \overline{M}_0^a + \overline{M}_0^F. \end{aligned}$$

Щоб використовувати рівняння кінетостатики, треба мати вирази для головного вектора і головного моменту сил інерції системи матеріальних точок і, зокрема, твердого тіла.

Із першого рівняння (12.92) випливає, що головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил і напрямлений протилежно йому

$$\overline{\Phi}^{in} = \sum_{k=1}^n \overline{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^n \overline{F}_k^e,$$

а відповідно теореми про рух центра мас системи, головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = M\bar{a}_C,$$

де M – маса системи, \bar{a}_C – прискорення центра мас. Тому маємо

$$\bar{\Phi}^{ih} = \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = -M\bar{a}_C. \quad (12.94)$$

Тобто, головний вектор сил інерції системи дорівнює добутку маси системи на прискорення її центра мас, і спрямований у бік, протилежний цьому прискоренню.

Із другого рівняння (12.92) знаходимо, що головний момент сил інерції механічної системи відносно довільного центра O дорівнює

$$\bar{M}_O^{ih} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = -\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e).$$

Але з теореми про зміну моменту кількості руху системи маємо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = \frac{d\bar{K}_O}{dt},$$

тому

$$\bar{M}_O^{ih} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}. \quad (12.95)$$

Тобто головний момент сил інерції механічної системи відносно довільного центра дорівнює похідній за часом, яка взята з від'ємним знаком, від моменту кількості руху системи відносно того ж центра.

Обчислимо тепер головний момент сил інерції твердого тіла, що рухається довільно. Виберемо за центр приведення центр мас C тіла. Тоді маємо, враховуючи (12.95),

$$\bar{M}_C^{ih} = -\frac{d'\bar{K}_C}{dt}.$$

Нехай система координат $Cxuz$ жорстко зв'язана з тілом. Тоді згідно з формулами, які визначають похідну за часом від моменту кількості руху твердого тіла, отримаємо

$$\bar{M}_C^{in} = -\frac{d'\bar{K}_C}{dt} - \bar{\omega} \times \bar{K}_C. \quad (12.96)$$

Тут $\frac{d'\bar{K}_C}{dt} = \frac{d'K_{Cx}}{dt} \bar{i} + \frac{d'K_{Cy}}{dt} \bar{j} + \frac{d'K_{Cz}}{dt} \bar{k}$ – відносна похідна, $\bar{\omega}$ – кутова швидкість рухомої системи координат.

Спроектуємо рівняння (12.96) на осі координат

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^{in} &= -\frac{d'K_{Cx}}{dt} - (\omega_y K_{Cz} - \omega_z K_{Cy}), \\ M_{Cy}^{in} &= -\frac{d'K_{Cy}}{dt} - (\omega_z K_{Cx} - \omega_x K_{Cz}), \\ M_{Cz}^{in} &= -\frac{d'K_{Cz}}{dt} - (\omega_x K_{Cy} - \omega_y K_{Cx}) \end{aligned} \right\} \quad (12.97)$$

і врахуємо вирази проєкцій моменту кількості руху, що обчислені для нерухомої точки:

$$\begin{aligned} K_{Cx} &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ K_{Cy} &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ K_{Cz} &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z. \end{aligned}$$

Тоді отримаємо

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^{in} &= -I_x \varepsilon_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\ M_{Cy}^{in} &= -I_y \varepsilon_y + I_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{yx} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - \\ &\quad - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x, \\ M_{Cz}^{in} &= -I_z \varepsilon_z + I_{xz} (\varepsilon_x - \omega_x \omega_z) + I_{yz} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (12.98)$$

Наведені формули визначають головний момент сил інерції твердого тіла, що рухається довільно.

12.4.3. Сили інерції твердого тіла в часткових випадках його руху

Поступальний рух твердого тіла

Якщо тіло рухається поступально, то воно не обертається навколо центра

мас і тому $\sum_{k=1}^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^e) = 0$.

Отже з урахуванням (7.12) маємо $\bar{M}_C^{in} = 0$.

При поступальному русі прискорення всіх точок тіла однакові і дорівнюють прискоренню центра мас. Отже, сили інерції цих точок складають систему паралельних сил, спрямованих в одну сторону. Така система сил приводиться до рівнодійної сили $\bar{\Phi}$, яка згідно (12.94) дорівнює головному вектору сил інерції, тобто

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C. \quad (12.99)$$

Лінія дії рівнодійної сили інерції проходить через центр мас, так як головний момент сил інерції точок тіла відносно центра мас дорівнює нулю.

Отже *при поступальному русі твердого тіла сили інерції його точок приводяться до рівнодійної сили інерції, яка прикладена в центрі мас тіла, дорівнює за модулем добутку маси тіла на прискорення центру мас і напрямлена протилежно цьому прискоренню.*

Обертання тіла навколо нерухомої осі

Виберемо за центр приведення сил інерції будь-яку точку O на осі обертання Oz , а осі Ox і Oy жорстко скріпимо з тілом. Вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ напрямлені вздовж осі обертання і тому

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_z = \pm\omega, \quad \varepsilon_z = \pm\varepsilon.$$

З (12.98) маємо проєкції головного моменту сил інерції

$$M_{Ox}^{in} = I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2, \quad M_{Oy}^{in} = I_{xy}\varepsilon + I_{xz}\omega^2, \quad M_{Oz}^{in} = -I_z\varepsilon.$$

Головний вектор сил інерції в точці O визначаємо за формулою (12.94):

$$\bar{\Phi}^{in} = -M\bar{a}_C. \quad (12.100)$$

При обертанні тіла навколо нерухомої осі головний вектор сил інерції і проекції головного моменту сил інерції визначаються формулами.

Якщо центр мас C знаходиться на осі обертання z , то прискорення $\bar{a}_C = 0$, отже головний вектор сил інерції

$$\bar{\Phi}^{in} = 0. \quad (12.101)$$

Проекції головного моменту сил інерції на осі координат у цьому випадку визначають за формулами:

$$M_{Cx}^{in} = I_{xz} \varepsilon - I_{yz} \omega^2, \quad M_{Cy}^{in} = I_{xy} \varepsilon + I_{xz} \omega^2, \quad M_{Cz}^{in} = -I_z \varepsilon.$$

Якщо вісь обертання Cz є головною віссю інерції тіла, тобто $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, то моменти сил інерції M_{Cx}^{in} і M_{Cy}^{in} дорівнюють нулю. У такому випадку головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}^{in} = 0$ і сили інерції еквівалентні парі сил інерції, що лежить у площині, яка перпендикулярна осі обертання Cz . Момент цієї пари дорівнює

$$M_z^{in} = -I_z \varepsilon. \quad (12.102)$$

Плоский рух тіла

Виберемо за центр приведення сил інерції центр мас C тіла. Тоді головний вектор сил інерції обчислюють за формулою (див. 12.94):

$$\bar{\Phi}^{in} = -M \bar{a}_C. \quad (12.103,a)$$

Головний момент сил інерції відносно центра мас C , котрий є рухомою точкою при плоскому русі тіла, отримаємо з формули (12.91). Відповідно принципу Д'Аламбера (12.92), головний момент сил інерції відносно центра мас задовольняє умові

$$\sum_1^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^e) + \bar{M}_C^{in} = 0.$$

Але з теореми про зміну моменту кількості руху відносно центра мас (12.96) при абсолютному й відносному русі, тому що вектори $\bar{\omega}$ і \bar{K}_C співпадають за напрямом, маємо

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^e), \quad \frac{d'\bar{K}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^e).$$

Із цих рівностей витікає

$$\bar{M}_C^{ih} = -\frac{d\bar{K}_C}{dt} = -\frac{d'\bar{K}_C}{dt}.$$

Тобто проекції головного моменту сил інерції M_{Cx}^{ih} , M_{Cy}^{ih} , M_{Cz}^{ih} на осі координат, які рухаються поступально з початком в центрі мас визначаються за формулами:

$$M_{Cx}^{ih} = I_{xz} \varepsilon_z - I_{yz} \omega^2, \quad M_{Cy}^{ih} = I_{xy} \varepsilon_z + I_{xz} \omega^2, \quad M_{Cz}^{ih} = -I_z \varepsilon_z,$$

де вісь Cz перпендикулярна площині, паралельно котрій рухаються точки тіла.

Якщо вісь Cz є головною віссю інерції тіла, то проекції моменту сил інерції $M_{Cx}^{(ih)} = 0$ і $M_{Cy}^{(ih)} = 0$.

Отже, в даному випадку, сили інерції еквівалентні головному вектору сил інерції в точці C , який визначається формулою (12.93):

$$\bar{\Phi}^{ih} = -M \bar{a}_C, \quad (12.103)$$

і головному моменту сил інерції, момент якого дорівнює

$$M_{Cz}^{ih} = -I_z \varepsilon. \quad (12.104)$$

12.4.4. Приклади розв'язання задач методом кінетостатики

За допомогою принципу Д'Аламбера розв'язують задачі, в яких по заданому руху системи необхідно визначити реакції в'язів. При цьому виключаються всі наперед невідомі внутрішні сили. При визначенні реакцій внутрішніх в'язів системи необхідно розглядати окремі тіла системи.

Приклад 12.1. Два вантажі A і B вагою P і Q , зв'язані нерозтяжною ниткою, яка перекинута через невагомий блок, і рухаються вздовж граней нерухомої призми. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f . Визначити прискорення, з яким рухаються вантажі, і натяг нитки, якщо кути α і β відомі (рис. 12.39).

Розв'язання. Вантажі A і B рухаються поступально й прямолінійно. Припустимо, що вантаж A опускається з прискоренням \bar{a}_A . Вантажі A і B зв'язані нерозтяжною ниткою і тому вантаж B буде підніматися з прискоренням \bar{a}_B , котре за модулем дорівнює прискоренню \bar{a}_A , тобто маємо $a_A = a_B = a$.

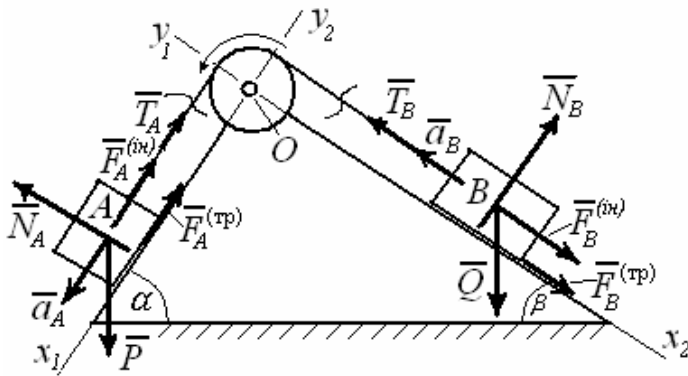


Рис. 12.39

Застосуємо принцип Д'Аламбера і покажемо зовнішні сили і сили інерції, які діють окремо на вантажі A і B : сили ваги \bar{P}, \bar{Q} ; нормальні реакція похилої площини \bar{N}_A, \bar{N}_B ; сили тертя $\bar{F}_A^{TP}, \bar{F}_B^{TP}$; натяг нитки \bar{T}_A, \bar{T}_B

(врахуємо, що за модулем $T_A = T_B = T$) і сили інерції, які при поступальному русі твердого тіла прикладені у центрі мас тіла, дорівнюють за модулем $F_A^{in} = Pa/g$, $F_B^{in} = Qa/g$ і напрямлені протилежно прискоренню центра мас кожного тіла (рис. 12.39).

Зобразимо системи координат для вантажу $A - O x_1 y_1$, а для вантажу $B - O x_2 y_2$. Тоді рівняння кінетостатики матимуть вигляд:

$$\text{для вантажу } A \quad \sum F_{kx} = P \sin \alpha - F_A^{TP} - F_B^{in} - T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N_A - P \cos \alpha = 0;$$

$$\text{для вантажу } B \quad \sum F_{kx} = Q \sin \beta + F_B^{TP} + F_A^{in} - T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N_B - Q \cos \beta = 0.$$

З другого й четвертого знаходимо: $N_A = P \cos \alpha$, $N_B = Q \cos \beta$.

Обчислюємо сили тертя: $F_A^{TP} = fN_A = fP \cos \alpha$, $F_B^{TP} = fN_B = fQ \cos \beta$.

Підставивши значення сил тертя та сил інерції в перше й третє рівняння, отримаємо:

$$Pa/g + T = P \sin \alpha - fP \cos \alpha = P(\sin \alpha - f \cos \alpha);$$

$$T - Qa/g = Q \sin \beta + fQ \cos \beta = Q(\sin \beta + f \cos \beta).$$

Звідси знаходимо:
$$a = \frac{P(\sin \alpha - f \cos \alpha) - Q(\sin \beta + f \cos \beta)}{P + Q} g,$$

$$T = \frac{PQ[\sin \alpha + \sin \beta - f(\cos \alpha - \cos \beta)]}{P + Q} = \frac{2PQ}{P + Q} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + f \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Приклад 12.2. На барабан з нерухомою віссю обертання O , який можна вважати однорідним циліндром і який має радіус r і вагу P , намотана нерозтяжна нитка, до котрої підвішений вантаж A вагою P_1 (рис. 12.40,а). Знайти кутове прискорення барабана і натяг нитки, якщо вантаж A буде наданий самому собі. Силою тертя на осі барабана й масою нитки знехтувати.

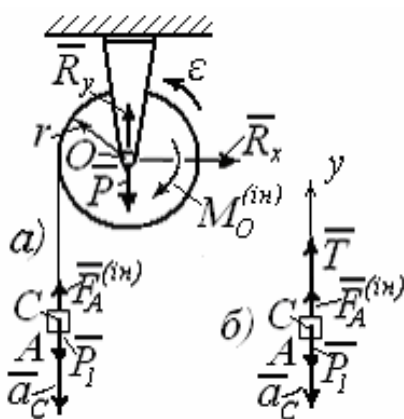


Рис. 12.40

Розв'язання. Розглянемо механічну систему, котра складається з вантажу A , що рухається поступально, і барабана, який обертається навколо нерухомої осі O . На тіла системи діють дві активні сили \bar{P} і \bar{P}_1 . Звільнимо систему від зовнішніх в'язів (підшипник O) – замінимо дію підшипника на барабан вертикальною й горизонтальною складовими реакціями \bar{R}_x , \bar{R}_y . Зобразимо також

прискорення \bar{a}_C центра ваги C вантажу й кутове прискорення ϵ барабана.

Застосуємо принцип Д'Аламбера і прикладемо умовно до тіл системи сили інерції (рис. 12.40,а). Вантаж рухається поступально – тому сила інерції вантажу \bar{F}_A^{in} спрямована протилежно прискоренню \bar{a}_C центра ваги C вантажу A , а за модулем

$$F_A^{in} = P_1 a_C / g = P_1 r \epsilon / g,$$

де враховано, що $a_C = r \epsilon$.

Ось обертання барабана O , який вважаємо однорідним циліндром, є головною віссю інерції тіла. У такому випадку головний вектор сил інерції $\bar{R}^{in} = 0$, а момент сили інерції еквівалентні парі сил інерції, що лежить у площині, яка перпендикулярна осі обертання. Пара сил інерції намагається

обертати барабан у напрямі протилежному напрямку кутового прискорення ε , а момент цієї пари згідно (12.102) дорівнює

$$M_O^{ih} = -I_O \varepsilon = -P r^2 \varepsilon / 2g,$$

де $I_O = P r^2 / 2g$ – момент інерції барабана відносно його осі O .

На підставі принципу Д'Аламбера беручи до уваги, що моменти відносно точки O сили P і сил реакцій барабана \bar{R}_x, \bar{R}_y дорівнюють нулю, отримаємо таке рівняння

$$P_1 r - F_A^{ih} r - M_O^{ih} = 0$$

або

$$P_1 r - P_1 r^2 \varepsilon / g - P r^2 \varepsilon / 2g = 0.$$

Звідки кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{2gP_1}{(2P_1 + P)r}.$$

Для визначення натягу нитки розглянемо окремо вантаж A , на який діє сила ваги \bar{P}_1 , натяг нитки \bar{T} і сила інерції \bar{F}_A^{ih} (рис. 7.5,б). На підставі принципу Д'Аламбера отримаємо

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = T + F_A^{ih} - P_1 = 0.$$

З цього рівняння натяг нитки

$$T = P_1 - \bar{F}_A^{ih} = P_1 \left(1 - \frac{r\varepsilon}{g}\right) = \frac{P_1 P}{2P_1 + P}.$$

Приклад 12.3. Вантаж M масою m_1 , опускається вертикально вниз і приводить до руху барабан A масою m_2 за допомогою гнучкої нерозтяжної нитки, що перекинута через блок O масою m_3 (рис. 8.6, а). Барабан котиться по похилій площині, яка складає кут α з горизонтом. Вважаючи блок і барабан однорідними круговими дисками, знайти прискорення центра ваги барабана і натяг лівої і правої частини нитки.

Розв'язання. Зобразимо на схемі системи, котра включає вантаж M , барабан A , гнучку нитку і блок O (рис. 12.41, а) зовнішні сили:

сили ваги $\bar{P} = m_1 \bar{g}$, $\bar{Q} = m_3 \bar{g}$, $\bar{G} = m_2 \bar{g}$ – це активні сили;
 реакції в'язей $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{N}, \bar{F}_A^{mp}$.

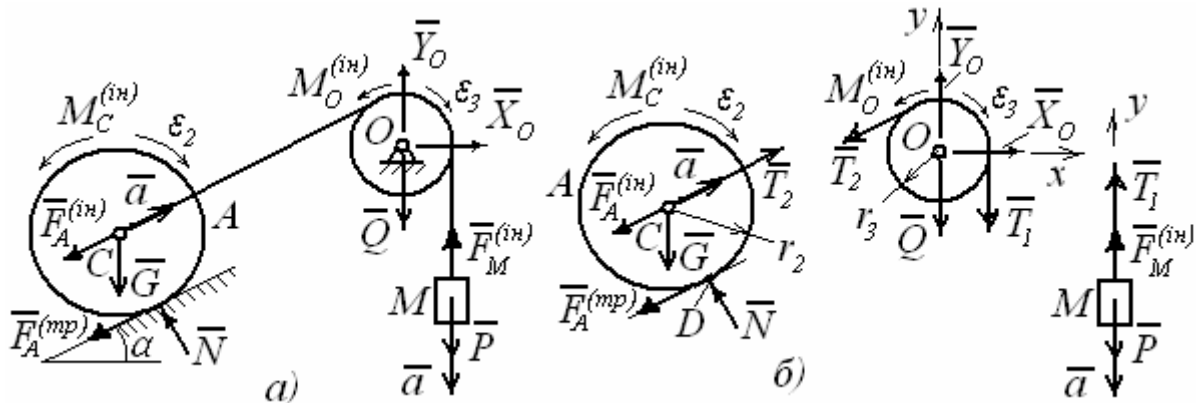


Рис. 12.41

Покажемо також сили інерції тіл системи.

Барабан A здійснює плоскопаралельний рух і його вісь Cz , яка перпендикулярна площині руху і рисунка, є головною віссю інерції тіла, отже, сили інерції еквівалентні головному вектору сил інерції в точці C , який визначається формулою (12.103),

$$\bar{F}_A^{in} = -m_2 \bar{a}$$

і головному моменту сил інерції, момент якого дорівнює (12.104)

$$M_C^{in} = -I_{Cz} \varepsilon_2$$

$$M_C^{in} = -I_{Cz} \varepsilon_2 = -\frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{a}{r_2} = -m_2 r_2 a / 2,$$

де $I_{Cz} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ – момент інерції барабана, що має радіус r_2 , відносно його осі Cz ,

$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_C}{r_2} \right) = \frac{dv_C}{r_2 dt} = \frac{a}{r_2}$ – кутове прискорення барабана, $\omega_2 = v_C / r_2$ –

кутова швидкість барабана.

Блок O має нерухому вісь обертання Oz , яка перпендикулярна площині руху і яка є головною віссю інерції тіла. У такому випадку головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}^{in} = 0$, а сили інерції еквівалентні парі сил інерції, модуль якої

$$M_O^{in} = I_{Oz} \varepsilon_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} \cdot \frac{a}{r_1} = \frac{m_3 r_3 a}{2}.$$

Тут $I_{Oz} = \frac{m_3 r_3^2}{2}$ – момент інерції блока, радіус якого r_3 , відносно його осі

Oz , $\varepsilon_3 = \frac{a}{r_3}$ – кутове прискорення блока.

Вантаж M рухається поступально – тому головний вектор сил інерції вантажу дорівнює

$$F_M^{in} = m_1 a.$$

На тіла системи (рис. 12.41,а) діють сили, які складають плоску систему сил, для рівноваги якої можна скласти три рівняння рівноваги. Але в ці рівняння входять п'ять невідомих ($\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{N}, \bar{F}_A^{mp}, \bar{a}$) (усі сили інерції і моменти сил інерції визначаються за допомогою невідомого прискорення \bar{a}) і тому для розв'язання задачі розглянемо за допомогою принципу Д'Аламбера окремо кожне тіло системи (рис. 12.41,б). Тут до зовнішніх сил і сил інерції, які діють на тіла, додамо реакцію натягу нитки: на ділянці AO – \bar{T}_2 , а на ділянці OM – \bar{T}_1 . Складемо для кожного тіла рівняння кінетостатики:

барабан A
$$\sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) = F_A^{in} r_2 + M_C^{in} + G r_2 \sin \alpha - T_2 r_2 = 0,$$

звідки
$$T_2 = F_A^{(in)} + \frac{M_C^{in}}{r_2} + G r_2 \sin \alpha = m_2 (a + a/2 + g \sin \alpha) =$$

$$= m_2 (3a/2 + g \sin \alpha);$$

вантаж M
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = T_1 + F_M^{in} - P = 0,$$

отже
$$T_1 = m_1 (g - a);$$

блок O
$$\sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = T_2 r_3 + M_O^{in} - T_1 r_3 = 0.$$

В останню рівність підставимо значення T_1 і T_2 і отримаємо

$$m_2(3a/2 + g \sin \alpha) + m_3 a/2 - m_1(g - a) = 0,$$

звідки
$$a = 2g \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2}.$$

Далі знаходимо натяг ниток:

$$T_1 = m_1 g \left(1 - 2 \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2} \right) = m_1 g \frac{m_3 + m_2(3 + 2 \sin \alpha)}{2m_1 + m_3 + 3m_2};$$

$$T_2 = m_2 g \left(3 \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2} + \sin \alpha \right) = m_2 g \frac{m_1(3 + 2 \sin \alpha) + m_3 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2}.$$

12.4.5. Динамічні реакції при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі Az (рис. 12.42) зі сталою кутовою швидкістю ω , під дією сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$,

головний вектор яких дорівнює $\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_k$, а головний момент відносно точки

A дорівнює $\bar{M}_A = \sum_{k=1}^n \bar{M}_A(\bar{F}_k)$. Оскільки обертання рівномірне, то кутове прискорення дорівнює нулю ($\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$) і тому проекція

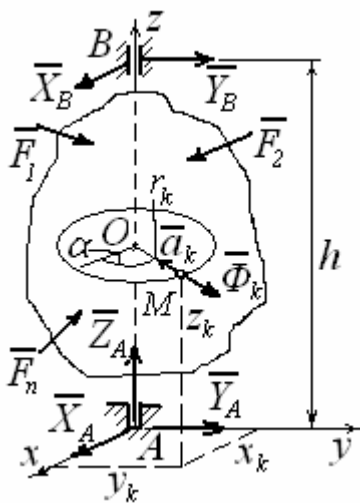


Рис. 12.42

головного моменту сил інерції на ось z також дорівнює нулю ($M_{Oz}^{(in)} = -I_z \varepsilon = 0$). Отже, проекція головного моменту зовнішніх сил на вісь обертання з останнього рівняння (12.93) дорівнює нулю, тобто

$$M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0 \text{ і тому } \bar{M}_A \text{ лежить в площині } Axu.$$

Визначимо реакції підшипника B і

підп'ятника A .

Зобразимо реакції в'язів $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ і прикладемо до кожної точки M тіла силу інерції $\bar{\Phi}_k$. Так як обертання тіла рівномірне, то $\varepsilon = 0$ і сила інерції (відцентрова) напрямлена вздовж радіуса r_k траєкторії точки протилежно її прискоренню a_k . Модуль сили інерції дорівнює

$$\Phi_k = m_k a_k = m_k r_k \omega^2,$$

де m_k – маса, $a_k = r_k \omega^2$ – доцентрове прискорення точки.

Запишемо рівняння кінетостатики:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_A + X_B + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} + Z_A &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) - Y_B h - \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} z_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + X_B h + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} z_k &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.105)$$

де $\sum_{k=1}^n F_{kx}, \sum_{k=1}^n F_{ky}, \sum_{k=1}^n F_{kz}, \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k), \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k)$ – проекції головного вектора і головного моменту активних сил на осі координат.

Оскільки $\Phi_{kx} = m_k r_k \omega^2 \cos \alpha = m_k x_k \omega^2$, $\Phi_{ky} = m_k r_k \omega^2 \sin \alpha = m_k y_k \omega^2$, то маємо проекції головного вектора і головного моменту сил інерції відносно осей координат

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k \omega^2 = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k x_k = \omega^2 M x_C, \\ \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k \omega^2 = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k y_k = \omega^2 M y_C, \\ \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} z_k &= \sum_{k=1}^n m_k y_k \omega^2 z_k = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = \omega^2 I_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (12.106)$$

$$\sum_{k=1}^n \Phi_{kx} z_k = \sum_{k=1}^n m_k x_k \omega^2 z_k = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz},$$

де $\sum_{k=1}^n m_k x_k = Mx_C$, $\sum_{k=1}^n m_k y_k = My_C$, M – маса тіла, x_C , y_C – координати центра мас,

$\sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = I_{yz}$, $\sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = I_{xz}$ – відцентрові моменти інерції тіла.

Після перетворень рівняння (12.105) приймають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_A + X_B + \omega^2 Mx_C &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_A + Y_B + \omega^2 My_C &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} + Z_A &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) - Y_B h - \omega^2 I_{yz} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + X_B h + \omega^2 I_{xz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.107)$$

Рівняння (12.107) дають можливість визначити реакції опор, які, крім реакції Z_A , залежать від активних сил і від сил інерції. Тобто, кожна реакція має статичну складову, яка спричинена діючими активними силами, і динамічну складову, котра залежить від сил інерції.

Статичні реакції знаходять за умовою, що тіло не рухається, тобто $\omega = 0$, а динамічну складову реакцій обчислюють з тих же рівнянь, якщо прийняти, що активні сили відсутні, отже

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0.$$

При швидкому обертанні динамічні складові реакцій можуть мати порівняно зі статичними дуже великі значення, що небезпечно для працездатності механізму.

Для того, щоб обертання не викликало додаткових динамічних навантажень на підшипники повинні виконуватись умови

$$x_C = 0, y_C = 0, I_{yz} = 0, I_{xz} = 0. \quad (12.108)$$

Умови (12.108) означають, що:

- 1) центр мас тіла повинен знаходитись на осі обертання;
- 2) ось обертання повинна бути головною віссю інерції тіла.

Зауважимо, що отримані висновки справедливі і для нерівномірного обертання. Проблема ліквідації додаткових динамічних реакцій в підшипниках машин і механізмів є однією із важливіших в техніці.

Приклад 12.4. Лебідка, яка встановлена на балці AB , піднімає за допомогою троса вантаж вагою P . Радіус барабана, дорівнює r , а головний момент інерції відносно осі барабана разом з ротором електродвигуна I_z . Нехтуючи вагою троса й тертям, визначити динамічні реакції опор A і B балки, якщо вантаж піднімається з прискоренням a . Розміри показані на рис. 12.43,а.

Розв'язання. Застосуємо принцип Д'Аламбера й покажемо сили інерції (рис. 12.43,б). Сила інерції вантажу, який рухається поступально, за модулем дорівнює $\Phi^{in} = Pa/g$ і спрямована протилежно прискоренню центра мас \bar{a} . Кутове прискорення барабана ε напрямлено за рухом годинникової стрілки, а головний момент сил інерції M_z^{in} спрямован протилежно кутовому прискоренню, тобто протилежно руху годинникової стрілки й дорівнює

$$M_z^{in} = I_z \varepsilon = I_z \frac{a}{r},$$

де $\varepsilon = \frac{a}{r}$.

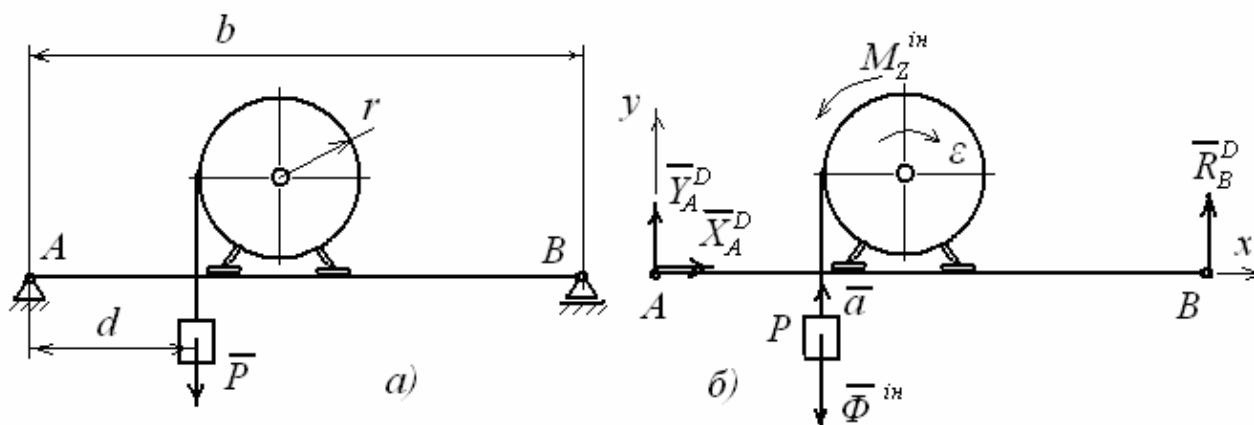


Рис. 12.43

Головний вектор сил інерції барабана дорівнює нулю, так як його центр мас знаходиться на осі обертання і тому прискорення центра мас дорівнює нулю. Активні сили не враховуємо (це вага вантажу, вага лебідки, обертаючий момент двигуна та ін.). Зображаємо на рис. 12.43,б тільки динамічні реакції опор $\bar{X}_A^D, \bar{Y}_A^D, \bar{R}_B^D$ і складаємо рівняння кінетостатики:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_A^D = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{kA} = M_z^{in} + R_B^D \cdot b - \Phi^{in} d = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{xB}(\bar{F}_k) = M_z^{in} - Y_A^D \cdot b + \Phi^{in} (b-d) = 0.$$

Ураховуючи сили інерції, знаходимо динамічні реакції опор:

$$X_A^D = 0, \quad Y_A^D = [I_z/r + P(b-d)/g]a/b, \quad R_B^D = (Pa/g - I_z/r)a/b.$$

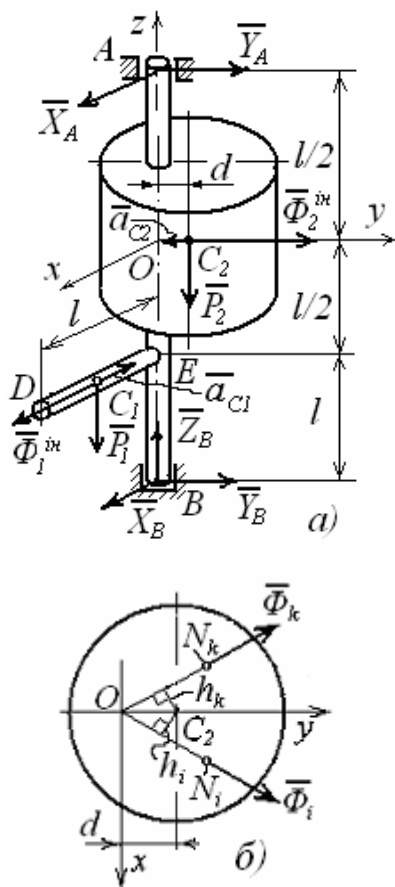


Рис. 12.44

Приклад 12.5. На вертикальній осі, яка закріплена в підшипнику A і під'ятнику B , жорстко закріплено тонкий стержень DE , довжина якого l і вага P_1 , та круглий однорідний циліндр вагою P_2 . Ось циліндра паралельна AB , а ексцентриситет до осі обертання дорівнює відстані $OC_2 = d$. Стержень DE розташовано перпендикулярно площині ABC_2 . Конструкція обертається навколо осі AB зі сталою кутовою швидкістю ω . Нехтуючи діаметром осі AB і стержня DE , визначити реакції опор A і B . Розміри указані на рис. 12.44, a .

Розв'язання. Проведемо осі координат, як показано на рис. 12.44,а, тобто ось z співпадає з прямою AB , ось y з OC_2 і ось x паралельно стержню ED . Покажемо реакції підшипника A –

\bar{X}_A, \bar{Y}_A і реакції під'ятника B – $\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B$.

Застосуємо принцип Д'Аламбера. Відомо, що при $\omega = const$, буде $\varepsilon = 0$, а сили інерції точок для циліндра і стержня DE будуть спрямовані протилежно доцентровому прискоренню їх точок.

Для циліндра приведена до центра час C_2 сила інерції

$$\Phi_2^{ih} = m_2 a_{C_2} = P_2 d \omega^2 / g,$$

де $a_{C_2} = d \omega^2$ – прискорення центра мас.

Для стержня DE сила інерції

$$\Phi_1^{ih} = m_1 a_{C_1} = P_1 l \omega^2 / (2g),$$

де $a_{C_1} = l \omega^2 / 2$ – прискорення центра мас.

Запишемо рівняння кінестатики:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_A + X_B + \Phi_1^{ih} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_A + Y_B + \Phi_2^{ih} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = Z_A - P_1 - P_2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = -P_2 d - Y_A l / 2 + 1,5 \cdot l Y_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = X_A l / 2 - 1,5 X_B l + P_1 l / 2 - \Phi_1^{ih} l / 2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0$$

або

$$X_A + X_B = -P_1 l \omega^2 / (2g); \quad Y_A + Y_B = -P_2 d \omega^2 / g;$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_A - 3Y_B = -2P_2 d / l; \quad X_A - 3X_B = -P_1 + P_1 l \omega^2 / (2g).$$

З цих рівнянь знаходимо реакції опор:

$$X_B = P_1 (1 - l \omega^2 / g) / 4; \quad X_A = -P_1 (1 + l \omega^2 / g) / 4;$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_B = P_2 d (2/l - \omega^2 / g) / 4; \quad Y_A = P_2 d (2/l + 3\omega^2 / g) / 4.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте закони Ньютона.
2. Яка система відліку називається інерціальною?
3. Який закон називається основним законом динаміки?
4. Що розуміють під «інертністю» матеріальної точки?
5. Які рівняння називаються диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
6. Які рівняння називаються натуральними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
7. Сформулюйте дві основні задачі динаміки матеріальної точки.
8. Яка різниця між диференціальними рівняннями вільної і невільної матеріальної точки?
9. Як зміниться диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки при її складному русі?
10. Під дією якої сили здійснюються вільні коливання матеріальної точки?
11. Який вид має диференціальне рівняння вільних коливань і який його загальний розв'язок?
12. В якому положенні доцільно розміщувати початок відліку?
13. Що називається амплітудою, періодом і частотою вільних коливань матеріальної точки і від чого вони залежать?
14. Який вид має графік вільних коливань матеріальної точки?
15. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих коливань і який його загальний розв'язок?
16. Який вид має загальний розв'язок диференціальне рівняння затухаючих коливань при $h = \omega_0$, $h < \omega_0$ і $h > \omega_0$.
17. Що називається декрементом і логарифмічним декрементом коливань?
18. Який вид мають графіки затухаючих коливань і періодичного руху матеріальної точки?
19. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору і який його загальний розв'язок?
20. При якій умові виникає резонанс і який вид мають рівняння і графік вимушених коливань матеріальної точки при резонансі?
21. Надайте визначення кінематичного збудження коливань матеріальної точки.
22. Який вид мають графіки АЧХ і ФЧХ дисипативної і консервативної систем?
23. Чому дорівнюють значення ω_{\max} , $W(\omega_{\max})$ і $\varphi(\omega_{\max})$ при дослідженні АЧХ на екстремум?
24. Надайте поняття, формулу властивості коефіцієнта динамічності механічної системи.
25. Під дією якої сили здійснюються вільні коливання матеріальної точки?

26. Який вид має диференціальне рівняння вільних коливань і який його загальний розв'язок?
27. В якому положенні доцільно розмішувати початок відліку?
28. Що називається амплітудою, періодом і частотою вільних коливань матеріальної точки і від чого вони залежать?
29. Який вид має графік вільних коливань матеріальної точки?
30. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих коливань і який його загальний розв'язок?
31. Який вид має загальний розв'язок диференціальне рівняння затухаючих коливань при $h = \omega_0$, $h < \omega_0$ і $h > \omega_0$.
32. Що називають декрементом і логарифмічним декрементом коливань?
33. Який вид мають графіки затухаючих коливань і періодичного руху матеріальної точки?
34. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору і який його загальний розв'язок?
35. При якій умові виникає резонанс і який вид мають рівняння і графік вимушених коливань матеріальної точки при резонансі?
36. Дайте визначення кінематичного збудження коливань матеріальної точки.
37. Який вид мають графіки АЧХ і ФЧХ дисипативної і консервативної систем?
38. Чому дорівнюють значення ω_{\max} , $W(\omega_{\max})$ і $\varphi(\omega_{\max})$ при дослідженні АЧХ на екстремум?
39. Наведіть поняття, формулу властивості коефіцієнта динамічності механічної системи.
40. Чому дорівнює і як спрямована сила інерції матеріальної точки?
41. Як визначається і як спрямована сила інерції матеріальної точки, що рівномірно рухається по дузі кола?
42. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для вільної матеріальної точки?
43. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для механічної системи, якщо розглядаються зовнішні й внутрішні сили, що діють на точки системи.
44. Чи враховують внутрішні сили механічної системи при використанні принципу Д'Аламбера для механічної системи?
45. Чому дорівнює головний вектор і головний момент сил інерції при поступальному русі твердого тіла?
46. Чому дорівнює проекція головного моменту сил інерції твердого тіла на нерухому вісь обертання?
47. Як визначають головний вектор і головний момент сил інерції при плоскому русі тіла, котре має головну вісь інерції тіла, що перпендикулярна площині руху?
48. Які умови повинні виконуватись при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі, щоб динамічні реакції підшипників дорівнювали нулю?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бать М.И., Джанилидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1. – М.: Наука, 1984. – 504 с.
2. Бугаєнко Г.О. Курс теоретичної механіки. – К.: Вища школа, 1968. – 409 с.
3. Бутенин Н.В. Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 240 с.
4. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1967. – 468 с.
5. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1966. – 596 с.
6. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1981. – 303 с.
7. Глонь О.А. Основы теоретической механики. – К.: ВКЦ «Софія», 1997. – 144 с.
8. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1974. – 528 с.
9. Кильчевский Н.А., Ремизова Н.И., Кильчевская Е.Н. Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.
10. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
11. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
12. Павловский М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
13. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. – Ч. 1. – К.: Вища школа, 1985. – 351 с.
14. Попов М.В. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1986. – 335 с.
15. Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. Курс теоретической механики. – К.: Вища школа, 1973. – 359 с.

16. Старжинский В.М. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
17. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2001. – 416 с.
18. Теоретична механіка: Навч. пос. для технічних вузів. Л.Г.Романенко, В.Г.Солодов. – Харків: ХДАДТУ, 2000. – 268 с.
19. Турбін Б.І. Теоретична механіка. – К.: Держсільгоспвидав УРСР, 1962. – 373 с.
20. Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О. Теоретична механіка: Навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей і завдання для контрольних робіт студентів факультету післядипломної освіти. – Харків: ХДАМГ, 2001. – 124 с.
21. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – Ч. 1. – М.: Высш. шк., 1984. – 344 с.
22. Теоретична механіка. Статика. Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів); за заг. ред. В.П.Шпачука. – Х.: ХНАМГ, 2005.
23. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., Наука, 1974.

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович,
ЗОЛОТОВ Михайло Сергійович,
СКЛЯРОВ В'ячеслав Олександрович

Конспект лекцій з курсу «Технічна механіка». Розділ І. Кінетостатика повітряних ліній електропередач (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» спеціальності „ЕСЕ”)

Редактор *М. З. Аляб'єв*

План 2010, поз. 84-Л

Підп. до друку 12.07.2010 р.	Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі.	Ум. друк. арк. 10,31
Зам. №	Тираж 100 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731 від 19.12.2001