МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей)

ЧАСТИНА ДРУГА

(Виправлено і доповнено.
Друге видання)

ХНАМГ – 2006

Методичні вказівки та контрольні роботи з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина друга. – Харків: ХНАМГ, 2006. - 71 с.

Укладачі:

А.І. Колосов,
М.Й. Кадець,
С.О. Станішевський,
О.Ю. Тихонович

Відповідальний за випуск: *М.П .Данілевський*

Редактор: *М.З. Аляб'єв*

У цих методичних вказівках та контрольних роботах з вищої математики для студентів заочної форми навчання викладено основні питання, необхідні для успішного засвоєння програми, і розв'язані типові задачі.

Кожна робота оформляється в окремому зошиті відповідно до варіанта. Кількість завдань у контрольній роботі задає викладач згідно з учбовим планом з математики по відповідної спеціальності. Для зауважень рецензента треба залишити поля, а виправлення вносити в цьому ж зошиті. Іспити можна складати тільки захистивши роботи.

Номер варіанта повинен відповідати останній цифрі номера залікової книжки (шифру) студента.

Варіант	Номера завдань контрольної роботи № 2		
1	161 171 181 191 201	211 221 231	241 251 261 271
2	162 172 182 192 202	212 222 232	242 252 262 272
3	163 173 183 193 203	213 223 233	243 253 263 273
4	164 174 184 194 204	214 224 234	244 254 264 274
5	165 175 185 195 205	215 225 235	245 255 265 275
6	166 176 186 196 206	216 226 236	246 256 266 276
7	167 177 187 197 207	217 227 237	247 257 267 277
8	168 178 188 198 208	218 228 238	248 258 268 278
9	169 179 189 199 209	219 229 239	249 259 269 279
10	170 180 190 200 210	220 230 240	250 260 270 280

Варіант	Номера завдань контрольної роботи № 3	
1	281 291 301 311 321	331 341 351 361 371
2	282 292 302 312 322	332 342 352 362 372
3	283 293 303 313 323	333 343 353 363 373
4	284 294 304 314 324	334 344 354 364 374
5	285 295 305 315 325	335 345 355 365 375
6	286 296 306 316 326	336 346 356 366 376
7	287 297 307 317 327	337 347 357 367 377
8	288 298 308 318 328	338 348 358 368 378
9	289 299 309 319 329	339 349 359 369 379
10	290 300 310 320 330	340 350 360 370 380

Оформлення роботи:
Контрольна робота № _______
з вищої математики
студента ______________________________
_______ курсу ______ № групи _______
шифр студента __________
Домашня адреса ____
____
Підпис __________________

ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Невизначений інтеграл
Означення. Основні властивості

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$, якщо її похідна дорівнює $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

Якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, то $F(x)+C$, де C – довільна стала, дає нам сукупність усіх первісних функції $f(x)$ і називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$. Позначення

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Таблиця основних інтегралів:

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$.

1'. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

1''. $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$.

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$.

3'. $\int e^u du = e^u + C$.

4. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

5. $\int \cos u du = \sin u + C$.

6. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$.

7. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$.

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$.

9. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + m}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + m}\right| + C \quad (m \neq 0)$.

10. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$.

де $u=u(x)$ – деяка функція від x.

Приклад. $\int e^{x^3} 3x^2 dx = \int e^{x^3} d(x^3) = e^{x^3} + C$.

Ми скористалися формулою 3', де $u=x^3$.

Інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du$$

застосовується для обчислення інтегралів вигляду

$\int P(x) e^{ax} dx$, $\int P(x) \cos bx dx$,

$\int P(x) \sin bx dx$, $\int P(x) \ln x dx$

і деяких інших, де $P(x)$ – многочлен.

Приклад

$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{matrix} u = x; & dv = e^{3x} dx \\ du = dx; & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

Приклад

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Приклад

$$\int x^5 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; & dv = x^5 dx \\ du = \frac{dx}{x}; & v = \frac{x^6}{6} \end{matrix} \right| = \frac{x^6 \ln x}{6} - \int \frac{x^6}{6x} dx = \frac{x^6 \ln x}{6} - \frac{x^6}{36} + C.$$

Зауважимо, що в інтегралах вигляду $\int x^n \cos bx dx, \int x^n \sin bx dx,$ $\int x^n e^{ax} dx$ завжди за *u* беремо x^n, а в інтегралах вигляду $\int x^n \ln x dx,$ $\int x^n \arcsin bx dx,$ $\int x^n arctg bx dx$ за *u* беремо відповідно *lnx*, *arcsinbx*, *arctgbx*.

Інтегрування раціональних дробів

Раціональний дріб (відношення многочленів будь-яких степенів) називається правильним, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника. У протилежному разі він називається неправильним.

З неправильного дробу треба виділити цілу частину. Для цього чисельник ділять на знаменник за методом кута:

Приклад. Виділити цілу частину з неправильного раціонального дробу

$$\frac{2x^3+3x^2-x+6}{x^2+2x+3}.$$

Розв'язання. Поділимо многочлени за методом кута:

$$\begin{array}{r|l} -\;2x^3+3x^2-x+6 & x^2+2x+3 \\ \underline{2x^3+4x^2+6x} & \overline{2x-1} \\ -\;-x^2-7x+6 & \\ \underline{-x^2-2x-3} & \\ -5x+9 & \end{array}$$

Тут 2x – 1 – ціла частина, -5x + 9 – залишок.

Отже: $\dfrac{2x^3+3x^2-x+6}{x^2+2x+3}=2x-1+\dfrac{-5x+9}{x^2+2x+3}$

Правильний дріб розкладаємо у суму найпростіших дробів. Найпростішими дробами називаються вирази вигляду:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{B}{(x-a)^n}$, (n >1,n$\in \mathrm{N}$);

3) $\dfrac{Ex+F}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{\mathrm{Ex+F}}{(\mathrm{x^2+px+q})^{\mathrm{m}}}$, (m >1, m$\in \mathrm{N}$).

У 3) і 4) дискримінант знаменника *D*<0.

Дріб 4) розглядати не будемо.

Найпростіші дроби 1)-3) інтегруються наступним чином:

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int\frac{B}{(x-a)^n}dx=B\int(x-a)^n d(x-a)=-\frac{B}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C;$$

$\int \frac{4x+9}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{2\left(2x+4\right)+1}{x^2+4x+5}dx$ = (у чисельнику виділяємо похідну знаменника) $=2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$ (у знаменнику другого інтеграла виділяємо повний квадрат) $=2\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \int \frac{dx}{\left(x+2\right)^2+1^2} =$

$= 2\ln\left(x^2+4x+5\right) + \operatorname{arctg}\left(x+2\right) + C$.

Розклад правильного дробу в суму найпростіших і знаходження невідомих коефіцієнтів розглянемо на наступному прикладі.

. **Приклад**. Правильний дріб $\frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2}$ розкласти у суму найпростіших дробів.

Розв'язання. Спочатку розкладемо знаменник на множники

$$x^4-4x^2 = x^2\left(x-2\right)\left(x+2\right).$$

Кореню x = 0 (кратність 2) відповідає два доданки, кореню x = 2 відповідає один доданок, кореню x = -2 відповідає один доданок. Коефіцієнти A, B, C і D невідомі

Отже: $\frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2} = \frac{x^3+2x^2+8}{x^2\left(x-2\right)\left(x+2\right)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C і D зводимо до спільного знаменника праву частину і знаменники відкидаємо.

$$x^3+2x^2+8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2) .$$

У правій частині розкриємо дужки та згрупуємо за степенями *x*.

$$x^3+2x^2+8 = Ax^2-4A+Bx^3-4Bx+Cx^3+2Cx^2+Dx^3-2Dx^2 =$$

$$= (B+C+D)x^3+(A+2C-2D)x^2-4Bx-4A.$$

Маємо тотожність. Многочлен ліворуч з відомими коефіцієнтами дорівнює многочлену праворуч з невідомими коефіцієнтами.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях *x*, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з чотирма невідомими: A,B,C,D.

$$\begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} B+C+D=1; \\ A+2C-2D=2; \\ -4B=0; \quad \Rightarrow \quad B=0, \\ -4A=8; \quad \Rightarrow \quad A=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C+D=1; \\ 2C-2D=4; \end{cases} \quad C=\frac{3}{2};\ D=-\frac{1}{2}.$$

Отже: $\dfrac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2}=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-2}-\dfrac{\frac{1}{2}}{x+2}$.

Інтегрування виразів, що містять лінійну ірраціональність

Інтеграл від виразу, який містить корені різного степеня з одного лінійного виразу *ax*+*b* в цілих додатних степенях, зводиться заміною $ax+b=t^n$ до інтеграла від раціонального дробу, де *n* – найменше спільне кратне показників коренів.

Приклад. Обчислити $\int \dfrac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx$.

Розв’язання.

$$\int \frac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx=\left|\begin{matrix} x+5=t^6; & x=t^6-5 \\ dx=6t^5dt; & t=\sqrt[6]{x+5}\end{matrix}\right|=\int\frac{(t^6-5+2t^3)6t^5dt}{t^2}=$$

$$=6\int\left(t^6+2t^3-5\right)\cdot t^3dt=6\int\left(t^9+2t^6-5t^3\right)dt=6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{2t^7}{7}-\frac{5t^4}{4}\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^5}{10}+\frac{2\left(\sqrt[6]{x+5}\right)^7}{7}-\frac{5\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2}{4}\right)+C \qquad .$$

Приклад. Обчислити $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+2}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2}=\left|\begin{matrix} x=t^2; & dx=2tdt \\ t=\sqrt{x} & \end{matrix}\right|=\int\frac{2tdt}{t+2}=2\int\frac{t+2-2}{t+2}dt=2\int dt-4\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=2t-4\,ln|t+2|+C=2\sqrt{x}-4\,ln(\sqrt{x}+2)+C\,.$$

Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегрування виразів вигляду $\sin^p x\cos^q x$, де *p* та *q* – цілі числа.

а) якщо *p* або *q* - непарне число, ми відділяємо від непарного степеня один множник та приєднуємо його до диференціала. Потім увесь підінтегральний вираз виражаємо через одну функцію:

Приклад. Знайти $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \int \sin^2 d(\sin x) - \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C;$$

б) якщо p та q – парні невід'ємні, знижуємо степені, користуючись формулами:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Приклад. Знайти $\int \sin^2 3x dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

***Інтегрування виразів, які раціонально залежать від* sinx *та* cosx**

Для інтегрування таких виразів застосовується підстановка $tg\frac{x}{2} = t$.

Тоді: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.,

$x = 2arctgt$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$,

Приклад. Знайти $\int \dfrac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання. $t = tg\dfrac{x}{2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Тоді $$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Інтегрування виразів, які містять ірраціональності від двочленів другого степеня

Для виразу $\sqrt{x^2+a^2}$, робимо заміну $x = atgt$, тоді $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t$, $dx = a\sec^2 tdt$, $t = arctg\dfrac{x}{a}$.

Для виразу $\sqrt{a^2-x^2}$ робимо заміну $x = a\sin t$, тоді $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos tdt$, $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$.

Для виразу $\sqrt{x^2-a^2}$ робимо заміну $x = a\sec t$, тоді $\sqrt{x^2-a^2} = atgt$, $dx = a\sec t\cdot tgtdt$, $t = \arccos\dfrac{a}{x}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x = a\sin t$, тоді

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos t\, a\cos tdt = a^2\int\cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}2\sin t\cdot\cos t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

При обчисленні останнього доданка враховано, що

$$\sin t = \frac{x}{a}, \qquad \cos t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

Визначений інтеграл

Означення.Нехай на замкненому проміжку [a; b] задана неперервна функція $y = f(x)$ і $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ - довільне розбиття відрізка [a; b].

Сума вигляду $S_n(f) = f(c_1)\Delta_1 + f(c_2)\Delta_2 + \ldots + f(c_n)\Delta_n$,

де $c_к$ – деяке число з сегмента $\left[x_{k-1}; x_k\right]$, а $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$, називається інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку [a; b].

Визначеним інтегралом від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;\, b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому подрібненні розбиття відрізка $[a;\, b]$ і $max\ \Delta_k \to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim S_n(f).$$

Число a називається нижньою межею інтегрування, b – верхньою.

Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо $F(x)$ - деяка первісна функції $f(x)$, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Останню різницю часто позначають $F(x)\Big|_a^b$, а саму формулу називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^\pi \sin x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 2.$$

Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x)>0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$ $(a<b)$. 2. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. 4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

5. Якщо $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку$[a,b]$,то можна знайти таку точку c між a і $в$, що $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

Заміна змінної у визначеному інтегралі

У визначеному інтегралі заміна змінної може бути виконана двома способами:

1. У визначеному інтегралі безпосередньо проводиться заміна змінної; при цьому змінюється не тільки підінтегральний вираз, але й межі інтегрування.
2. Заміна змінної повністю проводиться в невизначеному інтегралі, а формула Ньютона-Лейбніца застосовується лише до кінцевого результату.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}} = J$.

Розв'язання. I спосіб.

$$J = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{3x-2}; & x = \dfrac{u^2+2}{3}; & dx = \dfrac{2udu}{3}; & \\ x_н = 1; & x_в = 6; & u_н = \sqrt{3-2} = 1; & u_в = \sqrt{3\cdot 6-2} = 4 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_1^4 \frac{2}{3}\cdot\frac{udu}{1+u} = \frac{2}{3}\int\limits_1^4 \frac{u+1-1}{u+1}du = \frac{2}{3}\left(\int\limits_1^4 du - \int\limits_1^4 \frac{du}{u+1}\right) =$$

(формула $u = \sqrt{3x-2}$ дозволяє нам отримати нові межі)

$$= \frac{2}{3}\left(u\Big|_1^4 - \ln|u+1|\Big|_1^4\right) = \frac{2}{3}(3 - \ln 5 + \ln 2) = 2 - \frac{2}{3}\ln\frac{5}{2} .$$

II спосіб.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}} = \left| u = \sqrt{3x-2}; \quad x = \frac{u^2+2}{3}; \quad dx = \frac{2udu}{3} \right| =$$

$$\int \frac{2}{3}\cdot\frac{udu}{1+u} = \frac{2}{3}\int\frac{udu}{u+1} = \frac{2}{3}\int\frac{u+1-1}{u+1}du = \frac{2}{3}\int du - \frac{2}{3}\int\frac{du}{u+1} =$$

$$= \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}\ln|u+1| + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x-2} - \frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{3x-2}+1\right| + C .$$

Тоді

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\Big|_1^6 - \frac{2}{3}\ln\left|\sqrt{3x-2}+1\right|\Big|_1^6 =$$

$$= \frac{2}{3}(4-1) - \frac{2}{3}(\ln 5 - \ln 2) = 2 - \frac{2}{3}\ln\frac{5}{2} .$$

Цей приклад показує, що повертатись до початкової змінної у визначеному інтегралі не має сенсу.

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \ .$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x dx$.

Розв'язання.

$$\int_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x^2+7x+12; & dv = \cos x dx \\ du = (2x+7)dx; & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2+7x+12)\sin x\Big|_{-4}^{0} - \int_{-4}^{0}(2x+7)\sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 2x+7; & dv = \sin x dx \\ du = 2dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} = (2x+7)\cos x\Big|_{-4}^{0} - \int_{-4}^{0} 2\cos x dx =$$

$$= 7-(-1)\cos(-4) - 2\sin x\Big|_{-4}^{0} = 7+\cos 4 - 2\sin 4 \ .$$

Тут двічі застосували метод інтегрування частинами.

Обчислення площі плоскої фігури

Площа фігури, обмеженої двома неперервними кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та двома прямими $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, причому $f_2(x) > f_1(x)$ на інтервалі $(a;b)$,обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \ .$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 3x + 2$ та прямою $y = x + 2$.

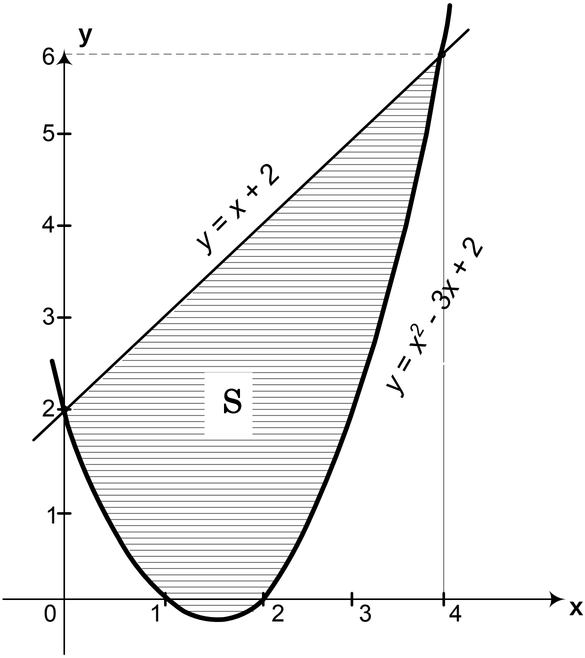
Розв'язання. Спочатку знайдемо точки перетину двох даних ліній. Для цього треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

Її розв'язок: $x_1 = 0$; $y_1 = 2$; $x_2 = 4$; $y_2 = 6$.

Тоді $a=0$; $b=4$; $f_2(x) = x + 2$; $f_1(x) = x^2 - 3x + 2$;

Нижче на рисунку наведено фігуру, площу якої треба знайти.



$$S = \int_0^4 \Big((x+2) - (x^2 - 3x + 2)\Big)dx = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}.$$

Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Якщо крива задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t_1 \le t \le t_2 \, ,$$

то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt \, .$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad 0 \le t \le 2\pi \, .$$

Розв'язання.

$$x_t' = 2(1 - \cos t); \qquad y_t' = 2\sin t;$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1-2\cos t+\cos^2 t)+4\sin^2 t}\,dt=$$

$$2\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=16\,.$$

Якщо крива задана рівнянням $y=f(x)$ ($a\le x\le b$), то довжина її дуги визначається за формулою

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln(\cos x)$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання.

$$f'(x)=-tgx;\quad 1+(f'(x))^2=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}\,.$$

Скористаємось формулою:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\,.$$

Отже: $L=\ln\left|tg\,\dfrac{3}{8}\pi\right|$.

Якщо крива задана у полярній системі координат рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$,де ($\alpha\le\varphi\le\beta$), то довжина її дуги визначається так:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi\,.$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. $\rho'=\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$;

$$L=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{3}{4}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

Обчислення об'єму тіла обертання

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, віссю абсцис та прямими $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, знаходиться за формулою

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx .$$

Аналогічно, об'єм тіла обертання навколо осі ординат фігури, обмеженої кривою $x = f(y)$, віссю ординат та прямими $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, обчислюється за формулою

$$V = \pi\int_c^d \left(f(y)\right)^2 dy .$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$ та прямою $y = 3 - x$.

Розв'язання. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = 3 - x \end{cases},$$

отримаємо дві точки перетину параболи та прямої:

$M_1(1;2)$, $M_2(3;0)$.

Спочатку знайдемо V_1 - об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, прямими x=1 та x=3 та віссю абсцис

$$V_1 = \pi\int_1^3 \left(3x - x^2\right)^2 dx = 6{,}4\pi .$$

Далі знаходимо V_2 - об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої прямою $y = 3 - x$, прямими x=1, x=3 та віссю абсцис

$$V_2 = \pi\int_1^3 (3 - x)^2 dx = \frac{8}{3}\pi .$$

Тоді шуканий об'єм

$$V = V_1 - V_2 = 6{,}4\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{56}{15}\pi \text{ (куб.од.)}.$$

Обчислення площі поверхні тіла обертання

Площа поверхні S , яка утворення обертанням кривої $y = f(x)$, де *x є [a, в]*, навколо осі *Ox*, обчислюється за формулою

$$s = 2\pi \int_a^b \left| f(x) \right| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

Функція $y = f(x)$ повинна бути на відрізку *[a, в]* неперервною разом із своєю похідною.

Приклад. Знайти площу поверхні, утвореною обертанням петлі кривої $x = at^2$, $y = at\left(t^2 - 3\right)/3$ навколо осі Ох.

Розв'язання. З рівняння $y = 0$ обчислюємо значення параметра *t*, де петля перетинає вісь Ох.

Отже: $t \in [0, \sqrt{3}\,]$.

$$S = \left| \frac{2\pi a^2}{3} \int_0^{\sqrt{3}} t\left(t^2 - 3\right)\sqrt{4t^2 + (t^2 - 1)^2}\, dt \right| = \left| \frac{2\pi a^2}{3} \int_0^{\sqrt{3}} t\left(t^2 - 3\right)\left(t^2 + 1\right) dt \right| =$$

$$= \left| \frac{2\pi}{3} a^2 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{2\pi a^2}{3} \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) \right| = 3\pi a^2, \text{ (кв. од.)}.$$

Невласні інтеграли

Інтеграли на нескінченному проміжку. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a;+\infty]$, тоді невласним інтегралом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ називається границя } \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)dx .$$

Якщо границя існує, то інтеграл називається *збіжним*. Якщо границя не існує, то інтеграл називається *розбіжним*.

Приклад . Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{0}^{N} \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\ln\left(N^2+4\right) - \frac{1}{2}\ln 4.$$

$\ln(N^2+4)$ прямує до $+\infty$ при $N \to +\infty$.

Отже, даний інтеграл розбігається.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+4}$.

Розв'язання. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+4} = \lim\limits_{N\to\infty} \int \frac{xdx}{x^4+4} = \frac{1}{2} \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{0}^{N} \frac{d\left(x^2\right)}{\left(x^2\right)^2+2^2} =$

$= \frac{1}{4} \lim\limits_{N\to\infty} arctg \frac{x^2}{2}\Big|_0^N = \frac{1}{4} \lim\limits_{N\to\infty} arctg \frac{N^2}{2} = \frac{\pi}{8}$. Інтеграл збігається і чисельно дорівнює $\frac{\pi}{8}$.

Аналогічно визначаються інші інтеграли на нескінченному проміжку:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to\infty}} \int\limits_{-M}^{N} f(x)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int\limits_{-M}^{b} f(x)dx.$$

Інтеграл від розривної функції. Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

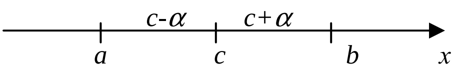
Якщо скористатися формулою Ньютона-Лейбніца, отримаємо

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2\ .$$

Ми отримали хибний результат, тобто від'ємне значення інтеграла від додатної функції, тому що застосували формулу до розривної функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна в усіх точках відрізка $[a;b]$, крім точки c. Інтеграл від такої функції беремо наступним чином:

1. Вилучаємо точку розриву разом з невеликим околом



$(\alpha>0)$.

2. Обчислюємо інтеграл по частинах відрізка, що залишились:

$$\int_{a}^{c-\alpha} f(x)dx+\int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx\ .$$

3. Переходимо до границі при $\alpha\to 0$.

Якщо ця границя існує, то беремо її як значення інтеграла. В цьому випадку інтеграл називається збіжним.

Якщо границя не існує, то інтеграл називається розбіжним, у нього ніякого числового значення немає.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_{a}^{c-\alpha} f(x)dx+\int_{c+\alpha}^{b} f(x)dx\right).$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_{-1}^{-\alpha}\frac{dx}{x^2}+\int_{\alpha}^{1}\frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\alpha}+\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\alpha}^{1}\right)=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\frac{1}{\alpha}-1-1+\frac{1}{\alpha}\right)=+\infty$$

Отже, даний інтеграл розбігається.

Кратні інтеграли

Подвійний інтеграл. Подвійний інтеграл має вигляд $I=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$

Обчислення подвійного інтегралу зводиться до обчислення повторних інтегралів. Тобто якщо $z = f(x, y)$ визначена і обмежена у області D, яка має кусково–гладку межу $\{a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, тоді

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy .$$

Причому спочатку обчислюється внутрішній інтеграл по змінній y, а одержаний результат інтегрується по змінній x.

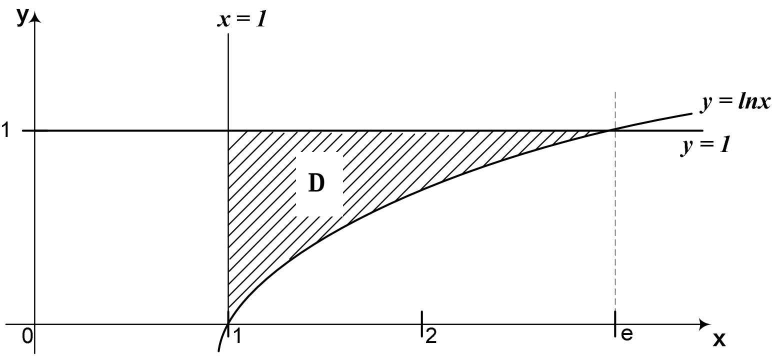
Якщо область D має межу $\{x_1(y) \le x \le x_2(y)\ ,\ c \le y \le d\}$,то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx .$$

Приклад. Змінити порядок інтегрування

$$\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x, y)dy .$$

Розв’язання. Визначимо область *D*. Вона обмежена лініями: $x = 1, y = 1, y = \ln x$. На рисунку вона заштрихована.



Спроектуємо область D на вісь Oy, це відрізок $[0,1]$. Функцію $y = \ln x$ запишемо у вигляді $x = e^y$. Таким чином, змінивши порядок інтегрування, маємо

$$\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x, y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_1^{e^y} f(x, y)dx .$$

Зміна порядку інтегрування іноді дозволяє зменшити об'єм обчислень.

Потрійний інтеграл. Потрійний інтеграл має вигляд

$$I = \iiint\limits_{v} f(x, y, z,)dxdydz .$$

Обчислення потрійного інтегралу зводиться до обчислення повторних інтегралів. Тобто, якщо функція $f(x, y, z,)$ визначена і обмежена у області *V*, яка має вигляд циліндричного тіла, проекція якого на площину xOy є область *D* і яке обмежене знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$, а зверху - $z = z_2(x, y)$, тоді

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z,)dz .$$

Інтегруванням по z потрійний інтеграл зводиться до подвійного інтегралу по області *D*. Якщо область *D*:

$\{a \le x \le b,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ або $\{c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, то

$$I = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{x_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{z_1(xy)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz .$$

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_{V} ze^x dxdydz,$ якщо область V обмежена поверхнями: $x = 1, x = 2,\ y^2 + z^2 = 1$ і $z = 0, (z > 0)$.

Розв'язання. Циліндр *V* розташований між площинами $x = 1$ і $x = 2$. Коли $z = 0$, він перетинає площину xOy по лініям $y = -1$ і $y = 1$. Бічна поверхня циліндру, коли $z > 0$, має рівняння $z = \sqrt{1 - y^2}$.

Отже, $\iiint\limits_{V} ze^x dxdydz = \iint\limits_{D} e^x dxdy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} e^x dx \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - y^2\right)dy =$

$$= \frac{1}{2} e^x \Big|_1^2 \cdot \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^1\right)\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} e(e - 1).$$

Подвійні і потрійні інтеграли широко застосовуються при розв'язуванні великої кількості різноманітних задач геометрії, фізики, механіки та інших наук.

Заміна змінних у кратних інтегралах

Іноді при розв'язуванні деяких задач з'являється потреба у заміні змінних у подвійному чи потрійному інтегралах. У подвійному інтегралі

$$\iint_{S} f(x, y) dxdy = \iint_{S'} f\left(x(u, v), y(u, v)\right)|I| dudv .$$

Вираз $|I|dudv$ називається елементом площі у криволінійних координатах u, v. Треба щоб функції $x(u, v)$ і $y(u, v)$ були неперервні із своїми частинними похідними і взаємно однозначно відображали область S у область S'. Визначник другого порядку $|I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ має назву – якобіан.

Наприклад, при переході до полярних координат: $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$, якобіан має значення $|I| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$.

Тут $u = \rho$, $v = \varphi$.

Отже, $\iint\limits_{D} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{S'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$

У потрійному інтегралі:

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{V'} f\left(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right)|I| dudvdw .$$

Вираз $|I|dudvdw$ називається елементом об'єму у криволінійних координатах u, v, w. Треба щоб функції $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$ і $z(u, v, w)$ були неперервні із своїми частинними похідними і взаємно однозначно відображали область V у область V'.

Визначник третього порядку

$$|I|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

теж має назву – якобіан.

Наприклад, при переході до сферичних координат: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, якобіан дорівнює $r^2\sin\theta$.

Тут $u = r$; $v = \varphi$; $w = \theta$. Отже,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)r^2\sin\theta d\varphi dr d\theta$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,

де S - частина одиничного кола, яка лежить у першій чверті.

Розв’язання. Перейдемо до полярних координат.

Тоді S' обмежена ρ є $[0;1]$ і φ є $[0;\pi/2]$

.Отже,

$$\iint\limits_S \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint\limits_{S'} \rho\cos\varphi d\rho d\varphi = \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 \sin\varphi\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, де область V задана нерівностями: $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le x^2+y^2$.

Розв’язання. Перейдемо до циліндричних координат:

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ і $z = z$. Тут $|I| = \rho$.

Область V' буде визначатися нерівностями $0 \le \rho \le 1$ і $0 \le z \le \rho^2$.

Отже $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho^2\cos^2\varphi \cdot \rho^2\sin^2\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi dz =$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{\rho^2} dz = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^7 d\rho =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi \cdot \frac{\rho^8}{8} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{64} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{64} = \frac{\pi}{32}.$$

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Рівняння називається диференційним, якщо в нього крім шуканої функції входять її похідні або диференціали.

Порядок диференційного рівняння відповідає порядку старшої похідної, що входить в нього.

Наприклад, $y' = 2xy$ та $y' - y^2 = 1$ - рівняння першого порядку, а $y'' + 4y = 0$ та $y''y + (y')^2 = 0$ - рівняння другого порядку.

Диференційне рівняння першого порядку

З відокремлюваними змінними. Так називаються диференційні рівняння, в яких можна відокремити змінні, тобто привести їх до вигляду

$$g(y)dy = h(x)dx.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = 2xy$.

Розв'язання. $\frac{dy}{dx} = 2xy$; $\frac{dy}{y} = 2xdx$.

Після того, як змінні відокремлені, інтегруємо ліву та праву частини

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx; \quad \ln y = x^2 + C; \quad y = e^{x^2 + C}.$$

Отриманий розв'язок містить довільну сталу C і називається загальним розв'язком. Загальний розв'язок кожного рівняння першого порядку завжди містить одну довільну сталу. Для її знаходження необхідно знати початкову умову, тобто відоме значення функції при деякому відомому значенні аргументу.

Однорідні. Диференційне рівняння першого порядку називається однорідним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Наприклад, $y' = \sqrt{1+\frac{y}{x}}$; $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $y = ux$, де u – допоміжна шукана функція.

Приклад. Розв'язати рівняння: $xy' = x + y$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $x \neq 0$. Тоді $y' = 1 + \frac{y}{x}$, тобто маємо однорідне рівняння.

Робимо заміну $y = ux$; $y' = u'x + u$; $u'x + u = 1 + \frac{ux}{x}$; $u'x + u = 1 + u$; $u'x = 1$.Відокремимо змінні $du = \frac{dx}{x}$. Тоді $u = \ln x + \ln C$, або $y = x \ln Cx$.

Лінійні. Диференційне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – відомі функції від x.

Лінійне рівняння зводиться до двох рівнянь з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $y = uv$, де u і v – допоміжні шукані функції від змінної x.

Приклад. Розв'язати диференційне рівняння $x^2 y' + 2xy = e^{-x}$.

Розв'язання. Для зведення його до стандартного вигляду поділимо ліву та праву частини на x^2. Тут $x \neq 0$:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{-x}}{x^2} \quad \text{(тобто } p(x) = \frac{2}{x};\ \ q(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}\text{);}$$

Отже, маємо лінійне диференційне рівняння, яке розв'язуємо наступним чином:

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

Далі у другому та третьому доданках виносимо за дужки u, а те, що залишається у дужках, прирівнюємо до нуля:

$$u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x^2};$$

$$v' + \frac{2v}{x} = 0.$$

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знаходимо який-небудь його розв'язок.

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{2v}{x}; \quad \frac{dv}{v}=-\frac{2dx}{x}; \quad \ln v=-2\ln x; \quad v=\frac{1}{x^2}.$$

Отже, ми знайшли один із співмножників у розв'язку, який ми шукаємо у вигляді $y=uv$.

Для знаходження *u* підставляємо знайдене *v* у рівняння $u'v=\frac{e^{-x}}{x^2}$.

. Тоді отримуємо $u'\frac{1}{x^2}=\frac{e^{-x}}{x^2}$; $u'=e^{-x}$.

Відкіля отримуємо другий співмножник $u=-e^{-x}+C$.

Знайдені функції дають загальний розв'язок: $y=\frac{-e^{-x}+C}{x^2}$.

Диференційні рівняння другого порядку

$F(x,y,y',y'')=0$ - загальний вигляд диференційного рівняння другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $y=y(x,C_1,C_2)$, тобто залежить від двох довільних сталих.

Для визначення цих сталих використовуємо початкові умови, тобто відомі значення шуканої функції *y* та її похідної y' при даному значенні аргументу $x=x_0$.

Нижче розглянемо два види найпростіших диференційних рівнянь другого порядку, які розв'язуються методом зниження порядку.

1. У рівнянні відсутня шукана функція, тобто рівняння має вигляд $F(x,y',y'')=0$.

Порядок рівняння знижується шляхом заміни $y'=z$, $y''=z'$, де *z*=z(x) – допоміжна шукана функція.

Приклад. Розв'язати рівняння $y''+2y'=8$.

Розв'язання. Нехай $y'=z$, $y''=z'$. Тоді $z'+2z=8$. Відокремивши змінні, отримуємо

$$\frac{dz}{z-4}=-2dz; \quad \ln(z-4)=-2x+\ln C_1.$$

Тоді $z=C_1e^{-2x}+4$ або $y'=C_1e^{2x}+4$ і, нарешті,

$y=-\frac{1}{2}C_1e^{2x}+4x+C_2$ - загальний розв'язок рівняння.

2. У рівнянні відсутня незалежна змінна, тобто воно має вигляд $F(y, y', y'') = 0$.

Порядок рівняння знижується шляхом заміни $y' = p(y)$ - нова шукана функція від незалежної змінної y, яка в свою чергу є функція від х.

Для y'' отримуємо співвідношення $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

Приклад. Розв'язати рівняння $yy'' + (y')^2 = 1$.

Розв'язання. Нехай $y' = p$; $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$. Тоді $y\frac{dp}{dy} p + p^2 = 1$.

Відокремивши змінні, одержимо

$$\frac{pdp}{1-p^2} = \frac{dy}{y}.$$

Після його інтегрування маємо: $\ln(1-p^2) = -2\ln y + \ln C_1$.

Або $1-p^2 = \frac{C_1}{y^2}$, звідки $p = \sqrt{1-\frac{C_1}{y^2}}$,але $y' = p(y)$. Отже $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-\frac{C_1}{y^2}}$.

Відокремивши змінні та проінтегрувавши його, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$\sqrt{y^2 - C_1} = x + C_2.$$

Лінійні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду $y'' + py' + qy = f(x)$ називається диференційним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо p та q – відомі числа, а $f(x)$ - відома функція.

Якщо $f(x)$ =0, рівняння називається однорідним, у протилежному разі – неоднорідним.

Наприклад, рівняння $y'' + 3y' + 2y = 0$ є однорідним, а рівняння $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ є неоднорідним.

Однорідні. Для розв'язання однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$ виписуємо так зване характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$.

1. Якщо характеристичне рівняння має два дійсні корені k_1 і k_2 ($k_1 \neq k_2$), тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Приклад . Знайти розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ має два дійсні корені: $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Отже

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} .$$

2. Якщо характеристичне рівняння має однакові дійсні корені $k_1 = k_2 = k$, тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд :

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} .$$

Приклад . Знайти розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$ має однакові дійсні корені: $k_1 = k_2 = 2$. Отже

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} .$$

3. Якщо дискримінант D характеристичного рівняння від'ємний, воно має комплексні корені вигляду $\alpha \pm \beta i$, (тут $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}$, $i = \sqrt{-1}$ - називають уявною одиницею),тоді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) .$$

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання. Дискримінант характеристичного рівняння $k^2 - 4k + 13 = 0$ D=16-52=-36. Тут $\alpha = -\frac{-4}{2} = 2$, $\beta = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$. Отже

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) .$$

Неоднорідні. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференційного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ має вигляд $y = \bar{y} + y_*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння (див. попередній пункт), а y_* - який-небудь частинний розв'язок початкового рівняння. Вигляд y_* залежить від вигляду $f(x)$ **.**

Розглянемо деякі функції $f(x)$ у правій частини рівняння.

1. $f(x)$ - многочлен степеня *n* - $P_n(x)$. Тоді y_* шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня *n* з невідомими коефіцієнтами - $Q_n(x)$, якщо $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, то $y_* = xQ_n(x)$.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' + y' = x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$ має два дійсні корені: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Отже, $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

y_* шукаємо у вигляді $y_* = x(Ax + B)$, де A і B – невідомі, оскільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, а права частина – многочлен першого степеня.

Отже, $y_* = Ax^2 + Bx$. Тоді $y_*' = 2Ax + B$; $y_*'' = 2A$.

Підставляємо y_*' та y_*'' у рівняння: $2A + 2Ax + B = x$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівняння, одержуємо систему відносно невідомих A та B:

$$\begin{array}{ll} x^1 & \\ x^0 & \end{array} \begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + B = 0. \end{cases} \qquad A = \frac{1}{2},\ B = -1.$$

Маємо частинний розв'язок $y_* = \dfrac{x^2}{2} - x$ і загальний розв'язок початкового рівняння :

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x.$$

2. $f(x) = ae^{mx}$. Тоді $y_* = Ae^{mx} \cdot x^r$, де r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють m.

Приклад . Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' - 2y = 2e^{2x}$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k_1 = -1$, $k_2 = 2$.

$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$; $y_* = Ae^{2x} \cdot x$ (тут $k_2 = m = 2$,тому r=1).

Знаходимо y_*' та y_*'': $y_*' = 2Ae^{2x}x + Ae^{2x}$; $y_*'' = 4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x}$.

Підставляємо y_*, y_*' та y_*'' у початкове рівняння:

$4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} - 2Ae^{2x}x - Ae^{2x} - 2Ae^{2x}x = 2e^{2x}$;

$2Ae^{2x} = 2e^{2x}$. Звідки A=1, $y_* = e^{2x}x$.

Загальний розв'язок рівняння: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + e^{2x}x$.

3. $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$. Тоді $y_* = A\cos bx + B\sin bx$, якщо корені характеристичного рівняння не дорівнюють $\pm bi$, і $y_* = (A\cos bx + B\sin bx)x$ - в протилежному разі.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння
$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 2x$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k_1 = 3$, $k_2 = 2$.
Отже $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$; y_* шукаємо у вигляді $y_* = A\cos 2x + B\sin 2x$.
Тоді $y_*' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$; $y_*'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$.
Підставляємо y_*, y_*' та y_*'' у початкове рівняння:
$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 10A\sin 2x - 10B\cos 2x + 6A\cos 2x + 6B\sin 2x = 13\sin 2x;$

$(2A - 10B)\cos 2x + (10A + 2B)\sin 2x = 13\sin 2x$.

Прирівнюючи коефіцієнти при sin2x та cos2x, одержуємо систему:

$$\begin{cases} 2A - 10B = 0, \\ 10A + 2B = 13. \end{cases}$$

Відкіля $B = \frac{1}{4}$, $A = \frac{5}{4}$. Отже, $y_* = \frac{5}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ - частинний розв'язок, а $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ - загальний розв'язок початкового рівняння.

Задача Коши

Знаходження частинного розв'язку диференційного рівняння, який задовольняє початковим умовам, називається задачею Коши.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - y = x + 1$, якщо $y(0)=0$, $y'(0) = 2$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо загальний розв'язок рівняння:
$\bar{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$; $y_* = Ax + B$. Тоді $y_*' = A$, $y_*'' = 0$. Отже, $-Ax - B = x + 1$.
Тоді $A = -1$, $B = -1$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - x - 1.$$

Для знаходження C_1 і C_2 використовуємо спочатку умову $y(0)=0$:

$$C_1 + C_2 - 1 = 0.$$

Далі знаходимо y': $y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} - 1$.

Використовуємо умову $y'(0) = 2$:

$$C_1 + C_2 - 1 = 2.$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0, \\ C_1 - C_2 = 3; \end{cases} \qquad C_1 = 2;\ C_2 = -1.$$

Частинний розв'язок диференційного рівняння, який задовольняє початковим умовам, має вигляд: $y = 2e^x - e^{-x} - x - 1$. Тобто задачу Коши розв'язано.

Системи диференційних рівнянь

Системою диференційних рівнянь зветься сукупність рівнянь, маючих декілька невідомих функцій та їх похідні, при чому у кожному з рівнянь є хоча б одна похідна. Система лінійна, якщо невідомі функції та їх похідні у кожному рівнянні знаходяться у першій степені. Лінійна система має нормальний вигляд, якщо вона розв'язана відносно усіх похідних.

Приклад. Розв'язати нормальну систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. Продиференцюємо перше рівняння по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Додамо перше і друге рівняння системи:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x.$$

Відкіля $\dfrac{dy}{dt} = 2x - \dfrac{dx}{dt}$. Підставимо його у диференційне рівняння другого порядку розв'язку. Маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2x - \frac{dx}{dt}; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x.$$

Це рівняння з постійними коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 2 = 0$. Корені $k = \pm\sqrt{2}$. Тоді загальне рішення для x:

$$x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}.$$

З першого рівняння

$$y = \frac{dx}{dt} - x = C_1\sqrt{2}e^{t\sqrt{2}} - C_2\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}} -$$
$$- C_1e^{t\sqrt{2}} - C_2e^{-t\sqrt{2}} = C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Таким чином загальне рішення системи рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x = C_1e^{t\sqrt{2}} + C_2e^{-t\sqrt{2}}; \\ y = C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}. \end{cases}$$

РЯДИ

Ряди з додатними членами

Нехай задана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, ..., u_n, ...$. Вираз $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається числовим рядом, а $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ - членами ряду. $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ називається частковою сумою ряду (n=1,2,3, …).

Якщо існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд називається збіжним, а S – сумою ряду. Якщо границя не існує, то ряд називається розбіжним.

Необхідна ознака збіжності

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Іншими словами, якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{7n+5}$ на збіжність.

Розв'язання. $u_n = \frac{3n}{7n+5}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{7n+5} = \frac{3}{7} \neq 0$, тому ряд розбігається.

З того, що $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не випливає. Наприклад, гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається.

Достатні ознаки збіжності

Перша ознака порівняння. Нехай задані два ряди з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ ;$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ .$$

Якщо існує відмінна від нуля та нескінченності границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k$, то два ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Для порівняння рядів використовують геометричний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ та узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$ збігається при $|q| < 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ збігається при p>1 та розбігається при $p \le 1$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Порівняємо ряд з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Нехай

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}\ ; \ \ v_n = \frac{1}{n}\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\cdot n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$ також розбігається.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$, то при p<1 ряд збігається, а при p>1 ряд розбігається.

Якщо p=1, питання про збіжність ряду залишається невирішеним**.**

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot 3^{2n+1}}{n!}$.

Розв'язання. Нагадаємо, що $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

$$u_n = \frac{(n+1)\cdot 3^{2n+1}}{n!}; \qquad u_{n+1} = \frac{(n+2)\cdot 3^{2(n+1)+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+2)3^{2n+3}}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)\cdot 3^{2n+3} n!}{(n+1)!(n+1)3^{2n+1}} = \frac{9(n+2)1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{(n+1)1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+1)} = \frac{9n+18}{n^2+2n+1};$$

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{9n+18}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9}{n}+\frac{18}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0.$$

Оскільки p<1, ряд збігається.

Друга ознака порівняння. Нехай маємо два додатні числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Якщо, починаючи з деякого члена, для усіх $n > N$ виконується нерівність $u_n \le v_n$, то із збіжності другого ряду випливає збіжність першого ряду, а з розбіжності першого ряду випливає розбіжність другого ряду.

Приклад. Чи збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$?

Розв'язання. Порівняємо цей ряд із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Тут $\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}$ починая з $n \ge 3$. Отже даний ряд теж збіжний.

Ознака Коші. Якщо у додатному числовому ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=d$, то при $d<1$ ряд збігається, а при $d>1$- розбігається. Якщо $d=1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

Приклад. Чи збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$?

Розв'язання. Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}<1$. Отже, даний ряд збігається.

Інтегральна ознака. Нехай члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ додатні і незростаючи і $f(x)$ така неперервна незростаюча функція, що $f(n)=u_n$. Тоді справедливі такі ствердження:

а) якщо $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ збігається, то збігається і числовий ряд;

б) якщо $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і числовий ряд.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Тут $f(x)=\frac{1}{x^p}$.

Розглянемо $$\int\limits_1^N\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\left.\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\right|_1^N=\frac{1}{1-p}\left(N^{1-p}-1\right), & \text{коли } p\neq 1,\\ \left.\ln x\right|_1^N=\ln N, & \text{коли } p=1.\end{cases}$$

Напрямляючи N до нескінченності, маємо $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$,коли $p>1$. І

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty\text{, коли } p\leq 1$$

Отже, ряд збігається, коли $p > 1$, і розбігається, коли $p \le 1$.

Одночасно доведено, що гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається.

Знакозмінні ряди

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ називається знакозмінним, якщо $u_n > 0$.

Теорема Лейбніца. Якщо для знакозмінного ряду $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ...$ ($u_n > 0$) виконуються умови**:**

а) $u_1 > u_2 > u_3 > ...$;

б) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ називається умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд, складений з абсолютних величин, розбігається.

Приклад. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Розв'язання. Обидва ряди задовольняють умовам теореми Лейбніца: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ та $\frac{1}{n^2}$ монотонно прямують до нуля при $n \to \infty$, тому обидва ряди збігаються.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ - розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - збігається, бо обидва ряди – узагальнені гармонічні, для першого ряду $p = \frac{1}{2} < 1$, для другого – p=2>1. Тому перший з даних знакозмінних рядів збігається умовно, а другий – абсолютно.

Зауважимо, що з абсолютної збіжності ряду випливає його збіжність.

Степеневі ряди

Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots,$$

де *a* – деяке відоме число, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ - відомі коефіцієнти.

Областю збіжності степеневого ряду називається множина тих значень *x*, при яких ряд збігається. Областю збіжності степеневого ряду є деякий інтервал (*a*-*R*; *a*+*R*), причому у кінцях інтервалу ряд може як збігатися, так і розбігатися. *R* називається радіусом збіжності ряду. Для визначення інтервалу збіжності застосовується ознака Даламбера до ряду, складеного з абсолютних величин членів даного степеневого ряду.

Приклад. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n+3)2^n}.$$

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-3|^n}{(2n+3)2^n}.$$

Досліджуємо цей ряд за допомогою ознаки Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{n+1} 2^n (2n+3)}{(2n+5)2^{n+1} \cdot |x-3|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|(2n+3)}{2(2n+5)} = \frac{|x-3|}{2}.$$

Якщо $\frac{|x-3|}{2} < 1$, ряд збігається.

Перетворимо останню нерівність:

$|x-3| < 2$; $1<x<5$.

Отже, степеневий ряд збігається на інтервалі (1;5). Досліджуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При *x*=5 степеневий ряд перетворюється у наступний числовий: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$. Порівняємо цей ряд з гармонічним $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Позначимо $u_n = \frac{1}{2n+3}$; $v_n = \frac{1}{n}$. За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ розбігається разом з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

При x=1 отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+3}$. За ознакою Лейбніца ряд збігається.

Оскільки ряд, складений з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$ збігається умовно.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n+3)2^n}$ збігається на проміжку [-1; 5).

Ряди Маклорена

Нескінченно диференційована в деякому інтервалі $|x|<R$ функція, що задовольняє деяким додатковим умовам, може бути розкладена в ряд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

який називається рядом Маклорена. Наприклад, для $x\in(-\infty;+\infty)$:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Застосування рядів для наближеного обчислення інтегралів

Приклад. За допомогою ряду обчислити інтеграл $\int_0^1\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язання. У ряд $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots$ замість u підставляємо $-\frac{x^2}{2}$. Тоді $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \ldots$.

Множимо ліву і праву частини рівності на $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{x} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{8} - \frac{x^{\frac{13}{2}}}{48} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{\frac{4n+1}{2}}}{2^n \cdot n!} + \ldots \quad .$$

Інтегруємо обидві частини рівності:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7}\right|_0^1 + \left.\frac{x^{\frac{11}{2}}}{44}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{\frac{15}{2}}}{360}\right|_0^1 + \left.\frac{x^{\frac{19}{2}}}{3648}\right|_0^1 - \ldots ;$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{44} - \frac{1}{360} + \frac{1}{3648} - \ldots \quad .$$

Використовуємо наступну властивість знакозмінних рядів: якщо при обчисленні суми знакозмінного ряду з членами, що за модулем монотонно прямують до нуля, відкинути усі члени, починаючи з деякого, помилка буде менша модуля першого відкинутого члена ряду.

Якщо обмежитися чотирма членами даного ряду, отримаємо:

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx \frac{2}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{44} - \frac{1}{360} = 0{,}5435,$$

де похибка менша п'ятого члена ряду, тобто $\frac{1}{3648} < 10^{-3}$.

Ряди Фур'є

Періодична функція $f(x)$ з періодом 2π може бути розкладена в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ... =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

де a_0, a_n, b_n (n=1,2,…) – коефіцієнти, що обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Зауваження. Ряд Фур’є для парної функції не має синусів; коефіцієнти Фур’є дорівнюють:

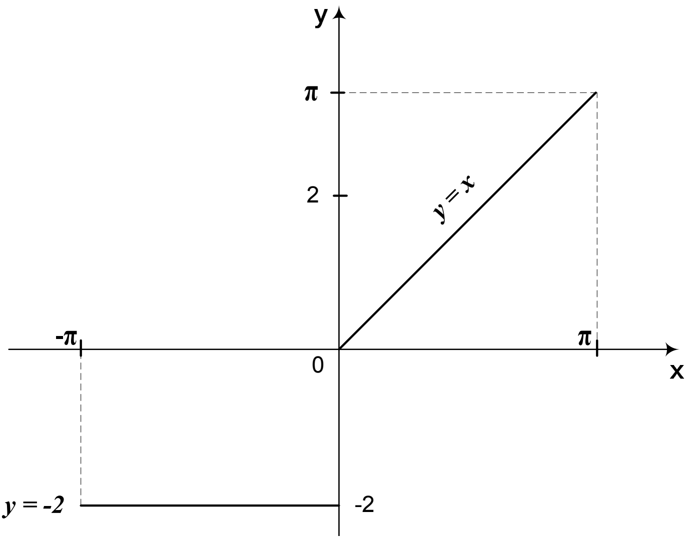
$$b_n = 0; \; a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Ряд Фур’є для непарної функції не має косинусів і вільного члена; коефіцієнти Фур’є дорівнюють:

$$a_n = 0; \; b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Приклад. Розкласти функцію $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x \le 0, \\ 0 < x < \pi \end{cases}$ в ряд Фур'є.

Розв'язання. Графік функції на інтервалі $(-\pi; \pi)$ має вигляд:



Отже, функція загального положення, тобто у її розкладі будуть і синуси і косинуси.

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = -2 + \frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = -2 + \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos nxdx \\ du = dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-2\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right) =$$

$$= \left.\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\right|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1).$$

Відзначимо, що $\cos n\pi = (-1)^n,\ n \in Z$.

Тому коефіцієнти a_n можна записати формулою $a_n = \dfrac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$.

Обчислимо коефіцієнти b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx\right) = \begin{vmatrix} u = x; & dv = \sin nxdx \\ du = dx; & v = -\dfrac{\cos nnx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \left.\frac{2}{n\pi}\cos nx\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{x\cos nx}{n\pi}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nxdx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos\pi n) - \frac{\cos n\pi}{n} + \left.\frac{1}{n^2\pi}\sin nx\right|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) - \frac{(-1)^n}{n}.$$

Отже, $b_n = \dfrac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Запишемо розклад в ряд Фур'є функції $f(x)$:

$$f(x) = -1 + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \left(\frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin nx\right).$$

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Скалярне поле

Скалярним полем називається область простору, в кожній точці якої задано деяку скалярну величину (наприклад поле температур).

Скалярне поле характеризується похідною за напрямом та градієнтом. Перша вказує на швидкість зміни функції в даній точці у даному напрямі, а градієнт визначає напрям, в якому швидкість зміни скалярного поля в даній точці найбільша. Ці величини обчислюються за формулами:

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$gra\bar{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}\text{ , де } u = f(x, y, z).$$

Напрям *l* визначається вектором $\bar{l}$ ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$).

Векторне поле

Векторним полем називається область простору, в кожній точці якої задано деяку векторну величину. (Наприклад, поле швидкостей).

Векторне поле $(\bar{a})$ будемо характеризувати такими величинами: потік $\Pi(\bar{a})$, ротор $(r\bar{o}t\bar{a})$ і дивергенція $(div\bar{a})$. Відповідно цим величинам векторне поле $(\bar{a})$ може бути соленоїдним $div\bar{a} = 0$, потенціальним $r\bar{o}t\bar{a} = 0$ або гармонічним $div(g\bar{r}ad\ u) = 0,\ \ div\bar{a} = 0$.

Ротор і дивергенція обчислюються за формулами:

$$r\bar{o}t\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}; \qquad div\,\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

де $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$.

Приклад. Обчислити потік вектора $\bar{a} = xy\bar{i} + zy\bar{j} + xz\bar{k}$ через поверхню *S*, де *S* – зовнішня частина піраміди, складеної площинами $x=0,\ y=0,\ z=0$ і $x+y+z=1$.

Розв’язання. Потік $\Pi\left(\overline{a}\right)$ векторного поля $\overline{a}$ через поверхню S обчислюється за допомогою поверхневого інтеграла другого роду:

$$\Pi = \iint_S \overline{a}\,\overline{n}\,d\delta = \iint_{A_1} P(x(y,z),y,z)dydz + \iint_{A_2} Q(x,y(x,z),z)dxdz +$$
$$+ \iint_{A_3} R(x,y,z(x,y))dxdy\,,$$

де A_1, A_2, A_3 – проекції S відповідно на площини *Oxy, Oxz, Oyz, а z(x,y), y(x,z) і x(y,z)* одержані із рівняння поверхні S, виражені відносно відповідних координат.

Отже, $\Pi = \iint_S \overline{a}\,\overline{n}\,d\delta = \iint_S xzdzdy + xydydz + yzdxdz$;

$$\iint_S xzdxdy = \iint_{A_1} x(1-x-y)dxdy = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\right)dx = \frac{1}{24}\,;$$

$$\iint_S xydydz = \iint_{A_2} y(1-y-z)dydz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (y - y^2 - yz)dz =$$

$$= \int_0^1 \left(yz - y^2 z - \frac{yz^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-y} dy = \int_0^1 \left(y(1-y) - y^2(1-y) - y(1-y)^2 \right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y - y^2 - y^2 + y^3 - \frac{y}{2} + y^2 - \frac{y^3}{2}\right)dy = \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}\,.$$

$$\iint_S zydxdz = \iint_{A_3} z(1-x-z)dxdz = \frac{1}{24}\,.$$

Перевірте самостійно. Остаточно: $\Pi = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Приклад. Знайти циркуляцію вектора $\overline{a} = y^2\overline{i} - x^2\,\overline{j} + z^2\overline{k}$ вздовж лінії, яку утворено перетином поверхні $z^2 + x^2 = 1 - y$ координатними площинами.

Розв'язання. За формулою Стокса у векторній формі маємо

$$C=\iint\limits_{\gamma}(\mathrm{r}\overline{\mathrm{o}}\mathrm{t}\overline{\mathrm{a}}\cdot\overline{\mathrm{n}})d\gamma=\iint\limits_{D(x,y)}\frac{\left(\mathrm{r}\overline{\mathrm{o}}\mathrm{t}\overline{\mathrm{a}}\cdot\overline{\mathrm{n}}\right)}{\cos(\overline{\mathrm{n}},\overline{\mathrm{z}})}dxdy\Bigg|_{z=z(x,y)}.$$

Визначимо одиничний вектор $\overline{n}$ нормалі до даної поверхні:

$\overline{n}=\dfrac{gr\overline{a}dF}{\left|gr\overline{a}dF\right|}$, де $F(x,y,z)=x^2+y+z^2-1$.

Маємо $\overline{n}=\dfrac{2x\overline{i}+\overline{j}+2z\overline{k}}{\sqrt{4x^2+4z^2+1}}$. Відкіля $\cos(\overline{n},\overline{z})=\dfrac{2z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}$.

$$r\overline{o}t\overline{a}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & -x^2 & z^2\end{vmatrix}=-2(x+y)\overline{k}.$$

Підставимо знайдені величини у формулу Стокса. Маємо:

$$C=\iint\limits_{\gamma}\left(\mathrm{r}\overline{\mathrm{o}}\mathrm{t}\overline{\mathrm{a}}\cdot\overline{\mathrm{n}}\right)d\gamma=$$

$$=\iint\limits_{D(x,y)}\frac{\left(-2(x+y)k\cdot\left(2x\overline{i}+\overline{j}+2z\overline{k}\right)\right)\sqrt{4x^2+1+4z^2}}{\sqrt{4x^2+4z^2+1}\cdot 2z}dxdy=$$

$$=-2\iint\limits_{D(x,y)}(x+y)dxdy=-2\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{1-x^2}(x+y)dy=-\frac{41}{30}.$$

Тут *D(x,y)* – проекція параболоїди на площину *xOy*.

Приклад. Знайти потік векторного поля $\overline{a}=x^2\overline{i}+y\overline{j}+xz\overline{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні S, яка утворена частинами площин $x\ge 0, y\le 1, z\ge 0$ і параболоїда $y\le x^2+z^2$. Поверхня розташована у першому октанті.

Розв'язання. Скористуємось формулою Остроградського:

$\Pi=\iint\limits_{S}\overline{a}\overline{n}d\delta=\iiint\limits_{V}div\overline{a}dv$, де $\overline{n}$ - зовнішня нормаль поверхні S.

Обчислимо $div\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 0 + x = 3x$.

Отже, $\Pi = \iiint\limits_V 3x\,dx\,dy\,dz =$

$$= 3\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x\,dx \int_0^{\sqrt{y-x^2}} dz = 3\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{y-x^2}\,dx = -\int_0^1 (y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Операційне числення дає можливість значно спростити рішення деяких задач фізики, електроніки та інших дисциплін. Це стало можливим завдяки ідеї інтегрального перетворення функції дійсної змінної $f(t)$ (оригінал) у деяку функцію $F(P)$ (зображення) уявної змінної. Наприклад, звичайне диференційне рівняння для $f(t)$ перетворюється у алгебраїчне для $F(P)$. Перехід від оригіналів елементарних функцій до їх зображень подано у таблиці 1. Правила операційного числення подано у таблиці 2. Між оригіналом і зображенням функції ставимо знак = . У операційному численні прийнято, що всі розглянуті функції (табл.1) тотожно дорівнюють 0, коли $t < 0$.

Крім приведених у таблиці 2 правил треба ще виконувати і лінійні властивості перетворень Лапласа.

1. З відношення $f(t) = F(p)$ прямує
$C \cdot f(t) = C \cdot F(p)$, де $C = const$.
2. З відношень $f_1(t) = F_1(p)$ і $f_2(t) = F_2(p)$ прямує
$f_1(t) + f_2(t) = F_1(p) + F_2(p)$.

З цих відношень прямує, що будь який лінійній комбінації оригіналів відповідає така ж лінійна комбінація їх зображень.

Перехід від оригіналів до зображень

Таблиця 1

№ п/п	Оригінал	Зображення
1.	$\eta(t)$ - одинична функція	$\frac{1}{p}$
2.	e^{at} - експонента	$\frac{1}{p-a}$
3.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
4.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
5.	$shat$ - гіперболічний синус	$\frac{a}{p^2-a^2}$
6.	$chat$ - гіперболічний косинус	$\frac{p}{p^2-a^2}$
7.	$t^n\ (n \in N)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
8.	$t^\nu\ (\nu > -1)$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$
9.	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
10.	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
11.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
12.	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
13.	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

Продовження таблиці 1

14.	$\sin(\omega t-\varphi)$	$e^{\frac{-\varphi}{\omega}p}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
15.	$\cos(\omega t-\varphi)$	$e^{\frac{-\varphi}{\omega}p}\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2}$
16.	$\delta(t)$ - дельта функція	1
17.	$\delta'(t)$	P
18.	$\delta^{(n)}(t)$	P^n
19.	$\delta(t-\tau)$	$e^{-p\tau}$
20.	$\delta'(t-\tau)$	$pe^{-p\tau}$
21.	$\delta^{(n)}(t-\tau)$	$p^n e^{-p\tau}$

Правила операційного числення

Таблиця 2

1.	$f(t)$	$F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$	Інтеграл Лапласа
2.	$f(t+a)=f(t)$	$(1-e^{-ap})^{-1}\int\limits_0^a e^{-pt}f(t)dt$	Зображення періодичного інтеграла
3.	$f(at)\quad a>0$	$\frac{1}{a}F(p/a)$	Теорема подібності
4.	$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$	Теорема зміщення
5.	$f(t-b)>0$	$e^{-bp}F(p)$	Теорема запізнення
6.	$f^{(n)}(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$	Дифренціювання зображення

7.	$t^{-1} f(t)$	$\int\limits_p^\infty F(z)dz$	Інтегрування зображення
8.	$t^n(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) - \dots f^{(n-1)}(0)$	Диференціювання оригіналу
9.	$\int\limits_0^t f(u)du$	$p^{-1} F(p)$	Інтегрування оригіналу
10.	$\int\limits_0^t f_1(u) f_2(t-u)du$	$F_1(p)F_2(p)$	Теорема множення зображення

Приклад. Знайти зображення функції $f(t) = \sin^3 t$.

Розв'язання. Скористуємося формулою Ейлера

$$f(t) = \sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it} \right) =$$

$$= \frac{1}{4i} \cdot [3\frac{(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{(e^{3it} - e^{-3it})}{2i}] = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t).$$

За таблицею оригіналів і зображень знаходимо:

$$\sin^3 t = \frac{1}{4}(3\frac{1}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+3^2}) = \frac{3}{4}(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+9}).$$

Приклад. Знайти оригінал за зображенням $F(p) = \frac{1}{p^3 - 8}$.

Розв'язання. Розкладемо раціональну функцію на прості дробі:

$$F(p) = \frac{1}{p^3 - 8} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 4}.$$

Для визначення коефіцієнтів одержимо тотожність

$$1 = A\,(p^2 + 2p + 4) + (Bp + C)\,(p - 2).$$

Нехай у цій тотожності $p = 2$, тоді: $1 = 12\,A$, $A = 1/12$.

Праворуч у тотожності коефіцієнт біля p^2 дорівнює нулю, а вільний член – одиниці.

$$A + B = 0, \quad 4A - 2C = 1.$$

Відкіля:

$$B = -A = -1/12, \quad C = 2A - 1/2 = -1/3$$

Таким чином, $\dfrac{1}{p^3 - 8} = \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{p-2} - \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{p+4}{p^2 + 2p + 4} =$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{(p+1)+3}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2}.$$

Відкіля:

$$F(p) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}.$$

Використовуючи формули таблиці зображень, знайдемо:

$$f(t) = \frac{1}{12} e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-t} (\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \sin\sqrt{3}t).$$

Приклад. Знайти частинне рішення рівняння, яке задовольняє початковим умовам: $y'' - 5y' + 6y = 2e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

Розв'язок. Нехай: $Y(p) = y(t)$.

$$F(p) = f(t) = 2e^t, \text{ тобто } F(p) = \frac{2}{p-1};$$

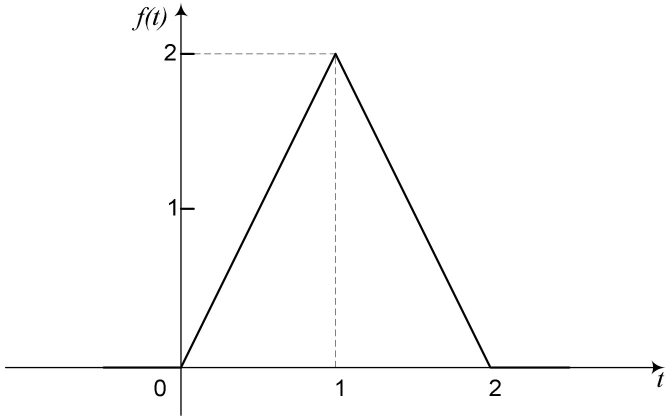
$$\left[p^2 Y(p) - p - 1\right] - 5\left[pY(p) - 1\right] + 6Y(p) = \frac{2}{p-1},$$

або $\quad (p^2 + 5p + 6)Y(p) = p + 1 - 5 + \dfrac{2}{p-1} = p - 4 + \dfrac{2}{p-1}.$

Відкіля $\quad Y(p) = \dfrac{p - 4 + \dfrac{2}{p-1}}{p^2 - 5p + 6} = \dfrac{p^2 - 5p + 6}{(p^2 - 5p + 6)(p-1)} = \dfrac{1}{p-1}.$

і $\quad y(t) = e^t$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $x'' + 4x = f(t)$, де $f(t)$ зображена графічно.



Розв'язок. Визначимо $f(t)$ аналітично. З графіка прямує:

$$f(t) = 2t, \quad \text{коли} \quad 0 \le t \le 1;$$
$$f(t) = -2(t-2), \quad \text{коли} \quad 1 \le t \le 2;$$
$$f(t) = 0, \quad \text{коли} \quad t < 0;\ t > 2.$$

За допомогою одиничної функції можливо $f(t)$ записати таким чином:

$$f(t) = 2t - 2t\eta(t-1) - 2(t-2)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2) =$$
$$= 2t - 4(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2).$$

І диференціальне рівняння матиме вигляд:

$$x'' + 4x = 2t - 4(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2).$$

Запишемо відповідне йому операційне рівняння:

$$(p^2+4)x(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{4e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^2}.$$

Відкіля маємо: $x(p) = \dfrac{2}{p^2(p^2+4)} - \dfrac{4e^{-p}}{p^2(p^2+4)} + \dfrac{2e^{-2p}}{p^2(p^2+4)} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right) + \frac{1}{2}e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right).$$

Користуючись таблицею і теоремою запізнення, маємо розв'язок рівняння:

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)-\left[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\eta(t-1)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2).$$

Приклад. Розв'язати систему диференційних рівнянь з початковими умовами:

$$\begin{cases} x'-ax-by=be^{at}, \\ y'+bx-ay=0, \end{cases} \quad \text{де} \;\; x(0)=0; \;\; y(0)=1$$

Розв'язання. Складемо відповідні операційні рівняння:

$$\begin{cases} px(p)-ax(p)-by(p)=\dfrac{b}{p-a}, \\ py(p)-1+bx(p)-ay(p)=0, \end{cases}$$

або $$\begin{cases} (p-a)x(p)-by(p)=\dfrac{b}{p-a}, \\ bx(p)+(p-a)y(p)=1. \end{cases}$$

Розв'язуємо їх відносно $x(p)$, знаходимо: $x(p)=\dfrac{2b}{(p-a)^2+b^2}$.

Відкіля: $x(t)=2e^{at}\sin bt.$

З першого рівняння прямує, що

$$y(t)=\frac{x'-ax-be^{at}}{b}=\frac{2e^{at}(a\sin bt+b\cos bt)-2ae^{at}\sin bt-be^{at}}{b}=$$
$$=2e^{at}\cos bt-e^{at}.$$

Таким чином: $$\begin{cases} x(t)=2e^{at}\cdot\sin bt, \\ y(t)=2e^{at}\cdot\cos bt-e^{at}. \end{cases}$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Інтегральне числення

Невизначений інтеграл

161 - 170. Знайти невизначені інтеграли:

161. а) $\int \frac{x-2}{x\sqrt{x-1}}dx;$ б) $\int x^2 \sin 2x dx;$

в) $\int \frac{(3x+4)dx}{(x^2+5x+4)(x+2)};$ г) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^8 x}.$

162. а) $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx;$ б) $\int \arccos 4x dx;$

в) $\int \frac{(x+4)dx}{x^3-4x^2};$ г) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx.$

163. а) $\int \frac{2x+3}{x\sqrt{x-4}}dx;$ б) $\int x \ln^2 x dx;$

в) $\int \frac{3x^3+2x+1}{x^3+4x^2}dx;$ г) $\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx.$

164. а) $\int \frac{\sqrt{x-2}dx}{4+\sqrt[3]{x-2}};$ б) $\int xe^{-4x}dx;$

в) $\int \frac{(x+5)dx}{x^3-4x^2+4x};$ г) $\int \cos^4 x dx.$

165. а) $\int \frac{(\sqrt{x}+2)dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}};$ б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;$

в) $\int \frac{(4x+5)dx}{(x-2)(x^2+4)}$; г) $\int \cos^5 x dx$.

166. а) $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x-2}}$; б) $\int \ln(x+8)dx$;

в) $\int \frac{x^3-2x+3}{x^3-4x}dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$.

167. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt{x+4}}$; б) $\int (3x+2)\cos 2x dx$;

в) $\int \frac{(x^2+7)}{(x-1)(x^2+4x+3)}dx$; г) $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$.

168. а) $\int \frac{(x+4)dx}{x\sqrt{x-4}}$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$;

в) $\int \frac{x+3}{x^3+9x}dx$; г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

169. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt[4]{x}+1)\sqrt{x}}dx$; б) $\int x^2 e^{-4x}dx$;

в) $\int \frac{(x^2+x+1)dx}{x^3-3x^2+2x}$; г) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

170. а) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-4}$; б) $\int arctg 6x dx$;

в) $\int \frac{3x^2+x+1}{(x-1)(x+2)^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Визначений інтеграл

171 - 180. Знайти визначені інтеграли:

171. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} dx;$ б) $\int_3^4 x \ln(x-2)dx.$

172. а) $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{3x+4}};$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos xdx.$

173. а) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx;$ б) $\int_0^2 x^2 e^{-2x} dx.$

174. а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4+5x)^3}};$ б) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln^5 x}}{x}dx.$

175. а) $\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{4} dx;$ б) $\int_1^e \ln^2 xdx.$

176. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx;$ б) $\int_0^{\frac{1}{2}} xarctgxdx.$

177. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 xdx;$ б) $\int_1^e x^4 \ln xdx.$

178. а) $\int_0^{\ln 10} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 8}dx;$ б) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2}dx.$

179. а) $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}dx}{\sqrt{x+3}-1};$ б) $\int_0^{\pi} x^2 \sin xdx.$

180. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$;   б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

181 – 190. Знайти площу фігури Φ, об'єм тіла та площу його поверхні, утвореного обертанням Φ навколо осі Ox.

181. Φ: $y = x^2$; $y = 3x + 4$.

182. Φ: $y^2 = 9x$; $x^2 = 9y$.

183. Φ: $y = \sqrt{x}$; $y = x^5$.

184. Φ: $3y = x^2$; $0 \le x \le 2$.

185. Φ: $x^2 = 4 + y$; $y = 0$.

186 . Φ: $y^2 = 4 + x$; $x = 2$.

187. Φ: $y = x^2$; $y = 2x + 3$.

188. Φ: $y = x^2$; $y = 4x - x^2$.

189. Φ: $y^2 = 16x$; $y = 4x$.

190. Φ: $y = x^2$; $y = 3 - 2x$.

191 – 200. Обчислити довжину дуги кривої:

191. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t; \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

192. $\rho = 4\sin^3 \frac{\varphi}{3}$; $0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$.

193. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$; $1 \le x \le 9$.

194. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$; $-2 \le x \le 2$.

195. $y = \ln \sin x$; $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

196. $\rho = 4(1 - \sin\varphi)$; $0 \le \varphi \le \pi$

.

197. $y = 4 + \ln \cos x$; $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

198. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

199. $y = \ln \frac{6}{x^2 - 1}$; $2 \le x \le 3$.

200. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 5\sin^2 t; \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

201 – 210. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

201. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{9x^3+1}$.

202. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+2x^2}$.

203. $\int_1^{\infty} \frac{2xdx}{x^4+1}$.

204. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$.

205. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$.

206. $\int_0^{\infty} \frac{arctg 3x dx}{1+9x^2}$

207. $\int_0^{\infty} xe^{-3x} dx.$

208. $\int_{e^4}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-3)^3}$.

209. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

210. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Кратні інтеграли

211 – 220. Змінити порядок інтегрування. Обчислити інтеграли, поклавши $f(x,y)=1$. Зробити рисунок області інтегрування.

211. $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$.

212. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$.

213. $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy$.

214. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

215. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

216. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

217. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

218. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} f(x,y)dy$.

219. $\int\limits_0^{2/3} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{-x+\sqrt{3}} f(x,y)dy$.

220. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{1-2y}^{y^2} f(x,y)dx$.

221 – 230. Обчислити подвійний інтеграл зробивши перехід до полярних координат. Зробити рисунок області інтегрування.

221. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$.

222. $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx$.

223. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

224. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} tg\left(x^2+y^2\right)dy$.

225. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$.

226. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(1+x^2+y^2\right)dy$.

227. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(1+x^2+y^2\right)dy$.

228. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy$.

229. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,e^{(x^2+y^2)}dy$.

230. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} x\cdot y\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-1}dy$.

231 – 240. Обчислити потрійний інтеграл, зробивши перехід до циліндричних або сферичних координат.

231. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$; $V: x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

232. $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$; $V: z\ge 0,\ z=2,\ y\ge \pm x,\ x^2=4\left(x^2+y^2\right)$.

233. $\iiint\limits_V z^2\,dxdydz$; $V: 1\le x^2+y^2\le 36,\ y\ge x,\ x\ge 0,\ z\ge 0$.

234. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$; $V: x^2+y^2+z^2=32,\ y^2=x^2+z^2,\ y\ge 0$.

235. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$; $V: x^2+y^2+z^2=8,\ x^2=y^2+z^2,\ \ x\ge 0$.

236. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$; $V: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\le\sqrt{3}x, x\ge 0,\ y\ge 0$.

237. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$; $V: x^2+y^2=2x,\ x+z=2,\ z\ge 0$.

238. $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$; $V: 2\le x^2+y^2+z^2\le 8, z^2=x^2+y^2, x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$

239. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$; $V: x^2-2x+y^2=0,\ x+z=2, y\ge 0,\ \ z\ge 0$.

240. $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$; $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 16, y\le 0, y\le x,\ z\ge 0$.

Звичайні диференційні рівняння

241 – 260. Знайти загальний розв'язок диференційного рівняння:

241. $y'-2y=\dfrac{e^{2x}}{x^4}$.

242. $xy'=y+xe^{-\frac{2y}{x}}$.

243. $y'=xy^3+4xy$.

244. $y'=\dfrac{xy+\sqrt{xy^3}}{x^2}$.

245. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cos 6x}{x}$.

246. $y'=\dfrac{x\sin 2x\sqrt{y^2+4}}{y}$.

247. $y'-\dfrac{y}{x+2}=x$.

248. $y'=\dfrac{2y^3-xy^2}{x^3}$.

249. $y' = \dfrac{1+y^3}{y^2x^3 + y^2x}$.

250. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{\ln x}{x^4}$.

251. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x^3 - x^2$.

252. $y''y^3 = 4$.

253. $y'' = (y')^3$.

254. $y''(y+4) = 4(y')^2$.

255. $yy'' = 5(y')^2$.

256. $y'' - \dfrac{y'}{x} = xe^x$.

257. $y''y = (y')^2 + (y')^3$.

258. $y'' - \dfrac{y'}{x} = x\cos 6x$.

259. $2xy'y'' = 5 + (y')^2$.

260. $2y(y')^2 = (y^2-1)y''$.

261 – 270. Знайти частинний розв'язок диференційного рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам:

261. $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$; $y(0)=3$; $y'(0)=0$.

262. $y'' + 5y' = x - 1$; $y(0)=2$; $y'(0)=0$.

263. $y'' + 4y = 2\cos 2x$; $y(0)=2$; $y'(0)=2$.

264. $y'' - 4y' - 5y = 4e^{-x}$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

265. $y'' + 6y' + 13y = x$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

266. $y'' + 2y' = 4e^{-2x}$; $y(0)=0$; $y'(0)=2$.

267. $y'' + 5y' + 6y = 2\sin 2x$; $y(0)=0$; $y'(0)=4$.

268. $y'' + 9y = 4\sin 3x$; $y(0)=4$; $y'(0)=0$.

269. $y'' + 6y' + 25y = 2e^{3x}$; $y(0)=2$; $y'(0)=0$.

270. $y'' - y' - 6y = 2\cos 4x$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

271 – 280. Знайти загальне рішення системи за допомогою характеристичного рівняння:

271. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

272. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

273. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

274. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 3y. \end{cases}$

275. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

276. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

277. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

278. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

279. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

280. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

Ряди

281 – 290. Дослідити на збіжність числовий ряд:

281. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(2n)!}$.

282. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}(4n-1)}{3^n}$.

283. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 4^n}{(n^2+1)(5^n+2)}$.

284. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^2 6^n}$.

285. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+n+1}}{n^3-n+5}$.

286. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n^2+n+1}$.

287. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{n!}$.

288. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2+4n+1}{7n^3-n+8}$.

289. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)\cdot 3^n}}$.

290. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{9^n+1}$.

291 – 300. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд:

291. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

292. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{5^n}$.

293. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n^4+n+1}$.

294. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n^2}{8n^2+n+1}$.

295. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{4^n+1}$.

296. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 4^n}{(3n)!}$.

297. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{4n+5}}$.

298. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 4^n\cdot n}{(n+3)!}$.

299. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)^2}$.

300. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n(4n+2)^2}$.

301 – 310. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

301. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

302. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+2}}$.

303. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^4}$.

304. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n+1}$.

305. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2n)x^n$.

306. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 3^n}$.

307. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2+3n}$.

308. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{2^n\cdot n^2}$.

309. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n\cdot 4^n}{n!}$.

310. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot 2^n}{n^2+2}$.

311-320. За допомогою ряду обчислити наближене значення інтеграла з точністю до 10^{-3}:

311. $\int_0^{0,2}\sqrt{x}\sin x dx$.

312. $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}dx$.

33. $\int_0^1 e^{-x^3}dx$.

314. $\int_0^{0,5}\cos x^3 dx$.

315. $\int_0^{0,4}\frac{\sin x^2}{x^2}dx$

316. $\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$.

317. $\int_0^1\sqrt{x}\sin x^2 dx$.

318. $\int_0^{0,1}\cos x^2 dx$.

319. $\int_0^{0,5}\sin x^3 dx$

320. $\int_0^{0,5}\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}dx$.

321 – 330. Розкласти функцію в ряд Фур'є. Зробити креслення:

321. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 2x+3, & 0<x<\pi.\end{cases}$

322. $f(x)=3x-2,\quad -\pi<x<\pi.$

323. $f(x)=\begin{cases} x-3, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0<x<\pi. \end{cases}$

324. $f(x)=|x|-2, \quad -\pi<x<\pi.$

325. $f(x)=\begin{cases} x+3, & -\pi<x<0, \\ 1, & 0<x<\pi. \end{cases}$

326. $f(x)=4x+5, \quad -\pi<x<\pi.$

327. $f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi<x<0, \\ x-1, & 0<x<\pi. \end{cases}$

328. $f(x)=4-5|x|, \quad -\pi<x<\pi.$

329. $f(x)=\begin{cases} -2, & -\pi<x<0, \\ 4, & 0<x<\pi. \end{cases}$

330. $f(x)=4x^2+5, \quad -\pi<x<\pi.$

Елементи теорії поля

331 – 340. Маємо: векторне поле $\bar{a}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ і площину $Ax+By+Cz+D=0$, яка сумісно з координатними площинами утворює піраміду V.

Нехай γ - основа піраміди, яка належить даній площині;

λ - границя основи піраміди;

$\bar{n}$ - зовнішня нормаль до γ.

Знайти:

1) потік векторного поля $\bar{a}$ крізь поверхню γ у напрямку нормалі $\bar{n}$;
2) циркуляцію векторного поля $\bar{a}$ по замкненому контуру λ безпосередньо і за допомогою теореми Стокса до контуру λ і обмеженою їм поверхні γ з нормаллю $\bar{n}$;
3) потік векторного поля $\bar{a}$ крізь повну поверхню піраміди V у напрямку зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо і за допомогою теореми Остроградського. Зробити рисунок.

331. $\bar{a}=(x+z)\bar{i}$; $\quad 2x-y+z-1=0$.

332. $\bar{a}=(y-2x+z)\bar{j}$; $\quad x+y+z-2=0$.

333. $\bar{a}=(2x+3z)\bar{k}$; $\quad 2x+y+z-4=0$.

334. $\overline{a}=(x+y-z)\overline{i}$; $\qquad -x+y+z-4=0$.

335. $\overline{a}=(2x+y-2z)\,\overline{j}$; $\qquad x-3y+z-6=0$.

336. $\overline{a}=(2x+4y-z)\overline{k}$; $\qquad x+2y-3z-4=0$.

337. $\overline{a}=(x+2y+z)\overline{i}$; $\qquad x+y+2z-3=0$.

338. $\overline{a}=(3x+y+2z)\,\overline{j}$; $\qquad -x+2y-z-4=0$.

339. $\overline{a}=(5x-y+3z)\overline{k}$; $\qquad -x+y+z-4=0$.

340. $\overline{a}=(x-3y+5z)\overline{i}$; $\qquad x+y+3z-2=0$.

341 – 350. Перевірити, чи є векторне поле $\overline{a}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ потенційним і соленоідальним. У разі потенційності поля $\overline{a}$ знайти його потенціал.

341. $\overline{a}=(6x+7yz)\overline{i}+(6y+7xz)\overline{j}+(6z+7yz)\overline{k}$.

32. $\overline{a}=(8x-5yz)\overline{i}+(8y-5xz)\overline{j}+(8z-5yx)\overline{k}$.

343. $\overline{a}=(10x-3yz)\overline{i}+(10y-3xz)\overline{j}+(10z-3xy)\overline{k}$.

344. $\overline{a}=(12x+yz)\overline{i}+(12y+xz)\overline{j}+(12z+xy)\overline{k}$.

345. $\overline{a}=(4x-7yz)\overline{i}+(4y-7xz)\overline{j}+(4z-7yz)\overline{k}$.

346. $\overline{a}=(x+2yz)\overline{i}+(y+2xz)\overline{j}+(z+2yz)\overline{k}$.

347. $\overline{a}=(5x+4yz)\overline{i}+(5y+4xz)\overline{j}+(5z+4xy)\overline{k}$.

348. $\overline{a}=(7x-2yz)\overline{i}+(7y-2xz)\overline{j}+(7z-2yx)\overline{k}$.

349. $\overline{a}=(3x-yz)\overline{i}+(3y-xz)\overline{j}+(3z-yz)\overline{k}$.

350. $\overline{a}=(9x-5yz)\overline{i}+(9y+5xz)\overline{j}+(9z+5xy)\overline{k}$.

Операційне числення

351 – 360. Методом операційного числення розв'язати диференціальні рівняння:

351. $x'''+x'-2x=\sin t$; $\quad x(0)=1;\ x'(0)=1;\ x''(0)=0.$

352. $x''-x'-12x=10$; $\quad x(0)=x'(0)=0.$

353. $x'''-2x''+'x=4t$; $\quad x(0)=1;\ x'(0)=2;\ x''(0)=-2.$

354. $x'''-x=e^{t}$; $\quad x(0)=x'(0)=0;\ x''(0)=1.$

355. $x'''-x'-6x=2$; $\quad x(0)=1;\ x'(0)=0.$

356. $x''+3x'+2x=t^{2}+2t$; $\quad x(0)=4;\ x'(0)=-2.$

357. $x'''+x=\cos 3t$; $\quad x(0)=1;\ x'(0)=0;\ x''(0)=1.$

358. $x''+x'=e^{2t}$; $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

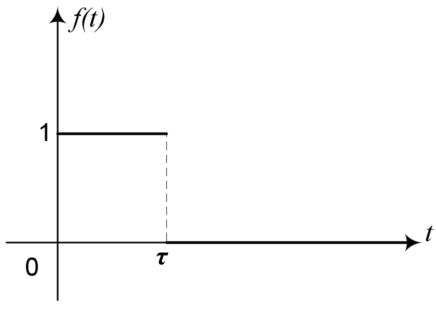
359. $x''-x'+x=t$; $\quad x(0)=1;\ x'(0)=0.$

360. $x''+3x'+2x=\cos t$; $\quad x(0)=0;\ x'(0)=1.$

361 – 370. Методом операційного числення розв'язати диференціальне рівняння із правою частиною, яку задано графічно.

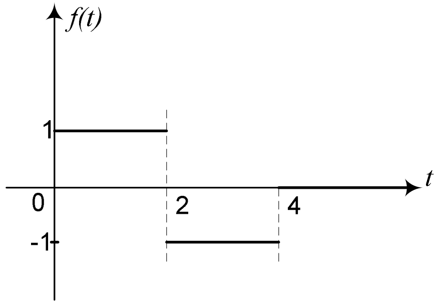
361. $x''-x=f(t)$

$x(0)=x'(0)=0$.



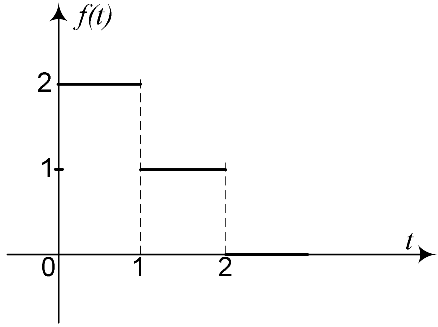
362. $x^2 + x = f(t)$

$x(0) = x'(0) = 0$.



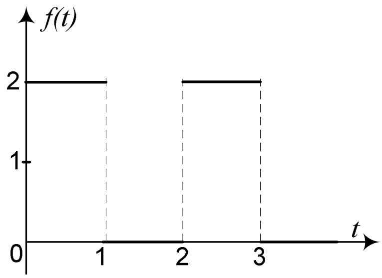
363. $x' + 2x = f(t)$

$x(0) = 3$.



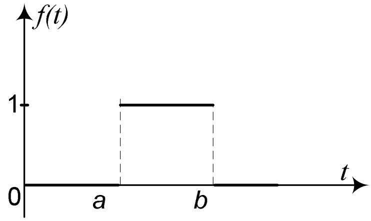
364. $x' + x = f(t)$

$x(0) = 1$.



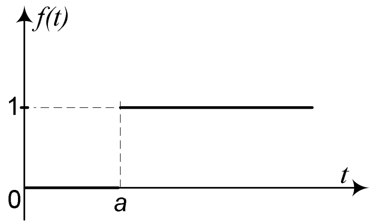
365. $x'' - 3x' + 2x = f(t)$

$x(0) = x'(0) = 0.$



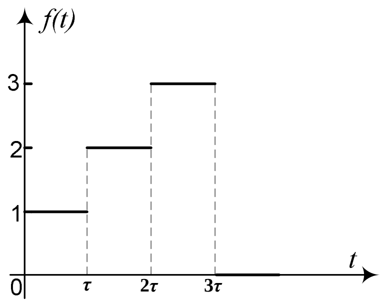
366. $x'' + a^2 x = f(t)$

$x(0) = x'(0) = 0.$



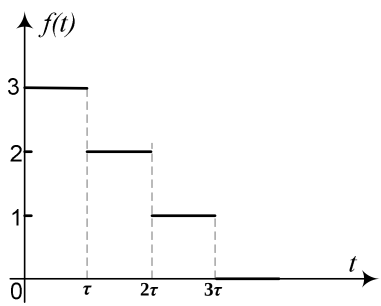
367. $x' + x = f(t)$

$x(0) = 0.$



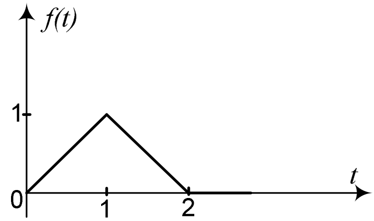
368. $x'' - 2x = f(t)$

$x(0) = x'(0) = 0.$



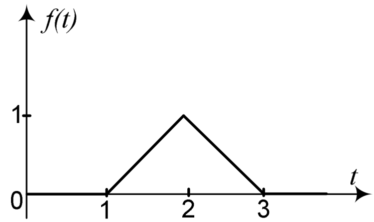
369. $x' + 2x = f(t)$

$x(0) = 0$



370. $x' + 3x = f(t)$

$x(0) = 0$



371 – 380. Методом операційного числення розв’язати системи диференціальних рівнянь з початковими умовами:

371. $\begin{cases} x' - y = 0 \\ 2x' + y' = 4t \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

372. $\begin{cases} y' = x + y \\ y' - x' = te^t \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

373. $\begin{cases} x' + 2y = 0 \\ x - y' = \cos t \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

374. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1.$

375. $\begin{cases} x' - x - 2y = t \\ -2x + y' - y = t \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

376. $\begin{cases} x' + 2xy = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$

377. $\begin{cases} x' + 7x - y = 0 \\ y' + 2x + 5y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1.$

378. $\begin{cases} x' + 2y + 5x = 0 \\ y' + 7y - x = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

379. $\begin{cases} x' - x - 2y = 2e^t \\ y' - 2x - y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

380. $\begin{cases} x' - 3y - x = 0 \\ y' - x + y = e^t \end{cases}$ $\quad x(0) = y(0) = 1.$

Список літератури

1. Вища математика. Книга 1. За редакцією проф. Г.Л.Куленіча. - К.: «Либідь». 1994 – 310 с.
2. Вища математика. Книга 2. За редакцією проф. І.П. Васильченка. - К.: «Либідь». 1994 – 278 с.
3. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
4. В.С. Мартыненко. Операционное исчисление. – Киев, 1966.
5. В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. Вища математика. - К.: Либідь, 1996. - 440 с.
6. Ю.Е. Печенежский, С.А. Станишевский. Пособие к решению задач по высшей математике. – ХГАГХ, 1997. – 100 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки та контрольні роботи з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей)

Частина друга

Укладачі: *Анатолій Іванович Колосов,*
Степан Олександрович Станішевський,
Михаїл Йосипович Кадець,
Олександр Юльянович Тихонович

Відповідальний за випуск: *М.П.Данилевський*

Редактор: *М.З. Аляб`єв*

План 2006, поз. 556

Підп. до друку 22.03.06 Формат 60 х 84 $^1/_{16}$. Папір офісний
Друк на ризографі Обсяг 4,8 друк.арк.
Тираж 500 прим. Зам. №

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
61002, м. Харків, вул. Революції, 12