МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

К. О. Сорока

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу

Моделювання електромеханічних систем

(для студентів 4 курсів денної і заочної форм навчання
напряму підготовки 0922 (6.050702) – «Електромеханіка»)

ХАРКІВ
ХНАМГ
2010

Сорока К. О. Конспект лекцій з курсу «Моделювання електромеханічних систем» (для студентів 4 курсів денної і заочної форм навчання напряму підготовки 0922 (6.050702) – «Електромеханіка») / К. О. Сорока; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; – Х.: ХНАМГ, 2010. - 189 с.

Автор: К. О. Сорока

Рецензент: д.т.н., проф.В.Ф. Рой

Рекомендовано кафедрою електричного транспорту, протокол засідання № 14 від 29.04.2010 р.

Зміст

ВСТУП

Метою вивчення дисципліни “Математичне моделювання електромеханічних систем” є навчання і формування навиків використання методів математичного моделювання для аналізу, вивчення закономірностей функціонування та експлуатації електромеханічних систем різного ступеня складності.

Моделювання – одна із головних категорій теорії пізнання. Модель це матеріальний чи уявний об’єкт, який замінює оригінал і може використовуватися для вирішення проблеми відносно оригінала. Усі наші знання про навколишній світ не можуть буди поданими інакше ніж у моделях. Математична модель з’являється, коли в об’єктах моделювання виділені кількісні властивості і встановлені відношення між ними. Вона характерна високому рівню абстракції. Рівень абстракції залежить від того наскільки загальними є вивчені закономірності. Високий рівень абстракції дуже багато значить для обізнаного, хоча нічого не говорить непосвяченому. Підготовка спеціалістів електромеханіків передбачає, що вони, у достатній для практичного використання мірі, знають і володіють методами абстрагування і математичного моделювання, що вони можуть використовувати моделі для вирішення практичних завдань експлуатації та проектування електромеханічних систем.

У даному курсі розглянуто проблеми моделювання, типи і властивості моделей, методи побудови детермінованих та стохастичних моделей електромеханічних систем.

У процесі навчання студенти оволодівають навиками побудови математичних моделей та використання їх для вирішення завдань практичної експлуатації електромеханічних систем транспортних засобів, електроприводу, електромеханічних системах автоматизації.

Під час виконання лабораторних робіт та розрахунково-графічної роботи студенти здобувають навики числового моделювання, та застосування ПЕОМ і сучасних програмних пакетів на для аналізу функціонування електромеханічних систем різного призначення.

Дисципліна «Моделювання електромеханічних систем» є нормативною навчальною дисципліною з циклу професійних дисциплін підготовки бакалаврів за напрямом 050702 – «Електромеханіка», за спеціальностями: «Електричні системи і комплекси транспортних засобів», «Електричний транспорт» та «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”».

Приєднання України до Болонського процесу передбачає впровадження кредитно-модульної системи організації навчального процесу. Програма курсу побудована за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Вивчення дисципліни передбачає знання студентами основ фізики, теоретичної механіки, електротехніки, теорії автоматичного керування. Передбачає володіння математичним апаратом вищої математики та методами теорії ймовірностей.

Лекція 1. **Моделі та моделювання**

1. Визначення моделі.
2. Цілеспрямованість моделювання. Класифікація моделей за ціллю моделювання.
3. Засоби побудови моделей. Класифікація моделей за матеріалом з якого побудована модель.
4. Властивості моделей.
5. Умови реалізації властивостей моделей.

Метою вивчення дисципліни “Математичне моделювання електромеханічних систем” є навчання і формування навиків використання методів математичного моделювання для аналізу та вивчення закономірностей функціонування електромеханічних систем різного ступеня складності.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

- знати основні методи моделювання електромеханічних систем;
- вміти використовувати методи моделювання для вивчення конкретних систем;
- мати навички використання числових методів моделювання;
- здобути навики використання ПЕОМ для вивчення та аналізу систем;
- ознайомитись з прикладними програмними пакетами. Які використовуються для вирішення завдань аналізу функціонування електромеханічних систем.

1. Визначення моделі

Математичне моделювання, це побудова моделей систем і вивчення систем за допомогою цих моделей**.** Вирішення будь-яких проблеми завжди здійснюють за допомогою моделей. Вирішення проблеми розпочинається з вивчення об’єкту моделювання. Результатом попереднього вивчення є опис на вербальному рівні. В описі знання певним чином впорядковуються. Сам опис повинен бути всебічним, об’єкт моделювання ми повинні розглянути з різних сторін: історичної, морфологічної і функціональної. Наступним етапом є побудова моделей у яких здобуті знання об’єднуються, структуруються, поглиблюються. Модель, чи сукупність моделей, служать інструментом розуміння і вивчення системи, засобом подачі знань про об’єкт і їх збереження. Моделі використовують для вирішення конкретних проблем які виникають під час практичної діяльності [1].

Моделювання – це непрямий, опосередкований метод наукового пізнання об’єктів, безпосереднє вивчення яких з певних причин неможливе, недоцільне чи ускладнене, шляхом дослідження моделі.

Моделювання – одна із головних категорій теорії пізнання**.** На ідеї моделі ґрунтується всякий метод наукових досліджень, як теоретичних, так і експериментальних.

В теорії пізнання моделювання розглядається як основний метод пізнання навколишнього світу. Навколишній світ ми пізнаємо в вигляді певних моделей і всі наші знання відображаються в моделях навколишнього світу. Вся наша діяльність також основана на моделях. Перед будь-якою дією ми будуємо в своєї свідомості чи безпосередньо створюємо певну модель і тільки тоді діємо залежно від ситуації.

Моделі створюються в процесі моделювання. Процес моделювання включає такі етапи:

1) постановку проблеми,
2) побудову або вибір моделі,
3) дослідження моделі,
4) екстраполяцію результатів дослідження на оригінал.

Існує більше тридцяти визначень моделі. Найбільш вживані такі:

Модель – це деякий матеріальний чи уявний об'єкт, який за певних умов замінює оригінал і може використовуватися для вирішення проблеми відносно об'єкта – оригінала.

Модель – спеціально створений для зручності дослідження об'єкт, який має потрібний ступінь подібності до об'єкта, адекватний цілям дослідження, створений суб'єктом чи особою, що приймає рішення відносно досліджуваної системи.

Більш чітке визначення, поміщене в енциклопедичному словнику [2]:

Модель – це матеріальна, знакова або уявна система, яка відтворює імітує чи відображає принципи внутрішньої організації, функціонування, ознаки, характеристики об'єкту дослідження, безпосереднє вивчення якого неможливе, ускладнене чи недоцільне**.**

Ще одне визначення найбільш абстрактне та формалізоване [3]:

M є моделлю O, якщо за допомогою M можна одержати відповідь відносно О з точністю до ε.

Кожна модель є певна абстракція в якій конкретні характеристики об'єкта замінені описом найбільш загальних властивостей. Модель може бути як фізична, предметна, так і формальна логічна. Серед моделей особливо виділяють математичні моделі.

Математична модель з'являється тоді, коли в системі виділені кількісні властивості і встановлені співвідношення між ними.

Кожна модель – це певна абстракція, в якій виділені суттєві сторони об'єкту, з точки зору завдань вивчення, і встановлені їх взаємозв'язки.

Поняття **абстракція** означає таку форму пізнання, в якій уявно виділяють суттєві властивості і зв'язки предмета і відокремлюють їх від інших випадкових, не суттєвих у даному аспекті властивостей і зв'язків.

Рівень абстракції означає, в якому відношенні виділені властивості і зв'язки є загальними, відносяться до переважної кількості об'єктів навколишнього світу. Абстракція є універсальним засобом пізнання навколишнього світу. Слід зауважити, що мова абстракції в своїх розвинутих формах мало говорить не посвяченому, але є потужним засобом пізнання для тих хто нею володіє.

Важливою особливістю моделей є те, що модель не тільки засіб пізнання нового, саме в моделях сконцентровані, відображені всі наші знання. Знання не можуть бути поданими інакше ніж за допомогою моделей.

2. Цілеспрямованість моделювання. Класифікація моделей за ціллю моделювання

Розглянемо більш детально визначення моделі. Перш за все Моделювання – це метод наукового дослідження об'єктів пізнання.

Моделі створюються в процесі моделювання.

Моделювання – одна із головних категорій теорії пізнання. Модель – це деякий матеріальний чи уявний об'єкт, який за певних умов замінює оригінал і може використовуватися для вирішення проблеми відносно об'єкта – оригінала.

У наведених визначеннях моделі відображається цільовий характер моделювання. Всяка діяльність людини завжди має певну ціль, цілеспрямована. Робота спрямована на виготовлення певного продукту, відпочинок - на досягнення певного фізичного та морального стану, навчання – на одержання знань, здобуття професії. Успіх діяльності залежить від того наскільки чітко ми уявляємо який повинно бути її результат, від образу бажаного результату. Цей образ результату діяльності є певною моделлю, яка служить орієнтиром, ціллю до якої ми прагнемо. Це завжди так, хоча не завжди ми чітко усвідомлюємо. Всі дитячі іграшки – це моделі, за допомогою яких дитина пізнає світ. Ціль їх використання – це підготовка підростаючої людини до життя у складному світі. Дії первісних людей, обряди перед охотою на звіра, їх танці були обумовлені певними уявленнями, моделями світу, силами, які зумовлюють успішність охоти. Танці, кидання списа в зображення звіра, ритуальні обряди – певні моделі охоти, в яких засвоювались необхідні навики, здійснювалась моральна й фізична підготовка.

Розглянемо, що може бути моделлю і як це пов'язане з ціллю моделювання? Згадаємо, для дитини палка може бути моделлю коня, шаблі то що. Дерев'яна колода для туриста може служити як стіл, крісло, молоток і як паливо для багаття. Скала, чи дерево для первісної людини були моделями звіра, і використовуючи їх вона навчалась влучно кидати спис. Задамося питанням, наприклад, чи може ґудзик бути моделлю тролейбуса? Як правило, на це питання відповідають негативно. Звичайно, яке відношення ґудзик має до тролейбуса? Але розглянемо завдання вивчення руху тролейбусів по маршруту, наприклад на карті міста, чи схемі маршруту. В такому випадку є всі підстави в якості моделі тролейбуса взяти ґудзик. Отже, перш за все, модель є не просто замінником оригіналу, а його цільовий відбитком і те яка модель залежить від цілей моделювання. Залежно від цілей моделями можуть бути найрізноманітніші предмети.

З цього, що модель є відбитком об'єкта залежним від цілей моделювання випливає:

- по-перше, - моделей одного і того ж об'єкта може бути велика кількість,
- по-друге - один і той же предмет може бути моделлю різних об'єктів.

Цільова направленість дозволяє класифікувати моделі по цілі моделювання. Найбільш загальний поділ по цілі моделювання це поділ на пізнавальні та прагматичні моделі.

Пізнавальні моделі – це моделі, які є формою організації та представлення знань, засобом одержання нових знань і їх об'єднання з відомими.

Прагматичні моделі – це моделі, які є засобом регулювання практичної діяльності, служать для певних практичних цілей є стандартами, зразками, законом тощо.

Прикладів пізнавальних моделей безліч. Це лабораторні установки, за допомогою яких студенти вивчають наукові дисципліни, експериментальні установки, створені для розробки певного проекту, моделі створені за допомогою комп'ютера, схеми електричних мереж, тягових підстанцій, наукові теорії, моделі атома, всесвіту і тому подібні.

Прагматичні моделі не менш розповсюджені, з ними ми зустрічаємось кожен день. Реклама зачісок, одягу, взуття, це прагматичні моделі призначені для того, щоб їм наслідувати, виробити певний стиль, забезпечити покупку тих чи інших товарів. Модельний бізнес, фото моделі – це також прагматичні моделі. Вони служать зразками, еталонами і призначені для виховання певних естетичних уявлень, для копіювання, для керівництва в конкретній діяльності. Вимоги стандарту до розмірів різьби болта та гайки, стандарти тролейбуса, автомобіля, це також прагматичні моделі, які служать цілям забезпечення виробництва та експлуатації технічних засобів. Прагматичні моделі – це також збірники законів, правил які регламентують поведінку людей.

Під час порівняння вказаних двох типів моделей головна різниця між ними полягає у співвідношенні моделі та дійсності, моделі та об'єкта моделювання. Це співвідношення проявляється у тому як поступають, коли модель не відповідає дійсності. Пізнавальні та прагматичні моделі відрізняються своїм співвідношенням моделі та об'єкта моделювання. Схематично співвідношення об'єкту і моделі для пізнавальних та прагматичних моделей показано на рис.1.

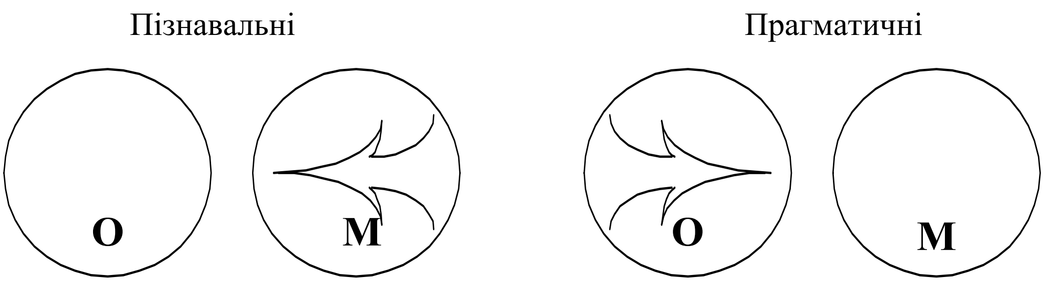


Рис. 1 – *Співвідношення між об'єктом моделювання і моделлю у пізнавальних та прагматичних моделях.*
(літерами О та М позначено об'єкт моделювання та модель).

Співвідношення полягає в тому, що коли пізнавальна модель не відповідає дійсності (модель не адекватна оригіналу), то потрібно змінити модель, коли ж прагматична моделі не відповідає дійсності, то навпаки – потрібно змінювати об'єкт.

Розглянемо декілька прикладів. Пізнавальною моделлю будови світу в середні віки була геоцентрична модель, або модель Птоломея. Згідно з нею світ являв собою сукупність небесних сфер, які обертаються навколо Землі. У центрі всіх сфер знаходилась Земля, а на кожній зі сфер знаходились планети. На одній із сфер, третій – Сонце, а на самій віддаленій, сьомій сфері - нерухомі зірки. За сферами було місце для богів, які керували світом. Створена ця модель буда в кінці 10 сторіччя. Вона проіснувала більше дев'яти сторіч до відкриттів Коперніка і Джордано Бруно. Вона задовольняла всім потребам науки того часу. Коли науково було доведено невідповідність такої моделі об'єкту моделювання, неадекватність її для пояснення астрономічних явищ, то модель була замінена геліоцентричною моделлю сонячної системи Коперніка, в центрі якої знаходиться Сонце, а планети, в тому числі і Земля рухаються навколо Сонця.

Інший приклад це планетарна модель атома створена Резерфордом: атом містити ядро, навколо якого по еліптичним орбітам рухаються електрони. Після відкриття законів квантової механіки була замінена моделлю, в якій електронам відповідає певна електронна хмаринка, розподілена в просторі навколо ядра атома.

Таких прикладів можна навести багато. Важливо підкреслити, що для вказаного типу моделей, а саме для пізнавальних моделей, у випадку невідповідності моделі дійсності змінюється модель.

Зовсім інше співвідношення між об'єктом та дійсністю для прагматичних моделей. У випадку, коли прагматична модель не відповідає об'єкту виникає необхідність зміни об'єкту моделювання, а не моделі. Наприклад, якщо тролейбус, який розробляє конструктор, або виготовляють на заводі, по певних параметрах не відповідає стандарту, тобто моделі, то змінюється конструкція тролейбуса – об'єкт моделювання. Виготовлений тролейбус приводиться у відповідність з прагматичною моделлю, а саме до стандарту.

Можна навести ще ряд прикладів. Якщо студент зобразить схему електричного кола з порушеннями правил ЄСКД, то викладач заставить його переробити її. Якщо, наприклад, наша зачіска не відповідає певній нормі, певному зразку, моделі, то ми йдемо у перукарню і змінюємо зачіску, а прагматична модель, до якої ми прагнули, залишається незмінною. При порушенні законів суспільства, особа яка їх порушила, карається відповідно з тим же законом. Отже ми бачимо, що в прагматичних моделях, якщо об'єкт не відповідає моделі, то змінюють об'єкт моделювання, а сама модель залишається незмінною.

Поділ на пізнавальні та прагматичні моделі, як і всякий поділ, є відносним. Наприклад, твори мистецтва можуть бути як пізнавальними так і прагматичними моделями. Вони відображають світ, дозволять його глибше пізнати. З цієї точки зору твори мистецтва є пізнавальними моделями. Але ці ж твори мистецтва можуть бути зразками для наслідування і тоді вони виступають в якості прагматичних моделей.

3. Засоби побудови моделей. Класифікація моделей, за матеріалом з якого побудована модель

Вивчаючи попередній матеріал виникає питання, що ж таке конкретна модель, з чого вона може бути створена? Зрозуміло, що наприклад, моделлю сонячної системи може бути певне масивне тіло, чи лампочка яка грає роль Сонця, навколо якої на певних орбітах обертаються планети. Модель літака може бути створена з певного матеріалу так само як і модель споруди, яку бажано збудувати. Але модель сонячної системи існує також у вигляді опису в науковій літературі, вона є у нашій свідомості не залежно від того створили ми її з матеріальних об'єктів чи ні. Так само модель літака чи модель споруди може бути подана у вигляді креслень.

Під час вивчення багатьох явищ використовують моделювання за допомогою обчислювальних машин (ЕОМ). Що ж являє собою така модель? Це введені у ЕОМ дані й певні правила роботи з ними, закономірності, записані у вигляді програми обробки даних, рівнянь, котрі зберігаються в її пам'яті ЕОМ. Тут ми бачимо що носієм моделі є матеріальний об'єкт, а саме ЕОМ, але фактично, моделлю є програма, яка зберігається в пам'яті ЕОМ. Програма це є ідеальний образ, образ створений свідомістю. Цей образ може бути описаний певними термінами й зберігатись на певному носії інформації, в пам'яті комп'ютера або книзі. Виникає питання, що вважати моделлю, чи потрібно вважати моделлю тільки матеріальний об'єкт, а чи моделлю може бути система побудована засобами свідомості, не матеріальним об'єктом? На приведеному прикладі ми бачимо, що до моделей відносять не тільки матеріальні об'єкти, а і об'єкти свідомості, певні образи, створені свідомістю.

У визначенні моделі вказано, що модель – це реальний чи уявний об'єкт. Отже залежно від того з чого створені моделі їх слід поділяти на

- матеріальні (реальні),
- ідеальні (уявні, продукти свідомості).

Матеріальні моделі. Це матеріальні об'єкти, які у певному відношенні заміняють об'єкт моделювання. Для того, щоб даний матеріальний об'єкт чи конструкція могли бути моделлю необхідно щоб вони відповідали декільком умовам.

- по-перше – відповідати цільовому призначенню моделі,
- по-друге – замінювати оригінал, давати відповіді відносно оригіналу з потрібною точністю.

Для цього повинно бути встановлене певне співвідношення подібності між об'єктом моделювання і моделлю. Існує декілька способів встановлення такого співвідношення. Розглянемо три типи співвідношення подібності:

- пряма подібність,
- опосереднена подібність,
- умовна подібність.

Найпростіше пряме співвідношення подібності – це моделі створені на основі фізичної подібності Моделі створюються такими ж як об'єкти, подібними на них. Наприклад, модель літака, макет будівлі, чи промислової конструкції, макет гідроспоруди, дитяча іграшка, лялька, викройка, то що. Тут можлива повна відповідність, наприклад, копії картин, голограми, протези, або часткова, коли співпадають деякі деталі (ізоморфні та гомоморфні моделі). Модель може бути побудована у зменшеному, або збільшеному масштабі реального об'єкта. Модель може відрізнятись розмірами, матеріалом з якого виготовляється. Але, яка б добра не була модель, вона тільки замінник об'єкта, виконує роль його тільки в певних умовах. При матеріальному моделюванню на основі прямої подібності виникає проблема перенесення результатів моделювання з моделі на оригінал. У технічних науках для цього використовують принципи подібності. Вирішенню практичних задач за допомогою моделювання допомагає спеціальна наукова дисципліна – теорія подібності.

Опосереднена подібність – це подібність основана на єдності законів природи на існуючий у природі аналогії між різними явищами. Моделі створюють не на основі механічного відтворення а на основі об'єктивно існуючої єдності явищ природи. Розглянемо декілька прикладів.

Коливання у електричному колі та механічні коливання описується однаковими рівняннями. Тому електричні явища можна вивчати на механічних моделях, а коливання складних механічних систем краще вивчати за допомогою електричних кіл. Для вивчення коливань складної механічної споруди за певними законами будують електричну модель. В різні місця схеми подають синусоїдальні чи інші коливання напруги (або струму) і вимірюючи осцилографом характер зміни напруги вивчають як буде вести себе споруда при різних навантаженнях.

Для вивчення поведінки складних гідротехнічних споруд під дією тиску води можна побудувати модель споруди за допомогою електропровідного паперу. Такий метод моделювання широко використовується в гідродинаміці. За допомогою моделі побудованої з електропровідних матеріалів вивчають поведінку гідроспоруд. Прикладаючи електричне поле та вимірюючи електричні потенціали у різних точках, одержуємо картину розподілу сили води тиску на споруду. Такий метод моделювання можливий тому, що закони розподілу електричних потенціалів і тиску води одинакові, описуються одними і тими ж рівняннями.

У теорії пружності для вивчення міцності різних деталей машин, розподілу у них внутрішніх напружень використовують оптичні моделі. Якщо з певного оптичного матеріалу виготовити модель деталі і потім її навантажити, то залежно від величини напружень у різних місцях моделі вона по різному буде змінювати кут поляризації світла. Розглядаючи таку деталь за допомогою оптичних приладів можна з досить великою точністю визначити розподіл внутрішніх навантажень, визначити найбільш слабкі місця деталі і змінити її форму так, щоб вона працювала більш надійно.

У наш час на моделях опосередненої подібності вивчають явища в соціальній сфері складні соціальні та економічні процеси. Вивчення закономірностей транспортних потоків у науковій дисципліні організація руху ведеться на моделях, побудованих на основі опосередненої подібності. Тут важливу роль грає математика, диференційні рівняння та інші її розділи. Математики якраз і допомагає встановити єдність законів світу та обґрунтувати використання опосередненої подібності.

Умовна подібність – використовується там, де не можна встановити прямої подібності, ні опосередненої. Тут подібність встановлюють на основі певних правил, домовленостей. Прикладом моделі з умовною подібністю можуть бути гроші – як міра вартості. Ми постійно користуємось грошовою системою, подекуди і не задумуючись, що це є тільки модель вартості, її замінник, який діє тільки завдяки певній умовності, прийнятій в одній чи декількох країнах.

Креслення – це також приклад моделі з умовною подібністю, ми їх розглядаємо як модель конструкції. Аналогічно і електрична схема – це модель електричного кола, яка є моделлю тільки завдяки певної домовленості, умовної подібності.

Моделями умовної подібності є також різні сигнали, які передаються тими чи іншими каналами і відображають певні події.

Розглянуті моделі діють в умовах домовленості. Наприклад, грошові одиниці одних країн можуть не прийматися в інших, якщо між країнами нема домовленості. Електричну схему не розуміє людина, яка не вивчала електротехніки, не знає умовних позначень. Сигнали які прийняті в мореплавстві, в залізничному транспорті не зрозуміє той, хто не знає правил їх використання, їх змісту. З моделями умовної домовленості приходиться мати справу часто. Ці моделі існують тільки завдяки домовленостям, котрі виступають як сукупність правил і діють у границях установлених правил.

Ідеальні моделі – це ідеальні конструкції побудовані засобами мислення, свідомості. До них відносяться мова, мовні конструкції, художні твори, наукові теорії, гіпотези, алгоритми діяльності, то що.

Особливу роль серед них займає наша мова. Вона є не тільки головний засіб побудови ідеальних моделей, але і сама є відображенням цих моделей. Мова є перш за все засіб спілкування. В той же час вона є і засобом мислення. В психології мову вважають другою сигнальною системою людини. Самі поняття нашої мови вже є моделями дійсності. Наприклад слово дерево, це певна модель. Говорячи „дерево" ми розуміємо об'єкт, який має стовбур, коріння, листя. "Яблуня", це певний вид дерева, який має свої особливості і відрізняється від інших дерев, "йти", "бігти" – це моделі певної діяльності яка має свої ознаки.

Мова – це універсальний засіб побудови моделей. Універсальність мови, як засобу побудови моделей, полягає не тільки у тому, що окремі поняття мови є певними моделями світу, але у тому, що мова допускає застосування ієрархічну побудову моделей, а саме: слово, речення, текст. Моделлю об'єкта може бути одне слово, як це показано у попередньому абзаці. У випадку, коли одного слова недостатньо для побудови моделі застосовують речення. За допомогою речення визначаються більш складні моделі. Моделлю певного об'єкту може бути не одне речення а цілий текст, побудований із речень. Наприклад, для опису сучасного уявлення про сонячну систему, моделі сонячної системи, вже необхідно цілий текст досить великого об'єму.

Крім вказаного універсальність мови як засобу побудови моделей зумовлена і тим, що мовні поняття чи конструкції мають неоднозначний, розпливчастий характер. Це дозволяє охопити одним поняттям цілий ряд предметів або явищ, змоделювати їх. Неоднозначність мовних понять корисна і вона закріпилась у мові віками.

У деяких випадках розпливчастість понять буденної мови стає на заваді, коли необхідно чітко визначити предмет моделювання. Тоді виникають спеціальні мови, які мають більш чіткий, однозначний характер. Це мови наукових дисциплін: медицини, біології, фізики. Основою таких мов є чітко визначені поняття. Кожна наукова дисципліна має свої поняття з якими вона оперує. Наукові поняття найбільш чіткі, конкретизовані визначення предметів вивчення. Знання всякої науки ґрунтується на понятійному апараті, наприклад, знання електромеханіки ґрунтується на таких поняттях як енергія, опір, момент сили, електричне поле, потенціал, напруженість та індукція магнітного поля тощо. Найбільш чіткими, однозначними поняттями та співвідношеннями між ними оперує математика. Математика це також мова. Це одна з мов, за допомогою якої ми спілкуємося з природою. Як не дивно, але природа дає нам відповіді на мові математики. Тому і розуміння математики означає дуже часто розуміння природи. Еммануїл Кант відмічав, що в кожному пізнанні стільки науки, скільки у ньому математики. Всі наукові дисципліни, які досягли високого рівня розвитку, оперують математичними поняттями та співвідношеннями.

Ідеальні моделі можна поділити на семантичні (знакові) та інтуїтивні.

Семантичні моделі це знакові моделі, в яких установлено певні знаки та співвідношення між ними і які записуються та зберігаються у вигляді сукупності знаків. Розрізняють математичні, логічні та графічні семантичні моделі. Розділити їх не завжди можливо, оскільки у кожній семантичній моделі певним чином переплітаються окремі елементи. Деколи говорять про логіко–математичні моделі, які діляться на аналітичні та імітаційні. Аналітичні моделі – це моделі, які призначені для аналізу, імітаційні для відтворення певних процесів, явищ.

Інтуїтивні моделі – це моделі, які будують на вербальному (описовому) рівні. Вони мають характер гіпотез, розуміння загальних характеристик розвитку об'єктів. При створенні їх важливу роль відіграє підсвідомість.

4. Властивості моделей

Розгляд властивостей моделей є одним з головних питань теорії пізнання і має велике значення в математичному моделюванні. Всі наші знання про навколишній світ відображаються у моделях. Тому виникає питання, наскільки наші моделі правильні, тобто наскільки знання, представлені у вигляді моделей, правильно відображають навколишній світ? Відповідь на ці запитання можна об'єднати в два напрямки: матеріалістичний та ідеалістичний, тобто дати з двох точок зору, а саме:

Матеріалістична:– світ матеріальний і матерія існує незалежно від нашої свідомості. Матерія первинна, нічим не створена, існує вічно. Свідомість, мислення це властивість матерії.

Ідеалістична – первинним є дух, свідомість, мислення, а матерія, природа вторинна, це продукт свідомості. Згадайте у Біблії: "Першим було слово ...".

Одним з напрямків ідеалістичної точки зору є агностицизм, який заперечує можливість пізнання світу. На зразок: світ є річ у собі, яку неможливо пізнати. В нашій свідомості він тільки відображається через відчуття. Відчуття це відбиток, тіні навколишнього світу і ми тільки їх можемо пізнавати, але це ні в якій мірі не навколишній світ.

Ми стоїмо на матеріалістичній точці зору. Світ існує поза нашою свідомістю. Ми його пізнаємо у результаті нашої діяльності. Наші знання ми відображаємо у моделях навколишнього світу. Знання носять суб'єктивний характер, оскільки вони створені людьми, суб'єктами. Але вони носять і об'єктивний характер, оскільки вірно відображають світ. Об'єктивний характер знань проявляється на практиці і критерієм об'єктивності є практична діяльність, її результати. Знання постійно уточнюються, поглиблюються, приближаються до об'єктивної дійсності. Критерієм вірності знань є практична діяльність. Якщо знання підтверджуються на практиці, то вони вірні. Тобто практична діяльність є з одного боку джерелом знань, з іншого – критерієм їх вірності.

Модель завжди подібна до об’єкта моделювання. Вона може бути ізоморфна або гомоморфна об’єкту. Ізоморфна модель це коли існує взаємно однозначна відповідність між елементами та зв’язками моделі та об’єкта. Гомоморфна модель – коли відповідність однозначна лише в одному з аспектів.

Ізоморфізм і гомоморфізм (греч. isos - однаковий, homoios - подібний і morphe - форма) - поняття, що характеризують відповідність між структурами об'єктів. Дві системи, що розглядаються відірвано від природи складових їх елементів, є ізоморфними одна одній, якщо кожному елементу першої системи відповідає тільки один елемент другої, кожному зв'язку в одній системі відповідає зв'язок в іншій і назад. Така взаємо однозначна відповідність називається ізоморфізм. Повний ізоморфізм може бути лише між абстрактними об'єктами, що ідеалізуються, напр., відповідність між геометричною фігурою і її аналітичним виразом у вигляді формули.

Гомоморфізм відрізняється від ізоморфізму тим, що відповідність об'єктів (систем) однозначно лише в один бік. Тому гомоморфний образ є неповне, наближене відображення структури оригіналу. Так, наприклад, відношення між картиною і місцевістю, між грамзаписом і її оригіналом – звуковими коливаннями повітряного середовища. Поняття ізоморфізм і гомоморфізм широко застосовуються в математичній логіці і кібернетиці [4].

Розглядаючи властивості моделей з матеріалістичної точки зору в першу чергу відзначимо їх обмеженість.

Обмеженість моделей зумовлена обмеженістю ресурсів (матеріальних, енергетичних, інформаційних, часових), які ми використовуємо при створенні моделей.

Навколишній світ нескінченний. Нескінченний і будь-який об'єкт. Нескінченність об'єкту виявляється в просторі-часі і в його зв'язку з іншими об'єктами. Модель - це спроба опису нескінченного обмеженими засобами, вона подібна оригіналу тільки в кінцевому числі відносин. Інший аспект виникає у зв'язку з тим, що моделюються об'єкти, що мають властивість безперервності, а безперервність – один з проявів нескінченності. Моделі, як правило, служать для аналізу об'єкту в певні моменти часу, або у фіксованих точках простору.

Всякий об’єкт існує у просторі й часі. Він має нескінченне число відношень з іншими об’єктами. При створенні моделі ми враховуємо тільки певне число відношень об’єкта, створюємо модель обмеженою у просторі, маємо обмежений час для моделювання. Тому моделі завжди обмежені. Якщо так, то виникає запитання, чи можна пізнати безмежний об’єкт обмеженими методами. Відповідь на це запитання дає практичний досвід людства. Так, обмеженими засобами, використовуючи моделі побудовані обмеженими засобами, можна пізнати навколишній світ. Ці моделі правильно відображають безмежний світ. Проте знання про світ є відносні, на кожному етапі пізнання вони в певній мірі відповідають дійсності. Ми прагнемо до абсолютного знання, постійно наближаємось до нього, пізнаючи світ все більш повно, точно і детально. Процес пізнання світу, пізнання абсолютної істини безмежний. Н.Вінер та Розенблют відмічали – обмежені моделі при всіх їх недоліках – єдиний вироблений людством засіб розуміння світу.

Обмеженість моделі потрібно враховувати під час пояснення ряду явищ природи. Обмеженість моделі може призводити до парадоксів, які виникають не як наслідок прихованих помилок у логічних міркуваннях, а внаслідок виходу за рамки застосовності даної моделі. Виявлення таких парадоксів досить часто є стимулом для подальшого удосконалення моделі, поглиблення наших знань про навколишній світ [5].

Іншою властивістю моделі є її спрощеність. Спрощеність моделі витікає з її обмеженості. Раз модель створена обмеженими засобами, то вона повинна бути спрощена.

Модель завжди простіша за оригінал. Конечність моделі і нескінченність оригіналу робить спрощеність неминучою. Спрощеність перш за все полягає в тому, що при моделюванні сам дослідник вирішує, які властивості об'єкта є важливими (з погляду досягнення поставленої мети), а які ні. Конечність і спрощеність породжують наближеність моделі. Наближеність породжується не тільки вказаними чинниками, але і необхідністю оперувати моделлю в процесі її практичного використання.

Здавалося, що спрощеність моделі повинна приводити до її невірності, не відповідності дійсності. Але парадоксом є те, що правильними є найбільш прості моделі. Для конкретних цілей моделювання спрощеність не тільки допускається, але є необхідною. Є один загадковий момент: чомусь з двох моделей, які описують явище чи об’єкт, ближче до дійсності завжди знаходиться найбільш проста модель. Самий яскравий приклад геліоцентрична система, яка замінила геоцентричну. Ньютон писав, - природа проста, не має надлишку причин. Простота – печатка істини.

Світом правлять прості закони і ці закони виражаються у простих моделях. Наприклад, закони руху виражені в обмеженій кількості понять: маса, сила, траєкторія, швидкість й взаємозв’язку між ними встановленого законами Ньютона. Ці закони надзвичайно точно описують рух тіл на землі, і рух космічних об’єктів. Звичайно, уточненням їх є рівняння теорії відносності, які діють при швидкостях близьких до швидкості світла, та рівняння квантової механіки, справедливих для тіл з надзвичайно малою масою. Всі закони фізики, які регулюють процеси на Землі і у Всесвіті, в тілах субатомних розмірів та тілах космічних розмірів на рівні Галактики та Метагалактики, можуть бути записані на одному аркуші паперу, це приблизно 20 рівнянь.

Отже спрощеність моделі не тільки недолік а, дуже часто, перевага моделі. Спрощена модель виділяє головне, зосереджує увагу на ньому, відмітає все другорядне, несуттєве. У багатьох визначеннях моделі підкреслюється, що всяка модель є спрощена.

Крім властивостей обмеженості та спрощеності моделей особливе значення мають адекватність та точність моделі.

Адекватність – це вірне відображення зв’язків та співвідношень навколишнього світу. Адекватний (від лат. – відповідний, рівний, тотожній)

Адекватною вважається модель, яка не взагалі, в повній мірі, відповідає об’єкту, а в тій мірі, яка приводить до потрібної цілі, дозволяє одержати потрібні на практиці результати із заданою точністю.

Адекватність не існує поза метою моделювання. Адекватність означає, що модель відповідає на поставлені питання в тій мірі, яка не перевищує умов достатності для цілей моделювання.

Вірність, істинність моделі поняття не тотожне адекватності. Істинність поняття більш загальне, філософське, означає, що модель повністю відповідає дійсності. Насправді судити про вірність моделі ми не завжди можемо і користуємось більш вузьким поняттям, а саме поняттям адекватності. Модель у цілому може бути і не вірною, але адекватно (вірно, з потрібною точністю) дає відповіді на поставлені питання. Наприклад, невірна, з нашої сучасної точки зору, геліоцентрична модель світу (див. рис. 2 і 3), дозволяла з високою точністю передбачати астрономічні явища, розраховувати момент затемнення Сонця, Місяця, наступ періоду розлиття річки Ніл і т.п. Вона була адекватним описом астрономічних явищ, виходячи з тих вимог, які ставила практика того часу. Признавалась вірною ця модель, удосконалювалась і давала корисні результати майже на протязі тисячі років. Для вирішення сучасних проблем: запуску супутників, розвитку космонавтики ця модель не адекватна, за її допомогою розрахувати рух космічних об’єктів з потрібною точністю неможливо.

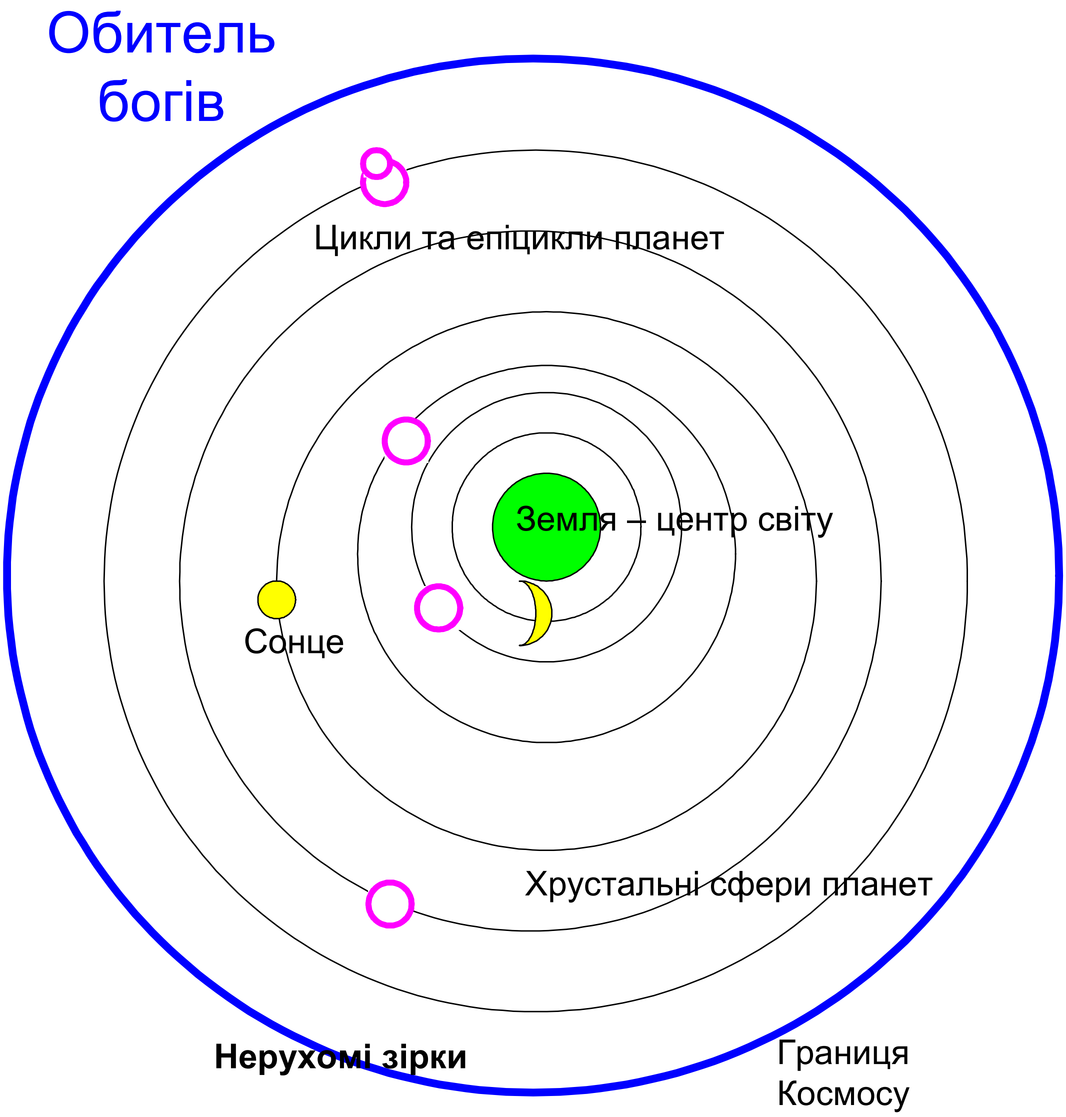


Рис. 2 – *Геоцентрична система будови світу за Птоломеєм*

Інші приклади.

У фізиці досить відома теорія теплороду. Вона пояснювала теплові явища передачею спеціальної невагомої речовини – теплороду. На протязі багатьох років ця модель давала адекватну відповідь щодо протікання теплових явищ, тобто була адекватною моделлю, хоча по своїй суті була невірна.

Корпускулярна та хвильова теорії світла. Вони також кожна зокрема невірні, але кожна з них дає вірну відповідь на питання практики при вирішенні певних конкретних завдань різного змісту, тобто були і залишаються адекватними моделями при вирішенні певного обмеженого кола завдань.

Рис. 3 – *Зображення геоцентричної системи світу з космографії 1540 рік*

Вірність (істинність) моделі питання досить глибоке і знаходить своє відображення у філософії. Оскільки між моделлю та об’єктом завжди є різниця, то виникає питання про вірність наших знань, які сконцентровані в моделях світу. Чи ця різниця є такою, що її неможливо усунути. Чи можна подібність моделі до об’єкту весь час збільшувати. У філософії – це питання доступності абсолютної істини суб’єктивному пізнанню. Діалектичний матеріалізм стверджує, що людське пізнання це відносна істина. Але вона завжди може бути скільки завгодно близько наближена до абсолютної істини.

Розглядаючи властивості моделей ще раз звернемо увагу на співвідношення вірного та невірного в моделі. Крім істинного, вірного в моделі завжди є дещо невірне, дещо таке, що не відповідає об'єкту моделювання. Співвідношення вірного та невірного по різному проявляється в пізнавальних та прагматичних моделях. Якщо для прагматичної моделі невірне пагубне, приводить до відмови від моделі, то у пізнавальних моделях це стимул розвитку, один із способів відірватись від фактів, які часом не грають суттєвої ролі. У пізнавальних моделях важливу роль грають гіпотези. Один раз Ейнштейн сказав: “Уява важливіша від знань, бо знання обмежені, а уява охоплює весь світ і є джерелом знань”. Але сказане не означає що не потрібно вчитися, бо тільки знання дають критерій що вірне, а що невірне, де шукати істину. Той же Ейнштейн говорив: “Не намагайтесь недостатність знань компенсувати навіть найсильнішою уявою”.

Із сказаного видно, що кожна модель має свої границі використання. Однією з небезпек моделювання є використання моделей без перевірки умов і границь при яких забезпечується її адекватність. На жаль, на практиці, з цим зустрічаємось набагато частіше ніж вважаємо. Деколи ми просто не задумуємось над таким питанням і дивуємось, коли одержані результати знаходяться в суперечності з дійсністю.

5. Умови реалізації властивостей моделей

Для того, щоб модель відповідала своєму призначенню, щоб вона виконувала свої функції недостатньо створити нову модель чи взяти готову, необхідно, щоб існували умови, які забезпечують реалізацію властивостей моделі. Це відноситься не тільки до моделей створених на основі умовної подібності, але і до всіх моделей у загальному.

Зрозуміло, що моделі створені на основі умовної подібності реалізують свої властивості тільки в границях домовленості. Грошові знаки виконують свої функції тільки за умов державних гарантій. Звичайна мова, її слова, тексти зрозумілі тільки у певному мовному оточенні. Програми, написані на одній з мов програмування, не працюють, коли в комп'ютері немає транслятора з цієї мови програмування.

Необхідність існування умов реалізації властивостей моделей відноситься також і до моделей створених на основі прямої подібності та опосередкованої подібності. Модель літака, створена для вивчення аеродинаміки руху, тобто поведінки під час польоту, дійсна тільки при наявності спеціального приладу – аеродинамічної труби. Модель гідроспоруди створена з електропровідного матеріалу для вивчення розподілу тиску води дійсна, коли є необхідні джерела електричної напруги, вимірювальні прилади та люди, які розуміють і можуть проаналізувати дані вимірювань. Аналогічно і для інших моделей.

Необхідність певних умов для реалізації властивостей моделей можна продемонструвати і на історичних фактах. Старовинні єгипетські ієрогліфи відомі з древніх часів. Але прочитати їх зміст змогли тільки після відкриття знаменитого Розетського каменя, тобто тоді коли були створені певні умови для розуміння тексту. В історії відомі відкриття, які значно обігнали час і не знайшли своєї реалізації. Вертоліт, який розробив Леонардо Да-Вінчі, був реалізований тільки в XIX сторіччі. Кібернетика Трентовського, розроблена у 1848 році знайшла своє втілення тільки через 100 років. Обчислювальна машина Беббіджа (1883 р) знайшла втілення тільки після розвитку електроніки. Всяка революційна наукова теорія, як правило, не знаходить підтримки у старому оточенні. Джордано Бруно був спалений інквізицією за створення геліоцентричної моделі сонячної системи. Генетику та кібернетику в Радянському Союзі вважили лженауками. Сучасні технології не змогли б бути втілені в недостатньо розвинутому суспільстві.

З необхідністю існування певних умов для реалізації властивостей моделей ми зустрічаємось і в політичному та економічному житті. Для прискорення розвитку України неодноразово пропонувалися моделі передових країн, проте вони не привели до бажаного результату. Економічні моделі розвитку передових ринкових країн не діють в умовах недостатньо розвинутих країн. На жаль з цим потрібно миритись і шукати такі моделі розвитку, які працюють у даних умовах.

В якості ще одного прикладу можна вказати на те, що моделі поведінки людей мусульманського світу не знаходять розуміння в християнському оточенні.

Наведені приклади показують, що для реалізації властивостей моделі необхідна узгодженість моделі з середовищем. Всяка модель повинна бути узгоджена з середовищем у якому вона створена та функціонує. Між середовищем та моделлю повинні бути певні вузли стиковки (інтерфейси), котрі пов'язують їх. Для існування моделі у зовнішньому середовищі повинні бути створені підсистеми, інші моделі, алгоритми, які забезпечують існування моделі. Тобто не тільки модель повинна бути пристосована до середовища, але і саме середовище повинне забезпечувати можливість існування тієї чи іншої моделі, реалізацію її властивостей.

Вивчаючи умови існування моделі ми звернули увагу на взаємовідношення моделі та навколишнього середовища. Розглянемо також інші сторони моделі. Складовими частинами процесу моделювання є:

- об'єкт моделювання,
- модель,
- суб'єкт моделювання,
- навколишнє середовище.

„Модель" моделі можна зобразити таким чином, як показано на рис. 4.

Тут складовими частинами є: сама модель, об'єкт моделювання, суб'єкт моделювання та середовище. Співвідношення між моделлю і середовищем ми розглянули. Всі моделі існують у певному середовищі. Модель дійсна, виконує свої властивості, тільки в певному середовищі. Наприклад модель атома, теорія відносності в оточенні первісного суспільства існувати не могли. Моделі килим-літак, чарівне дзеркало у наш час втілені в життя і це літак, телевізор.

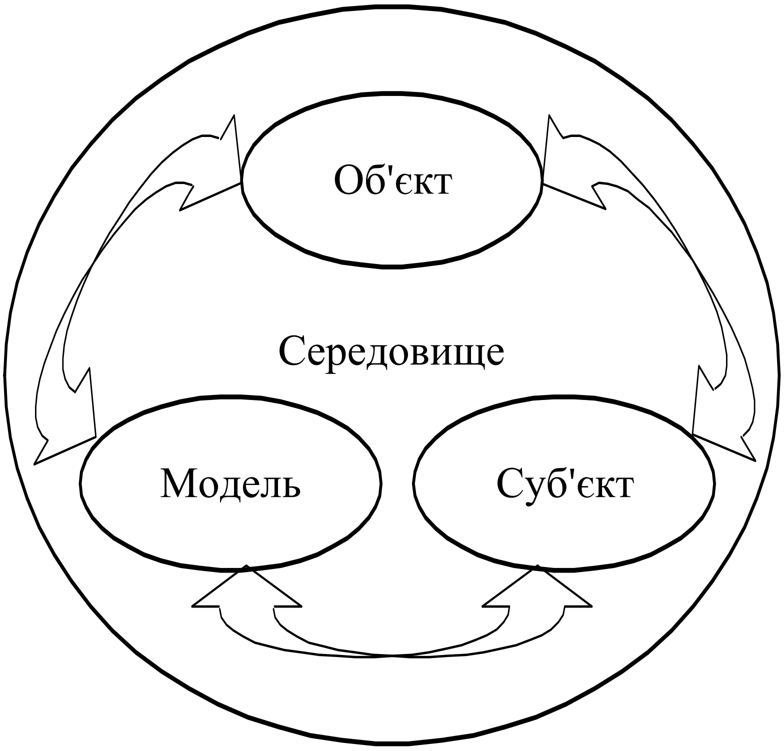


Рис. 4 – *Модель “моделі”*

Співвідношення між моделлю і об’єктом моделювання ми вже розглядали. Модель є певним, залежним від цілей моделювання, відбитком об’єкту. Об’єкт переносить у модель свої властивості. Модель служить замінником об’єкта і виконує його функції у певних умовах, служить засобом пізнання об’єкта, засобом збереження та поглиблення знань про об’єкт.

Взаємозв’язок між моделлю і об’єктом встановлює певна особа, людина, група людей, наукова дисципліна, тобто певний суб’єкт. Без суб’єкту нема моделі. Суб’єкт моделювання будує модель залежно від цілей моделювання. Стрілкою на діаграмі показано взаємозв’язок моделі та суб’єкта моделювання. У процесі побудови моделі суб’єкт моделювання (той хто створює модель) певним чином відображає властивості об’єкта у моделі. Співвідношення моделі та суб’єкта моделювання показано іншою стрілкою. Сама модель залежить від того, хто її побудував, і у свою чергу модель, певним чином зумовлює поведінку суб’єкта.

Все разом знаходиться у певному середовищі, без якого модель не може існувати. Середовище показано кругом, всередині якого знаходиться об’єкт моделювання, модель та суб’єкт моделювання.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення моделі.
2. Чи може бути моделлю предмет складніший за об’єкт моделювання?
3. У чому полягає властивість спрощеності моделі?
4. Чи є спрощеність моделі причиною її невірності?
5. Які головні вимоги пред’являються до моделі?
6. Яка роль моделі в пізнанні людиною світу?
7. У чому ви вбачаєте обмеженість моделі?
8. Які обмеження накладаються на модель в процесі моделювання?
9. Як ви розумієте поняття вірність моделі та адекватність?
10. Для вирішення яких питань Птоломеєва модель світу є адекватно.?
11. Які умови потрібно для реалізації властивостей моделі?
12. Які види подібності при моделюванні ви знаєте?
13. У чому полягає умовна подібність при створенні моделі?
14. Які ви можете виділити властивості мови, як засобу моделювання?
15. Поясніть різницю між прагматичними та пізнавальними моделями?
16. Картина нарисована художником є пізнавальною чи прагматичною моделлю?
17. До якого типу моделей слід віднести стандарт сорту чаю, модель зачіски, креслення ходової частини тролейбуса?
18. До якого типу моделей слід віднести схеми електрообладнання приведені в конструкторській документації та в підручнику?
19. Як поступають, коли прагматична модель не відповідає дійсності, а пізнавальна?
20. По відношенню до яких об’єктів адекватною моделлю є звичайна і квантова механіки?
21. Які моделі вивчає науково дисципліна «Теорія подібності».
22. В якому випадку появляється математична модель?
23. Яку роль відіграє рівень абстракції при моделюванні?
24. Яке співвідношення існує між моделюю і об’єктом моделювання?
25. Поясніть співвідношення між моделлю та суб’єктом моделювання.
26. Яку роль має навколишнє середовище в реалізації властивостей моделі?

Лекція 2. - Електромеханіка й електромеханічні перетворювачі

1. Визначення електромеханіки як науки.
2. Історія розвитку науки про електрику.
3. Електромеханічні перетворювачі. Типи перетворювачів.
4. Ємнісні електромеханічні перетворювачі.
5. Індуктивні електромеханічні перетворювачі.
6. Індуктивно-ємнісні електромеханічні перетворювачі.

1. Визначення електромеханіки як науки

Електромеханіка – це фундаментальна наукова дисципліна, яка вивчає взаємний зв’язок та перетворення електричної і механічної енергії.

Предметом вивчення електромеханіки є електромеханічні системи – системи, які включають електромеханічні перетворювачі енергії та інші пристрої направлені на практичне використання електричної та механічної енергії. Вивченням таких систем займається ряд фундаментальних та прикладних наукових дисциплін [6, 7].

Серед фундаментних дисципліни – електродинаміка, механіка, теорія електромагнітного поля, електротехніка, а серед прикладних дисциплін такі – теорія електроприводу, електричні машини, електричні апарати, теорія електричної тяги, теорія автоматичного керування та інші технічні дисципліни більш вузького спрямування.

2. Історія розвитку науки про електрику

Виникнення і розвиток науки при електрику має багатовікову історію [6]. Ще декілька тисяч років назад були відомі електричні й магнітні явища. Електричні явища проявляються у виникненні електричних зарядів та їх взаємодії. Область науки яка вивчає взаємодію електричних зарядів називається електростатикою. З давніх-давен відомі такі прояви електричного поля як іскріння при прогладжуванні домашніх тварин, вогні святого Ельма, грім і блискавка, здатність янтарю, потертого об шерсть, притягувати легкі предмети та ін.

Початок наукового вивчення електротехніки слід віднести до дослідів англійського вченого С. Грея, який у 1729 році поділив речовини на провідники та ізолятори. В 1733 р. французький вчений Ш. Дюфе відкрив існування двох типів зарядів, а Б. Франклін ввів термін додатній та від’ємний заряди. Він же відкрив існування „атмосферної електрики”. При дослідженні її в 1753 р. загинув Г.В. Ріхман, який працював разом з М.В.Ломоносовим.

Магнітні явища також відомі з глибокої давнини. Мореплавці давно користуються компасом. Відомі властивості магнітного залізняку намагнічувати залізні предмети, відомі земні магнітні аномалії та магнітні гори здатні притягувати магнітну стрілку компаса. Магнітом намагались лікувати деякі захворювання людей.

Кількісне наукове вивчення електричних явищ слід віднести до дослідів французького вченого Шарля Кулона, який в 1785 р. експериментально всадовив закони електростатики: ввів поняття величини електричного заряду.

У 1786 р. Луіджі Гальвані відкрив явище скорочення лапки жаби при замиканні контуру „залізо-лапка-мідь”. Він стверджував, що відкрив особливий вид електрики, який проявляється в живих організмах.

У 1792 р. італійський вчений Олександро Вольта показав, що джерелом електрики в дослідах Гальвані є контакт двох металів: міді і заліза. Він у 1800 р. створив електрохімічний генератор який складався з цинкових та мідних дисків.

У 1802 р. російський академік В.В. Петров виготовив батарею з 4200 мідних і цинкових пластин і одержав джерело електроенергії потужністю 85 Вт при напрузі 1700 В. З допомогою цього джерела відкрив явище електричної дуги. Пізніше П.М. Яблочков використав електричну дугу як джерело світла в „свічці Яблочкова”.

На протязі тисячоліть магнітні та електричні явища розглядалися як ізольовані і зв’язку між ними ніхто не бачив. Закони дії електричного струму на магнітну стрілку в 1820 р. сформулювали французькі вчені Жорж Батіста Біо та Фелікс Савар. В цьому ж році Ерстед опублікував роботу по взаємодії магнітної стрілки і провідника зі струмом.

У 1821 р. Майкл Фарадей створив перший електродвигун який мав таку конструкцію. У ванні з ртуттю розміщено постійний, над ванною розміщено зігнутий стержень, що може обертатись. Цей стержень своїм кінцем входить у ртуть. При замиканні електричного кола від гальванічного елементу стержень починає рухатись навколо магніту.

У 1824 р. Г. Барлоу сконструював електричний двигун з постійним магнітом та електромагнітами.

Значне прискорення в розвитку науки про електрику та практичне використання електрики, набуло після відкриття закону електромагнітної індукції Майклом Фарадеєм у 1831 році.

Цей закон полягає в тому, що зміна магнітного поля приводить до виникнення електричного поля.

Закон електромагнітної індукції виражається відомою формулою

$$EPC = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

Електрорушійна сила, яка виникає в замкнутому електричному колі, пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує площу контуру.

Відкрите явище електромагнітної індукції дозволило об’єднати електричні й магнітні явища і вважати їх проявом одного виду енергії, а саме енергії електромагнітного поля.

Явище електромагнітної індукції лягло в основу електротехніки. Фарадей також встановив зв’язок між магнетизмом і світлом, дослідив проходження електричного струму в електролітах і відкрив закони електролізу і довів тотожність видів електрики, які вважали різними.

Подальший розвиток вчення про електрику та практичне використання електрики характеризується такими кроками [6].

У 1832 р. брати Піксі запропонували генератор змінного струму з підковоподібним магнітом та двома котушками.

У 1832 р. Е.Х. Ленц та Б.С. Якобі сформували принцип зворотності електричних машин, та дали методи їх розрахунку. В 1834 р. Б.С. Якобі побудував 4-х полюсний двигун з електромагнітами. В 1838 р. він встановив двигун на човен і плавав декілька годин по Неві.

У 1860 р. А. Печинатті запропонував кільцевий якір і створив прообраз сучасного електродвигуна.

У 1873 р. Ф. Гефнер-Альтенек і Е. В. Сіменс змінили якір на барабанний, а з 1880 р. Т. Едісон вдосконалив двигун зробивши магнітопроводи шихтованими.

У 1889 р. М.О. Доліво-Добровольський розробив трифазну систему струмів і створив асинхронний двигун.

У 1891 р. була створена електростанція і лінія електропередач, яка живила 1000 ламп розжарення на електротехнічній виставці в Франкфурті (на Майні) та двигун на 100 к.с., який привів у дію водоспад.

Поряд з розвитком практичного використання електрики важливе значення для подальшого технічного прогресу мало теоретичне узагальнення результатів дослідження електричних та магнітних явищ і створення єдиної математичної моделі електромагнітного поля.

Англійський фізик і математик Джеймс Максвелл, узагальнюючи одержані експериментальні залежності: закон Кулона, закон електромагнітної індукції, закон повного струму і ввівши поняття струму зміщення одержав рівняння, які повністю описують електричні і магнітні явища. Вперше рівняння були ним опубліковані в 1873 році у книзі «Трактат про електрику та магнетизм».

Система рівнянь електромагнітного поля включає чотири рівняння:

$$rot\ H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \qquad rot\ E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$divD = \rho \qquad divB = 0 \tag{2}$$

Перше з них – це узагальнення рівняння повного струму. Операція ротор векторної величини *rot H* означає циркуляцію магнітного поля по замкнутому контуру, j - це щільність струму, а $\frac{dD}{dt}$ - величина струму зміщення.

Друге рівняння – це закон електромагнітної індукції записаний у векторній диференційній формі.

Третє – це закон Кулона. Операція дивергенції *div D* означає витік індукції електричного поля.

Четверте рівняння відображає той факт, що незв'язаних магнітних зарядів не існує, тобто не можна відділити північний полюс магніту від південного.

Повну систему рівнянь електричного поля складають рівняння Максвела та рівняння середовища. Рівняннями середовища є залежності між величинами індукції *D* та напруженості *E* електричного поля та величинами індукції *B* та напруженості *H* магнітного поля. У випадку слабких електромагнітних полів, які порівняно повільно змінюються в просторі та часі, для ізотропних, неферомагнітних и несегнетоелектричних середовищ залежності мають вигляд:

$$E = \frac{D}{\varepsilon}, \qquad B = \mu H\ . \tag{3}$$

Рівняння доповнюють рівнянням неперервності:

$$div\ j = \frac{d\rho}{dt}, \tag{4}$$

яке означає, що витік струму з будь-якої точки простору дорівнює зміні електричного заряду в цій точці, і формулою Лоренцо:

$$m\mathrm{a} = \mathrm{q}\ (\mathrm{E} + \mathrm{V} \times \mathrm{B}) \tag{5}$$

де m, **a,** q, **V** – маса, прискорення, величина заряду та швидкість руху зараженої частинки (векторні величини виділені напівжирним шрифтом).

Разом – це замкнута система рівняння, яка описує поведінку будь-якої електричної, магнітної чи електромагнітної системи. Одним з важливих висновків з рівнянь Максвела було передбачення існування електромагнітного поля. Його в 1886 – 1889 роках дослідив німецький фізик Генріх Герц, а російський вчений О.С. Попов використав електромагнітне поле для радіопередачі продемонструвавши в 1895 р. перший радіоприймач. У 1901 р. він довів віддаль радіопередачі до 150 км.

Лебедєв П.М. досліджував міліметрові електромагнітні хвилі, кількісно підтвердивши електромагнітну теорію світла.

У спеціальній теорії відносності кожна пара рівнянь записується одним тензорним рівнянням в чотиримірному просторі-часі:

$$\frac{\partial \mathrm{F}_{\mu\nu}}{dx_l} + \frac{\partial \mathrm{F}_{\nu l}}{dx_\mu} + \frac{\partial \mathrm{F}_{l\mu}}{dx_\nu} = 0\ , \tag{6}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu\ . \tag{7}$$

Тут $\mathrm{F}_{\mu\nu} = (E, H)$ - Антисиметричний тензор поля (E, B - його компоненти).

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & -B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Спеціальна теорія відносності складає основу сучасної фізики і пояснення світобудови [8].

3. Електромеханічні перетворювачі. Типи перетворювачів

Електромагнітні перетворювачі енергії (ЕМП) – це прилади, за допомогою яких електричну енергію можна перетворити в механічну або механічну в електричну.

До електромеханічних перетворювачів відносяться як перетворювачі існуючі в природі так і створені людиною. Електромагнітні перетворювачі класифікуються [6] залежно від того, в якому полі, переважною мірою концентрується енергія, на:

- індуктивні;
- ємнісні;
- індуктивно-ємнісні.

В індуктивних електромеханічних перетворювачах перетворення енергії відбувається в магнітному полі, в ємнісних – в електричному, а в індуктивно-ємнісних - в електромагнітному полі.

Кожен тип перетворювача має характерну область потужностей (див. рис. 5). Для ємнісних перетворювачів вона знаходиться в межах від 10^{-17} до 10^{1} Ватта, для індуктивних від одиниць Ватта до 10^{9} , а індуктивно-ємнісних від 10^{-7} до 10^{7} Ватта.

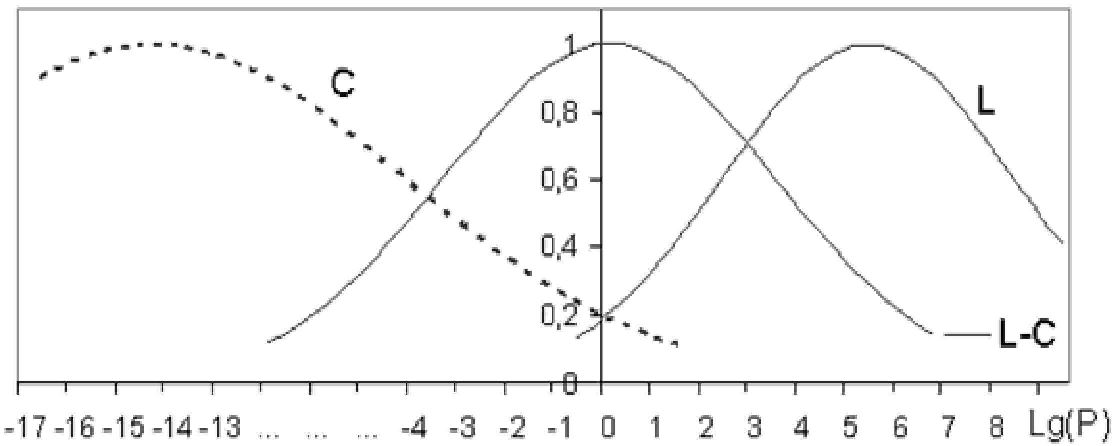


Рис. 5 - *Області потужності різних типів електромеханічних перетворювачів* (С – ємнісні, L – індуктивні, L-C – індуктивно-ємнісні)

4. Ємнісні електромеханічні перетворювачі

Ємнісні перетворювачі з’явились раніше індуктивних, проте не знайшли широкого використання. В шкалі потужності вони займають саме низьке положення Потужність їх від 10^{-17} Вт до декількох Ватт. Найбільш потужним ємнісним перетворювачем є електростатичний генератор.

Конструкцію його, запропонована в 1929 - 1931 р.р. Ван-де-Гаафом, показана на рис. 6.

У цьому генераторі заряди утворюються за допомогою коронного розряду на вістрі 1. Від'ємні заряди переносяться стрічкою 2 до центру металевої сфери, де знімається щіткою 3 і заряджають металеву сферу 4. Розміри генератора досягають 20 - 30 м в висоту, потужність його до 6 кВт, а напруга до 20 – 30 МВ. Для підтримання такої напруги генератор розміщують в атмосфері елегазу (SF_6).

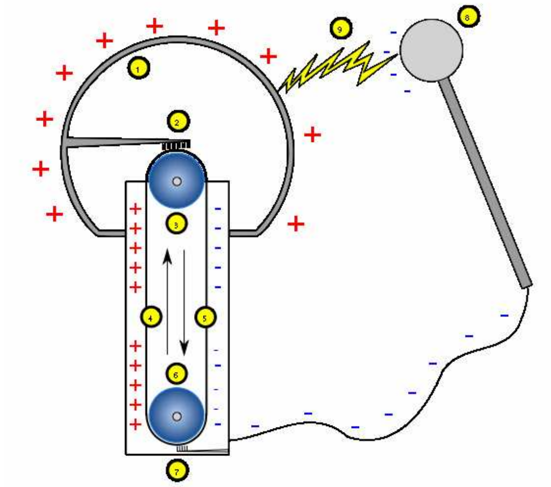


Рис. 6 - *Генератор Ван-де-Гаафа*
(1 – вістря, яке створює коронний розряд, 2 -стрічка, що переносить заряди, 3 - щітка, яка знімає заряди, 4 - металева сфера, 5 – ізоляційний корпус).

Досить перспективним ємнісним перетворювачем, який використовується в космічних апаратах, є іонний двигун. Схема його показана на рис. 7, а фотокарточка на рис.8. У двигуні прискорення заряджених частинок (іонів) відбувається в неоднорідному електричному полі конденсатора, виконаного у вигляді сопла двигуна. Прискорені іони створюють реактивну тягу. Використання таких двигунів ефективне для дальніх космічних польотів. Вони, маючи невелику тягу, працюють на протязі довгого часу, чим забезпечують постійне прискорення міжпланетних станцій.

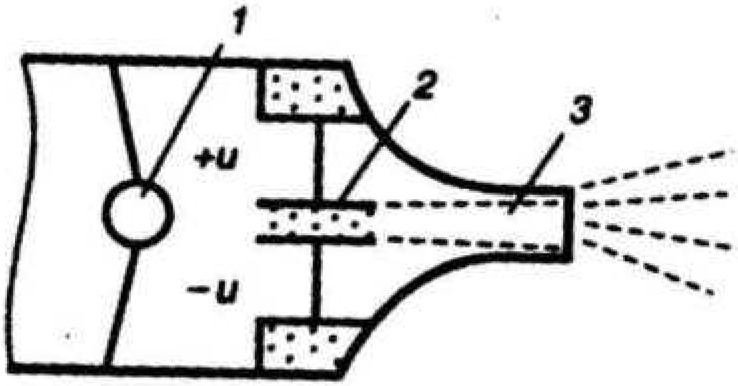


Рис. 7 – *Схема іонного двигуна*
(1 – джерело іонів, 2 – пластини конденсатора – прискорювача іонів, 3 - потік іонів в соплі двигуна)

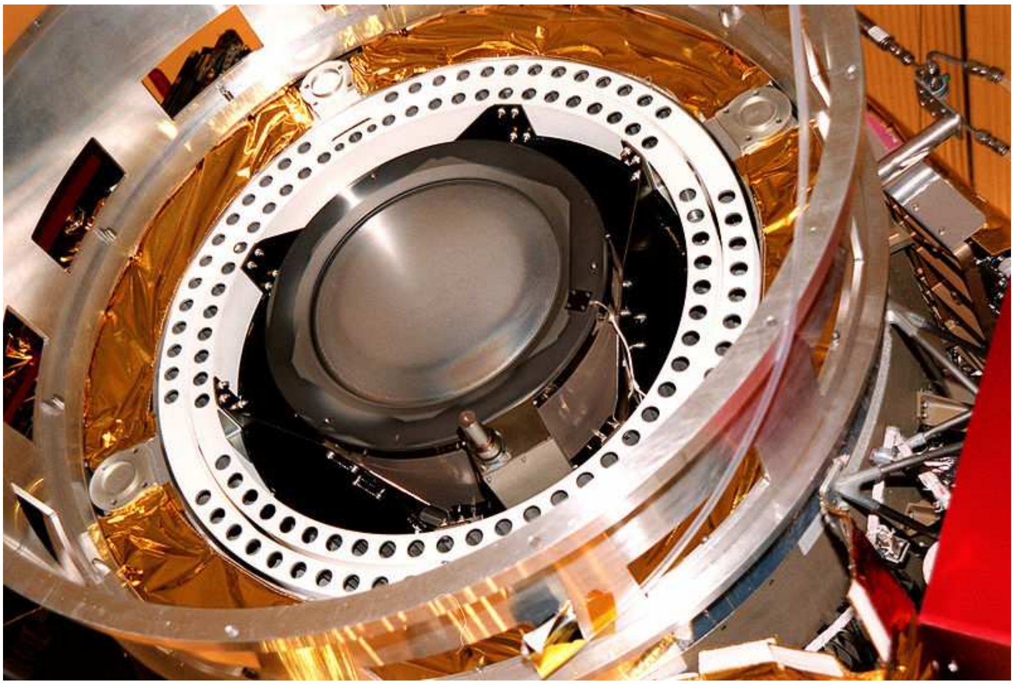


Рис. 8 – *Іонний двигун NSTAR американської автоматичної міжпланетної станції Deep Space 1*

Широкого розповсюдження набули ємнісні перетворювачі невеликої потужності. До них відносяться різні типи п’єзоелектричних перетворювачів, які використовуються наприклад, в програвачах пластинок (див. рис. 9) в п’єзоелектричному мікрофоні (див. рис. 10).

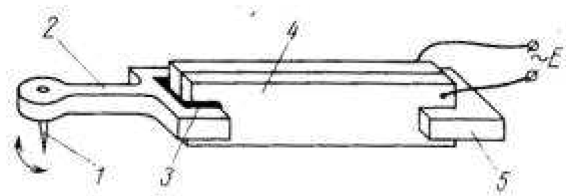


Рис. 9 - *П’єзоелектричний електромеханічний перетворювач* (кристал програвача пластинок).

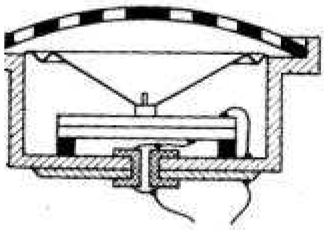


Рис. 10 – *П’єзоелектричний мікрофон*.

Існують ємнісні електричні машини, які можуть працювати в режимі генератора чи двигуна. Серед них двофазні, трифазні і багатофазні [6].

У живих організмах ємнісні перетворювачі є основними джерелами електроенергії. Вони створюють біопотенціали та електричні струми, що приводять у рух мускули. Одним з таких перетворювачів є клітинна мембрана, яка створює різницю потенціалів у живій клітині. На рівні клітин у живих організмах діє так званий натрій-калієвий (Na/K) насос. Молекули аденозітрофосфорної кислоти захоплюють іони калію та повертаються на 180°. Вони переносять іони з однієї сторони мембрани на іншу. Створюваний таким чином мембранний потенціал становить приблизно 90 – 200 мВ, а потужність 10^{-17} Вт. (див. рис. 11).

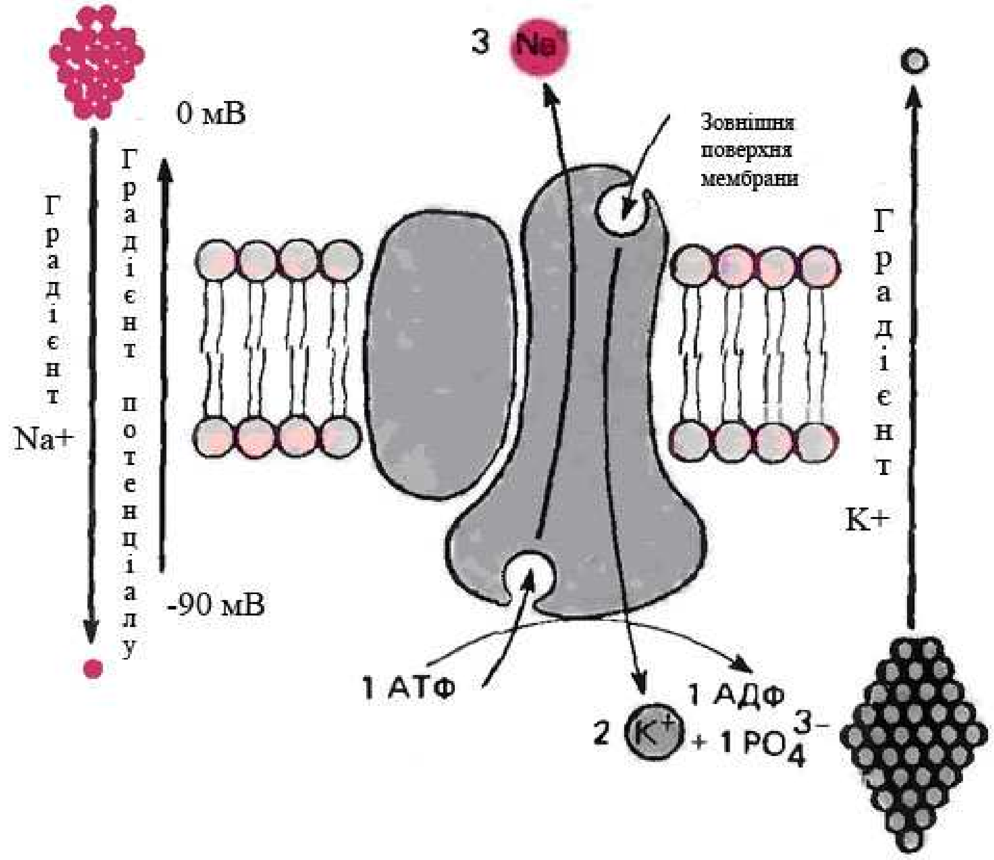


Рис. 11 – *Схема Na/K-насоса, який за один цикл виносить з клітки три іони Na+ проти градієнтів потенціалу і концентрації і приносить в клітку два іони K+.*

Мембранні білки переносять іони через мембрану проти електричного поля, споживаючи для цього енергію клітини. Найбільш важливий процес активного транспорту – це робота Na/K-насоса, що існує практично у всіх клітках; насос викачує іони натрію з клітки, одночасно накачувавши іони калію всередину клітки. Таким чином забезпечується низька внутріклітинна концентрація іонів натрію і висока – калію. Градієнт концентрації іонів натрію на мембрані має специфічні функції, пов'язані з передачею інформації у вигляді електричних імпульсів, а також з підтримкою інших активних транспортних механізмів. Більше 1/3 енергії, споживаною кліткою, витрачається на Na/K-насос, а в деяких найбільш активних клітках на його роботу витрачається до 70% енергії [9].

Біологи вважають, що першими електриками на землі є бактерії, які створюють електричні двигуни, генератори, акумулюють електричну енергію. На жаль, як відмічено в [6], за останній час біологи і електромеханіки розійшлись так далеко, що біологи не знають досягнень електромеханіки, а більшість електромеханіків не уявляє, що в живих організмах, як і в електричних машинах, здійснюється електромеханічне перетворювання енергії. У біологічних системах перетворення енергії проходить за тими ж принципами як і в технічних, тільки процеси значно складніші. Електроенергія в них виробляється безперервно, а використовується імпульсами. Причому, електроенергія в живих організмах виробляється великою кількістю електричних машин невеликої потужності

5. Індуктивні електромеханічні перетворювачі

Індуктивні електромеханічні перетворювачі були створені після відкриття закону електромагнітної індукції і за 150 років здійснили технічну революцію. Потужність цих перетворювачів коливається від долів Ватта до 10^9 Ватт – найбільш потужного генератора створеного людиною. Майже всі двигуни і генератори, які використовуються в промисловості, є індуктивними перетворювачами. Приклад електричної машини, яка працює в режимі двигуна показано на рис. 12.

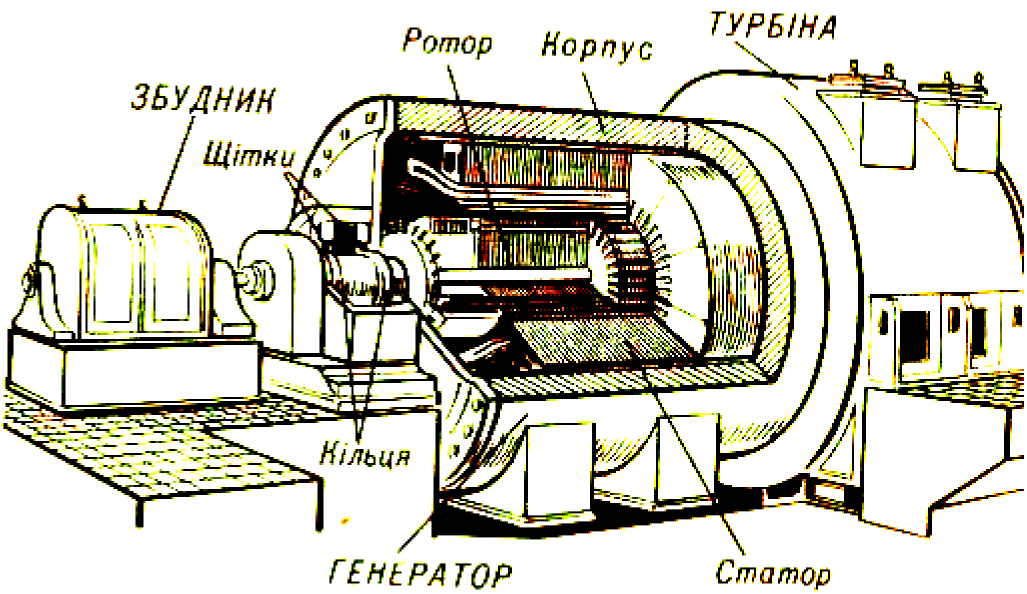


Рис. 12 – *Електричний генератор*.
(індуктивний електромеханічний перетворювач)

Індуктивні електромеханічні перетворювачі існують і в космосі. Так наша Земля з її електричним полем і струмами, що протікають в ядрі, є електричною машиною потужність якої приблизно 10^{24} Вт (див. рис. 13). Потужні електричні процеси відбуваються також і в магнітних полях зірок. Великі маси матерії в цих полях набувають значної швидкості і викидаються в космічний простір. Землю постійно обдувають потоки заряджених частинок, які виникають на Сонці.

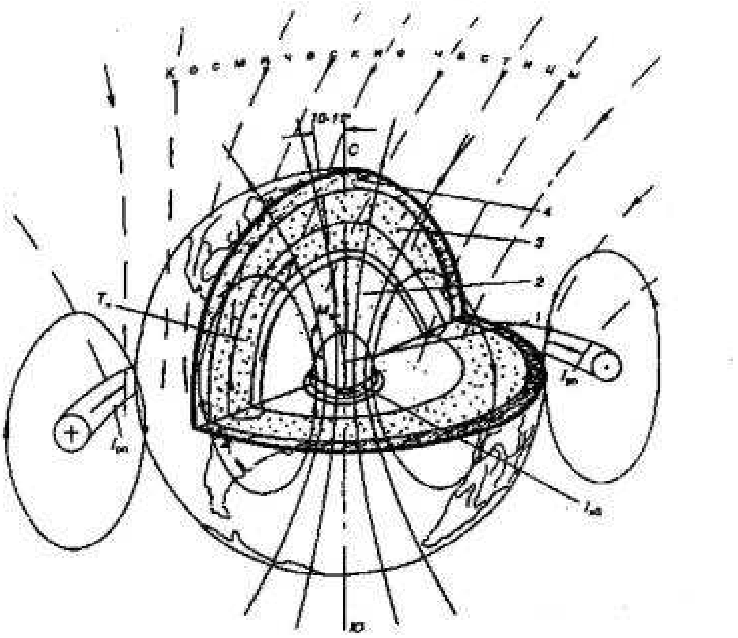


Рис. 13 – Схема уніполярної електричної машини “планета Земля”

6. Індуктивно-ємнісні електромеханічні перетворювачі

Індуктивно-ємнісні машини являють собою об’єднання ємнісної і індуктивної машин. Існує ряд проектів і дослідних екземплярів таких машин, які ще не набули практичного використання. Ці машини займають найбільш важливу область потужності (див. рис. 5). Приклади таких перетворювачів наведено в [6].

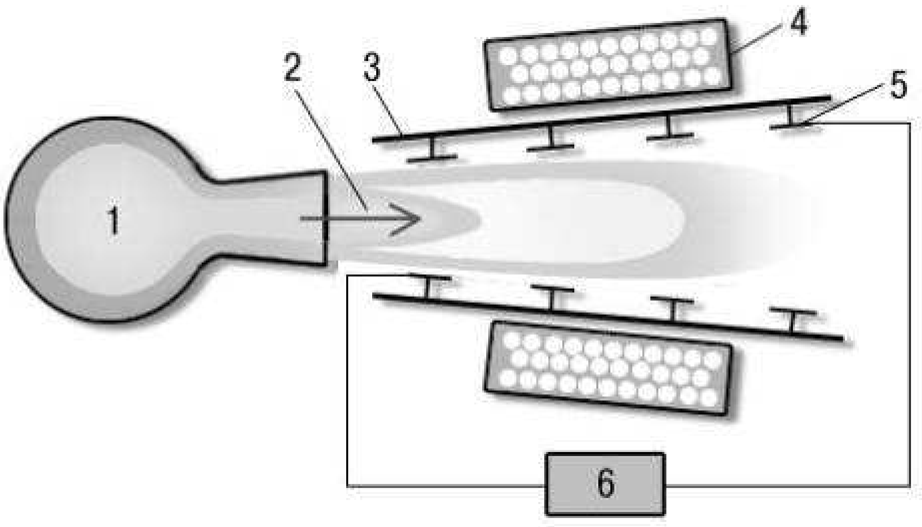
Одним з таких перетворювачів є магнітогідродинамічний ракетний двигун. У ньому робоче тіло, яке знаходиться в стані плазми прискорюється електромагнітним полем і створює тяговий імпульс.

Досить перспективним є використання перетворювачів теплової енергії в електричну без використання механічних рухомих частин, яким є магніто-гідродинамічний (МГД) генератор. У ньому енергія низькотемпературної плазми, або електропровідної рідини, що рухається в магнітному полі, безпосередньо перетворюється в електричну енергію. (див. рис. 14). Під дією магнітного поля електричні заряди розділяються і попадають на електроди. В результаті виникає різниця потенціалів, а в зовнішньому колі тече струм

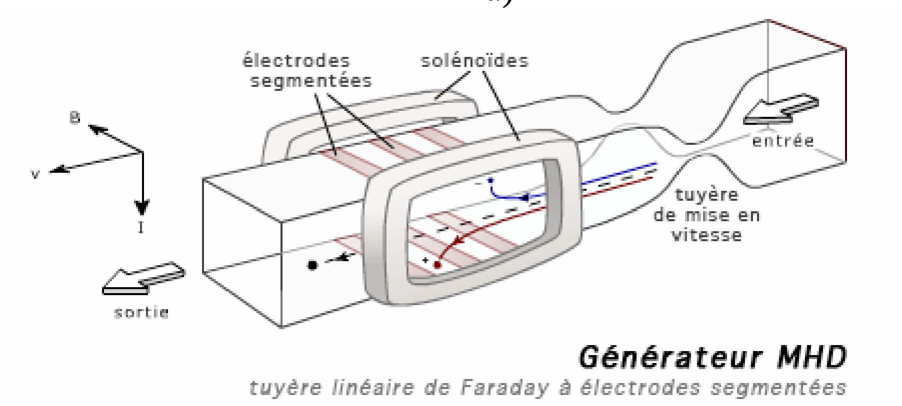
Потужність перших МГД-генераторов досягала 11,5 кВт. До середини 60-х років їх потужність вдалось довести по 32 МВт («Марк-V», США). В СССР в 1971 році була пущена дослідно-промислова - енергетична установки «У-25», потужністю 20—25 МВт.

Варіант електромеханічного перетворювача запропонований автором в якості дозатора ртуті під час виробництва трубчатих люмінесцентних ламп [10]. У ньому заряджений конденсатор розряджається через індуктор, генероване індуктором електромагнітне поле викликає механічне зусилля що проштовхує каплю ртуті в розрядну лампу.

У цьому розділі показано деякі типи електромеханічних перетворювачів енергії. З цього видно, якими різноманітними є розглянуті перетворювачі. Найбільш поширені з них це електромагнітні двигуни та генератори.



а)



б)

Рис. 14 – *Магнітогідродинамічний генератор.*

а) – схема будови, б) макет.

(1 – камера згорання, 2 - потік плазми, 3 - сопло генератора, 4 – обмотка, яка створює магнітне поле, 5 – електроди, 6 – споживач електроенергії).

Контрольні запитання

1. Які електричні явища відомі людям з сивої давнини?
2. Що вивчає фундаментальна наукова дисципліна електромеханіка?
3. Як називають область науки, яка вивчає взаємодію електричних зарядів?
4. Хто ввів поняття додатній та від'ємний заряди?
5. Коли і ким був створений перший електровимірювальний прилад?
6. Які типи взаємодії відомі сучасній науці?
7. Назвіть різноманітні прояви електромагнітної взаємодія в навколишньому світі.
8. Ким розпочато кількісне наукове вивчення електричних явищ?
9. Досліди якого вченого послужили основою винайдення хімічних джерел електричної енергії?
10. Хто вперше використав електричну дугу, як джерело світла?
11. Поясніть, у чому полягає явище електромагнітної індукції та сформулюйте закон електромагнітної індукції.
12. Хто розробив трифазну систему струмів і створив асинхронний двигун?
13. Яке відкриття дозволило об'єднати електричні та магнітні явища?
14. Хто виконав теоретичне узагальнення результатів дослідження електричних та магнітних явищ і створив єдину математичну модель електромагнітного поля?
15. Хто вперше дослідив електромагнітне поле?
16. Хто вперше використав електромагнітне поле для радіопередачі?
17. Назвіть приклади електромеханічних перетворювачів створених людиною?
18. Які електромеханічні перетворювачі створюють переважну частину електроенергії, що використовується людством?
19. Назвіть приклади електромеханічних перетворювачів існуючих в природі?
20. Яку найменшу та найбільшу потужність мають відомі електромеханічні перетворювачі?
21. Які типа електромеханічних перетворювачів ви знаєте?
22. Поясніть принцип роботи електростатичного генератора Ван-Дер-Гаафа.
23. Які електромеханічні перетворювачі можуть використовуватись в якості ракетних двигунів?
24. Які ви знаєте електромеханічні перетворювачі, що створила природа в живих організмах?
25. Поясніть принцип роботи натрій–калієвого насоса.

Лекція 3. **Вимірювання під час створення моделі. Кваліметрія і кваліметричні шкали**

«У кожному пізнанні стільки науки,
скільки в ньому математики.»
Еммануїл Кант

1. Роль вимірювань у створенні моделей.
2. Кваліметрія і кваліметричні шкали.
3. Шкала найменувань.
4. Порядкові (рангові) шкали.
5. Шкала інтервалів
6. Шкала відношень
7. Інші результати вимірювань: розпливчастий опис, імовірнісний опис.

1. Роль вимірювань у створенні моделей

Кожна модель – це певна абстракція, в якій виділені суттєві, з точки зору завдань вивчення, сторони об'єкта і встановлені їх взаємозв'язки.

Математична модель з'являється тоді, коли в системі виділені кількісні властивості і встановлені співвідношення між ними. Кількісні властивості присвоюють певним математичним об'єктам: постійним та змінним величинам, матрицям, векторам, тензорам, множинам, функціям, точкам, лініям, т. п.. Ці математичні об'єкти замінюють реальні об'єкти чи описують їх окремі властивості. Під час створення математичної моделі відбувається абстрагування від конкретного об'єкта і визначаються найбільш суттєві його властивості, які і виступають у ролі математичних категорій.

Відношення між математичними категоріями – це певні правила перетворення, алгебраїчні дії, інтегрування, диференціювання, порівняння, множення матриць, відображення множин та ін.

Деякі відношення між математичними категоріями можуть встановлюватись під час побудови моделі, я деякі приймаються як аксіоми.

Аксіома – це постулат чи твердження (факт) яке приймається істинним без доведення, а також як «фундамент» для побудови всіх подальших доказів.

Після того, як встановлені математичні категорії та їх основні відношення, а також аксіоми, яким вони повинні підпорядковуватись, все подальше обґрунтування підпорядковується виключно цим аксіомам, не співвідносячись до звичного конкретного значення об'єктів. В результаті створюється абстрактна математична модель. Рівень абстракції моделі залежить від того наскільки загальними є прийняті категорії та їх відношення.

Побудову математичної моделі здійснюють у такому порядку:

- вивчають властивості об'єкта моделювання;

- виражають ці властивості в математичних категоріях, об'єктах, поняттях, (абстрагуються від конкретного об'єкта моделювання до математичних категорій);

- вивчають відношення між математичними категоріями мовою абстрактної математики, тобто будують математичну модель;

- переносять математичні відношення на об'єкт моделювання;

- перевіряють ступінь відповідності моделі об'єкту моделювання.

Мова абстракції – це надзвичайно потужний засіб пізнання світу. Вона в своїх розвинутих формах мало що говорить непосвяченому, але дуже багато значить для обізнаного.

2. Експеримент і побудова математичних моделей

Властивості електромеханічних та інших систем вивчають шляхом експерименту. Експеримент є основою побудови моделей, а модель системи результатом експерименту. Між моделлю і експериментом існує двояке відношення. З одного боку модель неможливо побудувати без експерименту, а з іншого, для проведення експерименту потрібно мати модель системи, без якої неможлива постановка експерименту. Експеримент є основою побудови моделі він же є критерієм відповідності моделі об'єкту моделювання. Проте, між моделлю і експериментом нема порочного кола. Перші, найпростіші моделі будують на основі простих спостережень і далі шляхом експерименту удосконалюють модель. Тобто розвиток йде по спіралі. На основі моделі систем ставлять експеримент, а за результатами експерименту уточняють модель.

Розрізняють два види експерименту, а саме:

- активний
- пасивний.

Активний, або керований експеримент – це експеримент, в якому дослідник активно вмішується в хід експерименту, змінює умови його проведення, керує ходом експерименту.

Пасивний експеримент, або спостереження – це експеримент, в якому дослідник не вмішується в хід протікання процесів, не може їх змінювати, регулювати, а тільки фіксує умови експерименту та його результати.

Активний і пасивний експеримент однаково широко застосовують під час створення математичних моделей.

Результати експерименту завжди визначають шляхом вимірювання. Найбільш загальне визначення вимірювань таке:

Вимірювання – це алгоритмічна операція, яка певному стану об'єкта ставить у відповідність число, символ, знак чи назву.

Алгоритмічна операція означає, що вимірювання завжди виконують за чіткими правилами в строго визначному порядку. Причому, вимоги щодо дотримання правил і порядку, тобто алгоритму вимірювань, досить високі. Недотримання навіть деяких найдрібніших вимог алгоритму може повністю знецінити результати вимірювань.

Результати вимірювань можуть бути виражені числом, символом, знаком чи назвою. Сучасне розуміння вимірювань набагато складніше від уявлення про чисто кількісні вимірювання.

Розширене розуміння вимірювань можна охарактеризувати рядом ознак:

1. Існує ряд характеристик об'єкта, що підлягають кількісній оцінці. Ці характеристики є величинами, які можна визначити шляхом порівняння з іншими величинами взятими як еталон.

2. Явища які ми спостерігаємо в експерименті можуть не допускати кількісного визначення, але їх можна порівнювати між собою в сенсі „краще" – „гірше", „менше" – „більше" тощо. Такі явища можна виражати в явній шкалі порівнянь, яка має досить серйозне математичне обґрунтування.

3. Характеристики об'єктів, чи самі об'єкти експериментального дослідження можуть описуватись якісними ознаками і не допускати порівняння між собою. У таких випадках визначають тільки групу приналежності і присвоюють їм тільки певні найменування. Наприклад найменування захворювань при діагностиці пацієнта лікарем, назви мінералів, назви хімічних елементів. Незважаючи на це такі дії не дають кількісних оцінок вказані результати вважають вимірюваннями. Результати їх враховують в моделюванні і приводять до повністю науково обґрунтованих моделей.

4. Деяким результатам вимірюванням властива певна невизначеність, розпливчастість. Ця властивості вимірювань є притаманною об'єкту властивістю і їй може бути надана чітка математична форма.

5. Хоч збільшення точності вимірювань є одним з головних завдань метрології деякі вимірювання можуть мати похибку яку неможливо усунути.

6. Існує взаємодія між об'єктом вимірювань і вимірювальним приладом. У деяких випадках ця взаємодія суттєво впливає на стан об'єкта. Нехтувати цією взаємодією і звести до нуля неможливо. Більш того, в результаті вимірювань може змінитись стан об'єкту і після вимірювань він може бути іншим ніж до нього. Це в найбільшій мірі це відноситься до малих об'єктів моделлю яких є квантова механіка.

7. Є властивості об'єкта, які, маючи певний фізичний зміст та величину, не можуть бути виміряні і судити про них можна тільки на основі вимірювання інших властивостей.

8. Широкого розповсюдження набули статистичні вимірювання, результатами яких є імовірності величини, такі як середнє значення, математичне очікування, дисперсія, функція розподілу. Для таких вимірювань використовують не тільки спеціальні прилади, але і самі вимірювання виконують за спеціальними методиками.

Отже, вимірювання слід розуміти більш широко, ніж тільки кількісні вимірювання. Це може бути і присвоєння об'єкту певного імені, віднесення його до певного класу об'єктів. Під вимірюванням розуміють присвоєння результатам експерименту певного значення за певними правилами. Цим результатом може бути числове значення, знак, символ, назва тощо. Так наприклад, визначення типу транспортних засобів під час вивчення транспортних потоків на перехресті вважається вимірюванням.

3 Кваліметрія і кваліметричні шкали

Основою побудови моделей є об’єкт і його якісні ознаки. Якісні ознаки об’єкта виявляються через його властивості. Властивості об’єкта визначаються вимірюваннями. Числові ознаки виражаються числами. Ці числа одержують шляхом порівняння властивостей об’єкта з певними еталонами. Об’єкти моделювання можуть мати такі властивості, які не можна виразити числом. Тому доводиться оперувати і якісними ознаками. Питаннями вимірювання як кількісних, так і якісних властивостей об’єкта займається наукова дисципліна, що називається кваліметрією.

Кваліметрія – це наука, що вивчає властивості вимірювань. Визначення вимірювань вказує на те, що результат вимірювання містить певну інформацію про об’єкт і ця інформація одержана шляхом порівняння стану об’єкта з якимось іншим станом, введеним як основа вимірювання, або як еталон.

Кваліметрія залежно від властивостей об'єкта визначає такі шкали вимірювань:

1) шкала найменувань;
2) порядкова або рангова шкала;
3) шкала інтервалів;
4) шкала відношень;
5) абсолютна шкала.
6) інші шкали.

Шкала найменувань

Шкалу найменувань відносять до слабких шкал. Вона виникає тоді, коли порівняти об’єкти можна, тільки присвоївши їм певні найменування, віднести об’єкт до певного класу.

Більш строго математично це визначається так. Нехай система має певну кількість різних станів (у математиці - класів еквівалентності). Вимірювання полягає у визначенні, до якого стану (класу еквівалентності) відноситься стан об’єкта. Кожен клас еквівалентності має своє найменування, позначення або символ. Для кожного класу еквівалентності існують певні критерії. Під час вимірювання у відповідність об’єкту ставиться найменування або символ класу еквівалентності. Таке вимірювання називають вимірюванням у шкалі найменувань, а множину символів (найменувань) і ознаки станів, яким вони відповідають, - шкалою найменувань. Таку шкалу ще називають класифікаційною, наприклад, класифікація тварин за родами, видами й підвидами в біології. Для шкали найменувань справедливі такі аксіоми тотожності:

1^0 або **A=B**, або **A≠B,**

2^0 якщо **A=B,** то **B=A,**

3^0 якщо **A=B** і **B=C,** то **A=C,**

тут знак = означає еквівалентність.

Для позначення класів еквівалентності можуть використовуватися слова природної мови, певні символи або нумерація, наприклад: назви захворювань, географічні назви, найменування речовин, типи транспортних засобів тощо. У більш складному випадку, щоб полегшити користування шкалою, використовують ієрархію видів і підвидів, наприклад, географічна ієрархія: країни, області, райони; класифікація тварин за родами, видами, підвидами та ін.

Аксіоми тотожності, з точки зору логіки, відповідають принципам класифікації. Класифікація – це логічна операція об’єднання множини будь-яких різних об’єктів в групи (підмножини). Класифікація повинна задовольняти таким формальним вимогам:

- підмножини, в які об’єднують множину, не повинні мати спільних елементів;
- в сумі підмножини повинні дати вихідну множину класифікованих об’єктів;
- кожен елемент має входити до якогось одного класу;
- усі елементи одного класу вважаються еквівалентними.

Незважаючи на свою зовнішню простоту, віднесення до певного класу вже є певним, подекуди досить значним, ступенем вивчення системи. Наприклад, постановка діагнозу захворювання є класифікацією захворювань за шкалою найменувань. Це досить складна справа, вона потребує чималих професійних знань лікаря-діагностика і детального обстеження хворого. Вірна діагностика є запорукою успішного лікування, але ми знаємо немало прикладів помилок при діагностиці захворювань.

Інший приклад з області юриспруденції. Віднесення порушення закону до певної статті є також класифікацією і виконання її потребує досить значних професійних знань юриста.

Приклад з археології – віднесення залишків того чи іншого поселення до певної культури.

У геології – визначення знайденого в експедиції типу мінералу.

Приклади з області фізики:

-проведення експериментів по відкриттю нових хімічних елементів таблиці Менделєєва,

-визначення типів елементарних часток світобудови.

Відкрити й ідентифікувати новий хімічний елемент, чи визначити новий тип елементарних часток матерії - справа надзвичайно складна, нею займаються наукові інститути всього світу.

Отже, класифікація об’єктів за шкалою найменувань - це досить серйозна операція вимірювання, яка подекуди потребує глибоких наукових знань.

Користуючись шкалою найменувань, завжди слід мати на увазі, що вона є тільки символом певного класу, навіть у тому випадку, коли для цього використовуються числові номери. Ці номери тільки зовні мають вигляд чисел, хоча такими не виступають. Наприклад, номер учасника змагань є його символом, позначенням і використовувати його можна тільки як символ. Тобто ніякі математичні дії з ними не допускаються, можна тільки перевіряти їх тотожність, співпадають вони чи ні.

Порядкові (рангові) шкали

Порядкова (рангова) шкала, як і шкала найменувань, відноситься до слабких шкал. Вона виникає, коли в шкалі найменувань є не тільки можливість віднести об'єкти до певного класу еквівалентності, а й можливість порівнювати об'єкти за будь-якою ознакою в розумінні більше – менше, краще – гірше, тобто об'єкти можна розмістити в порядку збільшення чи зменшення якої-небудь ознаки. Розрізняють декілька порядкових шкал, які дещо відрізняються одна від другої за своєю силою, а саме шкалу простого порядку, шкалу слабкого порядку та шкалу часткового порядку. У шкалі простого порядку, крім аксіом 1^0 - 3^0, діють наступні аксіоми упорядкування:

4^0 якщо $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ то $\mathbf{B} < \mathbf{A}$,
5^0 якщо $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ і $\mathbf{B} > \mathbf{C}$ то $\mathbf{A} > \mathbf{C}$.

Шкала слабкого порядку відрізняється від шкали простого порядку тим, що бувають випадки, коли не кожну пару класів шкали найменувань можна чітко впорядкувати, а деякі класи вважаються рівними між собою. Для такої шкали порядку, що має назву шкали слабкого порядку, виконуються такі аксіоми:

4^1 якщо $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ то $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$,
5^1 якщо $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ і $\mathbf{B} \geq \mathbf{C}$ то $\mathbf{A} \geq \mathbf{C}$.

Прикладом такої шкали може бути впорядкування за ступенем спорідненості, як-от (батько = мати = дядько) > (син = дочка = племінник) > (онук = онука).

Шкала часткового порядку виникає, коли із всієї множини об'єктів є деякі пари, котрі можливо порівняти між собою, а інші – ні. Наприклад, у соціологічних дослідженнях при вивченні споживчої популярності товарів подекуди важко віддати перевагу велосипеду чи магнітофону, їх не можна порівнювати між собою, а іншим товарам може бути надана чітка перевага.

Характерною особливістю порядкових шкал є те, що в них встановлюється тільки відношення порядку, але нічого не говориться про те, наскільки один клас об'єктів кращий від іншого. Тому у випадку, коли порядок встановлюється певними числами, немає сенсу говорити про середнє число для певної групи чи про ступінь переваги однієї групи над іншою. Наприклад, порядковою шкалою користуються при оцінці виступів гімнастів, оцінці катання на ковзанах. Але тут не можна говорити про те, що спортсмен, який одержав 10 балів, в 2 рази краще виступає від того, хто одержав 5 балів. Так само немає сенсу порівнювати середній бал спортсменів, одержаний у різних видах програми. Інколи такі порівняння роблять, але слід розуміти, що вони ніяк математично не обґрунтовані.

Бажання звести все до чисел, бажання спрощення аналізу подекуди призводить до того, що виконуються такі операції, які в порядковій шкалі не допускаються. Наприклад, при вступі до вузу інколи враховують середній бал по всіх предметах, які вивчали у школі. Слід розуміти, що таке порівняння не має ніякого математичного обґрунтування, адже кожна школа дає різний рівень знань, та й знання з різних предметів між собою не порівнюються. Для порядкових шкал допускається обраховувати тільки порядкові номери (їх деколи називають рангами). У цій шкалі допускається виконувати такі операції, як порівняння рангів, розрахунок середнього рангу, визначення кількості об'єктів з однаковими рангами, визначення коефіцієнтів рангової кореляції

Існує цілий ряд рангових шкал (порядкових шкал), які широко прийняті в практиці. Розглянемо деякі з них:

- 12 – бальна шкала землетрусів за Ріхтером. Запропонована американським сейсмологом Ч. Ріхтером. Вона встановлює силу землетрусу по його магнітуді, залежно від енергії сейсмічних хвиль;
- 12 – бальна шкала оцінки сили вітру, запропонована англійським гідрографом, адміралом Бофортом, оцінює силу вітру за характером хвиль, що виникають на морі. У ній повній відсутності вітру відповідає оцінка 0 балів (штиль), а найбільший бал 12 відповідає урагану;
- 10 – бальна шкала Мооса, шкала твердості мінералів запропонована німецьким мінералогом Моосом, в якій самим м'яким мінералом є тальк, а найтвердішим – алмаз;
- дуже поширені бальні оцінки знань учнів, у школі була 5 - бальна і тепер вводиться 12 - бальна, у вузі 4-бальна.

Шкала порядків (рангова шкала) широко використовується при вирішенні багатьох технічних завдань, проведенні технологічних експериментів. Наприклад, вибір складу різних сумішей, визначення режимів обробки деталей, переваг шин коліс тролейбуса, виготовлених різними заводами, тощо. Рангові шкали часто використовують і рангові критерії у багатьох випадках відіграють головну роль. Перевагою рангових критеріїв у багатьох експериментальних дослідженнях є їх універсальність. Вони не зв'язані з певними параметрами функцій розподілу і висновки, одержані з їх використанням, мають універсальний характер. У деяких практичних питаннях оцінка за ранговою шкалою має перевагу навіть порівняно з вимірюваннями у більш сильних шкалах. У нашому курсі при виконанні лабораторних робіт часто використовуються рангові критерії, причому навіть у тому випадку, коли можна скористатися більш сильною шкалою вимірювань. Теорія рангових критеріїв останнім часом набула досить широкого розвитку і активно розвивається [11].

У деяких випадках виникає необхідність надати порядковій шкалі характеру більш сильних шкал, тобто ввести певною мірою можливість визначення відносної переваги одного об'єкта над іншим. У таких випадках застосовують модифіковані порядкові шкали. До них відноситься порядкова шкала Черчмена і Акоффа, що використовується в соціологічних дослідженнях.

Шкала інтервалів

Шкала інтервалів - це така шкала, в якій зафіксовані величини інтервалів, але відсутня величина, що відповідає початку шкали. У ній можна виражати відмінність одного об'єкта від іншого в певних умовних одиницях, єдиних для всієї шкали. Результатами вимірювання в такій шкалі є інтервали між певними значеннями, хоч самі значення можуть бути умовними. У ній є незмінними відношення двох інтервалів незалежно від того, які умовні одиниці були вибрані. Прикладами таких шкал є шкали температури, часу, висоти місцевості. Для цих величин або відсутня величина, яку слід взяти початком відліку, наприклад, для шкали часу, або допускається, що початок відліку може бути вибраний довільно, як, наприклад, для температури чи висоти місцевості.

Шкала інтервалів відноситься до сильних шкал. У ній можна виконувати усі математичні операції порівняння за винятком операції знаходження відносного відхилення, відносної похибки. Назва "Шкала інтервалів" відображає той факт, що в цій шкалі зміст чисел мають тільки інтервали між об'єктами. Наприклад, у шкалі часу значення має тривалість певного процесу без відношення до того, коли він проходив. Встановити абсолютний нуль, початок літочислення за об'єктивними ознаками неможливо. Тому при обліку часу допускаються різні шкали літочислення. За основу календарів прийняті певні історичні події. Існують такі календарі:

- Григоріанський - літочислення ведеться від дня народження Ісуса Христа (нова ера);
- Юліанський – літочислення ведеться від створення світу 5506 року до народження Ісуса Христа (до нової ери);
- Іудейський – створення Адама – 3696 рік до народження Ісуса Христа (до нової ери);
- Магометанський – втеча Магомета з Мекки в Медину – 622 рік після народження Ісуса Христа (нової ери).

Інтервали часу прив'язані до періоду обертання Землі навколо Сонця і навколо своєї осі. Існує також місячний календар, в якому інтервали часу відповідають часу обертання Місяця навколо Землі, а саме видимому часу обертання, який становить 28 діб. Підрахунок часу по тижнях - це один з фрагментів місячного календаря.

Шкала висот своїм початком також має умовну величину, за яку прийнято рівень моря чи світового океану. Але ця величина не абсолютна, оскільки поняття рівня світового океану і його визначення для даної місцевості досить складне. Крім того, відомо, що рівень океанів також не є постійною величиною і залежить від наявності великих мас під поверхнею у даній точці океану. Користуючись такою шкалою, ми одержуємо, що висота поверхні деяких країн має від'ємне значення, як-от для Голландії, прикаспійських районів Росії і Казахстану.

Шкала температур, хоч і має абсолютний нуль ($-273\ ^0C$), допускає вимірювання виконувати, починаючи з певної умовної величини. У шкалі Цельсія - це температура потрійної точки води (температура при якій за нормального атмосферного тиску існують рідка, тверда й газоподібна фази води). У шкалі Фаренгейта початок відліку відповідає 32 градусам температури за шкалою Цельсія. Це шкала, у якій реперними точками є температура суміші снігу з нашатирним спиртом (позначається числом 0) і температура кипіння води за нормальних умов (позначається +212). Перерахунок можна здійснити за формулою: $F = 5/9\ C + 32$.

Циклічна шкала

Циклічні шкали утворюються у випадку, коли результати вимірювань однакові при їх зміщенні на одну певну постійну величину. Наприклад, при кутових вимірюваннях такою величиною є 360 градусів. Шкала годинника є циклічною і зміщення на 24 години не змінює результату вимірювання. Вони мають властивості, близькі до властивостей шкали інтервалів.

Шкала відношень

Якщо певну величину можна вимірювати в числових значеннях, існує нульове значення величини і вона відповідає аксіомам адитивності, то вимірювання її відбувається у шкалі відношень. Наприклад, вимірювання більшості фізичних величин, як-от довжини, маси, напруги, опору тощо виконують у шкалі відношень.

Аксіоми адитивності - це такі аксіоми:

6^0 якщо **A= B** і **B > 0** то **A > 0;**
7^0 **A + B = B + A;**
8^0 якщо **A = P** і **B = Q** то **A + B = P + Q**;
9^0 **(A + B) + C = A + (B + C).**

У цій шкалі допускається виконання будь - яких математичних дій. Результати вимірювання є повноцінними числами, для яких можна виконувати всі математичні операції і обчислювати статистичні величини.

Зауваження відносно аксіом. Аксіоми це положення, які приймаються без доведення і на основі них будується вся подальша теоретична концепція. Вони приймаються здебільшого з умови „очевидності” проте при більш глибокому вивченні може виявитись, що не все так просто і очевидно. Наприклад, розглянемо аксіому адитивності:

A + B = B + A

Здається аксіома очевидна і ніякого застереження не потребує. Але в дійсності не для всіх об’єктів ця аксіома справедлива. Навіть у найпростішому випадку коли, наприклад, вважати A – переміщення в західному напрямку а B – північному на поверхні Землі, ця аксіома не діє. Якщо ми пройдемо по поверхні Землі 1 км на захід і на 1 км на північ, то ми попадемо майже в цю ж точку, що ідучи спочатку 1 км на північ а потім 1 км на захід. Але якщо взяти не 1 км а, наприклад, 5000 км, то ми будемо зовсім в іншій точці. Це видно з рис. 15.

Це показує, що до аксіом потрібно ставитись досить уважно. Аксіоми справедливі тільки для певних об’єктів до яких вони відносяться.

Відома аксіоматична побудова такої науки як евклідова геометрія. Але М.І. Лобачевский, ще в 1826 р. показав, що зміна аксіоми паралельності призводить до зовсім іншої, неевклідової геометрії. Побудова неевклідої геометрії логічно виходить з прийнятих аксіом. Хоч це відкриття не одержало признання сучасників, в подальшому воно внесло суттєві зміни в уявлення про природу простору. Зараз для пояснення будови Всесвіту, заповненого масивними космічними об’єктами, використовують так звані Гілбертові простори, які є узагальненням геометрії Лобачевского.

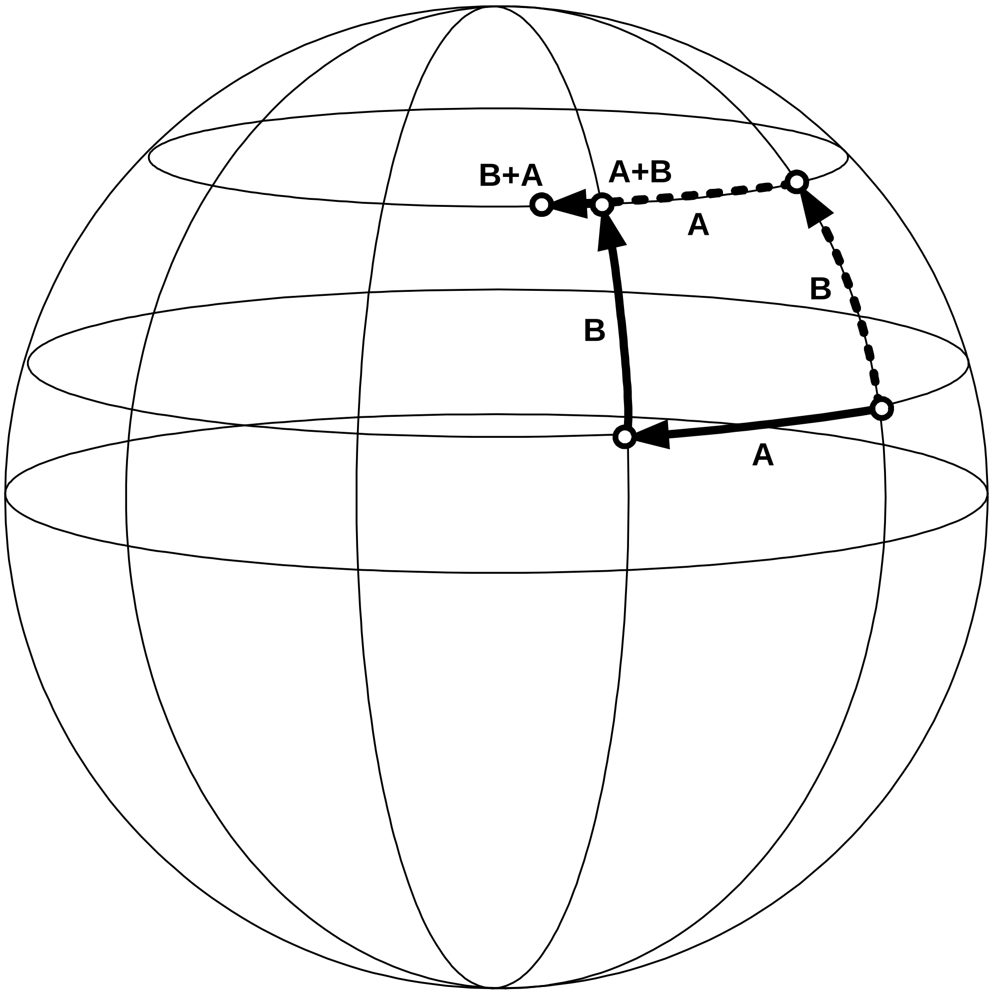


Рис. 15 – *До визначення аксіом. Схема переміщення по поверхні Землі.*
А – в напрямку на захід, В – в напрямку на північ А + В ≠ В + А

Кінцева точка (А+В) не дорівнює кінцевій точці (В+А) маємо

$$A + B \neq B + A.$$

Абсолютна шкала

Це така унікальна шкала, яка відповідає шкалі відношень і створюється за наявності абсолютного нуля та абсолютної одиниці. Нею є сукупність натуральних чисел. Важливою її особливістю є без розмірність. Завдяки цьому числа, виражені в такій шкалі, можуть бути основою логарифма, показника ступеня.

В електротехніці також подекуди використовують абсолютну шкалу в якій за одиницю приймають швидкість світла у вакуумі. Це шкала, яка більшість фізичних величин визначає безрозмірними числами.

Розглянуті шкали ми згрупували за ступенем їх сили. Чим сильніша шкала, тим більше даних вона дає про вимірювану величину. Тому завжди є намагання проводити вимірювання у найбільш сильній шкалі.

Вимірювання в сильних шкалах проводять шляхом порівняння з еталонами. Еталонами є встановлені певним чином і узаконені в міжнародній практиці величини, що визначають одиниці вимірювань. Вимірювання можуть бути прямими й непрямими (опосередкованими). Під час прямих вимірювань величину, котру вимірюють, безпосередньо порівнюють з еталоном. Під час непрямих вимірювань вимірювану величину перетворюють в іншу величину, яку вже порівнюють з еталоном. Наприклад, вимірювання віддалі метром є прямим вимірюванням, а вимірювання температури ртутним термометром – непряме, оскільки температура перетворюється в іншу величину, а саме висоту ртутного стовпчика, а цю висоту порівнюють з еталоном. При непрямих вимірюваннях використовують датчики, які перетворюють величину, яку потрібно виміряти, у величину, зручну для порівняння. Проведенням вимірювання, датчиками вимірювання, точністю результатів вимірювань займається наука метрологія.

Інші результати вимірювань. Розпливчастий опис

Для всіх розглянутих шкал справедливі аксіоми тотожності, а саме:

1^0 або **A=B**, або **A≠B,**
2^0 якщо **A=B** то **B=A,**
3^0 якщо **A=B** і **B=C** то **A=C,**

тобто є можливість чітко розрізнити два стани **A** і **B, (**чи два об'єкти **A** та **B). У** випадку реальних систем часто зустрічаються випадки, коли ці аксіоми не справджуються, тобто неможливо чітко розрізнити два стани. На практиці часто бувають випадки, коли не можна сказати, що цей об'єкт знаходиться у стані **A** чи **B** (відноситься до класу **A** чи **B**). Таких випадків у реальному житті дуже багато, ми з ними зустрічаємось на кожному кроці. Наприклад, визначити, чи висока людина? Якщо бачимо команду баскетболістів, то тренер серед них не є високою людиною, скоріше він низький. Але того ж тренера баскетболістів серед інших людей ми вважаємо високим. Наша мова має багато понять, що характеризують таку невизначеність. Це слова майже, приблизно, деяке, напевно, на мою думку та ін. Дуже багато понять мови мають певну невизначеність, наприклад, близько, великий, важкий, теплий, довгий і т.д. Ця властивість нашої мови є корисною, оскільки дає змогу описати різноманітність світу і закріпилась у мові протягом тисячоліть її розвитку. Вона відображає реалії навколишнього світу. Тому і при визначенні шкал вимірювань необхідно враховувати цю особливість.

Крім наведених вище шкал, існує ціла сукупність описів розпливчастих об'єктів. Питаннями опису їх займається спеціальний розділ науки, а саме теорія розпливчастих множин. Для опису таких об'єктів вводять, наприклад, додаткове поняття функції належності до певної множини, певного стану, наприклад **A,** і надають їй значення у межах від 0 до 1. Значення 0 чи 1 означають дію аксіом тотожності, а всі інші відповідають можливим проміжним випадкам.

Імовірнісний опис

На практиці часто доводиться мати справу, коли значення певної величини мають певну невизначеність, випадковість. Наприклад, під час вимірювання розмірів деталі результати мають похибку і сказати, чи однакові за розміром деталі, яка з них більша чи менша, подекуди буває важко. Невизначеність у цьому випадку має інший характер, ніж розпливчастий опис і має випадковий характер. Випадкові величини підпорядковані певним закономірностям і ці закономірності можуть бути виражені певними рівняннями. Основою опису випадкових величин є функція розподілу ймовірностей.

Про природу випадковості існує декілька точок зору, наведемо найбільш типові:

1. Природа випадковості полягає в тому, що ми на даний момент не повністю зрозуміли закономірності, маємо наближене уявлення про об’єкт, недостатньо його вивчили, поміряли. На такій точці зору знаходився Лаплас, який вважав, що випадковість не властива природі, а виникає через недостатність знань і випадковість, у принципі, можна усунути.

2. Протилежна точка зору в тому, що випадковість є об’єктивною властивістю усіх явищ, вона відіграє головну роль у керуванні Всесвітом, тобто у світі діють одні випадковості, а закономірності відіграють обмежену роль.

3. Проміжна позиція полягає в тому, що визнається існування як детермінованих явищ, так і випадкових. Наприклад, статистична фізика, квантова механіка, генетика мають справу з випадковими явищами, але через випадкові явища виявляються об’єктивні закономірності.

4. У сучасних математичних дослідженнях складних систем виявлено, що є певні періоди, стани, в яких системи ведуть себе повністю детерміновано, а в інших – випадково. Ці стани можуть замінювати один одного. Тобто випадковість властива світові і закони випадковості мають силу так само, як і закони повної детермінованості.

Для опису випадкових величин використовують статистичні вимірювання. Особливістю їх є те, що вони проводяться за спеціальними методиками. Результатами статистичних вимірювань, що приймаються як характеристики об’єкта, є певні величини, котрі називаються статистиками. Як статистики використовують величини, розраховані за рядом значень випадкової величини за певними, наперед відомими формулами. Однією з головних властивостей статистик є їх стійкість, відтворюваність. У статистиках проявляються характеристики об’єкта, властивості, що характерні детермінованим явищам, тобто загальні закономірності явищ.

Отже, в цьому розділі ми ознайомилися з вимірюваннями властивостей об’єктів, основними характеристиками вимірювань і шкалами, що використовуються для відображення результатів вимірювань у системному аналізі та в інших наукових дисциплінах. Такими шкалами є: шкала найменувань, порядкові (рангові) шкали, шкала інтервалів, циклічна шкала, шкала відношень, абсолютна шкала. Проте через багатогранність навколишнього світу, його різноманітність цих шкал вимірювань недостатньо і виникає необхідність в іншому представленні результатів вимірів. Для опису станів систем використовують також розпливчастий, а також статистичний опис. Поняття вимірювання є одне з головних понять, на якому ґрунтується наукове дослідження.

Контрольні запитання

1. Поясніть взаємозв’язок між моделлю та експериментом.
2. Яким може бути експеримент за своїм характером ?
3. Який експеримент називають пасивним ?
4. До якого характеру експерименту відносять спостереження?
5. Які особливості активного експерименту?
6. Які питання вивчає наукова дисципліна “Планування експерименту”?
7. Дайте визначення поняттю “Вимірювання”?
8. Чи можуть результати вимірювань виражатись знаком, номером?
9. Наскільки важливо притримуватись алгоритму вимірювання, що таке алгоритм вимірювання?
10. Що вивчає наукова дисципліна “Кваліметрія”?
11. Які шкали вимірювань визначає кваліметрія?
12. Які аксіоми справедливі для шкали найменувань?
13. Чи можна віднести до вимірювань постановку діагнозу лікарем?
14. В якій шкалі визначаються найменування мінералів у геології?
15. Як відноситься до поняття вимірювань класифікація тваринного світу?
16. Наведіть аксіоми впорядкування для рангових шкал?
17. Яка шкала називається ранговою?
18. Чим відрізняються шкали сильного і слабкого порядку?
19. Які математичні дії не допускається виконувати в ранговій шкалі?
20. Чи має математичний сенс середній бал успішності студента?
21. Дайте визначення шкали інтервалів?
22. Які кваліметричні шкали відносяться до сильних шкал, а які до слабких?
23. Наведіть приклади використання шкали інтервалів.
24. Дайте визначення шкали відношень.
25. Дайте визначення абсолютної шкали.
26. Які особливості абсолютної шакали?
27. Наведіть приклади величин, що вимірюються в шкалі відношень.
28. Які математичні дії можна виконувати над величинами, вираженими в шкалі відношень?
29. Наведіть приклади розпливчастого опису величин, чи можна такий опис віднести до вимірювань?
30. Яку особливість мають результати вимірювань у статистиці?

Лекція 4. **Експериментальні дослідження електромеханічних систем**

«Всяка наука розпочинається там де починаються вимірювання.»
Д.І.Менделєєв

1. Вимірювання електромеханічних величин.
2. Похибки вимірювань.
3. Похибка результатів, які визначаються шляхом обчислення за даними вимірювання.
4. Метрологія, метрологічна повірка.

1. Вимірювання електромеханічних величин

Дослідження електромеханічних систем і побудова моделей основується на результатах вимірювань. В моделюванні електромеханічних систем використовують вимірювання в шкалах найменувань, рангових шкалах на сильних шкалах інтервалів та відношень. Особливе значення мають вимірювання в сильних шкалах, до яких слід відносити школу інтервалів, відношень та абсолютну шкалу. Ці вимірювання здійснюють шляхом порівняння вимірювальної величини з певним еталоном – одиницею вимірювань. Це порівняння може виконуватись як безпосередньо так і через проміжні ланки. Розрізняють прямі вимірювання та непрямі (опосереднені). У даному курсі під термінами прямі та непрямі вимірювання розуміють таке:

Прямі вимірювання – це такі вимірювання, під час яких вимірювана величина безпосередньо порівнюється з еталоном. Наприклад, вимірювання розмірів лінійною, маси тіла за допомогою гирі і т.п.

Непрямі вимірювання – це вимірювання, під час яких вимірювана величина за допомогою датчиків – первинних перетворювачів, перетворюється в сигнал, іншу зручну для порівняння величину і цей сигнал подається на індикатор.

Наприклад, під час вимірювання температури датчиком може бути стовпчик ртуті. Об'єм стовпчика ртуті змінюється залежно від температури. В резервуарі з вертикальною трубкою за висотою стовпчика ртуті можна визначити температуру. Тут резервуар з ртуттю є датчиком температури.

Інший приклад: вимірювання струму датчиком, яким може бути котушка, що повертається в магнітному полі.

Вимірювальний прилад – це засіб вимірювання, призначений для вироблення сигналів вимірювальної інформації, тобто сигналів функціонально зв'язаних з вимірюваними фізичними величинами, в формі доступній для безпосереднього сприйняття експериментатором [11].

Як правило, вимірювальний прилад складається з датчика (первинного перетворювача) та простою індикації, який одержану датчиком величину переводить у величину зручну для сприйняття експериментатором.

Залежно від типу датчика розрізняють систему приладу. Для вимірювання електричних величин використовують вимірювальні прилади таких систем електричної, електродинамічної, електростатичної, теплової та ін.

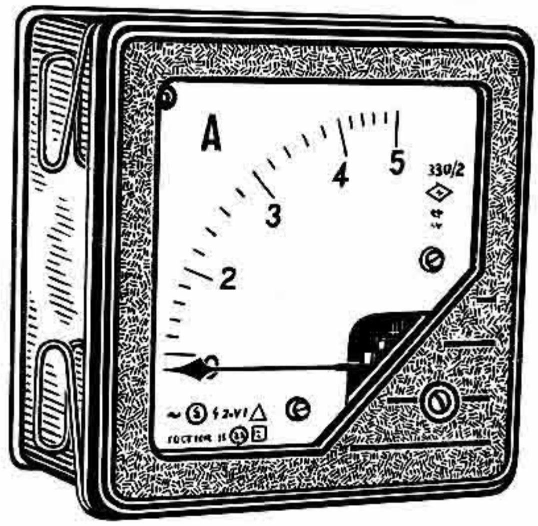


Рис. 16 – *Приклад електровимірювального приладу*

У таблиці 1 подано системи приладів, які найчастіше використовуються для вимірювань електричних величин та їх умовні позначення.

Системи електровимірювальних приладів розрізняють відповідно до того, який датчик (первинний перетворювач) використано в приладі. Найбільш поширені системи електровимірювальних приладів наведено в табл.1.

Таблиця 1 – Найбільш поширені системи електровимірювальних приладів.

Найменування системи приладу	**Принцип дії**	**Умовне позначення**	**Характер струму**	

Первинні перетворювачі (датчики) електровимірювальних приладів відносять до електромеханічних перетворювачів. В них енергія електромагнітного поля перетворюється в механічну енергію рухомих частин. Як правило рухома частина електровимірювальних приладів повертається на певний кут. Величина кута повороту залежить від обертового моменту, створюваного електричним чи магнітним полем. Для приладів різних систем спосіб створення обертового моменту різний, а саме:

- В приладах магнітоелектричної системи обертовий момент створюється в результаті взаємодії вимірюваного струму, який проходить по рамці з проводом з магнітним полем постійного магніту.
- В приладах електромагнітної системи обертовий момент виникає в результаті взаємодії магнітного поля котушки, по якій тече вимірюваний струм з феромагнітним осердям.

• В приладах електродинамічної системи обертовий момент виникає в результаті взаємодії рухомої та нерухомої котушок зі струмом.

• В приладах феродинамічної магнітне поле нерухомої котушки підсилюється за рахунок наявності феромагнітного осердя. Ці прилади більш чутливі від електродинамічних, але мають менший клас точності.

• В приладах індукційної системи обертовий момент створюється за рахунок взаємодії індукованого струму, наприклад в алюмінієвому диску, з магнітним полем створеним вимірюваним струмом.

• Прилади електростатичної системи відносяться до ємнісних електромеханічних перетворювачів. У них обертовий момент створюється за рахунок електричного поля в результаті взаємодії двох систем заражених провідників.

• В приладах теплової дії обертовий момент створюється за рахунок теплової дії струму.

• В приладах вібраційної системи використовується явище резонансу, в результаті якого виникають механічні коливання певних елементів приладу.

• Прилад з напівпровідниковими та механічними перетворювачами використовуються коли потрібно змінити тип струму, або проводити вимірювання у певні моменти змінного струму.

• Аналогові прилади, які набувають особливо широкого розповсюдження в електронних вимірювальних системах, здійснюють аналогово-цифрове перетворення та числовий підрахунок імпульсів.

Кожен електровимірювальний прилад має маркування, на якому вказується:

- Тип приладу . який складається з літери та цифр, наприклад Д280.
- Умовне позначення системи приладу, див табл.1.
- Робоче позначення приладу (- горизонтальне, | вертикальне, $<60^0$ під кутом
- Тип струму, в колі якого можна використовувати прилад (— постійний ~ змінний, ≅ постійний та змінний).

Прилади високих класів точності мають, як правило, декілька границь вимірювання. На таких приладах може бути таблиця ціни поділок для кожної з границь вимірювання. Якщо нема такої таблиці, то ціну поділки можна визначити шляхом ділення встановленої границі вимірювань на кількість поділок шкали. Для зменшення похибки зняття показів прилади високих класів точності мають рівень, за яким встановлюється потрібне робоче положення та дзеркальну шкалу, призначену для зменшення похибки викликаної паралаксом положення оператора.

До вимірювальних приладів також відносять:

o міри і еталони певних фізичних величин, вимірювальні перетворювачі,
o випробувальні установки,
o вимірювально – інформаційні системи.

Міри та еталони служать для виконання вимірювань шляхом порівняння. Вимірювання об’єму, ваги виконуються за допомогою певних мір – мірних чашок, гир. При електротехнічних вимірюваннях використовують такі міри: опору, ємності, індуктивності. Досить часто ці міри об’єднуються в комплекти що мають перемикачі. Такі комплекти називають вимірювальними магазинами, як то: магазин опору, магазин ємностей.

В електротехніці досить часто використовують такі вимірювальні перетворювачі, як трансформатори струму та напруги. Вони застосовуються для виконання вимірювань в колах з великими струмами та високою напругою за допомогою приладів з відносно невеликими границями вимірювань. Прилади високих класів точності - 0,5 і вище промисловістю випускаються на струми до 10 A і напругу до 600 V. Для виконання вимірювань в колах з набагато більшими значеннями напруги та струму використовують трансформатори струму та напруги.

Ще однією різновидністю вимірювальних приладів є вимірювальні мости. Вимірювальні мости – це пристрої для виконання вимірювань методом порівнянь. Вони виконані за схемою мостового кола з гальванометром, який служить нуль-індикатором.

2. Похибки вимірювань

Результати вимірювань є об'єктивними, але мають і дещо суб'єктивний характер. У них відображено об'єктивне значення вимірювальної величини та складова зумовлена суб'єктивним характером вимірювань. Похибки вимірювань виникають за таких причин:

- датчик (первинний перетворювач) – не зовсім вірно відображає вимірювану величину;
- проміжний елемент індикації дещо не правильно відображає величину одержану датчиком;
- людина, яка виконує вимірювання вносить похибки при користуванні вимірювальним приладом.

Похибки за їх величиною прийнято ділити на:

- промахи (грубі похибки),
- систематичні
- випадкові.

Промахи (грубі помилки) виникають в результаті:

- дій людини, яка помилково зняла покази приладу,
- несправність приладу.

Як правило, найчастіше промахи допускає людина під час виконання вимірювань. Несправність приладу у більшості випадків виявляється одразу і промахи по цій причині бувають відносно рідко. Промахи, як результати вимірювань відкидають і не враховують у подальшому. Критерієм вилучення промахів є критерій 3σ, який ми розглянемо дещо пізніше.

Систематичні похибки – це похибки, величина яких під час послідовних вимірювань відрізняється від дійсного значення і відхилення її постійне та не залежить від кількості вимірювань. Виявити систематичну похибку приладу можна тільки шляхом контрольних вимірів еталонним приладом, або вимірюючи еталону величину. Систематична похибка приладу не може перевищувати значення дане класом точності приладу.

Випадкові похибки – це похибки, які при кожному повторному вимірюванні мають іншу величину, а при багатьох вимірюваннях відхилення від дійсної величини знакозмінне. Випадкові похибки виникають після усунення систематичних похибок вимірювань.

В основі аналізу випадкових похибок лежить допущення, що кінцевий результат вимірювань є результатом дії великої кількості чинників, кожен з котрих призводить до малої похибки. При правильності цього допущення похибка є випадковою величиною, щільність імовірності якої підлягає нормальному закону розподілу ймовірностей:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_k^2}}$$

Цей закон розподілу характеризується двома параметрами: m_x – математичне очікування; σ_x^2 - дисперсія вимірювань (див.рис.17).

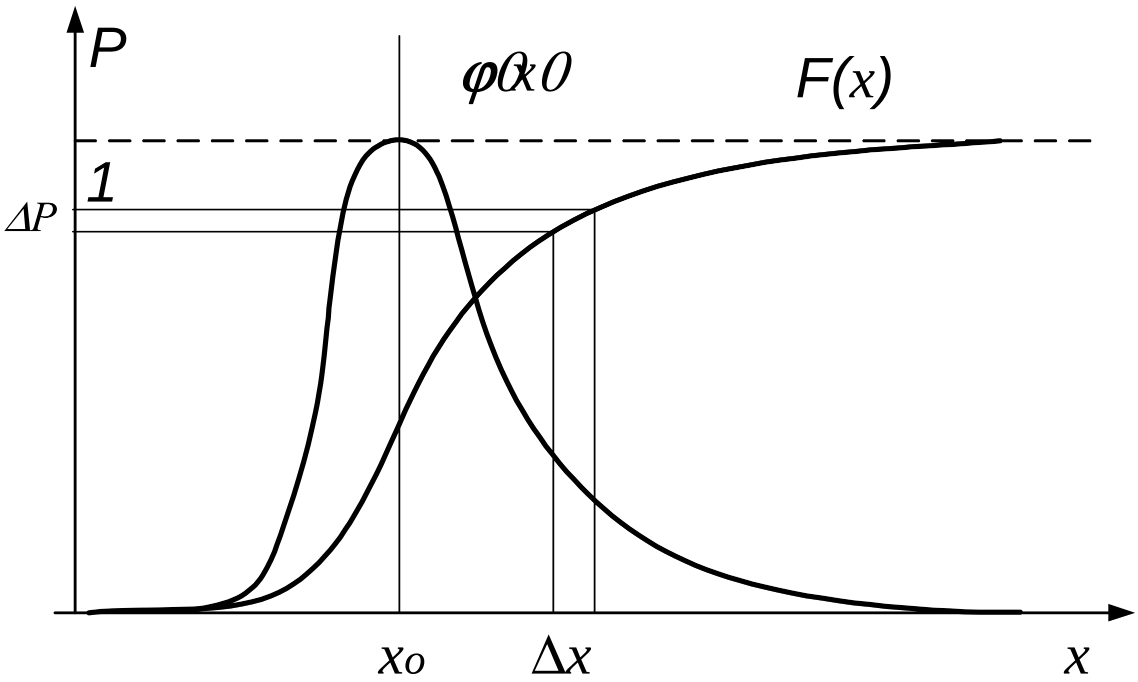


Рис.17 – *Графік розподілу результатів вимірювань*

F(x – функція розподілу,

φ(x) – щільність ймовірності розподілу.

Графік густини імовірності $\varphi_{(x)}$ відображає імовірність того, що результат вимірювань знаходиться в інтервалі (x, x + Δx).

Дійсне значення вимірювальної величини, коли усунута систематична похибка вимірювань, відповідає математичному очікуванні m_x. Визначити це значення за результатами вимірювань можна тільки з певною точністю. В якості точності вимірювань виступає величина дисперсії.

Довірчий інтервал – це інтервал значень в якому, з гарантованою на перед імовірністю (довіреною імовірністю), знаходиться дійсне значення вимірювальної величини (математичне очікування випадкової величини). Тобто довірчий інтервал визначається надійністю (гарантованою довірчою імовірністю) з якою ми хочемо визначити дійсне значення. Чим більші вимоги до надійності тим ширшим буде довірчий інтеграл. Для орієнтації в табл. 2 приведені значення довірчих інтервалів за різних значень достовірності (довірчої імовірності).

Таблиця 2 – Значення довірчих інтервалів за різних значень довірчої імовірності.

Довірча імовірність	**Ширина довірчого інтервалу**
0,65	$\sim \sigma_x$
0,95	$\sim 2\sigma_x$
0,99	$\sim 3\sigma_x$

Як бачимо, при вимозі надійності (довірчої імовірності) 95% довірчий інтервал складає $2\sigma_x$, тобто рівний подвійному значенню середньо квадратичної похибки. Якщо інтервал значень рівний (m_x-σ_x; m_x+σ_x), то гарантувати, що дійсне значення величини знаходиться в цьому інтервалі ми можемо тільки на 65%. В довірчому інтервалі шириною $3\sigma_x$ дійсне значення знаходиться з імовірністю 99%. Можна стверджувати і навпаки що імовірність відхилення $3\sigma_x$ від дійсного значення не перевищує 1%. Вважаючи подію, імовірність якої менше 1%, майже неможливою в одному випадковому досліді, можемо відкинути похибки вимірювань за критерієм $3\sigma_x$. Критерій $3\sigma_x$ полягає в тому, що відхилення результатів вимірювань більше ніж 3σ вважають малоймовірне, і такий результат вимірювань швидше всього виник через невірне вимірювання і його потрібно вилучити і в подальшому не розглядати.

Для збільшення точності роблять повторні вимірювання. Результати повторних вимірювань розглядають як певна вибірка. На основі вибірки розрахувати наближене значення m_x та σ_x згідно формул:

$$\overline{m}_x = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (9)$$

$$\overline{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad (10)$$

Закон великих чисел стверджує, що при збільшенні числа дослідів (збільшенні вибірки) одержані величини прямують до дійсних значень тобто:

$$\overline{m}_x \to m_x \text{ при } n \to \infty$$

$$\overline{\sigma}_x \to \sigma_x$$

У випадку конечної кількості вимірювань завжди можна оцінити довірчий інтервал.

Під час обробки результатів вимірювань визначають абсолютну й відносну похибки.

Абсолютна похибка – це різниця між виміряним і дійсним значенням величини:

$$\Delta x_i = x_i - x_{\text{дійсне}} \qquad (11)$$

Відносна похибка – це відношення абсолютної похибки до дійсного значення вимірюваної величин:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x_д} \qquad (12)$$

Відносну похибку розраховують під час вимірювань в шкалі відношень чи абсолютній шкалі. У шкалі інтервалів відносна похибка сенсу не має.

Класом точності приладу називають його відносну похибку виражену у відсотках. Так прилад 1 класу точності має відносну похибку 1% а класу точності 0,2 – 0,2%. Чим більша точність приладу (менша відносна похибка) тим вищим вважається клас точності. Наприклад, клас точності 0,2 вище ніж 1.

Вимірювальні прилади за класом точності орієнтовно поділяють на: індикатори, технічні і лабораторні прилади. Індикатори мають клас точності 5, 10 і гірше. Технічні прилади – це прилади класу точності 2,5; 2; 1. Лабораторні прилади мають клас точності 0,5 і вище (0,2; 0,1; 0,05; 0,02; ...). Цей поділ, як і всякий поділ, умовний, і для різних приладів дещо відрізняється. Наприклад, виміряти зсув фаз з точністю 2% досить складно і фазометри такої точності відносять до лабораторних.

Клас точності є однією з найважливіших характеристик вимірювального приладу. Більш точні прилади завжди є і більш складними. Під час метрологічної повірки прилади меншого класу точності порівнюють з приладами більш високого класу точності. Повірка визначає чи входить похибка приладу в інтервал визначений його класом точності.

Зауваження. Клас точності приладу визначають при максимальному відхиленні індикатора, тобто на верхній межі діапазону вимірювань. Тому користуючись вимірювальними приладами вимірювання слід проводити так, щоб стрілка індикатора знаходилась у верхній частині шкалами вимірювань, по крайній мірі переходила через половину шкали.

3. Похибка результатів, які визначаються шляхом обчислення за даними вимірювання

У багатьох випадках використання результатів вимірювань практичне значення має не сама по собі похибка вимірювань, а похибка величини, яка одержана шляхом обчислень за результатами вимірювань. Для визначення такої похибки використовують методи математичної обробки результатів вимірювань. Формулу, за якою обчислюють кінцеву величину, подають у вигляді розкладу в ряд Тейлора в околі одержаного значення. Це степеневий ряд, в який входять значення виміряної величини та члени пропорційні послідовним степеням похибки вимірювання. Враховуючи, що похибка вимірювань відносно невелика, степеневий ряд обмежують лінійними членами розкладу. (При похибці вимірювань 0,01 величина квадратичних членів становитиме 0,0001 вимірюваної величини і їх можна відкинути).

Наприклад, нехай потрібно розрахувати відносну похибку визначення потужності N, споживача електроенергії, якщо виконується вимірювання струму i та опору R. Причому, струм i поміряно приладом класу точності 0,5, а опір R – приладом класу точності 1.

Формула розрахунку потужності така**:**

$$N = i^2 R \tag{13}$$

Для вирішення завдання розкладемо формулу розрахунку потужності в ряд Тейлора:

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial N}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial^2 N}{\partial I^2}\Delta I^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial R^2}\Delta R^2 + \dots . \tag{14}$$

Обмежуємося лінійними членами відносно похибки вимірювань:

$$\Delta N \approx \frac{\partial N}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial N}{\partial R}\Delta R . \tag{15}$$

Використавши формулу обчислення потужності, маємо:

$$\Delta N = 2IR\Delta I + I^2 \Delta R . \tag{15}$$

Знайдемо відносну похибку

$$\partial N = \frac{\Delta N}{N} = \frac{2IR\Delta I}{I^2 R} + \frac{I^2 \Delta R}{I^2 R} = 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} = 2\partial I + \partial R \tag{16}$$

Підставляючи значення $\partial I = 0{,}5\%;\ \partial R = 1\%$ отримуємо:

$$\delta N = 2 \cdot 0{,}5\% + 1\% = 2\% \tag{17}$$

Тобто, у нашому випадку відносна похибка визначення потужності складає 2%.

Формули визначення похибки для найбільш типових обчислень, одержані у розглянутому вище порядку такі:

Похибка величини суми:

$$y = x_1 \pm x_2 \qquad \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 \qquad \delta y = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 \pm x_2} \tag{18}$$

Відносна похибка добутку:

$$y = x_1 x_2 \qquad \delta y = \delta x_1 + \delta x_2 \tag{19}$$

Відносна похибка частки:

$$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad \delta y = \delta x_1 + \delta x_2 \tag{20}$$

Відносна похибка ступеня:

$$y = x^n \qquad \delta y = k\delta x \tag{21}$$

4. Метрологія, метрологічна повірка

Оскільки вимірювання в техніці мають загальнодержавне значення, без них не може існувати жодна галузь господарства, то у всіх державах існує система забезпечення точності вимірювань. Вперше систему електричних величин та вимоги до їх вимірювання встановив конгрес по електриці, який відбувся в 1881 р. в Парижі. В нашій країні питаннями забезпечення точності та одноманітності вимірювань займається Державний комітет по стандартизації та метрології (держстандарт). В його склад входить ряд адміністративних та наукових організацій. Наукові інститути держстандарту мають первинні чи державні еталони вимірюваних величин, які, у певному порядку, порівнюються і уточнюються з міжнародними еталонами. В обласних центрах стандартизації та метрології знаходяться вторинні еталони. Всі вимірювальні прилади, які використовуються в промисловості, наукових закладах, торгівлі періодично порівнюються з еталонами обласних центрів стандартизації і метрології. Це порівняння називають „метрологічною повіркою”. Метрологічна повірка може здійснюватись як безпосередньо в центрі стандартизації? так і на підприємстві. Виконують її метрологи.

Повірку приладів здійснюють за графіком затвердженим керівником підприємства, який несе відповідальність за метрологічну повірку всіх приладів що є на підприємстві. Після проходження повірки на приладі ставлять клеймо де вказано термін дії повірки, а саме: **„Придатний для використання до** (*дата)*» або в його атестат приладу вноситься відповідний запис. Повірці підлягають всі прилади без винятку, навіть такі як: лінійка, гиря, мірна ложка, не говорячи вже про складні електровимірювальні прилади. Порядок повірки визначається нормативною документацією. Він залежить від класу точності приладу та його призначення.

Кожен спеціаліст, який виконує вимірювання повинен знати, що користуватись можна тільки повіреними приладами, а користування не повіреними приладами, чи приладами з простроченим терміном повірки заборонено [12, 13]. Цим визначається метрологічна культура спеціаліста. Порушення карається штрафами чи іншими адміністративними мірами. Ніде на підприємстві не повинно бути не повіреного приладу. Прилади, в яких закінчився термін повірки, повинні бути зняті і передані на повірку. Вони можуть знаходитись тільки у спеціальному сховищі, до відправки на повірку. Винятком з цього правила є тільки навчальні класи, в яких можуть знаходитись не повірені прилади, але такі прилади повинні обов’язково мати позначення: “Навчальний”.

Контрольні запитання:

1. Які вимірювання відносять до прямих та непрямих?
2. Дайте визначення вимірювального приладу.
3. Чим визначається система електровимірювального приладу?
4. Назвіть основні системи електровимірювальних приладів.
5. Опишіть принципи роботи електровимірювальних приладів різних систем.
6. Які прилади відносять до вимірювальних перетворювачів? Наведіть приклади.
7. Які причини виникнення похибок вимірювання?
8. Як чином усувають випадкові похибки вимірювань?
9. Наведіть самий відомий закон розподілу ймовірності похибок вимірювань. На основі яких міркувань одержано цей закон розподілу?
10. Яким чином усувають систематичні похибки вимірювань?
11. Як визначити похибку опосередненого вимірювання, коли результат вимірювання розраховується за математичною формулою?
12. Що називають довірчим інтервалом? Як він залежить від довірчої імовірності?
13. Які похибки називають абсолютними та відносними?
14. Чим визначається клас точності приладу?
15. Які типи еталонів ви знаєте?
16. Який порядок повірки вимірювальних приладів?
17. Який орган займається метрологічним вимірюваннями в країні, області . на підприємстві?

Лекція 5. **ВІДШУКАННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ФІЗИЧНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ**

1. Апроксимація інтерполяція та екстраполяція.
2. Завдання апроксимації та інтерполяції
3. Метод найменших квадратів
4. Огляд методів підбору емпіричних формул

«Пусті й повні тупиків ці науки
які не виникли з дослідів, батьків
всякої достовірності і не закінчуються
в очевидному досліді.»

Леонардо Да Вінчі

1. Апроксимація інтерполяція і екстраполяція

Експериментальні дослідження систем мають метою встановлення залежності між величинами що характеризують систему [14]. Для встановлення такої залежності виконують певні вимірювання. Величини, які характеризують систему прийнято поділяти на вхідні і вихідні. Вхідні величини – це ті, які можна змінювати, від яких залежить стан системи, а вихідні – це величини залежні від вхідних. Метою експерименту може бути встановлення залежності однієї величини від іншої: вихідної величини від вхідної, або залежності вихідної величини від декількох вхідних величин. Для встановлення таких залежностей вимірювання вихідної величини виконують при різних значеннях вхідної величини. Дані вимірювань записують у вигляді таблиці. Використовуючи табличні дані, можна зобразити результати вимірювань на папері. На основі експериментальних даних можна підібрати певний алгебраїчний вираз, який певним чином виражає залежність однієї величини y від іншої x. Цей математичний вираз записують у вигляді функції , наприклад:

$$y = f(x) \tag{22}$$

Такий вираз називають емпіричною формулою.

Емпірична формула – це формула, що відображає взаємозв'язок параметрів системи, що одержана на основі дослідних даних.

Емпіричні формули мають тим більшу цінність, чим у більшій мірі відповідають результатам експерименту. Потреба в підборі емпіричних формул виникає у багатьох випадках. Вони потрібні для опису фізичних процесів, для відображення взаємозв'язку між певними фізичними величинами, для розрахунків під час аналізу і проектування складних систем і т.п. Використовуються емпіричні формули для спрощеного запису результатів вимірювань. Також емпіричні формули використовують для відображення певних складних відношень величин більш простими. Якщо залежність між фізичними величинами є складною і вимагає для свого визначення громіздких обчислень, то часто ефективним є використання спрощених емпіричних формул. Практика показує, що емпіричні формули незамінні для вирішення цілого кола завдань.

До емпіричних формул ставлять дві головні вимоги: вони повинні бути найбільш простими і повинні відповідати дослідним даним з потрібною точністю.

Для отримання емпіричних формул використовують методи апроксимації та інтерполяції [15].

Апроксимація – це заміна, одних математичних об’єктів іншими. Наприклад табличних даних – точками на площині; ізольованих точок – лініями; кривих ліній – ламаними; ірраціональних чисел – раціональними; ліній – функціями і т.п.

Інтерполяція – в математиці та статистиці – це відшукання проміжних значень величини за деякими відомими значеннями. Наприклад, відшукання значень функції $f(x)$ в точках *x*, які знаходяться між точками $x_0 < x_1 < ... < x_n$ по відомим значенням $y := f(x_i)$ де $i = 0, 1, 2 ... n$.

Екстраполяція – це розширення встановлених раніше тенденцій на більш широку область значень; розширення висновків одержаних при спостереженні однієї частини явища на другу його частину.

Під час експериментальних досліджень, одержавши дані вимірювання залежності однієї величини від іншої, практично завжди виконують процедури апроксимації та інтерполяції. Дані вимірювань спочатку заносять в таблицю результатів. Пізніше результати вимірювань зображають у вигляді точок на площині, тобто заміняють числові дані точками – виконують апроксимацію. Потім точки на площині замінюють лінією, яка описує множину точок, тут виконують як апроксимацію – замінюють точки лінією, так і інтерполяцію – визначають проміжні значення на проміжках де даних вимірювань немає. Наприклад, маємо дані вимірювань у вигляді табл.3 .

Таблиця 3 – Приклад результатів вимірювань

x	*y*
1	0,7
2	0,9
3	1,5
4	2,1
5	4,2

Зображуючи ці дані у вигляді точок на координатній площині (рис.18), ми виконуємо апроксимацію – замінюємо одні математичні об’єкти – числа, іншими об’єктами – точками на площині.

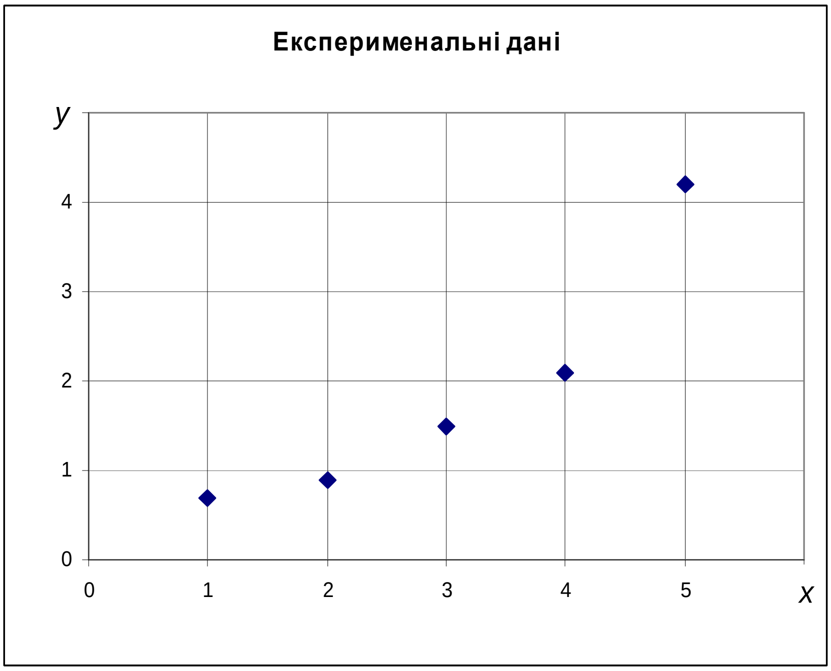


Рис. 18 – *Зображення результатів вимірювань у вигляді точок на площині*

Наступним кроком будуємо графік (рис.19), тут крім апроксимації і заміни точок – кривою встановлюємо проміжні значення, які знаходяться між точками, де виконані вимірювання, тобто виконуємо інтерполяцію.

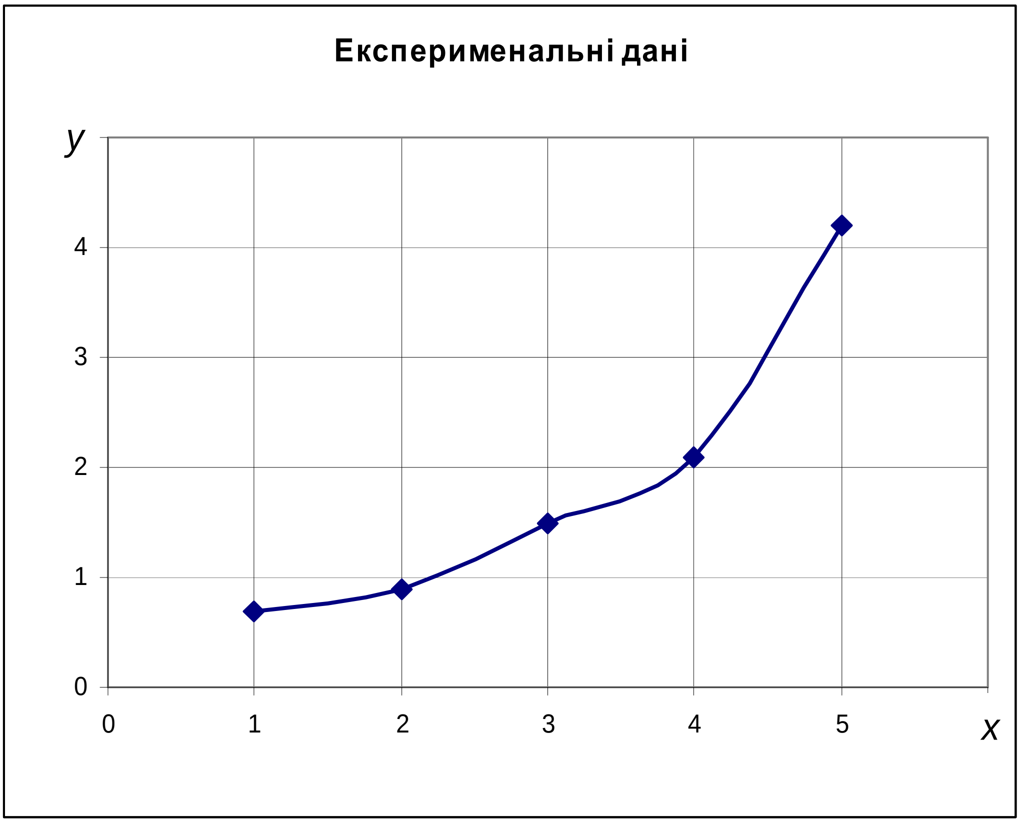


Рис. 19 – *Інтерполяція значень в проміжних точках та апроксимація графіком.*

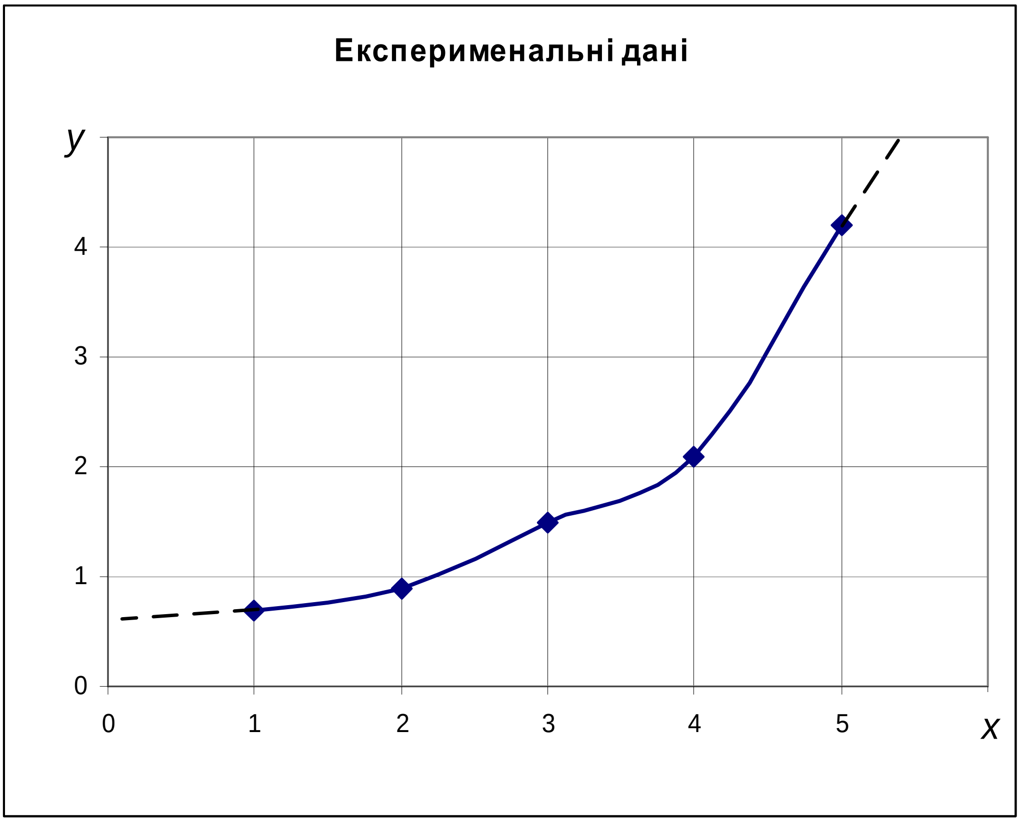


Рис. 20 – *Екстраполяція залежності значеннями поза діапазону вимірювань.*

Задача екстраполяція появляється тоді, коли ми розширюємо одержану залежність (продовжуємо графік) і виконуємо прогноз на області, що знаходяться поза інтервалом вимірювання, тобто на області $x < x_1$ і $x > x_n$. В нашому випадку це продовження на області $x < 1$ та $x > 5$. На рис. 20 результати екстраполяції показано пунктиром, відрізки виділені пунктиром відповідають екстраполяції залежності.

Наступним кроком апроксимації є заміна кривої певною функцією, яка описує залежність величини *y* від величини *x*.

2. Завдання апроксимації та інтерполяції

Найбільш просте й поширене завдання апроксимації та інтерполяції формулюється таким чином: за даними вимірювання пари величин – залежної *y* та незалежної *x* в *N* точках знайти функцію $y = f(x)$, яка найкращим чином описує залежність величини *y* від *x*.

Таке формулювання завдання апроксимації та інтерполяції є дещо невизначене, а саме: як розуміти поняття „найкращим чином”. Очевидно, що воно пов’язане з тим наскільки близько знайдена функція $f(x)$ буде проходити до точок вимірювання.

Можна вважати найкращим, коли $f(x)$ проходить точно через всі *N* точок одержаних під час вимірювання. Але це не доцільно з двох причин:

- По-перше – вимірювання виконується з певною точністю і дійсні значення величин не відповідають точно точкам одержаним в експерименті.
- По-друге – якщо вимагати, щоб функція апроксимації проходила точно через всі точки вимірювань, то ця функція може мати велике число коефіцієнтів і стане досить складною і незручною в користуванні.

Чим більше коефіцієнтів $a_1\ a_2\ ...\ a_n$ має функція апроксимації тим з більшою точністю вона описує дані. Проте слід обмежувати число коефіцієнтів, або як їх називають параметрів залежності. Це зумовлене двома причинами:

- по-перше, при великій кількості параметрів деякі з них не мають фізичного сенсу і їх використання небажане;
- по-друге, чим більше параметрів апроксимації тим сильніше значення кожного з них залежить від точності вимірювань в точках $(x_1 y_1) ... (x_n y_n)$. Значення деяких параметрів можуть бути нестабільними і сильно змінюватись при незначній зміні результату вимірювань в окремій точці.

Завдання апроксимації та інтерполяції можна вирішувати за таких умов:

1) вигляд функції апроксимації $f(x)$ відомий;
2) вигляд функції апроксимації $f(x)$ невідомий.

Коли відомий вигляд функції $f(x)$, завдання зводиться до відшукання коефіцієнтів функції апроксимації:

$$f(x) = f(x_1, a_1, a_2\ ...\ a_k)\,. \tag{23}$$

Тут $a_1, a_2\ ...\ a_k$ невідомі коефіцієнти, які слід розраховувати за даними вимірювань,

Однозначне рішення можливе, якщо кількість вимірювань N рівне кількості коефіцієнтів $N = k$.

Якщо $\mathrm{N} = \mathrm{k}$ то одержуємо систему N рівнянь для відшукання N коефіцієнтів. Завдання вирішується однозначно шляхом розв'язання системи рівнянь. Причому функція апроксимації проходитиме точно через усі точок вимірювання. Проте це не найкращий варіант вирішення завдання, оскільки результат сильно залежить від точності вимірювання кожної окремої точки.

Якщо $\mathrm{N} > \mathrm{k}$ завдання є найбільш типовим завданням апроксимації та інтерполяції і його розглядатимемо далі.

Якщо $\mathrm{N} < \mathrm{k}$ (кількість точок вимірювань менше кількості параметрів) завдання неоднозначне, визначити всі коефіцієнти не можна.

Коли вигляд функції $f(x)$ невідомий можлива ціла множина рішень, а однозначного рішення немає. Як правило, вигляд залежності встановлюють на основі певних теоретичних міркувань або з апріорних даних про характер залежності. Якщо це неможливо, то використовують найбільш вживані функції: лінійну функція, поліноми різних порядків, дробово-раціональні функції, логарифмічні чи експоненціальні функції, спеціальні поліноми, ряди Фур'є тощо. Для вибору вигляду функції апроксимації часто використовують графічні методи апроксимації.

Завдання апроксимації та інтерполяції вирішують різними методами. Серед них розрізняють:

- графічні методи;
- аналітичні методи.

Серед аналітичних методів найбільш вживані:

- метод середніх;
- метод найменших квадратів.

Графічні методи апроксимації та інтерполяції мають відносно невисоку точність. Проте вони є досить наглядними і майже завжди використовуються на перших етапах аналізу результатів експерименту. Графічні методи, як правило, використовують для вибору вигляду функції апроксимації у випадку, коли вона невідома. Ці методі буде розглянуто дещо пізніше.

В деяких випадках графічні методи апроксимації використовують самостійно навіть для виконання складних інженерних розрахунків. З такими випадками ви зустрічались під час виконання курсових робіт з предметів: „Електричні апарати”, „Основи електричної тяги”, „Тягові електричні двигуни”. Використання графічних методів апроксимації в інженерній практиці було доцільне до появи сучасної обчислювальної техніки. Ці методи часто дозволяли за короткий час вирішити цілий ряд складних інженерних завдань. Для цього використовували різні типи графіків, номограми, діаграми. Подеколи вони використовуються і тепер. Проте використовувати ці методи в інженерній практиці недоцільно, хіба що тільки в процесі навчання, коли є потреба найбільш наочними засобами звернути увагу студентів на певні особливості розрахунків і засвоїти теоретичний матеріал.

3. Аналітичні методи апроксимації

Аналітичні методи апроксимації використовуються для встановлення і уточнення числових параметрів залежності при відомому вигляді функції апроксимації. Найбільш вживаним є метод найменших квадратів і поряд з ним використовують метод середніх. Розглянемо ці методи.

Метод середніх

За експериментальними даними можна побудувати ряд кривих, кожна з яких, в певній мірі, буде описувати ці дані. Згідно методу середніх найкращою вважають ту криву для якої сума віддалей від експериментальних точок до графіка кривої апроксимації найменша. Вигляд кривої апроксимації вибирають у вигляді поліному:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k \qquad (24)$$

Визначають число членів, як правило не більш 3-5. В прийнятий вираз послідовно підставляють координати x_i y_i експериментально знайдених точок і одержують систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + ... + a_kx_2^k - y_1 = \varepsilon_1 \\ &a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + ... + a_kx_2^n - y_2 = \varepsilon_2 \\ &- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ &a_0 + a_1x_т + a_2x_т^2 + ... + a_kx_n^k - y_n = \varepsilon_n \end{aligned} \qquad (25)$$

Кількість точок *n* більше кількості коефіцієнтів a_k, тобто у системі (25) кількість рівнянь більша ніж кількість невідомих. Це дозволяє обчислити значення кожного коефіцієнти a_k декількома способами. Розраховані значення будуть різні. Кожне з них відповідає дійсному значенню коефіцієнта a_k з певним наближенням. Існує ряд способів усереднення з метою одержання найбільш типової величини. Найчастіше для одержання величин a_k поступають таким чином. Систему початкових рівнянь розбивають зверху вниз на групи, число яких дорівнює кількості коефіцієнтів k. В кожній групі складають рівняння і одержують одне рівняння. По кількості груп одержуємо систему k рівнянь для знаходження коефіцієнтів a_k. В правій частині рівнянь суму відхилення ε_i вважають нульовою. Розв'язавши систему рівнянь одержують значення коефіцієнтів a_k і підставляють їх у шукану формулу апроксимації (24). При великій кількості даних для обчислення використовують ПЕОМ. Метод середніх, якщо кількість точок велика, дає достатню точність.

Для збільшення точності деколи використовують метод поточного середнього. Він полягає в тому, що точки на графіку наносять не за одержаними даними, а за середніми одержаними для певного числа сусідніх точок, а при розрахунках використовують ці середні значення.

Метод найменших квадратів

Найбільш поширений та універсальний метод. На відміну від методу середніх в методі найменших квадратів прийнято, що в якості функції $y = f(x)$, яка найкращим чином описує залежність величини *y* від *x*, вважають функцію, що забезпечує мінімум суми квадратів віддалей до експериментальних точок. Математично це умова мінімуму функціоналу *Q* рівного:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \qquad (26)$$

Причому передбачається, що вигляд функції $f(x)$ у формулі (26) відомий і вона містить *k* параметрів $a_1\, a_2 \dots a_n$. Завдання відшукання функції апроксимації зводиться до знаходження параметрів $a_1\, a_2 \dots a_n$ які задовольняють поставленій вимозі, тобто мінімуму функціоналу (26):

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_1, a_2 \dots a_k)^2 = \min \qquad (27)$$

тут *n* – кількість точок, в яких задано значення (x_i, y_i);
k – кількість коефіцієнтів $a_1 \dots a_k$.

Пояснення методу видно з рис. 21.

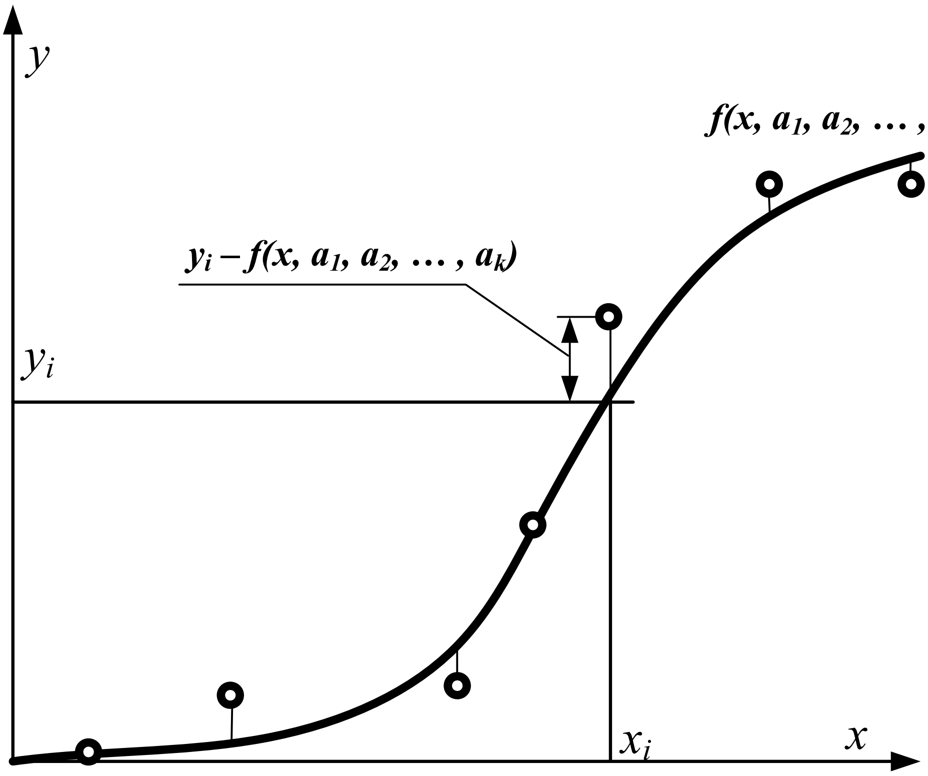


Рис. 21 – *Визначення функції апроксимації за методом найменших квадратів*

Нехай

$(x_1, y_1)(x_2, y_2)\ldots(x_i, y_i)$ - відомі значення;

$f(x)$ - шукана функція апроксимації;

$f(x_i)$ - значення функції апроксимації при значенні аргументу x_i;

$y_i - f(x_i)$ - віддаль від функції апроксимації до точки (x_i, y_i).

На рис 21 вказано точки з відомими значеннями $(x_1, y_1)(x_2, y_2)\ldots(x_k, y_k)$, шукана функція апроксимації $f(x)$ та віддаль $y_i - f(x_i)$ від точки (x_i, y_i) до графіка функції апроксимації.

Для знаходження коефіцієнтів апроксимації потрібно записати умови, яким вони задовольняють знайти їх значення. Коефіцієнти функції апроксимації знаходять з умови, щоб сума квадратів віддалей всіх точок до графіка апроксимації була мінімальна. Умовою мінімуму є рівність нулю похідної по параметру який відшукують, тобто по кожному з коефіцієнтів. Коефіцієнти апроксимації вважають змінними параметрами $a_1, a_2 \ldots a_k$ функціоналу Q (26), знаходять часткові похідні функціоналу по параметрам $a_1, a_2 \ldots a_k$ і прирівнюють їх до нуля. В результаті одержують систему рівнянь:

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n}(y_1 - f(x_1, a_1, a_2 \ldots a_k)\dfrac{\partial f(x_1, a_1, a_2 \ldots a_k)}{\partial a_1} = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}(y_2 - f(x_2, a_1, a_2 \ldots a_k)\dfrac{\partial f(x_2, a_1, a_2 \ldots a_k)}{\partial a_2} = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
\sum_{i=1}^{n}(y_n - f(x_n, a_1, a_2 \ldots a_k)\dfrac{\partial f(x_n, a_1, a_2 \ldots a_k)}{\partial a_1} = 0
\end{cases} \qquad (28)
$$

Система рівнянь (28) це система *k* рівнянь для знаходження *k* коефіцієнтів $a_1, a_2 \ldots a_k$ функції апроксимації.

Дана система розв'язується однозначно і розв'язком її є конкретні значення $a_1, a_2 \ldots a_k$. Підставляючи їх у вираз (22) одержуємо функцію апроксимації, яка описує залежність величини *y* від *x*.

Крім відшукання значення коефіцієнтів важливу роль має оцінка точності апроксимації, тобто в якій мірі одержана функція відображає наявні дані. Такою оцінкою якості апроксимації служить залишкова дисперсія, у даному методі це мінімальний середній квадрат відхилення який може бути обрахований згідно з формулою:

$$\sigma_{min}^2 = \frac{1}{n-1}\sum (y_i - f(x_i))^2 . \qquad (29)$$

Описаний метод відшукання функції апроксимації є досить простий, проте при великій кількості *n* результатів вимірювань потребує громіздких обчислень. Сучасна обчислювальна техніка дозволяє виконати ці обчислення автоматично. Для цього можна використати цілий ряд програмних продуктів, як наприклад: NUMERY, APROCS, CURVE та інші. В тому числі пакети MatLab, Mathematica, Statistica, SSPS [31 - 35] та інші. . Кожна з цих програм вимагає ввести вхідні дані у вигляді таблиці та вказати вигляд функції, за допомогою якої потрібно виконати апроксимацію. Програми мають досить широкий набір функцій і допускають використання функції користувача, тобто будь-якої потрібної функції, яку задає користувач. Пакет NUMERY як найбільш простий і розроблений в середовище ДОС вимагає, у випадку використання функції користувача нести явний вигляд похідних цієї функції по параметрах $a_1, a_2 \ldots a_k$, а саме:

$$\frac{df}{da_1}; \frac{df}{da_2} \ldots \frac{df}{da_k} . \qquad (30)$$

Під час вирішення завдань розрахунку та моделювання електромеханічних систем апроксимація залежностей у вигляді аналітичних функцій набуває все більшого значення. Характеристики багатьох електротехнічних систем є нелінійними. До них відносяться наприклад магнітні характеристики сталі, тягові характеристики двигунів, тягові характеристики електричних апаратів, тощо. Через цю нелінійність характеристик розрахунки магнітних систем електричних апаратів, двигунів, розрахунки кривих руху транспортних засобів та ін. ще і зараз подекуди виконуються вручну, графоаналітичними методами. Використання аналітичної апроксимації залежностей дозволяє залучити до розрахунків сучасну обчислювальну техніку, забезпечує значно більшу точність розрахунків, продуктивність, універсальність.

4. Огляд методів підбору емпіричних формул

Процес підбору емпіричних формул має два етапи: вибір типу формули і розрахунок коефіцієнтів (параметрів) залежностей.

Вибір типу формул здійснюють, як правило, графічними методами. Для цього результати експерименту наносять на координатну сітку і з'єднують плавною кривою. Намагаються, щоб точки вимірювань знаходились на можливо мінімальній віддалі по різні боки кривої. Досить часто результати вимірювань у достатній мірі точності можна апроксимувати лінійною залежністю типу

$$y = a + bx . \tag{31}$$

Лінійна залежність при апроксимації має першочергове значення. У багатьох випадках лінійна залежність з достатньою точністю дозволяє описати експериментальні дані. Якщо обмежуватись невеликим інтервалом зміни вхідних величин, то лінійне наближення може підійти і для опису практично будь-яких складних залежностей. У багатьох випадках використовують кусочно-лінійну апроксимацію. Тобто нелінійну залежність на відносно невеликих ділянках описують лінійними функціями і «зшивають» окремі ділянки, так щоб описати залежність вихідної величини від вхідної в широкому діапазоні зміни.

У багатьох випадках нелінійної залежності використовують метод вирівнювання для відшукання найбільш зручної емпіричної формули та її параметрів. Метод вирівнювання полягає в математичному перетворенні і представленні даних у вигляді лінійної залежності. Криву, побудовану за експериментальними даними, зображують як лінійну функцію. Це можна зробити, якщо залежність *у* від *х* замінити залежністю нових змінних *Х* та *У*, ввівши їх згідно з формулами

$$X = f_1(x, y) ; \quad Y = f_2(x, y) . \tag{32}$$

Якщо вдається підібрати формули (2.3) так, щоб графік залежності *У* від *Х* мав вигляд прямої лінії $Y = A + BX$ (32), то завдання підбору виду формули залежності можна вважати вирішеним. З графіку визначають параметри лінійної залежності *А* та *В*, (де *А* – відстань від початку координат до точки перетину лінії з віссю *У*, а *В* – коефіцієнт нахилу лінії). та відповідно до формул зворотних до (32). знаходять вигляд залежності $y = f(x)$.

Підібрати формули (2.3) не завжди вдається, але є ряд простих випадків, які на практиці зустрічаються досить часто. Досить часто вирівнювання можна здійснити, якщо використати заміну

$$\begin{aligned} &X = \mathrm{lu}\, x ; && Y = y \\ \text{або}\quad &X = \mathrm{lu}\, x && Y = \mathrm{lu}\, y \\ \text{або}\quad &X = x && Y = \mathrm{lu}\, y . \end{aligned} \tag{33}$$

Для виконання такої заміни немає необхідності робити будь-які обчислення, а просто можна скористатись координатною сіткою з логарифмічною чи напівлогарифмічною шкалою.

<u>Практичні завдання:</u>

1. Записати похідні по параметрам $a_0, a_1 \dots a_n$ для таких функцій апроксимації

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x$$
$$f(x) = a_0 + a_1 e^{a_2 x}$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 e^{a_3 x}$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_3 \ln(a_4 x)$$
$$f(x) = a_0 + a_1 e^{-a_2 x^2}$$

2. Відшукати рівняння апроксимації кривих намагнічування сталі наданих у вигляді таблиці

3. Відшукати рівняння апроксимації тягової характеристики двигуна.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняттям апроксимація та інтерполяція.
2. Чому, як правило, терміни апроксимація та інтерполяція вживають разом?
3. Які формули називають емпіричними?
4. Чому рекомендується використовувати рівняння апроксимації з якомога меншим числом коефіцієнтів?
5. У яких випадках доцільно використовувати логарифмічні та напівлогарифмічні шкали для відображення результатів вимірювань?
6. Сформулюйте вимоги до емпіричних формул.
7. Які вимоги ставляться до функції інтерполяції?
8. У чому полягає метод середніх при інтерполяції залежностей?
9. Поясніть суть методу найменших квадратів.
10. У яких випадках використовують графічні методи інтерполяції?
11. Які переваги графічних методів інтерполяції над аналітичними?
12. Запишіть умову мінімуму в методі найменших квадратів.
13. Приведіть методи підбору емпіричних формул.
14. Які методи використовують для нелінійних залежностей?

Лекція 6. **ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

1. Детерміновані і стохастичні моделі.
2. Основні положення теорії ймовірностей.
3. Основні поняттями математичної статистики.

1. Детерміновані і стохастичні моделі

Під час аналізу й побудови математичних моделей електромеханічних систем досить часто доводиться оперувати випадковими величинами. Випадкові величини можуть відображати похибки вимірювань, або бути притаманними самим процесам, які відбуваються в електромеханічних системах. Це потрібно враховувати будуючи модель системи. Математичні моделі прийнято поділяти на детерміновані та стохастичні.

Детерміновані моделі – це моделі, в яких між вихідними та вхідними величинами існує причинно–наслідковий зв'язок. В них вихідна величина системи функціонально залежить від вхідних величині і може бути описана як певна функція цих вхідних величин.

Стохастичні моделі – це моделі систем, в яких суттєву роль відіграє випадок. Зв'язок між вхідними та вихідними величинами стохастичних систем має випадковий характер, який може підпорядковуватись певним закономірностям.

У природі бувають детерміновані й випадкові явища. Вивчаючи фізику, математику, електротехніку, електропривод, електричні машини, теорію електричної тяги, переважну більшість технічних дисциплін ми маємо справу з детермінованими процесами, тобто процесами і явищами, які можна розрахувати на основі початкових та крайових умов і відомих співвідношень. Вся інженерна освіта направлена в першу чергу на вивчення детермінованих явищ та закономірностей. Проте, поряд з такими явищами, існують інші явища, які носять випадковий характер і розрахувати їх протікання, конкретні значення величин неможливо. Можна тільки передбачити імовірність певного стану. Ми щойно розглядали один з прикладів таких величин, а саме похибку вимірювань. Похибку вимірювань ми пояснювали впливом на результат вимірювання великої кількості причин, врахувати які у всій сукупності немає можливості. Випадковими величинами є, наприклад, кількість пасажирів, які зайшли чи вийшли на зупинці з транспортного засобу, кількість транспортних одиниць на перехресті, кількість очок, які випадають під час кидання грального кубика, координата електрона в даний момент часу і багато інших.

Причини випадковості довгий час пояснювали виходячи з недостатньої інформації про стан об'єкту і вважали, що коли буде достатньо інформації, то все можна передбачити, розрахувати і жодного випадкового явища не буде.

Проте це не так. Хоча все в природі має свої причини, діє причинно-наслідкова залежність, проте є цілий ряд явищ, які носять чисто випадковий характер. Випадковість визначається по-перше тим, що у навколишньому світі будь-який об'єкт знаходиться під впливом безлічі інших об'єктів і дія їх приводить до непередбачуваних результатів. Так, навіть на нерухоме тіло в кожен момент часу діє безліч молекул навколишнього середовища, число яких визначається одиницею з двома десятками нулів. Врахувати однозначно дію всіх молекул неможливо і приклад цього – це відомий броунівського руху. По-друге природа багатьох явищ, навіть у найпростіших об'єктах, має суттєво імовірнісний характер. Електрон в атомі обертається по певних орбітах. Проте знаходження його в певній точці простору в даний момент – це випадкова величина, яка може бути описана тільки певною функцією розподілу. Весь мікросвіт, а це самі найпростіші об'єкти, описується тільки випадковими залежностями, які складають основу квантової механіки, тобто, природі притаманна випадковість і вона лежить в основі усіх явищ навколишнього світу.

Зі сказаного виникає інше запитання, а саме: якщо все в природі випадкове, то чому більшість явищ є детермінованими, описуються певними законами, формулами, за допомогою яких можна розрахувати і передбачити стан об'єкту? Відповідь на це питання полягає у тому, що явища нашого світу мають певну ймовірність і ймовірність дуже багатьох явищ близька до одиниці. Тобто, не відкидаючи ймовірнісного характеру подій які відбуваються в світі, можна майже з повною достовірністю розрахувати значення певних фізичних величин і їх зміну в часі. Однією з причин цього є і те, що дія випадкових впливів носить масовий характер. Так тиск повітря на певну площадку є сумою імпульсів величезної кількості молекул. Цих молекул 10^{20} і сумарна величина тиску з величезною точністю відповідає величині розрахованій за математичними формулами.

Існує дві наукові дисципліни (два розділи математики), які вивчають властивості випадкових величин. Вони є основою побудови стохастичних моделей і розгляду випадкових явищ в стохастичних моделях. Це такі наукові дисципліни: теорія ймовірності та математична статистика.

Теорія ймовірностей – це наукова дисципліна, яка вивчає випадкові події та процеси, розробляє методи обчислення ймовірностей одних випадкових подій за ймовірностями інших подій.

Математична статистика – це наукова дисципліна, яка вивчає математичні методи систематизації та використання статистичних даних, вирішення наукових і практичних завдань на базі обмежених статистичних даних. Вона вивчає закономірності масових явищ та їх взаємозв'язки. Математична статистика ґрунтується на теорії ймовірностей, яка дозволяє розрахувати точність й надійність статистичних висновків.

2. Основні положення теорії ймовірностей

Основними поняттями теорії ймовірностей є випадкова подія і випадкова величина, ймовірність події, умовна ймовірність, функція розподілу ймовірностей, щільність розподілу, параметри розподілу та ряд інших [17- 19].

Випадкова подія – це подія, яка може за даних умовах відбутися чи ні. Для всякої випадкової події існує певна ймовірність (*p*), що характеризує наскільки очікуваною є дана подія. Імовірність події означає, що при великій кількості випробувань частота даної події буде близька до значення імовірності *p*. Величина *p* знаходиться в границях від 0 до 1, тобто ($0 \le p \le 1$). Якщо може відбутися декілька випадкових подій то існує певний розподіл ймовірностей, який характеризує ймовірності кожної з окремих подій. Він може бути поданий у вигляді певної величини, таблиці чи графіка і носить назву закону розподілу ймовірностей.

Випадкова величина – це числова величина, яка може приймати різні значення в тому чи іншому випадку. Існує два типи випадкових величин, а саме: дискретні та неперервні.

Дискретна випадкова величина – це величина, яка може приймати ряд конкретних фіксованих значень.

Неперервна випадкова величина – це величина, яка може приймати будь-яке значення в певному інтервалі.

Ймовірності, що випадкова величина *X* прийме те чи інше можливе значення називають розподілом ймовірностей випадкової величини. Розподіл ймовірностей математично описують або функцію розподілу ймовірностей, або густиною розподілу ймовірностей.

Функція розподілу ймовірностей випадкової величини (або просто функція розподілу) *F(x)* дорівнює імовірності того, що випадкова величина прийме значення не більше ніж *x*, тобто значення в діапазоні ($-\infty$, x). Функція розподілу *F(x)* монотонно зростаюча від 0 (при $x \to -\infty$) до 1 (при $x \to +\infty$). На рис. 22 показано графіки функції розподілу: (рис.21б – неперервної і рис.21а – дискретної випадкових величин).

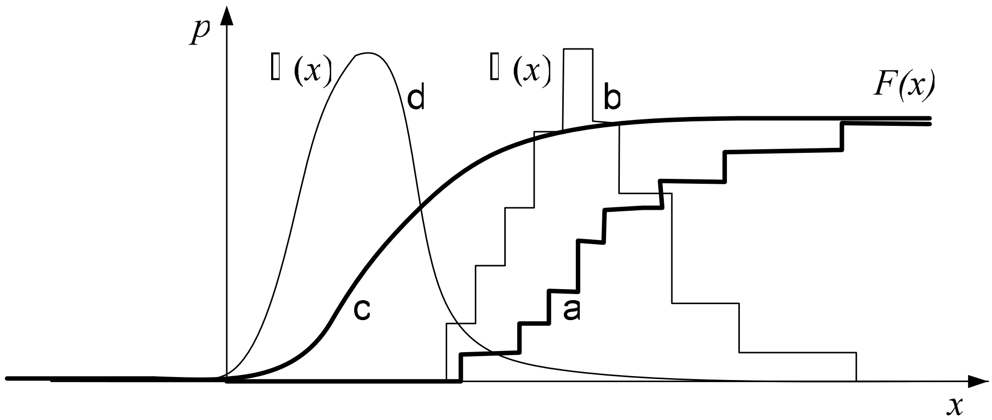


Рис. 22 – *Графіки розподілу ймовірностей випадкових величин.*

a), b) – дискретна випадкова величина, d), c) – неперервна випадкова величина, a), c) – функція розподілу $F_{(x)}$, b), d) – щільність розподілу $\varphi_{(x)}$

Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\varphi_{(x)}$ (або просто щільність розподілу) дорівнює імовірності того, що випадкова величина має значення в діапазоні $(x, x+\Delta x)$. Вона визначається [17] згідно з формулою.

$$\varphi_{(x)} = \frac{d}{dx} F_{(x)} \tag{34}$$

Найбільш широке використання має нормальний розподіл ймовірностей, який описується формулою

$$\varphi_{(x)} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} l_{xp}\left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{35}$$

Знання функції, розподілу випадкової величини в теорії ймовірностей має виняткове значення, оскільки вона дозволяє розрахувати ймовірність подій тим чи іншим чином зв'язаних з даною величиною. Якщо, наприклад, певна величина *y* функціонально пов'язана з випадковою величиною *x* ($y = f_{(x)}$), то найбільш ймовірне значення *y* можна розрахувати за формулою

$$\bar{y} = \overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \tag{36}$$

Тут і далі прийнято, що риска над величиною $\bar{y} = \overline{f(x)}$ позначає усереднення по всіх можливих значеннях.

Найбільш ймовірне значення випадкової величини називають математичним очікуванням. Подекуди математичне очікування, позначають літерою *M*, наприклад $M_{f(x)} \equiv \bar{f}(x)$. Математичне очікування є центром розсіяння випадкової величини. Для нормального розподілу ймовірностей (35) $M_x = m_x$, в чому можна переконатись виконавши інтегрування

$$M_x \equiv \bar{x} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx = m_x \tag{37}$$

Розсіяння випадкової величини характеризують квадратом відхилення $(x - M_x)^2$ випадкової величини від центру розсіяння. Середнє значення квадрату відхилення носить назву дисперсії і позначають D*x*. Для нормального розподілу ймовірностей

$$D_x = M(x-m_x)^2 \equiv \overline{(x-m_x)^2} = \sigma_x^2. \tag{38}$$

Дійсно:

$$D_x \equiv \bar{x} = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x) \quad \exp\left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx = \sigma_x^2 \tag{39}$$

Величина σ_x носить назву стандартне відхилення (або середнє квадратичне відхилення). Отже, нормальний закон розподілу має два параметри m_x і σ_x, які визначають цей розподіл. Інші розподіли можуть мати більше параметрів. В подальшому ми будемо використовувати такі розподіли випадкових величин: рівномірний, логарифмічний, нормальний, гама-розподіл та його різновид хі-квадрат розподіл (x^2 – розподіл), t – розподіл (Стьюдента), F – розподіл (Фішера). Математичні вирази функцій густини розподілу в мірі потреби будуть наведені далі.

Характеристиками розподілу, крім названих величин математичного очікування та дисперсії, є моменти вищих порядків, які розраховують згідно формул:

Момент третього порядку:

$$M(x - M_x)^3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^3 \varphi_{(x)} dx . \tag{40}$$

Момент четвертого порядку:

$$M(x - M_x)^4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^4 \varphi_{(x)} dx . \tag{41}$$

Перший з вказаних моментів визначає несиметричність функції розподілу (ексцентриситет), а другий – ексцес, або ступінь зглаженості вершини розподілу – (ексцес) .

Для розподілів, які найбільш часто застосовуються складені таблиці [23].

3. Основні поняттями математичної статистики

Математична статистика – це наукова дисципліна, яка вивчає математичні методи обробки та систематизації статистичних даних, використовується для вирішення наукових та практичних завдань, ґрунтується на базі теорії ймовірностей, яка дозволяє розрахувати точність та надійність статистичних висновків [20-22].

Різниця між математичною статистикою і теорією ймовірностей полягає в тому, що теорія ймовірностей вивчає властивості випадкових подій та математичні методи розрахунку імовірності подій тим чи іншим способом зв’язаних між собою, а математична статистика розробляє методи використання результатів теорії ймовірностей для отримання обґрунтованих статичних висновків з певного масиву даних.

Статистичні методи набули настільки широкого розповсюдження, що практично жодна наукова дисципліна не обходиться без них. Статистичні методи використовуються при побудові математичних моделей найрізноманітніших систем. Без них не може обійтись ні виробництво, ні експлуатація найрізноманітніших технічних систем. Статичні методи у багатьох випадках дозволяють зробити важливі для практичної діяльності висновки. Проте, використання цих методів вимагає глибокого розуміння законів математичної статистики. Відсутність такого розуміння часто призводить до невірних висновків, які, враховуючи масовий характер розглядуваних явищ, призводять до значних економічних втрат. Недаром є жарт, що існує три способи обману: звичайний обман, грубий обман та статистика. Методами математичної статистики потрібно користуватись досить обережно, коректно і для цього потрібні глибокі знання їх особливостей.

Головними поняттями математичної статистики є такі: вибірка, об'єм вибірки, розмах вибірки, частота події, генеральна сукупність, статистика, статистична гіпотеза, критерії оцінювання статистичної гіпотези.

Вибіркою (випискою) називають певну сукупність статистичних даних чи результатів вимірювань випадкової величини (x_1, x_2 ... x_n). Якщо величини x_1, x_2 ... x_n у вибірці взаємно незалежні і кожна з них має однакову густину розподілу ймовірностей, то вибірку називають випадковою вибіркою об'ємом n. Вважають, що випадкова вибірка є вибіркою з теоретично нескінченної генеральної сукупності.

Генеральна сукупність – це ідеалізована сукупність статистичних даних, розподіл значень яких співпадає з теоретичним розподілом величини x. Генеральна сукупність – це ідеалізована сукупність, з якої одержана вибірка. Розподіл ймовірностей в генеральній сукупності є теоретичним розподілом випадкової величини. Вважається, що частота того чи іншого значення у генеральній сукупності відповідає ймовірності, а частота цього значення у вибірці є наближеною оцінкою ймовірності. Причому, згідно до закону великих чисел, при збільшенні об'єму вибірки частота наближається до величини ймовірності.

Сутність використання методів математичної статистики полягає в тому, що користуючись статистичними даними (вибіркою) ми одержуємо оцінку певного параметра η генеральної сукупності, причому завжди можна розрахувати точність оцінки і її надійність.

Статистика – це певна функція випадкової величини, властивість якої полягає в тому, що її можна визначити значно точніше і надійніше ніж саму випадкову величину. Властивість статистики мати більшу точність називають **статистичною стійкістю**.

Вимірюючи випадкову величину, ми одержуємо певне значення. Це значення є оцінка характеристик випадкової величини. При повторних вимірюваннях ми отримуємо інше значення, яке є такою ж оцінкою випадкової величини. Розходження цих значень може бути великим. Проте якщо ми на основі значень вибірки обрахуємо певні функції, то деякі з таких функцій будуть набагато точніше характеризувати випадкову величину ніж виміряні значення, причому, розходження між значеннями функцій обрахованих для різних вибірок будуть значно менше ніж розходження значень випадкової величини в одній вибірці. Такі функції прийнято називати **статистиками**, а вказану їх властивість **статистичною стійкістю**.

Самими простими статистиками є розмах вибірки, найбільше та найменше вибіркові значення. Ці величини відносяться до так званих **порядкових статистик**. При всій простоті ці статистики мають властивість статистичної стійкості і вони дають більше інформації про випадкову величину ніж її окремі значення.

Найчастіше використовують такі статистики:

Вибіркове середнє значення

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (42)$$

Вибіркове середнє випадкової величини *y(x)*

$$\overline{y} = \frac{1}{n}(y(x_1) + y(x_2) + ...y(x_n)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y(x_i) \qquad (43)$$

Вибіркова дисперсія випадкової величини:

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad (44)$$

Вибіркові моменти порядку *z*

$$m_r = \frac{1}{n-r+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^z \qquad (45)$$

Вибір статистики найбільш придатної для вирішення певного завдання не завжди однозначний. Тому, для оцінки статистики використовують ряд критеріїв, а саме:

– сходимість (переконливість) оцінки – цей критерій полягає в тому, що статистика при $n \to \infty$ повинна сходитись до відповідного параметра генеральної сукупності η;

– не зміщення оцінки – математичне очікування статистики повинне дорівнювати параметрові генеральної сукупності η;

– ефективність оцінки – вибирається така статистика, вибіркове значення якої має найменшу дисперсію.

Вказані властивості мають статистики, які були розглянуті вище, а саме: вибіркове середнє, вибіркова дисперсія, вибіркове стандартне відхилення, вибіркові моменти вищих порядків, коефіцієнти асиметрії, ексцесу і ряд інших. (В подальшому будемо використовуючи назви статистик упускаючи термін „вибіркове”).

Кінцевим результатом статистичної обробки даних є формулювання статистичних висновків. Статистичні висновки роблять на основі перевірки статистичних гіпотез.

Контрольні запитання

1. Які моделі називають детермінованими?
2. Якими методами будують стохастичні моделі?
3. Які явища називають випадковими?
4. Чи завжди можна пояснити випадкові явища неповними знаннями об’єкта та його оточення?
5. Що таке імовірність події?
6. Чому дорівнює імовірність появи двох незалежних подій?
7. Які події називають незалежними?
8. Які завдання вирішує наукова дисципліна «Теорія ймовірностей»?
9. Які завдання вирішує наукова дисципліна «Математична статистика»?
10. Назвіть основні поняття теорії ймовірностей?
11. Які випадкові величини називають дискретними, яа які неперервними? Наведіть приклади.
12. Дайте визначення функції розподілу ймовірностей?
13. Дайте визначення густині розподілу ймовірностей?
14. Яка з двох функцій є монотонною: функція розподілу чи функція густини розподілу.
15. Зарисуйте графік функцій розподілу неперервної та дискретної величин.
16. Зарисуйте графік функції розподілу та густини ймовірностей випадання певного значень грального кубика.
17. Розрахуйте імовірність того, що при киданні двох кубиків сума буде рівна 6.
18. Порівняйте яка подія більш імовірна: при киданні кубика випаде цифра 6 чи при киданні двох кубиків сума буде рівна 6?
19. Запишіть формулу нормального закону розподілу ймовірностей.
20. Які типи розподілу ви знаєте?
21. Як обрахувати ймовірність значення функції залежної від випадкової величини?
22. Чому в математичній статистиці особливу роль має нормальний закон розподілу ймовірностей?
23. Поясніть значення понять: математичне очікування, дисперсія, ексцентриситет?
24. Які основні поняття математичної статистики?
25. Що називають генеральною сукупністю?
26. Яку величину називають статистикою? Які її властивості?
27. Назвіть приклади простих статистик.
28. У чому полягає різниця між математичною статистикою і теорією ймовірностей?
29. На основі яких критеріїв вибирають найбільш придатну статистику?

Лекція 7. **Аналіз статистичних даних. Статистична гіпотеза**

1. Попередній аналіз статистичних даних.
2. Графічні методи попереднього аналізу даних.
3. Аналітичні методи попереднього аналізу результатів вимірювань.

1. Попередній аналіз статистичних даних

Статистичні вимірювання завжди виконують за певними методиками, дотримуючись певних правил. Тільки в цьому випадку їх результати можуть дати вірну відповідь на завдання досліджень. Помилки під час вимірювань, чи невірна методика вимірювань відображається на одержаних результатах. Тому статистичні дані, перед використанням для побудови моделей, повинні бути піддані досить уважному аналізу. Цей аналіз включає:

- виявлення і відкидання помилкових даних;
- перевірку однорідності даних;
- перевірку незалежності даних.

Помилкові дані виявляють, аналізуючи конкретні значення одержаних даних. Якщо у вибірці є дані, які різко відрізняються від масиву інших, то потрібно переконатись, що вони не є помилковими. Аналіз даних, які різко виділяються на фоні вибірки, має два аспекти а саме: це може бути результатом помилки, невірного прочитання показів вимірювального приладу, помилки запису даних, помилки зсуву – коли при запису десяткових чисел невірно поставлена кома і т.п. Такі ж відхилення можуть відображати більш важливі моменти, як то особливості роботи в екстремальних умовах, невідповідність даних прийнятій моделі, наявність особливих умов роботи системи. Завдання аналізу даних у цьому випадку поділяють на два етапи: Виявлення „підозрілих" результатів і перевірка чи статистично значимою є відмінність їх від інших даних.

Перевірка статистичної відмінності деяких даних від інших виконується на основі певних гіпотез і допущень про розподіл основної частини даних і розподіл відхилень. Для цього використовують такі методи:

- графічні,
- аналітичні.

Графічні методи не досить точні і не дозволяють одержати конкретні числові значення, які можна було б піддати кількісному аналізу. Проте вони наглядні і часто дозволяють виявити суть проблеми, напрямок подальших досліджень.

Аналітичні методи дозволяють використати строго розроблені, науково обґрунтовані критерії і дати конкретну відповідь. Але вони чисто формальні, абстрактні і маскують суть проблеми. Використання аналітичних методів без чіткого розуміння суті проблеми може привести до зовсім непотрібних або подекуди і невірних результатів.

З огляду на сказане під час статистичних досліджень використовують як графічні так і аналітичні методи. Причому, графічні методи використовують на етапі попереднього аналізу даних вимірювань і на етапі побудови моделі та перевірки її адекватності. У всіх дослідженнях графічне представлення даних і результатів досліджень слід вважати обов’язковим.

2. Графічні методи попереднього аналізу даних

Під час проведення попереднього аналізу результатів вимірювань графічне подання даних має такі цілі:

- виявлення грубих помилок вимірювання;
- виявлення аномальних даних, які різко відрізняються від інших і походження яких слід дослідити;
- одержання першого уявлення про характер розподілу величин;
- одержання попередніх даних про вигляд залежності між величинами.

Серед графічних методів відображення та попереднього аналізу даних вимірювань найчастіше використовують такі:

- побудова та аналіз гістограм;
- побудова графіків розподілу на імовірнісному папері, імовірнісні графіки;
- побудова та аналіз кореляційного поля.

Гістограма це графічне зображення даних, яке служить для відображення їх розподілу. Вона являє собою сукупність суміжних прямокутників побудованих на одній прямій, причому площа кожного з прямокутників пропорційна частоті знаходження випадкової величини в інтервалі, на якому побудований прямокутник.

Гістограму будують в такому порядку:

1. Для вибірки випадкових величин $x_1\, x_2 \ldots x_n$ об’ємом n визначають найменше x_{min} та найбільше значення x_{max}.

2. Діапазон значень $[x_{min} - x_{max}]$ поділяють на рівні інтервали $\Delta_1\, \Delta_2 \ldots \Delta_s$. Кількість інтервалів S повинна бути не менше 8-9 і не більше 15-17, залежно від об’єму вибірки (як правило $n > 30 - 100$).

3. Знаходять крайні значення *x* для кожного інтервалу.

4. Підраховують кількість вибіркових даних $V_1\, V_2 \ldots V_s$ в кожному інтервалі. (Очевидно що $V_1 + V_2 + \ldots + V_s = n$).

5. В разі потреби складають таблицю групування даних, в якій вказують діапазони даних та кількість даних для кожного діапазону. (див. табл.4.)

6. В прямокутній системі координат в певному масштабі за віссю абсцис (x) відкладають крайні значення границь інтервалів Δ_i змінної *x*.

7. На кожному інтервалі будують прямокутник відклавши за віссю ординат у значення V_i для відповідного інтервалу (див. рис.23).

Побудована гістограма залежить від вибору кількості та границь інтервалів. Щоб зменшити цю залежність гістограму згладжують, наприклад, з’єднавши прямими лініями середини верхніх площадок сусідніх прямокутників.

Таблиця 4 – Таблиця групування даних

Карман	*Частота*
22,0	0
23,5	2
25,0	4
26,5	4
28,0	12
29,5	19
31,0	19
32,5	13
34,0	10
35,5	12
37,0	5
38,5	0

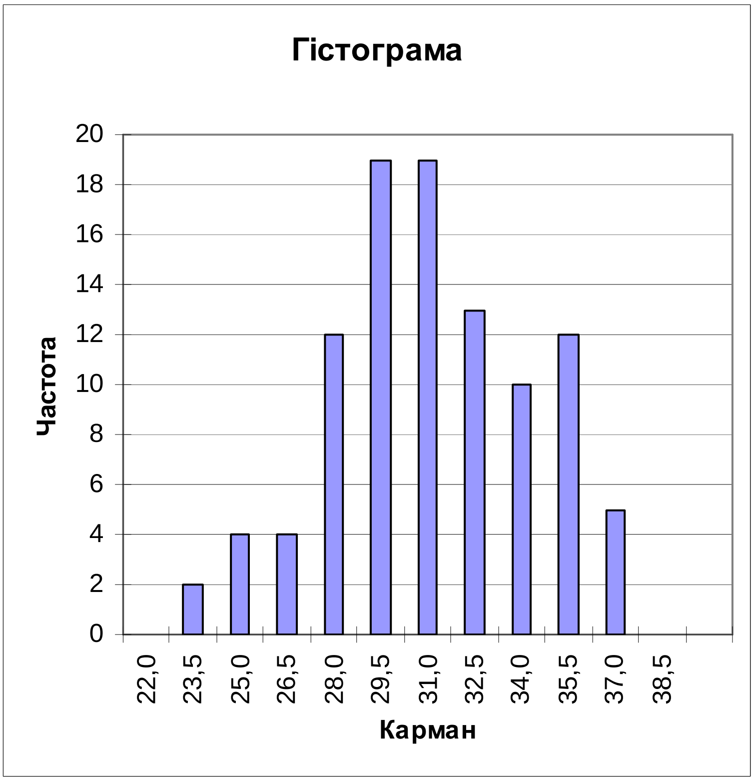


Рис. 23 – *Гістограма розподілу даних*

За допомогою гістограми можна виявити наявність у вибірці $x_1\ x_2 \ldots x_n$, статистично відмінних даних. Про це свідчить обтяження однієї з частин в сторону мінімальних чи максимальних значень.

Графіки розподілу на імовірнісному папері (імовірнісні графіки) дозволяють провірити однорідність даних, відповідність розподілу даних теоретичному закону, виявити наявність даних, які різко відрізняються від інших. Найбільш часто використовують імовірнісний папір нормального закону розподілу (нормальний імовірнісний папір, рис.24).Графіки розподілу даних вимірювань на такому папері називають нормальними імовірнісними графіками. Їх будують у такій послідовності:

1. Вибірку об’ємом n впорядковують в порядку зростання величин $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_i \le \ldots \le x_n$. Таку впорядковану вибірку називають **варіаційним рядом**.

2. Кожному значенню X_i присвоюють ранг, який дорівнює номеру i у впорядкованій вибірці (у варіаційному ряді).

3. Підраховують значення накопиченої частоти $F(t)$ згідно з формулою

$$F(t) = \frac{i}{n}, \tag{46}$$

або для збільшення точності згідно формули:

$$F(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{x_i<t} 1\right) \tag{47}$$

тут $\sum_{x_i<t} 1$ - це значення i для вибраннях величини.

4. Будують на імовірнісному папері графік, відкладаючи за віссю абсцис (x) величину x, а за віссю ординат значення $n = F(t)$.

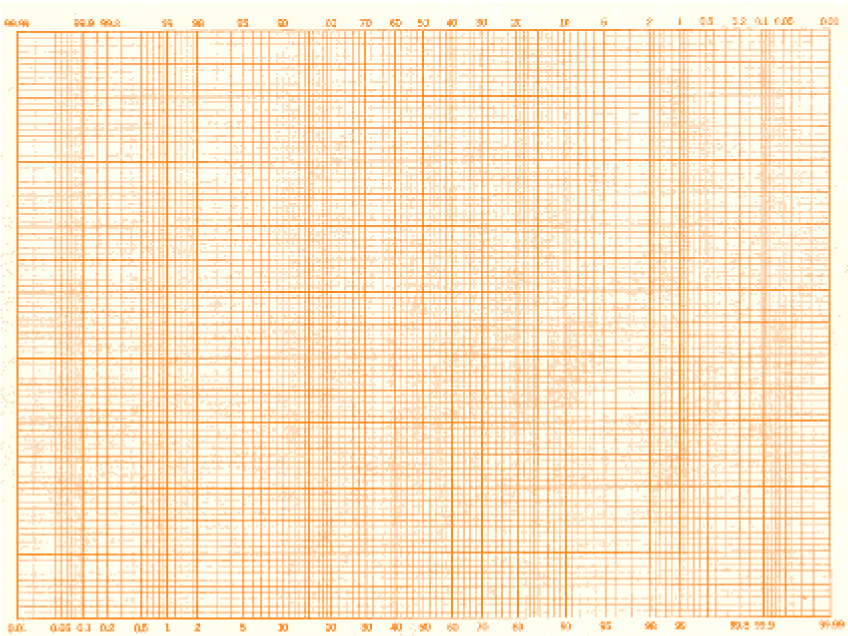
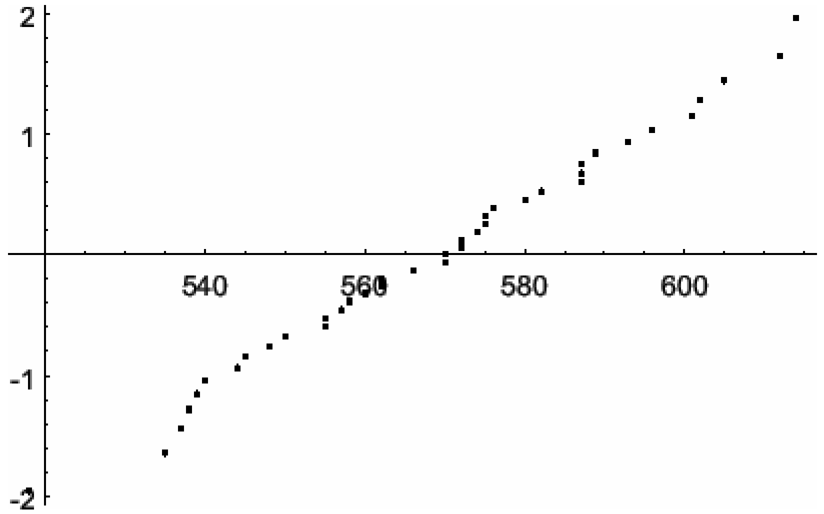
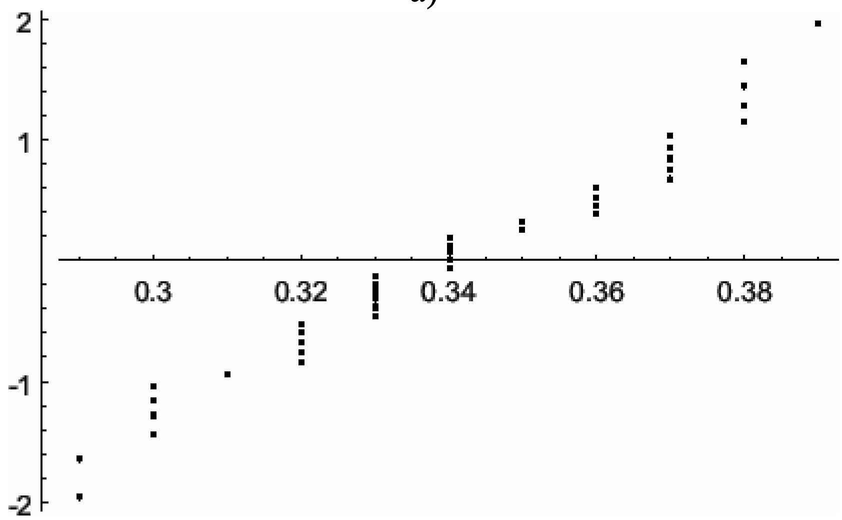


Рис.24 – *Нормальний імовірнісний папір*

Якщо одержані точки приблизно розміщені вздовж прямої лінії, то обґрунтовано можна твердити, що розподіл величини однорідний і закон розподілу відповідає теоретичному закону. розподілу. має вигляд прямої лінії (див. рис. 25)



а)



б)

Рис. 25 – *Розміщення точок на нормальному імовірнісному папері*.
а) для неперервної величини, б) для дискретної величини.

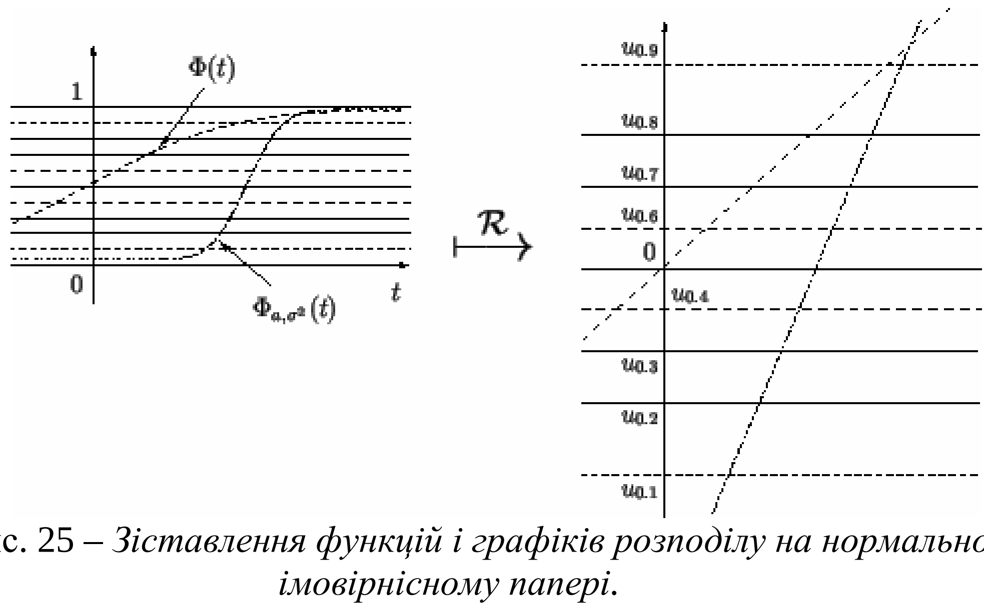


Рис. 25 – *Зіставлення функцій і графіків розподілу на нормальному імовірнісному папері.*

Імовірнісний папір нормальний, спеціальним чином розграфлений папір, побудований так, що графік функції нормального розподілу зображається на ньому прямою лінією. Це досягається зміною шкали на вертикальній осі. На властивості «випрямляння» заснований простий спосіб перевірки гіпотези про приналежність даної вибірки до нормальної сукупності: якщо побудована емпірична функція розподілу добре апроксимується прямою лінією, то можна обґрунтовано вважати, що сукупність, з якої узята вибірка, має приблизно нормальний розподіл. Перевагою цього методу полягає в тому, що обґрунтований висновок про приналежність до нормальної сукупності можна зробити без знання чисельних значень параметрів гіпотетичного розподілу.

Відхилення графіку від прямої свідчить про невідповідність даних теоретичному закону розподілу. Якщо графік має вигляд ламаної лінії, чи розірваних ліній, то це свідчить про неоднорідність вибірки. За графіком можна знайти параметри розподілу [16], а саме оцінкою математичного очікування буде значення величини при $n = 0{,}5$ (теоретична імовірність 0,5) а стандартне відхилення розраховують за формулою

$$\sigma = \left(u_{3/4} - u_{1/4}\right)1{,}34\,. \qquad (48)$$

У разі відсутності нормального, чи іншого потрібного імовірнісного паперу можна приготовити такий папір самостійно, відложивши у вибраному масштабі за віссю y квантилі 0,1; 0,2; ... 0,9 потрібного розподілу. Такі ж результати дають імовірнісні графіки побудовані в такому порядку:

1. Вибірку впорядковують у вигляді варіаційного ряду $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.
2. Підраховують значення $F(t)$ згідно формул (46) чи (47).
3. Знаходять величину теоретичного значення функції розподілу згідно формули:

$$Z = F^{-1}(f(t))\,. \qquad (49)$$

Тут $F^{-1}(p)$ - функція обернена до функції розподілу (функція що дозволяє розрахувати значення величини за її імовірністю p, при відомому законі розподілу). Для закону розподілу $F(x)$ вибирають стандартні значення параметрів, наприклад для нормального закону розподілу математичне очікування у функції $F^{-1}(p)$ беруть рівним ($\mu = 0$) і стандартне відхилення -1 (σ=1). Функції обернені до різних типів функції розподілу можна одержати теоретично. Такі функції є в пакеті програм Excel (меню функція, статистичні функції).

4. Будують графіки відкладаючи за віссю абсцис (x) впорядковані значення x, а за віссю ординат обраховані значення величини z.

Апроксимують імовірнісний графік прямою лінією. За виглядом графіка судять про відповідність даних теоретичному закону розподілу.

<u>Графіки кореляційного поля</u> (еліпс розсіяння) будують у випадку коли потрібно встановити взаємозв'язок та залежність між декількома випадковими величинами, коли будують статистичну модель залежності однієї випадкової величини від однієї чи декількох інших величин.

Побудова цих графіків розглянута далі в параграфі кореляційного та регресійного аналізу. Дані, які в кореляційному полі будуть розміщені поза основним масивом даних слід віднести до отриманих в результаті грубої помилки. Якщо кореляційне поле містить такі дані то їх слід уважно проаналізувати і перевірити, при можливості виконати повторні вимірювання. Як правило такі дані відкидають, вважаючи помилковими.

3. Аналітичні методи попереднього аналізу результатів вимірювань

Аналітичні методи попереднього аналізу результатів вимірювання мають ті ж цілі, що і графічні методи. Вони спрямовані на виявлення помилкових даних та їх відкидання, а також на збереження всіх правильних даних, отриманих з дотриманням методики вимірювання. Аналітичні методи дають числові критерії для прийняття чи відкидання сумнівних даних. Вони теоретично обґрунтовані. Їх використання збільшує достовірність зроблених висновків.

Серед аналітичних методів відкидання даних, які викликають сумнів, є декілька методів. Найпростіший з них метод 3σ. Відкидають значення, які відхиляються від середньої для вибірки величини більше ніж на 3σ (деколи вважають помилковими і відкидають результати які відрізняються більше ніж на 2σ). Для цього за результатами вибірки розраховують середнє значення $\overline{x}$ та оцінку s стандартного відхилення σ. Відкидають ті значення для яких різниця $\left|x_i - \overline{x}\right| \geq 3s$ $(або \ \left|x_i - \overline{x}\right| \geq 2s)$, залежно від конкретного випадку досліджень.

Більш обґрунтованим і точним є метод оснований на T_n статистиці. Згідно з цим методом [24] з усієї вибірки вибирають результат одного спостереження $x_{(n)}$ крайнього у варіаційному ряду. Для нього розраховують таку статистику:

$$T_n = \frac{(x_{(n)} - \overline{x})}{s}, \tag{50}$$

тут $x_{(n)}$ - крайнє значення випадкової величини у варіаційному ряду.

Критичне значення статистики $T_{\alpha n}$ знаходять в таблиці T критерію [23]. Якщо розраховане значення T_n більше критичного значення $T_{\alpha n}$, то $x_{(n)}$ відкидають. Якщо у вибірці є декілька підозрілих даних, то після відкидання одного значення перевіряють інші до цих пір доки буде одержано результат, що помилкових даних більше нема.

Інша методика дозволяє одночасно відкинути декілька сумнівних даних [24]. Критерій одночасного включення декількох даних, які різко відрізняються, оснований на розрахунку статистики:

$$L_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k}(x_i - \overline{x}_k)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}. \tag{51}$$

Тут k - кількість даних, які вважають підозрілими,

$\overline{x}_k$ - середнє для даних за виключенням підозрілих.

Критичні значення статистики L_k приведені в [23]. Недоліки вказаних аналітичних методів є те, що вони засновані на нормальному законі розподілу ймовірностей. Якщо закон розподілу ймовірностей сильно відрізняється від нормального закону, то вони можуть призводити до помилок. З урахуванням цього графічні методи є досить корисними.

Перевірка закону розподілу випадкової величини серед великої кількості аналітичних методів перевірки відповідності розподілу випадкової величини нормальному чи іншому теоретичному закону розподілу найширше застосування має критерій X^2 – Персона. Процедура перевірки гіпотези відповідності розподілу певному теоретичному закону така [18]:

1. Дані вибірки впорядковують у варіаційній ряд.

2. Весь діапазон n вибіркових значень розбивають на ряд інтервалів $\Delta_1\ \Delta_2\ ...\ \Delta_s$ не обов’язково однакової ширини. Кількість інтервалів повинна бути не менша 8 і в кожен інтервал попадати не менше 7-10 вибіркових значень. Бажано, щоб в інтервали попадала приблизно однакова кількість даних. Крайні інтервали можуть простягатись до $-\infty$ чи до $+\infty$, якщо діапазон зміни випадкової величини вся числова вісь чи піввісь.

3. Підраховують кількість даних, які знаходяться у кожному інтервалі значень $V_1\ V_2\ ...\ V_s$.

4. Розраховують середні вибіркові значення параметрів розподілу. Для нормального закону величини $\overline{x}$ та S (середнє значення та середнє квадратичне відхилення).

5. За допомогою таблиць математичної статистики чи користуючись ПЕОМ розраховують теоретичні ймовірності P_i попадання випадкової величини в кожен діапазон Δ_i. Користуючись пакетом програм Excel [25, 26] P_i можна розрахувати як різницю значень функції розподілу для границь кожного інтервалу.

6. Розраховують статистику рівну

$$X^2(s-k-1)=\sum_{i=1}^{s}\frac{(V_i-np_i)^2}{np_i}. \tag{52}$$

Тут s - кількість інтервалів

k - кількість параметрів що визначають закон розподілу ($k \le 3$, для нормального закону розподілу $k=2$).

7. За таблицями X^2розподілу [23, 25] знаходять критичне значення $X^2_{\alpha/2}(s-k-1)$ на рівні значимості α та кількості степенів свободи $(s-k-1)$.

8. Провіряють гіпотезу співвідношення даних вибірки з теоретичним законом розподілу згідно з

$$X^2(s-k-1)<X^2_{\alpha/2}(s-k-1). \tag{53}$$

Якщо умова виконується то приймається гіпотеза, що дані вибірки задовольняють теоретичному закону розподілу. В іншому випадку теоретичний закон розподілу слід відхилити. Випадкова величина має інший закон розподілу, або дані неоднорідні і потребують подальшого аналізу.

Контрольні запитання

1. Які статистичні дані називають вибіркою?
2. Які правила потрібно виконувати щоб вибірка була репрезентативною?
3. З якою метою проводиться попередній аналіз статистичних даних?
4. Як перевірити однорідність вибірки?
5. Які графічні методи попереднього аналізу статистичних даних ви знаєте?
6. Що являє собою гістограма?
7. Який порядок побудови гістограми?
8. Чи варто будувати гістограму для вибірки об'ємом менше 30? Чому?
9. Як утворити варіаційний ряд?
10. Для чого використовують графіки на імовірнісному папері?
11. Як виглядає графік вибірки на імовірнісному папері в разі її неоднорідності?
12. Що являє собою графік кореляційного поля?
13. Що являє собою еліпс розсіяння?
14. Які методи перевірки закону розподілу випадкової величини ви знаєте?
15. Для чого застосовують критерій Пірсона?
16. Який порядок використання критерію Персона?

Лекція 8. Статистична гіпотеза. Критерії перевірки статистичних гіпотез

1. Поняття і особливості статистичної гіпотези.
2. Критерії перевірки статистичних гіпотез.
3. Непараметричні критерії.
4. Параметричні критерії.

1. Поняття і особливості статистичної гіпотези

Статистична гіпотеза – це несуперечлива сукупність суджень щодо розподілу випадкової величини. Статистична гіпотеза – це певне твердження, яке потрібно підтвердити або відкинути на основі наявних статистичних даних.

Наприклад, наступні твердження:
- розмір деталі відповідає кресленню;
- пробіг покришок коліс тролейбуса не менше 80 тис. км;
- середня дальність поїздки пасажира Харківського метро 7,2 км;
- напруга спрацювання розрядника знаходиться в границях від 30 до 35 кВ;

може виступати статистичними гіпотезами, які потрібно підтвердити на основі експериментальних даних.

Статистична гіпотеза повинна бути несуперечливою і повною.

Несуперечливість означає відсутність логічних протиріч у формулюванні гіпотези.

Повнота гіпотези передбачає наявність **нульової гіпотези** H_o та **альтернативної гіпотези** H_1, таких, щоб сумарна ймовірність нульової гіпотези $p(H_o)$ і альтернативної гіпотези $p(H_1)$ дорівнювала 1:

$$p(H_o)+p(H_1)=1 \qquad (54)$$

В математичній статистиці розрізняють прості та складні статистичні гіпотези. Проста гіпотеза передбачає певне значення для параметра розподілу, а складна – певну область значень.

Критерій перевірки статистичної гіпотези – це правило, яке дозволяє відхилити чи не відхилити гіпотезу H_o на основі вибірки. Критерій перевірки статистичної гіпотези основується на певній статистиці і визначає її значення. Величина критерію поділяє область значень статистики на довірчу та критичну.

Якщо значення відповідної статистики, розраховане за вибіркою, знаходиться в критичній області то гіпотеза H_o відхиляється, якщо в довірчій області то не відхиляється.

Слід зауважити, що коректне використання математичної статистики передбачає, що статистичний критерій не може довести ні однієї гіпотези, він тільки вказує на „відсутність заперечення”. Тобто висновок у *математичній статистиці має вигляд: „статистичні дані не суперечать гіпотезі H_o”, або „статистичні дані відхиляють гіпотезу H_0 на рівні значимості такому-то”.*

Як заявляють деякі вчені-статистики: статистика дуже галасливо кричить ні, не може бути і дуже тихо й скромно говорять: можливо це і вірно.

Прийняття чи відхилення гіпотези за критерієм в математичній статистиці не дає її логічного підтвердження, а носить імовірнісний характер. Тут можливі такі чотири випадки:

1. Гіпотеза H_o вірна і вона приймається;
2. Гіпотеза H_o невірна і вона не приймається;
3. Гіпотеза H_o вірна, але вона не приймається (помилка I роду, наприклад, *добра деталь відкинута в брак*);
4. Гіпотеза H_o невірна, але вона приймається (помилка II роду, *деталь погана, але її прийняли як хорошу*).

Завдання математичної статистики полягає в тому, щоб вибрати статистику, яка б якомога краще відображала властивості нульової H_o та альтернативної гіпотези $H_{1,}$ і відшукати значення критерію, яке в найбільш повній мірі дозволяло б розділити вірну та невірну гіпотези. Це завдання має два аспекти, а саме:

- Вибір найбільш придатної статистики.
- Вибір критичного значення статистики.

Завдання вибору статистики вирішує теорія ймовірностей і дає рекомендацій по використанню тієї чи іншої статистики в кожному конкретному випадку. По суті вибір статистики математична проблема, яка має цілий ряд показників. Ми ці питання розглядати не будемо.

Вибір критичного значення статистики здійснюється в кожному конкретному випадку окремо. Для з'ясування цього розглянемо розподіл ймовірностей статистики.

Нехай певна статистика має свою область значень. (x_{min}–x_{max}) (див. рис. 27). Щільність розподілу ймовірностей статистики, у випадку коли вірна нульова гіпотеза відповідає кривій $\varphi_{H0}(x)$, а коли вірна альтернативна гіпотеза – кривій $\varphi_{H1}(x)$. Величина критерію поділяє область значень статистики на довірчу та критичну.

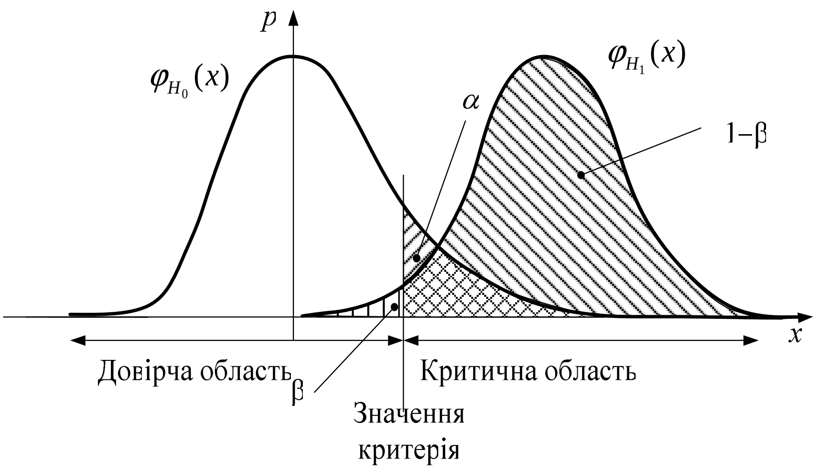


Рис. 27 – *Перевірка простої гіпотези* H_0 *шляхом порівняння з альтернативною* H_1.

$\varphi_{\mathrm{H}_0}(\mathrm{x})$ - щільність ймовірностей розподілу статистики при вірності нульової гіпотези H_0; $\varphi_{\mathrm{H}_1}(\mathrm{x})$ - щільність ймовірності статистики при вірності альтернативної гіпотези ; α– ймовірність помилкового відкидання гіпотези H_0 (рівень значимості критерію) (помилка I роду); β - ймовірність помилкового прийняття гіпотези H_1 (помилка II роду); $1-\beta$ - ймовірність вірного відкидання гіпотези H_1 (потужність критерію)).

Під час вибору величини критерію, тобто критичного значення статистики, оцінюють ймовірності отримання різних відповідей. Область α на рис. 27 відповідає ймовірності того, що гіпотеза вірна, але за даним критерієм вона буде відкинута. Це ймовірність помилки I роду. Цю область називають рівень значимості критерію і позначають літерою α (деколи q). Як правило його вибирають рівним α = 0,05, або 0,1; 0,02, 0,01; 0,005 … залежно від конкретного завдання аналізу.

Область β на рис. 27 відповідає ймовірності прийняття невірної нульової гіпотези, тобто ймовірності помилки II роду.

В конкретних практичних випадках помилка I роду означає відносну кількість хороших деталей відкинутих в брак , а помилка П роду - визначає відносну кількість бракованих виробів, які попадають споживачу. Тобто, якщо ми маємо на увазі розбракування виробів, то можна вважати, що помилка I роду (область α) – це риск виробника продукції, а помилка II роду це риск споживача. Риск виробника полягає у тому, що він відкинув у брак хороші вироби. Риск покупця полягає у тому, що у купленому товарі є браковані вироби. Помилки I та II роду взаємно зв’язані: збільшення однієї з них веде до зменшення іншої.

Вибір значення критерію залежить від ряду чинників, у практичній діяльності він здійснюється по різному в кожному конкретному випадку. Наприклад, вибираючи критерій поділу деталей на добрі і браковані згідно рис. 25 можна було б вибрати критичне значення, яке відповідає перетину кривих густини ймовірностей. Такий вибір мінімізує суму похибок I та II роду. Проте на практиці він не діє. Справа в тому, що похибки I та II роду можуть мати різну вартісну оцінку. Помилка I роду – це хороші деталі які відійшли в брак. Брак може бути таким, що його легко усунути і повернути деталь в масив добрих деталей. Помилка II роду вже не може бути виправлена. Якщо неякісна деталь використовується в подальшому виробництві вона приведе до браку всього виробу, вартість якого значно більша вартості виправлення браку чи вартості бракованої деталі. Отже, як правило, рівень похибок I та II роду при виборі критерію може бути різним. В практичній діяльності прийнято характеризувати критерій двома величинами, а саме: рівням значимості та потужністю критерію. Проте в багатьох випадках використовують тільки одну з цих величин, як правило, рівень значимості критерію.

2. Критерії перевірки статистичних гіпотез

Далі розглянемо конкретні приклади критеріїв. Статистичні висновки завжди є результатом перевірки статистичних гіпотез. Критерії перевірки статистичних гіпотез передбачають обчислення за даними вимірювань певних статистик та порівняння одержаних значень з теоретично розрахованими критичними величинами. Залежно від того, які статистики потрібно розрахувати, критерії перевірки статистичних гіпотез поділяють на:

- параметричні критерії;
- непараметричні критерії.

Параметричні критерії основані на обчисленні та порівнянні певних параметрів розподілу випадкових величин як то: математичного очікування, дисперсії, моментів вищих порядків тощо. Ці критерії вимагають апріорного знання (апріорі – наперед, до проведення досліду) закону розподілу випадкових величин або допущення при тип закону розподілу та перевірки його за результатами експерименту. Кожен параметричний критерій справедливий при тому чи іншому законі розподілу і може давати помилкові результати, якщо закон розподілу інший. Більшість параметричних критеріїв передбачає нормальний закон розподілу ймовірностей. Часто цей закон розподілу не перевіряють, а вважають що він виконується, наприклад, на основі міркувань, що на випадкову величину впливає багато чинників, кожен з яких не сильно змінює саму величину. Допущення про нормальний закон розподілу дуже часто відповідає дійсності і параметричні критерії, основані на нормальному законі розподілу дають вірні результати.

Непараметричні критерії перевірки статистичних гіпотез використовують коли інформація про розподіл сама мінімальна, а вигляд закону розподілу не відомий. Застосовують їх також у випадках, коли вимірювання здійснюється у ранговій шкалі.

Непараметричні критерії є найбільш універсальними. Проте вони не такі потужні як параметричні критерії. Параметричні критерії більш потужні і дозволяють робити статистичні висновки при меншій кількості даних, тоді, коли непараметричні критерії не дають чіткої відповіді.

Історично так склалось, що параметричні критерії були розроблені значно раніше. Тому вони найбільш поширені. Кількість параметричних критеріїв досить значна і теоретично обґрунтовані всі особливості застосування кожного критерію. Непараметричні критерії вивчати і розробляти почали дещо пізніше [29] і продовжують в наш час.

Важливою характеристикою критерію є його потужність і асимптотична потужність. Потужність критерію – це доповнення до одиниці помилки другого роду (1 – β). Асимптотична потужність критерію визначається тим, як змінюється його потужність при збільшенні об'єму вибірки. Для багатьох непараметричних критеріїв доведено, що їх асимптотична потужність не менша ніж для параметричних критеріїв при нормальному законі розподілу випадкової величини і може перевищувати її при відхиленні закону розподілу від нормального. Тому використання непараметричних критеріїв у багатьох випадках корисне і теоретично обґрунтоване. Фактично кожний параметричний критерій має свій непараметричний аналог. Ми спочатку розглянемо деякі непараметричні критерії, а пізніше параметричні.

3. Непараметричні критерії

Серед великої кількості непараметричних критеріїв [27 - 30] ми відмітимо тільки такі:

1. Критерій знаків.
2. Знаковий ранговий критерій Вілконсона.
3. Ранговий критерій Вілконсона.
4. Коефіцієнт рангової кореляції.

Критерій знаків

Самий простий. Математично обґрунтований хоча і рідко вживаний критерій.

Критерій знаків служить для порівняння двох вибірок. Найчастіше його застосовують у випадках, коли умовами вимірювань допускається тільки попарне порівняння випадкових величин x_1 і x_2, та в інших випадках [29, 30].

Нульова гіпотеза H_0 критерію знаків така: вважають, що випадкові величини x_1 і x_2 мають одинаків розподіл а їх математичні очікування μ_1 і μ_2 рівні. Альтернативна гіпотеза H_1 полягає в тому, що розподіл величин x_1 і x_2 різний.

Цей критерій, як і більшість інших має два варіанти, що відрізняються формулюванням нульової гіпотези а саме: односторонній критерій знаків та двохсторонній критерій. Математично формулювання гіпотез для цих критеріїв має вигляд:

Для одностороннього критерію:

$$H_0 : \mu_{x_1} = \mu_{x_2}$$
$$H_1 : \mu_{x_1} > \mu_{x_2} \qquad (55)$$

Для двох стороннього критерію:

$$H_0 : \mu_{x_1} = \mu_{x_2}$$
$$H_1 : \mu_{x_1} \neq \mu_{x_2} \qquad (56)$$

Зауваження. У принципі односторонніх критеріїв два. Крім записаного вище може бути інший. Величина x_1 і x_2 можна вибрати довільно, тобто одній виборці присвоювати індекс 1 а другій 2, проте такий вибір повинен бути зроблений до експерименту і **до експерименту** повинна бути вибрана конкретна гіпотеза тому вважають, що є тільки один односторонній критерій. В ході експерименту, особливо під час аналізу його результатів, **зміна гіпотези не допускається.** Це зумовлене тим, що така зміна впливає на ймовірність події на основі якої розраховано критерій.

Обґрунтування критичних величин даного критерію основане на ймовірності результату. Якщо величини x_1 і x_2 мають однаковий розподіл (вірна гіпотеза H_0), то події коли в досліді буде знак + чи знак – (при відкиданні випадків $x_1 = x_2$) є рівно імовірні, тобто імовірність їх дорівнює ½

$$P\{x_1 - x_2 > 0\} = P\{x_1 - x_2 < 0\} = 1/2 \tag{57}$$

Імовірність того що в n дослідах різниця $x_1 - x_2$ буде додатна в m випадках обраховується згідно формули біноміального розподілу.

$$P\{m\} = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m+2} + \ldots + \binom{n}{n}\right). \tag{58}$$

Тут n - об’єм вибірки,

m - кількість дослідів зі знаком +.

На основі неї розраховане критичне значення. Статистичні таблиці подають значення при заданому рівні значимості α. Односторонній критерій вимагає відкинути гіпотезу H_0 на рівні значимості α, якщо число випадків з додатною різницею більше ніж критична величина $m_{\alpha n}$. Двохсторонній критерій вимагає відхилити нульову гіпотезу на рівні значимості 2α, якщо число випадків з додатною або від’ємною різницею більше від $m_{\alpha n}$. Величина $m_{\alpha n}$ табульована [23].

Використовують критерій знаків у такому порядку:

1. Задають вибіркові величини x_1 і x_2 та рівень значимості на якому потрібно зробити статистичний висновок про статистичну відмінність чи однорідність величин x_1 і x_2.

2. $(x_{1,1}\ x_{1,2} \ldots x_{1,k})$ і $(x_{2,1}\ x_{2,2} \ldots x_{2,k})$ в довільному порядку та визначають знаки різниці кожної пари значень $x_{1i} - x_{2i}$. Результати в яких $x_i = y_i$ відкидають.

3. Підраховують кількість результатів m зі знаком + та кількість всіх пар n за винятком відкинутих.

4. Знаходять за математичними таблицями [23] критичну величину $m_{\alpha n}$ для вибраного рівня значимості α та кількості дослідів.

5. Порівнюють величину m з критичною. Якщо $m \geq m_{\alpha n}$ то гіпотезу H_0 відкидають на рівні значимості α. Якщо $m < m_{\alpha n}$ то гіпотезу не відкидають.

6. Роблять висновок про підтвердження чи не підтвердження нульової гіпотези на рівні значимості α. Тобто чи вибірки однорідні чи вони різні. Використовують цей висновок в подальшому як встановлений факт.

7. Якщо виявляється, що $m < m_{\alpha n}$, то додатково можна скористатись двохстороннім критерієм. Критичне значення вибирають на рівні значимості α/2 і перевіряють умову

$$n - m < m_{\alpha/2n}. \qquad (59)$$

<u>Приклад використання критерію знаків</u>.

Нехай потрібно встановити чи статистично однаковими за напругою спрацювання є дві партії високовольтних розрядників. Дослід проводять в такому порядку. Два розрядники, по одному з кожної партії, приєднують паралельно до одного джерела живлення і піднімають напругу до моменту коли спрацює один з розрядників. Відмічають знаком + коли спрацює розрядник першої партії.

Було перевірено 50 пар розрядників. Одержано, що в 32 дослідах спрацював розрядник першої партії, в 16 дослідах спрацював другої розрядник партії, а в двох випадках зафіксовано розрядники спрацювали одночасно. Отже за даними дослідів $m = 32$ $n = 48$. Чи можна на основі цих даних твердити що партії розрядників статистично відрізняються на рівні значимості α=0,05. Для математичного аналізу обрахуємо критичну величину $m_{\alpha n}$ (індекси позначають, що критична величина вибрана на рівні значимості α (α=0,05) при числі дослідів n (n =48)).

$$m_{0,05;48} = \frac{1}{2} + \frac{48}{2} + \frac{\sqrt{48}}{2} \cdot 1{,}645 = 30{,}2$$

В результаті порівняння одержаної величини m = 32 і критичної величини $m_{\alpha n} = 30{,}2$ одержуємо що

$$m > m_{\alpha n} \qquad (32>30{,}2)$$

На основі цього робимо висновок, що в даному випадку слід відхилити нульову гіпотезу. Тобто цей аналіз дає очікуваний результату, підтверджує відмінності між партіями розрядників.

Отже відмінність партій розрядників статистичного значима на заданому рівні α=0,05. Остаточно робимо висновок, що з достовірністю 95% можна твердити, що партії розрядників статистично відрізняються і мають різну напругу спрацювання.

На основі поставленого завдання для якого виконували досліди приймаємо конкретне практичне рішення: потрібно бракувати розрядники однієї партії та корегувати технологічний процес виробництва.

Можна також використати двохсторонній критерій знаків. Згідно нього критичну величину потрібно вибирати на рівні значимості $\alpha/2$ тобто у нас на рівні 0,025.

Згідно з таблицями [23] знаходимо:

$$Z(1 - 0{,}002) = 2{,}054.$$

Отже

$$m_{\alpha,n} = \frac{48}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{48}}{2} \cdot 2{,}054 = 31{,}6.$$

Перевіряємо умову для двохстороннього критерію

$$m > m_{\alpha,n} \qquad (32 > 31{,}6).$$

Аналіз показує статистичну відмінність партій розрядників.

В цьому прикладі видно як обережно потрібно користуватись статистичними висновками. Особливість статистичних методів полягає у тому, що спочатку формулюють умову вибору, а після цього роблять висновки. Це зумовлене тим, що критерії передбачають проведення тільки одного досліду і враховують імовірність події в одному досліді. Виконання повторних дослідів чи зміна умов використання критерію призводить до зміни імовірності події, що в статистичних дослідженнях не допускається. Для таких випадків розроблено інші критерії, в яких об'єм вибірки не є фіксованим, чи використовують повторні вибірки.

У нашому прикладі ми одержали висновок за допомогою двохстороннього критерію. Використання того чи іншого критерію не пов'язане з дослідом і не змінює імовірності події. Висновок можна робити користуючись будь-яким критерієм.

Наведений приклад є характерним як для непараметричних критеріїв так і для параметричних критеріїв. Більшість критеріїв мають два варіанти: односторонній критерій і двох сторонній. Формулювання одностороннього критерію завжди тільки одне. Якщо односторонній критерій не дозволяє відкинути нульову гіпотезу то слід використовувати двосторонній критерій. При цьому змінюється гранична значення критерію та імовірності.

Часто на практиці обробки результатів вимірювань використовують спочатку більш прості критерії і якщо потужність їх недостатня, то застосовують більш потужні критерії. Теоретичні розрахунки показують, що потужність критерію знаків становить 0,64 потужності параметричного t-критерію Стьюдента, який буде розглянуто дальше.

Критерій знаків використовують як до сукупності безперервних ознак, так і для оцінки відмінності рангових ознак (бали і т.п.) при достатньому числі їх градацій.

Ранговий критерій Вілкоксона (Wilcoxon)

Критерій знаків є досить простим і зручним у використанні. Проте, як було відмічено, він недостатньо потужний. Підвищити потужність можна, якщо крім знаку можна врахувати величину різниці в ранговій шкалі. Якщо дані допускають не тільки визначити знак (факт краще-гірше) а і оцінити та впорядкувати дані за величиною різниці, присвоївши певний ранг, то для аналізу можна використати так званий знаковий ранговий критерій Вілкоксона.

Згідно знакового рангового критерію Вілкоксона для перевірки однорідності чи відмінності двох вибірок $((x_{1,1}\ x_{1,2} \ldots x_{1,n})$ та $(x_{2,1}\ x_{2,2} \ldots x_{2,n})$ визначають величину різниці $Z_i = |x_{1i} - x_{2i}|$, за модулем (без врахування знаку), виконують ранжування величин Z_i, присвоївши їм ранг R_i по мірі зростання та додають до рангу R_i знак який відповідає знаку різниці $x_{1i} - x_{2i}$. Таким чином одержують знаковий ранг різниці показників. За величинами знакових рангів розраховують статистику Вілкоксона, рівну

$$W = \sum_{i=1}^{s} T_i . \tag{60}$$

Тут T_i – впорядковані додатні ранги;

s – кількість додатніх рангів.

Використовують одержане значення для перевірки справедливості нульової гіпотези. Перевірку гіпотези виконують шляхом порівняння значення статистики W з критичною величиною на рівні значимості α. У випадку коли кількість пар даних вибірки більша 26 критичне значення для статистики Вілкоксона можна розрахувати згідно з формулою [30]:

$$W_{\alpha,n} = \frac{n(n+1)}{4} + \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} \cdot Z(1-\alpha) \qquad (61)$$

тут n – об'єм вибірки;

α – рівень значимості критерію;

$Z(1-\alpha)$ - квантіль нормального розподілу.

У випадку, коли кількість пар даних у вибірках менше 26, слід скористуватись таблицею знакового розподілу Вілкоксона ***(Wilcoxon)*** [29]. За допомогою таблиці визначають імовірність одержаного результату та роблять висновок враховуючи цю імовірність.

Критерій Вілкоксона для зв'язаних сукупностей – це непараметричний метод, який використовується для оцінки значущості відмінностей двох зв'язаних сукупностей кількісних ознак.

Практичний розрахунок критерію включає наступні етапи:

1) Знайти різниці парних варіантів.

2) Визначити ранги одержаних різниць (без урахування знаків, пари спостережень, різниці яких виявилися рівними нулю, з подальшої оцінки виключаються).

3) Визначити суму рангів одержаних різниць, що мають однакові знаки і узяти меншу з них (Т).

4) Встановити достовірність відмінностей. При кількості спостережень менше 26 порівнюють знайдену суму з критичними значеннями з таблиці, інакше розраховують по спеціальній формулі випадкову змінну (u).

Критерій Вілкоксона є більш потужній ніж критерій знаків Його слід використовувати за наявності у порівнюваних сукупностей кількісних ознак значного числа різниць з протилежними знаками.

Розглянемо приклад використання знакового рангового критерію Вілкоксона.

Нехай інженер депо отримав завдання зробити заявку на закупівлю покришок для коліс тролейбуса. Покришки виготовляють два заводи. Ціна та умови поставки однакові. Потрібно вибрати покришки якого заводу мають більший термін служби. За даними обліку роботи покришок в попередній час сформовано дві вибірки. Дані терміну служби у місяцях наведені у табл. 5 Згідно з цими даними обраховуємо різницю терміну служби та визначаємо знаковий ранг. Відповідні дані розміщено в колонках таблиці.

Таблиця 5 – Аналіз статистичної різниці термінів служби покришок двох заводів за критерієм Вілкоксона.

Завод 1 **X_1 (міс)**	**Завод 2** **(міс)**	**Різниця** **X_1-X2**	**Знаковий** **ранг R**

Величина статистики Вілкоксона розрахована для даних табл. 5 дорівнює $w = 213$. Критичне значення розраховане за формулою (61) при об'ємі вибірок $n = 24$ і рівневі значимості $\alpha = 0{,}05$ становить $W_{0,05;24} = 207$. Отже виконується умова

$$W > W_{0,05;24} \qquad (213 > 207)/$$

На основі цього зроблено висновок, що покришки першого та другого заводу мають статистично різний термін служби. Кращими є покришки першого заводу. Депо буде закупляти покришки першого заводу.

Критерій серій Вальда-Вольфовіца

Даний критерій оснований на тому, що у варіаційному ряді, утвореному на основі двох вибірок, буде встановлена певна послідовність і визначена довжина серій даних кожної з вибірок. Під серією розуміють послідовно розміщенні в одному варіаційному ряді дані з однієї вибірки. Якщо у варіаційному ряді дані однієї вибірки сусідствують з даними цієї ж вибірки, то вони утворюють серію. Серія може складатись з одного значення чи декількох. Кількість значень, які входять в серію називають довжиною серії. Детальний розгляд критерію дано в [29].

4. Параметричні критерії перевірки статистичних гіпотез

У випадках коли вимірювання випадкових величин здійснене у сильних шкалах (шкалі різниці чи шкалі відношень), для перевірки статистичних гіпотез використовують параметричні критерії. Ці критерії по-перше: дозволяють отримати числові значення і по-друге: є більш потужними, тобто працюють там де непараметричні критерії не дозволяють відкинути нульову гіпотезу. Обмеження використання параметричних критеріїв зумовлені законом розподілу випадкових величин. Більшість параметричних критеріїв передбачає, що випадкові величини розподілені згідно нормального закону. Вони вимагають знання апріорі (до досліду) характеру закону розподілу випадкових величин, або перевірки його за даними експерименту.

Для практичного використання теорія рекомендує ряд критеріїв, потужність яких при заданих умовах є максимальною. Значна кількість критеріїв використовує розподіл Стьюдента, це так звані t-критерії. Практично всі критерії мають два варіанти, а саме двохсторонній критерій та односторонній критерій.

Використовують критерії перевірки статистичних гіпотез у такому порядку:

- формулюють нульову й альтернативну гіпотези; вибирають рівень значимості α;

- проводять експеримент і вимірюють значення випадкових величин;
- розраховують статистику потрібну для перевірки гіпотези;
- вибирають згідно із статистичними таблицями критичну величину;
- порівнюють одержане значення з критичною величиною;
- роблять висновок чи дані експерименту суперечать нульовій гіпотезі в користь альтернативної чи ні.

Слід мати на увазі, як це вже відмічалося, що статистичні висновки завжди мають імовірнісний характер. Вони можуть підтвердити, що дані експерименту не суперечать нульовій гіпотезі, або суперечать їй, і тоді нульову гіпотезу потрібно відкинути як невірну. Але довести, що нульова гіпотеза є вірна статистичні дані не можуть.

Статистичні гіпотези найбільш часто використовують для вирішення таких завдань:

1. Перевірка параметрів розподілу а саме, чи дані досліду підтверджують певні значення математичного очікування, дисперсії, а чи параметрів вищих моментів.
2. Перевірка гіпотези зсуву, тобто гіпотези чи математичні очікування вибірок відрізняються між собою.
3. Перевірка гіпотези відносно однорідності дисперсій, тобто чи дисперсії вибірок є однаковими.
4. Перевірка гіпотези узгодженості, тобто гіпотези чи відповідає вибірка певному закону розподілу ймовірностей випадкової величини.
5. Перевірка значимості коефіцієнту кореляції, чи відрізняється його експериментальне значення від нуля.
6. Перевірка значимості коефіцієнтів регресії, наскільки суттєвими є коефіцієнти певного рівняння регресії.

Найбільш вживані параметричні критерії наведено у табл.6. При потребі більш детальний перелік та опис критеріїв можна знайти в спеціальній літературі [29, 30].

У табл. 6 використані такі позначення:

H_0:, H_1: - нульова й альтернативна гіпотези;

m, σ^2 - математичне очікування й дисперсія розподілу випадкових величин;

$\overline{X}, S^2$ - вибіркові значення, оцінки математичного очікування (середнє значення величини) й вибіркова дисперсія:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}. \qquad (62)$$

У колонці 2 таблиці вказані нульова й альтернативна гіпотеза та попередня інформація, що має бути відома для використання даного критерію.

У колонці 3 таблиці наведено статистику, яку потрібно розрахувати за вибірковими даними для перевірки гіпотези й число ступенів свободи – df.

В колонці 4 приведено характеристики розподілу статистики. Літерами позначено тип закону розподілу, якому підлягають значення статистики використаної для перевірки гіпотези.

U - нормальний розподіл (Гауса);

t – розподіл Стьюдента (t- розподіл);

χ^2- розподіл хі- квадрат;

F – розподіл Фішера (F-розподіл).

Рядом з типом розподілу вказано та рівень значимості α.

Таблиця 6 – Найбільш вживані параметричні критерії перевірки статистичних гіпотез

№ п/п	**Нульова H_0 та альтернативна H_1 гіпотези**	**Статистика**	**Розподіл статистики**
1	**2**	**4**	**5**
1	$H_0: m_x = m_0$ $H_1: m_x \neq m_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ $df = n - 1$	Z - статистика, σ^2 відомо Нормальний розподіл
2	$H_0: m_x = m_0$ $H_1: m_x > m_0$		
3	$H_0: m_x = m_0$ $H_1: m_x < m_0$		
4	$H_0: m_x = m_0$ $H_1: m_x \neq m_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - m_0}{S / \sqrt{n}}$ $df = n - 1$	t- статистика Стьюдента, σ_x^2 невідомо Нормальний розподіл
5	$H_0: m_x = m_0$ $H_1: m_x > m_0$		
6	$H_0: m_x = m_0$ $H_1: m_x < m_0$		
7	$H_0: \sigma_x = \sigma_0$ $H_1: \sigma_x \neq \sigma_0$	$X^2 = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ $df = n - 1$	X^2-розподіл з σ_0^2 відома степенями свободи
8	$H_0: \sigma_x = \sigma_0$ $H_1: \sigma_x > \sigma_0$		
9	$H_0: \sigma_x = \sigma_0$ $H_1: \sigma_x < \sigma_0$		
10	$H_0: m_x = m_y$ $H_1: m_x \neq m_y$	$U = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m}}}$	Нормальний розподіл σ_x^2, σ_y^2 відомі, n, m - об'єми виборок
11	$H_0: m_x = m_y$ $H_1: m_x > m_y$		
12	$H_0: m_x = m_y$ $H_1: m_x < m_y$		

Продовження табл. 6

13	$H_0: m_x = m_y$ $H_1: m_x \neq m_y$	$t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 \cdot (n-1)S_y^2} \cdot} \cdot \sqrt{\dfrac{nm(n+m-2)}{n+m}}$ *df = n + m -2*	t-розподіл $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ невідомі, n, m – об'єми вибірок
14	$H_0: m_x = m_y$ $H_1: m_x > m_y$		
15	$H_0: m_x = m_y$ $H_1: m_x < m_y$		
16	$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$	$F = \dfrac{S_{max}^2}{S_{min}^2}$	F – розподіл Фішера σ_x^2, σ_y^2 невідомі, n, m – об'єми вибірок
17	$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1: \sigma_x^2 > \sigma_y^2$	$F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2}$	
18	$H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ $H_1: \sigma_x^2 < \sigma_y^2$	$F = \dfrac{S_y^2}{S_x^2}$	
19	$H_0: R = 0$ $H_1: R \neq 0$	$t = \dfrac{R}{\sqrt{\dfrac{1-R}{n-2}}}$ *df = n - 2*	t-розподіл Стьюдента
20	$H_0: m_x = m_y$ $H_1: m_x \neq m_y$	$F = \dfrac{S^2}{S_\Sigma^2}$	F – розподіл Фішера S_2 S_Σ невідомі, вибіркові дисперсії усієї сукупності даних і даних в середині вибірок; n, m – об'єми вибірок

Критерії 1 та його варіанти 2 і 3 служать для перевірки гіпотези, чи значення математичного очікування m_x розподілу ймовірностей випадкової величини одержане на основі вибірки, відповідає заданій величині m_0. Завдання перевірки цієї гіпотези часто зустрічається на виробництві, приклад під час приймання певної продукції. Для перевірки відповідності продукції вимогам технічної документації беруть обмежену вибірку і на основі неї роблять висновок відносно відповідності всієї партії виробів. Критерій дозволяє відхилити нульову гіпотезу і забракувати партію виробів, якщо одержано незадовільний результат на основі вибірки обмеженого об'єму. Варіант критерію 2 та 3 відрізняються нульовою гіпотезою, тобто формулюванням обмежень які накладає технічна документація на даний вибір.

Критерій 4 і варіанти 5 й 6 відрізняються попередньою інформацією відносно розподілу значень даного параметру. Якщо технологічний процес стабільний і дисперсія значень відома, то можна застосовувати критерій 4-6. Перевага його в тому, що він більш чутливий дозволяє вловити менше відхилення, або при заданому допустимому відхиленню, потребує меншого об'єму контрольної вибірки.

Критерій 7 з варіантами 8, 9 дозволяє за вибіркою перевірити відповідність дисперсії випадкової величини заданому значенню σ_0^2 і відхилити нульову гіпотезу, якщо дисперсія більша (або менша залежно від варіанту 8 чи 9). Задача типова під час відпрацювання та атестації технологічного процесу виробництва, оскільки технологія повинна забезпечувати стабільність параметрів готової продукції. Для деяких виробів дисперсія характеризує стабільність роботи. Наприклад, показником якості реле максимального струму є дисперсія струму спрацювання яка визначається в послідовному ряді випробувань.

Критерій 10 дозволяє і його варіанти 11, 12 порівняти дві вибірки і визначити чи вони однорідні, є вибірками з однієї генеральної сукупності, чи відрізняються за математичним очікуванням. Тобто цей критерій перевіряє ефект зсуву вибірок одна відносно іншої. Досить часто ефект зсуву називають „ефектом обробки". Термін „ефект обробки" виник з того що досить часто зустрічається практичне завдання визначити як той чи інший вплив, та чи інша обробка впливає на характеристику виробів, приводить вона до покращення характеристик чи ні.

Критерій 13 і його різновиди 14, 15 аналогічно до попереднього критерію тільки застосовуються у випадку відсутності інформації щодо дисперсії величин у вибірках. Якщо об'єм вибірки є великим $n > 200$ то допустимо використовувати критерій 10 де $\sigma_x^2 \approx S_x^2$ $\sigma_y^2 \approx S_x^2$, але у випадку невеликих вибірок $n < 100$ при невідомій дисперсії потрібно використовувати критерій 13.

Критерій 16 і його варіанти 17 та 18 використовують для порівняння дисперсій двох вибірок, чи можна їх вважати однаковими чи вони різні.

Критерій 19 призначений для перевірки значення коефіцієнту кореляції. Він використовується в кореляційному аналізі. Якщо нульова гіпотеза відносно коефіцієнту кореляції відхилена, то можна твердити про наявність кореляційного зв'язку між двома випадковими величинами.

Критерій 20 – найбільш вживаний критерій перевірки чи однаковим є значення математичного очікування двох вибірок. Його часто застосовують замість використання t критерію для визначення ефекту зсуву. Особливістю його використання є те, що в даному випадку не розраховують середніх значень для кожної вибірки а розраховують тільки дисперсію значень у вибірках. Якщо дві вибірки відрізняються математичним очікуванням величини, то очевидно, що дисперсія об'єднаної вибірки створеної із всіх елементів двох вибірок буде більша ніж дисперсія кожної окремої вибірки. За відношенням дисперсій можна визначити чи однаковими є математичні очікування. Більш детально ці питання розглянуто в наступному розділі, а саме дисперсійному аналізу.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняттю статистична гіпотеза.
2. Наведіть приклади статистичних гіпотез.
3. Яким вимогам повинна задовольняти статистична гіпотеза?
4. У чому полягає вимога повноти статистичної гіпотези?
5. Дайте визначення поняттю «довірча область».
6. Чи може абсолютну вірність певного твердження на основі статистичних даних?
7. Назвіть можливі помилки при відхиленні гіпотези за певним критерієм.
8. Яку помилку називають помилку 1-го роду?
9. Серед відібраних виробів знаходиться бракований. Помилці якого роду це відповідає?
10. Що таке критерій значимості гіпотези?
11. Які значення критерію значимості використовуються найбільш часто?
12. Що таке потужність критерію?
13. Що таке рівень значимості критерію?
14. На основі яких даних вибирають критичну величину критерію?
15. Як розрахувати число степенів свободи?
16. Які критерії відносяться до параметричних?
17. Які ви знаєте непараметричні критерії?
18. Що розуміють під поняттям асимптотична потужність критерію?
19. Наведіть приклад використання критерію знаків.
20. Який порядок використання критерію знаків?
21. До якого типу критеріїв відносяться рангові критерії7
22. Яка величина називається квантіллю?
23. Наведіть приклади параметричних критеріїв.
24. Наведіть приклади завдань для вирішення яких використовують статистичні критерії.
25. На основі яких розподілів ґрунтуються статистичні критерії.
26. Запишіть Критерій Стьюдента порівняння двох вибірок.
27. Запишіть критерій Фішера порівняння двох вибірок.

Лекція 9. **АНАЛІЗ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ**

1. Методи статистичних досліджень.
2. Регресійний аналіз. Лінійна регресія.
3. Коефіцієнт кореляції. Кореляційний аналіз.
4. Приклад використання методів кореляційного аналізу.

1. **Методи статистичних досліджень**

Вивчаючи методи моделювання електромеханічних систем, моделювання технологічних процесів їх виготовлення та процесів експлуатації слід відмітити існування таких залежностей:

1. Функціональна залежність – коли вихідна величина системи повністю визначається значенням однієї чи декількох незалежних величин, які вважаємо вхідними.
2. Функціональна залежність з врахуванням впливу випадкових чинників. У ній крім залежності від вхідних змінних є вплив випадкових чинників, які дещо змінюють вихідну величину.
3. Випадкова залежність вихідної величини від невипадкової величини.
4. Випадкова залежність між декількома випадковими величинами.

Функціональну залежність величин описують алгебраїчними й диференціальними рівняннями і вивчають методами алгебри, інтегрального та диференціального числення. Використовують ці методи під час проектування електромеханічних систем, аналізу їх роботи в тих чи інших режимах. Ці методи розглянуто в попередніх лекціях де йшла мова про детерміновані моделі. Вони вивчались в курсах математики, фізики, електротехніки та ін.

Функціональна залежність з урахуванням впливу випадкових чинників проявляється під час вивчення роботи електромеханічних систем в умовах експлуатації. Тут крім функціональної залежності вихідної величини від вхідних змінних на стан системи впливають випадкові чинники, які дещо змінюють реально існуючу функціональну залежність. Для врахування таких впливів використовують методи усереднення, апроксимації, інтерполяції, які було розглянуто на попередніх лекціях.

Випадкова (стохастична) залежність вихідної величини від невипадкової величини та залежність між декількома випадковими величинами проявляється під час експлуатації електромеханічних систем та їх виробництва. Тут випадкові величини можуть характеризувати, як реальний стан системи, так і причини, які викликають зміну цього стану. Якщо підходити більш строго, то чисто функціональна залежність проявляється тільки під час теоретичного вивчення електромеханічних систем, а при вивченні реальних систем завжди, в тій чи іншій мірі, потрібно враховувати випадкові впливи. Вказану залежність називають стохастичною.

Для моделювання систем характеристики яких є випадковими величинами, чи залежать від випадкових величин, використовують методи статистичних досліджень. Ці методи дуже різноманітні. Умовою успішного їх використання є глибоке розуміння особливостей кожного методу досліджень.

Величини, які характеризують систему, можуть бути кількісні чи якісні. Вони вимірюються в різних кваліметричних шкалах. Використання тої чи іншої кваліметричної шкали вимірювань залежить від об'єкту та цілей дослідження. Так, під час теоретичного вивчення електромеханічних систем, аналізу режимів їх роботи, здебільшого маємо справу з вимірюваннями у сильних шкалах: а саме шкалі інтервалів чи шкалі відношень. Якщо ми вивчаємо технологічні процеси виробництва або особливості експлуатації електромеханічних систем, то доводиться користуватися слабкими шкалами, значну кількість чинників вимірювати в ранговій шкалі або в шкалі найменувань. Наприклад, вплив конструкційні матеріалів на якість виборів, залежність характеристик виробів від технологічних чинників, вплив умов експлуатації на надійність і термін служби доводиться визначати користуючись слабкими шкалами вимірювань. Виразити чинники від яких залежить ряд характеристик електромеханічних систем у сильних шкалах, як правило, неможливо. Виникає потреба використовувати рангову шкалу чи шкалу найменувань. Залежно від того в якій шкалі вимірюються характеристики системи застосовуються різні методи аналізу. Серед цих методів основними є такі:

- регресійного аналізу;
- дисперсійного аналізу;
- коваріаційного аналізу;
- кореляційного аналізу.

Якщо вхідні величини системи вимірюють у сильних шкалах, то для статистичних досліджень використовують методи <u>регресійного аналізу</u>.

Коли чинники, які впливають на систему, вимірюють в шкалі найменувань – використовують методи <u>дисперсійного аналізу.</u>

Якщо є одночасно кількісні та якісні чинники, тобто чинники виражені в шкалі відношень і шкали найменувань, то застосовують методи <u>коваріаційного аналізу</u>.

Для визначення існування взаємозв'язку між випадковими величинами використовують методи <u>кореляційного аналізу</u>.

Залежно від того в якій шкалі вимірюється вихідна величина застосовують параметричні чи непараметричні критерії перевірки статистичних гіпотез. В подальшому буде розглянуто використання вказаних методів статистичних досліджень.

2. Регресійний аналіз. Лінійна регресія

Електромеханічні системи можуть характеризуватись цілим рядом величин. Якщо є, наприклад, дві випадкові величини, то вони можуть бути незалежними, або значення кожної з них може залежати певним чином від значення іншої. Ці випадкові величини називають залежними. При цьому залежність однієї величини від іншої може бути не тільки функціональною, а носити випадковий характер. Для вивчення таких залежностей використовують методи теорії ймовірностей. Досить часто в теорії ймовірностей вважають, що мають справу з двох мірною випадковою величині, а у більш загальному випадку – багатомірною (векторною). Встановлюють залежність чи незалежність випадкових величин методами кореляційного аналізу. Для встановлення кількісної залежності однієї випадкової величини від іншої величини використовують методи регресійного аналізу.

Регресійним аналізом називають розділ математичної статистики, який об'єднує практичні методи дослідження та встановлення кількісної залежності між величинами за статистичними даними.

Регресією називають залежність середнього значення випадкової величини від деякої іншої випадкової величини чи декількох випадкових величин [3].

Регресія – це будь-яка функція, яка наближено описує статистичну залежність однієї випадкової величини y від інших випадкової величини x_1, x_2,… Цю залежність величини y від величин x_1, x_2,… подають як суму двох складових

$$y = f(x_1, x_2, \ldots) + \varepsilon(x_1, x_2, \ldots). \quad (63)$$

Тут $\varepsilon(x_1 x_2 \ldots)$ розглядають, як поправочний член (залишок).

Отже регресія, або рівняння регресії, визначає залежність однієї випадкової величини від іншої величини (випадкової чи невипадкової).

Проблеми регресійного аналізу характеризуються тим, що інформація про розподіл випадкових величин недостатня.

Якщо під час вимірювань ми одержуємо дві або декілька випадкових величин і між ними існує певна залежність, то цю залежність можна подати у вигляді рівняння (чи лінії) регресії. Обробка результатів вимірювань у випадку випадкових величин може виконуватись графічними або аналітичними методами. На перших етапах аналізу, як правило, використовують графічні методи.

Послідовність обробки результатів вимірювань така.

- Результати вимірювань заносять в таблицю, яку називають кореляційною таблицею.
- Дані кореляційної таблиці зображають у вигляді точок на координатній площині. Таке зображення називають кореляційним полем або еліпсом розсіювання. Вигляд його показано на рис. 28.

- Проводять лінію регресії, яка відповідає залежності однієї величини від іншої.
- Розраховують коефіцієнт кореляції за величиною якого визначають тісноту зв'язку між величинами.
- Знаходять рівняння регресії.

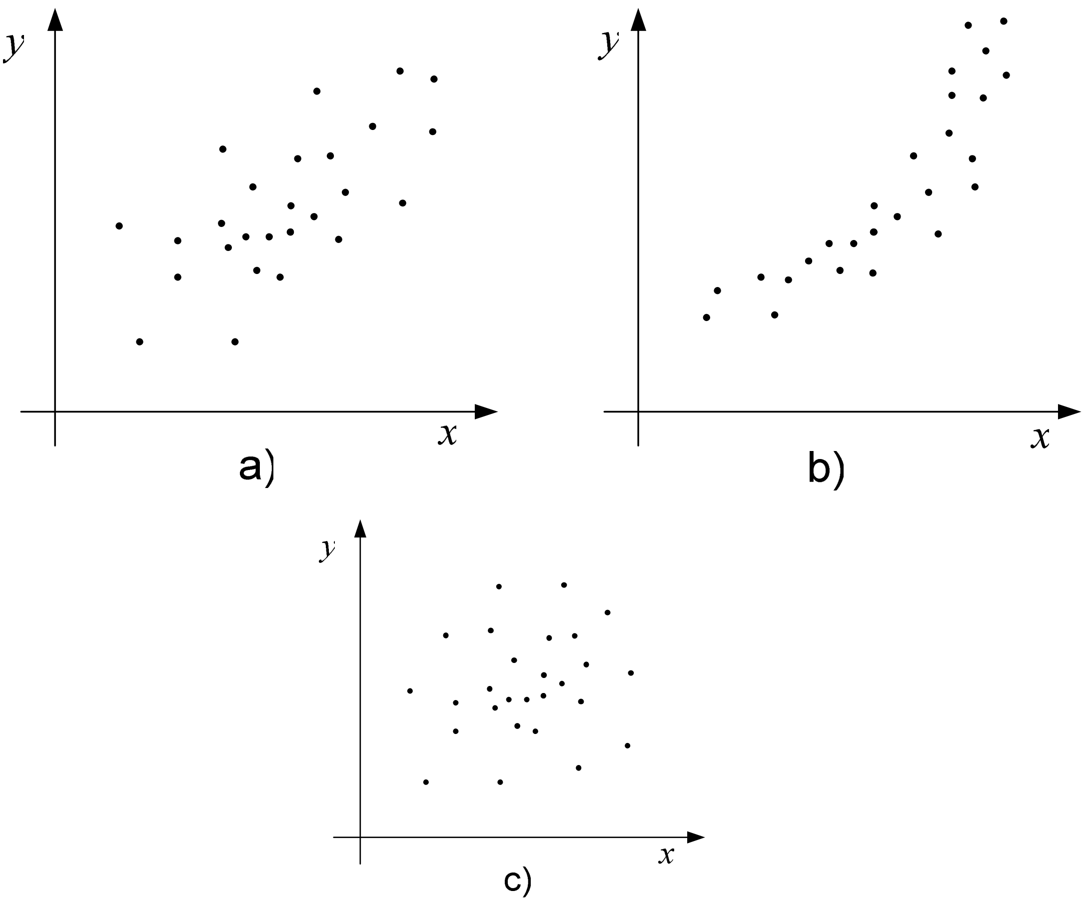


Рис. 28 – *Кореляційне поле результатів вимірювань двох величин* (еліпс розсіювання)
а) випадок лінійної залежності; б) нелінійної залежності

Як видно з рис. 28 кореляційне поле може мати різний вигляд залежно від характеру залежності величин. У багатьох випадках область точок результатів вимірювання має форму еліпса. Тому кореляційне поле називають еліпсом розсіювання. Еліпс розсіювання дає певну інформацію про характер залежності між величинами. Витягнутий еліпс розсіяння, якщо вісь еліпса направлена під кутом до координатних осей, свідчить про лінійну залежність між величинами. Трактувати це можна таким чином, що ймовірність розподілу величини y залежить від значення величини x. Якщо поле розсіювання має вигляд кола або витягнуте паралельно до однієї з координатних осей (x чи y), то це свідчить про відсутність статистичної залежності між величинами y та x. Витягнутий паралельно осі x чи y еліпс розсіювання при належному виборі масштабу завжди може бути представлений у вигляді кола. Кореляційне поле у вигляді кола свідчить про статистичну незалежність величин.

Інша, відмінна від еліпса чи кола, форма поля розсіювання свідчить про наявність нелінійної залежності. Аналізуючи поле розсіювання можна підібрати вигляд формули, яка найбільш повно описує статистичну залежність між величинами.

Більш строго про наявність чи відсутність статистичної залежності між випадковими величинами судять за результатами кореляційного аналізу. Методи кореляційного аналізу розглянуто нижче. У випадку існування статистичної залежності між величинами характер залежності встановлюють методами регресійного аналізу, а саму залежність називають регресійною моделлю.

Регресійну модель – це модель яку можна описати таким чином. Вважається, що одержані дослідні результати вимірювань величини *y* можна уявно розділити на дві частини: одна – закономірно залежить від величини *x*, а інша – випадкова величина по відношенню до *x* з певним розподілом ймовірностей. Першу величину позначають як $f(x)$ другу як ε. Отже математично регресійну модель записують у вигляді

$$y = f(x) + \varepsilon. \qquad (64)$$

Таку модель називають регресією *x* на *y*.

У класичній моделі регресії вважають, що:

- всі досліди виконані незалежно один від одного;
- статистична природа випадкових складових при всіх вимірюваннях незмінна.

Залежно від вигляду функції $f(x)$ розглядають лінійну чи нелінійну регресійні моделі.

Величина ε у формулі (2) визначає випадкове відхилення виміряного значення *y* від значення розрахованого за формулою $y = f(x)$. Прийнято вважати, що величина ε - це випадкова величина, яка має нормальний розподіл ймовірностей з математичним очікуванням рівним нулю ($M_\varepsilon = 0$), причому величина дисперсії D_ε не залежить від значення *x*.

Якщо вигляд функції $f(x)$ можна подпати у вигляді лінійної залежності

$$f(x) = a + b_{xy} x\,, \qquad (65)$$

то таку модель називають лінійною регресією. У випадку лінійної регресії результати вимірювань визначаються залежністю

$$y_i = a + b_{xy} x_i + \varepsilon_i\,. \qquad (66)$$

Коефіцієнти регресії a і b_{xy} визначають, як правило, методом найменших квадратів. У цьому випадку регресію називають лінійною середнє квадратичною регресією.

На основі теоретичних досліджень [29] встановлено, що коли ε_i задовольняє наведеним умовам, а саме:

- має нормальний закон розподілу ймовірностей;
- математичне очікування дорівнює 0;

– дисперсія не залежить від значення *x*;

– величини ε_i взаємно незалежні, то коефіцієнти регресії, знайдені за методом найменших квадратів, задовольняють умовам

– вони сходяться до математичного очікування кожного з коефіцієнтів регресії;

– вони є незміщеними, тобто при зростанні кількості даних депресія одержаних значень коефіцієнтів їх прямує до нуля;

– вони є ефективними, тобто мають найменшу дисперсію порівняно з будь-якими іншими оцінками.

Значення *y*, обраховані згідно формули (66) називають регресію *y* на *x*.

Розглянемо порядок розрахунку коефіцієнтів регресії згідно методу найменших квадратів. На попередніх лекціях розглядали сутність методу найменших квадратів. Тут ми використаємо його для вирішення конкретного завдання. Запишемо функціонал S, який являє собою суму квадратів віддалей від лінії регресії до експериментальних точок. Функціонал S, рівний:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_y + b_{xy} x_i))^2 \qquad (67)$$

Коефіцієнти a та b повинні забезпечувати мінімальне значення суми квадратів відстаней від лінії регресії до експериментальних точок, тобто вони повинні забезпечували мінімум функціоналу (67). Умова мінімуму – це рівність нулю похідних. У нашому випадку матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_y - b_{xy} x_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_y - b_{xy} x_i) x_i = 0 \end{aligned} \qquad (68)$$

Таким чином ми одержуємо два рівняння для визначення коефіцієнтів регресії a та b_{xy}. Ввівши позначення

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}, \qquad (69)$$

після простих математичних перетворень знаходимо:

$$a_y = \bar{y} - b_{xy}\bar{x}, \qquad (70)$$

$$b_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{y} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad (71)$$

<u>Завдання додому:</u> виконайте самостійно математичні викладки та одержіть рівняння (71).

Графік одержаної лінійної регресії на кореляційному полі показано на рис. 29.

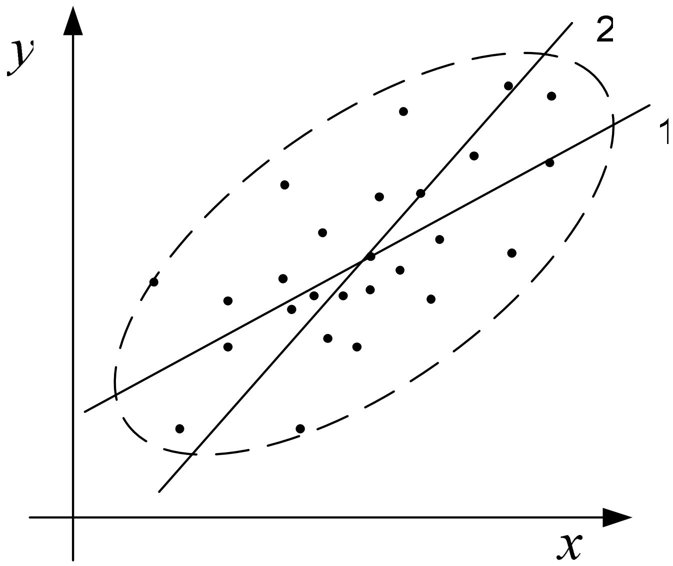


Рис. 29 – *Кореляційне поле (еліпс розсіяння) діох випадкових величин.*
1 – лінійна регресія y на x; 2 – регресія x на y.

Як видно з рис. 29, графік проходить через центр еліпсу розсіяння під певним кутом, але він не співпадає з віссю еліпсу.

Якщо виконати розрахунок рівняння лінійної регресії вважаючи незалежною змінною y, а залежною x, то одержимо інше значення коефіцієнтів, а саме:

$$a' = \bar{x} - b'_{yx}\,\bar{y}$$

$$b'_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}. \qquad (72)$$

Відповідне рівняння називають рівнянням регресії x на y. На кореляційному полі графіки обох ліній регресії матимуть вигляд показаний на рис. 29.

Коефіцієнт регресії x на y (b_{xy}) та y на x (b'_{yx}) зв'язані між собою співвідношенням

$$b'_{yx} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} b_{xy}. \qquad (73)$$

3. Коефіцієнт кореляції. Кореляційний аналіз

Ковариацію cov(x,y) двох величин *x* та *y* визначають, як математичне очікування добутку відхилення двох випадкових величин від їх математичних очікувань.

$$\operatorname{cov}(x, y) = \overline{M}_x((x - \overline{M}_x)(y - M_y)) \qquad (74)$$

Коефіцієнтом кореляції називають відношення ковариації величин до добутку стандартних відхилень.

$$\rho_{xy} = M\left(\frac{(x - \overline{\mu}_x)}{\sigma_x} \cdot \frac{(y - \mu_y)}{\sigma_y}\right). \qquad (75)$$

Тут *M* – умовне позначення операції обчислення математичного очікування, σ_x σ_y – середні квадратичні відхилення величин *x* та *y*.

У випадку дискретної випадкової величини вибіркове значення коефіцієнта кореляції може бути розраховане згідно р формулј.:

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y - \bar{y})^2}} / \qquad (76)$$

Коефіцієнт кореляції зв’язаний з коефіцієнтом регресії? а саме:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} b_{xy}, \qquad (77)$$

$$\rho_{xy}^2 = b_{xy} b'_{yx}. \qquad (78)$$

Коефіцієнт кореляції є однією з важливих характеристик, яка дозволяє визначити степінь залежності двох випадкових величин. Це зумовлено властивостями коефіцієнту кореляції.

Щоб підкреслити важливість коефіцієнта кореляції в статистичних методах аналізу властивості його деколи визначають як теореми. А саме:

Теорема 1. Якщо величини *x* та *y* є незалежними, то коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.

Ця теорема доводиться виходячи з того, що коефіцієнт кореляції розраховують як математичне очікування добутку двох величин. З теорії відносності [18] відомо, що математичне очікування добутку незалежних величин рівне нулю.

Теорема 2. Коефіцієнт кореляції для двох величин знаходиться в діапазоні значень (-1, 1).

Теорема 3. Коефіцієнт кореляції двох величин *x* та *y* дорівнює +1 чи -1 (ρ=±1) тоді і тільки тоді, коли між величинами *x* та *y* існує точна лінійна функціональна залежність.

Розглянуті властивості коефіцієнта кореляції дозволяють використовувати його для встановлення ступеня взаємної залежності випадкових величин. Метод дослідження такої залежності носить назву кореляційний аналіз.

Кореляційний аналіз – це розділ математичної статистики який об'єднує методи встановлення залежності між випадковими величинами. Він включає такі практичні прийоми:

- побудова поля кореляцій і складання кореляційних таблиць;
- обчислення вибіркових коефіцієнтів кореляції чи кореляційних відношень;
- перевірки статистичних гіпотез про значимість коефіцієнта кореляції (значимість взаємозв'язку між випадковими величинами).

Значимість взаємозв'язку між випадковими величинами встановлюється на основі перевірки статистичної гіпотези відмінності коефіцієнту кореляції від 0 див. табл.6). Якщо виконується умова

$$\rho_{xy} > \left[1+\frac{n-2}{t_\alpha^2}\right]^{-1/2}, \qquad (79)$$

де t_α - критерій Стьюдента з $df = n-2$ степенями свободи?

α – рівень значимості.

То взаємозв'язок між випадковими величинами вважають значущим, тобто величина y залежить від випадкової величини x. Більш детально питання перевірки статистичних гіпотез розглянуто далі.

Оцінкою ступеня близькості точок вимірювання до лінії регресії є величина залишкової дисперсії, тобто дисперсія відстаней точок від лінії регресії. Згідно наведених формул середній квадрат відхилення дорівнює:

$$S^2 = \sigma_y^2(1-\rho_{xy}^2) \qquad (80)$$

У формулу входить дисперсія дослідних значень дисперсії y і коефіцієнт кореляції ρ_{xy}. Якщо коефіцієнт кореляції дорівнює 1, то середній квадрат віддалі буде рівним 0. Чим меншим буде значення коефіцієнта кореляції тим більш віддаленими є точки вимірювань від лінії регресії. Отже коефіцієнт кореляції дозволяє оцінювати якість опису даних рівнянням лінійної регресії.

Оцінкою степеня впливу однієї випадкової величини на значення іншої величина є величина ρ^2, яку часто називають R-квадрат. Нормована величина R-квадрат є оцінкою у процентах степеня залежності однієї випадкової величини від іншої.

Після виконання кореляційного аналізу і встановлення значимості взаємозв'язку між випадковими величинами проводяться дослідження по встановленні вигляду цього зв'язку методами регресійного аналізу.

4. Приклад виконання кореляційного і регресійного аналізу

Для демонстрації методів кореляційного аналізу розглянемо приклад.

Серед характеристик трансформатору виділяють такі характеристики як струм холостого ходу I_{xx} та перегрів обмотки в робочому режимі Δt. Встановити функціональний зв'язок між цими характеристиками неможливо тому, що вони викликані впливом різних чинників. Проте між ними може бути певний взаємозв’язок, оскільки є ряд причин які зумовлюють одночасну зміну струму холостого ходу та температури нагріву. Це наприклад, недостатня ізоляція пластин магніто проводу та поява вихрових струмів в магнітопроводі, наявність пошкоджень ізоляції обмоток. Якщо взаємозв’язок між названими характеристиками існує, то це може мати практичне значення. Вимірювання температури перегріву є досить тривалою операцією, здійснюється на спеціальному обладнанні і потребує не менше 2 – 4 -х годин для встановлення теплового балансу. Вимірювання струму холостого ходу можна виконати менше ніж за 1 хв. Взаємозв’язок між вказаними величинами дозволив, наприклад, зробити опосередненну оцінку температури перегріву за струмом холостого ходу.

Результати вимірювань струму холостого ходу I_{xx} та перегріву обмотки Δt заносять в кореляційну табл.7 , а саме:

Таблиця 7 – Кореляційна таблиця вимірювань струму холостого ходу та температури перегріву обмотки трансформатора.

№	I_{xx}	Δt	№	I_{xx}	Δt
1	44,2	87,6	26	53,5	99,8
2	49,6	99,5	27	51,4	89,8
3	50,6	101,3	28	50,5	91,3
4	54,6	95,8	29	54,1	99,2
5	48,3	95,0	30	52,0	99,6
6	47,7	99,9	31	50,6	128,5
7	46,8	95,3	32	52,2	83,7
8	51,7	102,5	33	50,7	104,8
9	45,5	89,5	34	45,7	96,6
10	45,3	97,5	35	57,1	99,2
11	51,1	110,2	36	56,3	129,9
12	51,0	109,7	37	51,6	104,3
13	51,9	106,3	38	46,9	93,1
14	52,3	99,6	39	48,6	100,3
15	47,4	95,3	40	51,7	99,8
16	44,9	105,0	41	46,8	89,2
17	50,7	95,0	42	51,6	100,9
18	43,9	98,2	43	52,5	83,8
19	53,4	98,0	44	50,5	95,8
20	48,7	114,2	45	51,0	98,3
21	47,8	93,2	46	48,9	94,6
22	47,3	82,1	47	51,7	104,1
23	49,5	89,2	48	51,5	97,8
24	52,1	101,7	49	46,7	98,6
25	52,0	105,8	50	50,0	98,8

Побудоване за даними вимірювань кореляційне поле показано на рис. 30.

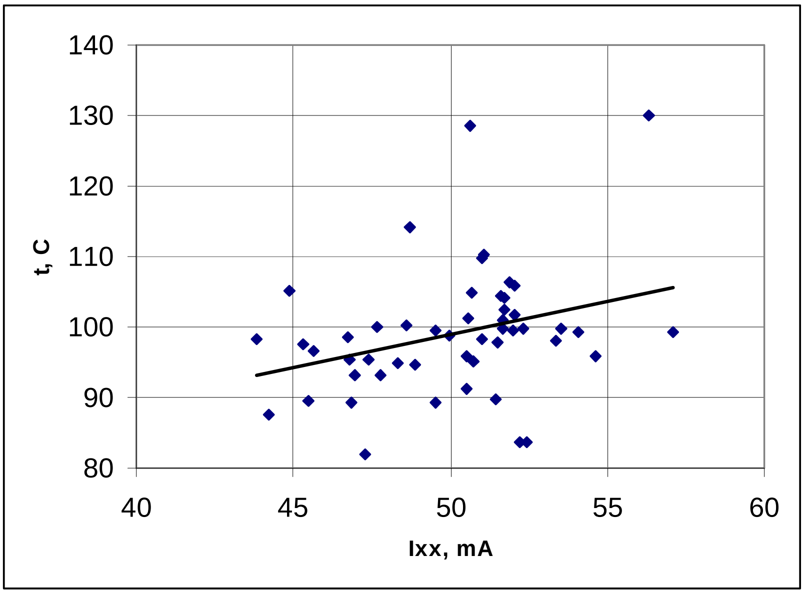


Рис. 30 – *Кореляційне поле залежності температури перегріву обмотки трансформатору від струму холостого ходу*

Результати регресійного аналізу даних, який входить в електрону таблицю виконаного засобами пакету аналізу Excel наведено в табл.8.

Таблиця 8 – Результати регресійного аналізу залежності температури перегріву обмотки трансформатору від струму холостого ходу.

Регресійна статистика	
Множинний R	0,31581
R-квадрат	0,099736
Нормований R-квадрат	0,08098
Стандартна помилка	8,703472
Кількість спостережень	50

Дані таблиці показують, що між температурою перегріву обмотки та струмом холостого ходу існує статистична залежність, яка описується рівнянням регресії.

Тіснота зв'язку між величинами визначається величиною коефіцієнта кореляції R = 0,31581. Для перевірки суттєвості взаємозв'язку перевіримо статистичну гіпотезу відмінності від нуля коефіцієнта кореляції (79). Кількість дослідів $n = 50$. Величину t_α для 48 степенів свободи, на рівні значимості 0,05 знаходимо з таблиць математичної статистики [23]. Вона дорівнює $t_\alpha = 2{,}012$.

Отже маємо

$$(1+\frac{48}{2{,}012})^{-1/2} = 0{,}201,$$

$$0{,}3158 > 0{,}201.$$

Тобто умова відмінності коефіцієнта кореляції від нуля виконується. Правомочним, з достовірністю більше 95%, є висновок, що величина температури перегріву обмотки суттєво залежить від струму холостого ходу.

Ступінь залежності можна визначити за величиною R-квадрат. Значення нормованої величини R-квадрат рівне

$$\text{Нормований R-квадрат} = 0{,}08098 = 8{,}1\%$$

Це означає, що тільки 8,1% зміни величини температури нагріву пояснюється впливом струму холостого ходу.

Температура перегріву обмотки трансформатора статистично залежить від величини струму холостого ходу. Для отримання математичного виразу залежності (рівняння регресії) розглянемо результати подальшого аналізу (див. табл.9).

Таблиця 9 – Результати розрахунків параметрів лінії регресії.

Змінна	*Коефіцієнти*	*Стандартна помилка*	*t-статистика*	*P-Значення*
	51,11463	20,79351	2,458201	0,017624
I_{XX}	0,956335	0,414714	2,306012	0,025473

Залежність температури перегрів віл струму холостого ходу виражається рівнянням регресії

$$\Delta t = 51{,}115 + 0{,}9563\, I_{XX} \tag{81}$$

У результаті ми отримали рівняння регресії. Згідно нього можна розраховувати середня значення величини перегріву, залежно від струму холостого ходу. Проте використати його для визначення температури перегріву обмотки не можна, оскільки тіснота зв'язку досить низька і формула (81) пояснює тільки 8,1% зміни значення температури перегріву. Про це свідчить значення коефіцієнту кореляцій $\rho = 0{,}3158$ та розраховане на основі коефіцієнта кореляції значення нормованого R-квадрат. Це значення дає оцінку степеня впливу I_{XX} на величину температури перегріву рівну 8,1%.

У разі потреби розробки опосередненого способу визначення температури перегріву Δt необхідно провести додаткові дослідження і визначити інші чинники, які більш суттєво впливають на неї.

Контрольні запитання.

1. Які типи залежностей між величинами, що характеризують систему ви знаєте?
2. Яка залежність між величинами називається стохастичною?
3. У яких кваліметричних шкалах можуть визначають чинники від яких залежать певна характеристика електромеханічної системи?
4. Які методи дослідження взаємозалежності величин ви знаєте?
5. У чому суть регресійного аналізу?
6. Запишіть рівняння лінійної регресії.
7. Яка послідовність обробки результатів експериментів для встановлення взаємної залежності між випадковими величинами?
8. Як побудувати еліпс розсіяння?
9. В якому випадку вісь еліпсу розсіяння розміщується паралельно одній з координатних осей?
10. Який вигляд має еліпс розсіяння у випадку квадратичної нелінійної залежності між величинами?
11. Для чого використовують графічні методи під час виконання регресійного аналізу?
12. Як встановити наявність статистичної залежності чи незалежності двох випадкових величин?
13. Сформулюйте три теореми, яким підлягає коефіцієнт кореляції.
14. Наскільки сильним є зв'язок між двома випадковими величинами, якщо коефіцієнт кореляції дорівнює 0,3?, 05? 0,7?
15. Які розрахунки можна виконати за допомогою розділу «аналіз даних» електронної таблиці EXCEL?
16. Як провірити значимість коефіцієнту кореляції і відмінність його від нуля?
17. Запишіть рівняння нелінійної регресії.
18. Як використано метод найменших квадратів для отримання рівняння регресії?
19. Нарисуйте схематично розміщення двох рівнянь регресії на еліпсі розсіяння? Які це рівняння?
20. Наведіть приклади завдань де доцільно використовувати методи кореляційного аналізу.
21. Які статистичні методи аналізу використовуються при вимірюваннях в сильних і слабких шкалах?
22. Яким вимогам повинен задовольняти вільний член у рівнянні регресії.
23. Запишіть рівняння лінійної регресії.
24. Зобразіть на кореляційному полі лінії регресії.
25. Як розрахувати коефіцієнт кореляції?
26. Яку роль у математичній статистиці відіграє коефіцієнт кореляції?
27. Запишіть рівняння квадратичної регресії.
28. Про що свідчить нульове значення коефіцієнта кореляції?
29. Як оцінити ступінь взаємозалежності між двома випадковими величинами?
30. За яким критерієм визначається відмінність коефіцієнта кореляції від нуля?
31. Наведіть приклади використання методів кореляційного аналізу.
32. Наведіть приклади використання регресійного аналізу.

Лекція 10. **Узагальнення методів регресійного аналізу**

1. Проблеми, що виникають під час регресійного аналізу.
2. Зважений метод найменших квадратів.
3. Множинна лінійна регресія.
4. Нелінійна (криволінійна) регресія.
5. Множинна криволінійна регресія.
6. Часткова криволінійна регресія на основі множинної регресії.

1. Проблеми, що виникають під час регресійного аналізу

У попередній лекції розглянуто метод регресійного аналізу в найбільш простому вигляді лінійної регресії двох величин, коли виконується ряд вимог відносно залишку ε. Але далеко не всі завдання досліджень систем можуть бути вирішені за допомогою такої лінійної моделі. Для вирішення цілого ряду завдань лінійна модель може бути незадовільною. Як приклади більш складних завдань побудови регресійної моделі є такі:

Перше – вхідні дані не задовольняють вказаним вище вимогам побудови лінійної моделі.

Друге – реальні процеси описуватись не лінійним, а більш складним залежностями.

Третє – вихідні величини залежать не від однієї а від цілого ряду випадкових величин.

Четверте – у системі, яка досліджується, можуть бути складні взаємозв'язки між досліджуваними чинниками і коефіцієнти регресійної моделі змінюються під впливом різних чинників.

Тут завдання побудови регресійної моделі розглянуто в порядку їх ускладнення. Останнє з чотирьох завдань побудови регресійної моделі найбільш складне, вирішення його потребує спеціальних досліджень. Для виконання таких досліджень розроблена значна кількість спеціальних методів. Розглянемо найбільш типові випадки та методи побудови регресійної моделі.

2. Зважений метод найменших квадратів

Потрібно побудувати регресійну модель коли вхідні дані не задовольняють розглянутим вимогам. Однією з вимог є відсутність залежності дисперсії ε_i від значення змінної *x*. На практиці часто зустрічаються випадки, коли дисперсія ε_i є неоднаковою при різних значеннях вхідної величини *x*. Часто зростанню величини *x* відповідає збільшення дисперсії ε_i Тобто більшим значення незалежної змінної відповідає більший розмах значень залежної величини.

Використання методу найменших квадратів у цьому випадку може призвести до зміщення значення оцінюваних параметрів регресії, зменшення їх стійкості та надійності. Для пом'якшення небажаних результатів, збільшення адекватності моделі використовують ряд методів удосконалення моделі. Один з них реалізований у зваженому методі найменших квадратів.

На першому етапі дослідження будують лінійну регресійну модель за допомогою звичайного методу найменших квадратів. Розраховують величину залишкової дисперсії S_i^2 для декількох діапазонів величини x. Якщо S_i^2 відрізняється між собою то використовую зважений метод найменших квадратів, у якому функціонал (67) розраховують згідно з формулою

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S_i^2} (y_i - a * x_i)^2 . \tag{82}$$

Величина S_i^2 у формулі відповідає конкретним значенням X розрахованими для окремих діапазонів. Використання такого зваженого методу приводить до того, що коефіцієнти регресії визначаються більш точно, а їх вибіркові значення мають меншу дисперсію.

Варіанти використання зваженого методу найменших квадратів є різними. Наприклад, коли з вихідних даних видно, що розмах їх значень збільшується із збільшенням незалежної змінної x, що можна перевірити виконавши попередній аналіз даних чи графік кореляційного поля, то в розрахунок включають ваговий коефіцієнт рівний $\frac{1}{x_i^2}$.

Використання зваженого методу найменших квадратів дозволяє регулювати вклад тих чи інших даних у результаті побудови моделі. У цьому виникає необхідність, коли попередній аналіз показує не типовість якоїсь частини інформації. Це можуть бути дані які викликають сумнів щодо похибки вимірювань (мають відхилення набагато більші від середніх) або дані, одержані при деяких нетипових умовах, наприклад, при роботі системи в аварійному або близькому до нього режимі. Ряд математичних пакетів аналізу даних таких як наприклад „Statistica" чи „Statgraf" [31] дозволяє не тільки розрахувати коефіцієнти регресії за тією чи іншою моделлю але вводити вручну ваги даних у різних діапазонах, і покращувати точність одержаних результатів.

3. Множина лінійна регресія

Переважно вихідна величина системи залежить не від однієї а від декількох вхідних випадкових величин. У таких випадках говорять про наявність множинної регресії. Якщо, наприклад, вихідна величина $\boldsymbol{y}$ залежить від двох вхідних величин $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$, то ми маємо множинну регресію з двома незалежними величинами. Залежність змінної $\boldsymbol{y}$ від значень змінних $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$ можна зобразити у вигляді кореляційного 3-х вимірного простору. Завдання встановлення взаємозв'язку між $\boldsymbol{y}$ та змінними $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ полягає у виборі поверхні, яка б найкращим чином описувала залежність $\boldsymbol{y}$ від $\boldsymbol{x_1}$ та $\boldsymbol{x_2}$. Лінійна модель передбачає що такою поверхнею буде площина. Рівняння її визначається за формулою

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 . \tag{83}$$

У загальному випадку при наявності *m* незалежних змінних рівняння множинної регресії має вигляд

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b x_m + \varepsilon . \tag{84}$$

З цього рівняння можуть бути одержані рівняння часткової регресії, а саме:

$$\begin{aligned} y &= a_1' + b_1 x_1 \\ y &= a_2' + b_1 x_2 \end{aligned} . \tag{85}$$

Причому тут b_1 і b_2 ці ж коефіцієнти що в рівнянні множинної регресії. Коефіцієнт a в рівнянні (84) це значення *y* при $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Тобто це координата перетину площини з віссю ***y*** коефіцієнти a_1' та a_2' в рівнянні (85) можна розрахувати згідно з формулами

$$\begin{aligned} a_1' &= a + b_1 \bar{x}_1 \\ a_2' &= a + b_2 \bar{x}_2 \end{aligned} . \tag{86}$$

Коефіцієнти множинної регресії розраховують за методом найменших квадратів, аналогічно як і у випадку однієї змінної. Додатковою умовою використання цього методу є взаємна незалежність чинників $x_1, x_2, ... x_n$. Кожен з чинників повинен приймати значення незалежно від значень інших чинників.

Для оцінки тісноти зв’язку при множинній лінійній регресії використовують коефіцієнт множинної кореляції R, який визначають згідно з формулою

$$R^2 = (b_1 \frac{\sigma_{x1}}{\sigma y} r_{yx_1} + b_2 \frac{\sigma_{x2}}{\sigma y} r_{yx_2} + ... + b_m \frac{\sigma_{xm}}{\sigma y} r_{yx_m}) . \tag{87}$$

Тут $b_1\ b_2\ ...\ b_m$ - відповідні коефіцієнти регресії;

$\sigma_y^2, \sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2 ... \sigma_{x_m}^2$ - дисперсії значень змінних y, $x_1, x_2, ... x_m$;

$r_{yx_1}, r_{yx_2} ... r_{yx_m}$ - коефіцієнти парної кореляції між величиною y та відповідною величиною $x_1, x_2, ... x_m$.

Під час побудови моделі множинної регресії може виникнути бажання включити максимальне число незалежних змінних. Проте цього робити не слід і число змінних потрібно обмежувати вибираючи їх не більш 3-5 залежно від конкретного завдання s апріорних даних про вплив чинників. Це зумовлене такими міркуваннями.

Включення додаткових чинників у модель множинної регресії може тільки збільшити коефіцієнт множинної кореляції і ніколи його не зменшує. Це відбувається тому, що до загальної регресії додаються всі сприятливі моменти впливу доданої змінної, хоча сама змінна мало впливає на вихідну величину. Таким чином оцінка коефіцієнтів регресії за дослідними даними буде ненадійною, а самі дослідні дані будуть мало відтворюватися при проведенні повторних дослідів. Тому кількість змінних у моделі слід обмежувати.

Слід також мати на увазі, що ступінь впливу кожної змінної треба визначити не за парною регресією (парним коефіцієнтом кореляції) а за частковою регресією. Часткову регресі одержують якщо в множинній регресії виключають вплив усіх змінних крім однієї. Метод отримання рівняння часткової регресії описано в наступному параграфі для нелінійної регресії але він такий самий і для лінійної регресії. Часткова регресія і частковий коефіцієнт кореляції більш повно характеризують фактичну залежність ніж коефіцієнти парної регресії. Причину цього можна продемонструвати на прикладі.

Допустимо, що для дослідження вибрана певна популяція людей і встановлюється взаємозв'язок між ростом та довжиною волосся. Одержали, що існує взаємна кореляція між цими величинами. Чим більший зріст тим менша довжина волосся. Результат дивний. Але якщо в аналізі додатково включити вплив такої змінної як «стать», то виявляється, що вказана залежність відсутня. Тобто кореляція між величинами «ріст» і «довжина волосся» проявилась через вплив третьої змінної, а саме «статі». Жінки мають менший зріст, але вони носять довге волосся, тоді як чоловіки, при більшому зрості, довгого волосся, як правило, не носять.

Для оцінки тісноти зв'язку функції у кожної незалежної змінної служить коефіцієнт часткової кореляції R_{yx_i}:

$$R_{yx_i} = \sqrt{\left(1 - \frac{1 - R_n^2}{1 - R_{n-1}^2}\right)}. \tag{88}$$

Тут R_n - коефіцієнт множинної кореляції для n аргументів;

R_{n-1} - коефіцієнт множинної кореляції без і-го аргументу.

Коефіцієнт часткової кореляції приймає значення від 0 до 1. Він характеризує тісноту взаємозв'язку функції і одного з аргументів при умові, що інші аргументи закріплені на рівні своїх середніх значень. Коефіцієнт часткової кореляції для певного аргументу може відрізнятись від коефіцієнту парної кореляції для цього аргументу. Причому він є більш об'єктивною характеристикою дійсного взаємозв'язку ніж коефіцієнт парної кореляції.

4. Нелінійна (криволінійна) регресія

Мале значення коефіцієнту кореляції вказує тільки на відсутність лінійного зв'язку між величинами. Але при цьому може існувати інший нелінійний зв'язок і бути досить тісним.

Аналізуючи конфігурацію кореляційного поля можна виявити, що дане поле в достатній мірі точності описує деяка крива лінія. У такому випадку говорять про нелінійну або параболічну регресію. Таку регресію описують рівнянням апроксимації в якості якого вибирають параболу m-го порядку. Найчастіше використовується парабола другого порядку, яка описується формулою

$$f(x) = a + bx + cx^2. \tag{89}$$

У більшості випадків, як правило, використовують параболу 2-го порядку і тільки в деяких виникає потреба використання параболи 3-го порядку.

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3. \tag{90}$$

Якщо результати вимірювань задовольняють приведеним раніше умовам, то для знаходження коефіцієнтів нелінійної регресії використовують метод найменших квадратів. Коефіцієнти регресійної моделі відшукують з умови мінімуму функціоналу. Для параболи 2-го порядку функціонал має вигляд

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i + cx_i^2))^2. \tag{91}$$

З умови мінімуму одержують систему трьох рівнянь для знаходження коефіцієнтів рівняння регресії:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i &= na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
\sum_{i=1}^{n} y_i &= a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\
\sum_{i=1}^{n} y_i &= a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4
\end{aligned} \tag{92}$$

Знайдені коефіцієнти підставляють в рівняння регресії (90).

5. Множинна криволінійна регресія

У разі наявності декількох випадкових величин залежність вихідної величини від однієї чи всіх вхідних може мати нелінійний характер. У такому випадку статистичну залежність описують рівнянням множинної криволінійної регресії. Формально завдання відшукання коефіцієнтів такої залежності мало чим відрізняться від розглянутих вище випадків парної криволінійної регресії та множинної лінійної регресії. Проте треба особливу увагу звернути на характер залежності між величинами та вибір типу рівняння регресії. Потрібно враховувати, що складний вигляд рівняння регресії, наявність великої кількості коефіцієнтів не завжди оправдане. Деякі коефіцієнти можуть бути нестійкими чи статистично малозначущим. Наявність великої кількості коефіцієнтів ускладнює аналіз одержаних результатів та їх практичне використання. Тому під час отримання рівняння регресії а також під час аналізу його використовують ряд прийомів спрощення залежностей. Серед них виділяють відшукання часткової криволінійної регресії на основі множинної лінійної або криволінійної регресії.

Часткова криволінійна регресія на основі множинної лінійної регресії

Якщо згідно дослідним даним більшість вхідних величин лінійно впливає на вихідну, а тільки одна з них, чи декілька, зумовлюють нелінійний характер залежності, то знаходять рівняння часткової криволінійної регресії на основі лінійної множинної регресії. Розглянемо це на прикладі з двома вхідними величинами x_1, x_2. Вважаємо що величина x_1 лінійно впливає на *у*, а x_2 нелінійна. За результатами вимірювання будується лінійна регресійна модель і визначають числові значення коефіцієнтів $a\, b_1\, b_2$. Щоб одержати рівняння часткової криволінійної регресії x_2 на *у* потрібно виключити вплив величини x_1. Це можна зробити, якщо результати вимірювань скорегувати. Скореговані на вплив x_1 результати вимірювань будуть такі:

$$y'_i = y_i - (x_{1i} - \overline{x}_1)b_1/ \quad (93)$$

Таким чином одержуємо значення випадкової величини *у*, в яких відсутній вплив випадкової величини x_1. Коефіцієнт кореляції між величинами y' та x_1 рівний нулю.

Якщо ми маємо декілька змінних $x_1 \dots x_m$, то корегування даних вимірювань слід виконати для всіх змінних крім однієї, з якою потрібно визначити частковий нелінійний зв'язок.

Після коригування даних вимірювань коефіцієнти нелінійної залежності y' від x_2 знаходять з використанням методу найменших квадратів аналогічно як і для випадку парної нелінійної регресії. При цьому знаходять числові значення коефіцієнтів криволінійної регресії x_2 на y', а саме a*, b*, c*.

Одержане рівняння регресії між x_2 і y' є частковим рівнянням регресії між величинами x_2 та y. Воно відповідає нелінійному впливу величини x_2 на у без врахування впливу всіх інших змінних.

Ступінь тісноти зв'язку між змінною x_2 і y, за одержаним рівнянням регресії, визначають розрахувавши кореляційне відношення η^*_{yxi}:

$$\eta^2_{yxi} = 1 - \frac{\sum (y^*_i - \overline{y})^2}{\sum (y^/_i - \overline{y})^2}. \quad (94)$$

Тут $y^/_i$ - скориговані значення у;

y^*_i - розраховане за формулою часткової нелінійної регресії значення у, а саме:

$$y^*_i = a * + b * x'_2 + c * x^2_2 \quad (95)$$

Часткова криволінійна регресія на основі множинної нелінійної регресії

Завдання відшукання коефіцієнтів множинної криволінійної регресії полягає в тому, щоб відшукати нелінійну функцію, яка найкращим чином описує залежність у від величин $x_1\ x_2 \dots x_m$. Для вирішення використовують метод найменших квадратів. Залежність у від кожної з величин $x_1\ x_2 \dots x_m$ виражають параболою другого порядку.

Розглянемо випадок, коли взаємодія величин $x_1\ x_2 \dots x_m$ відсутня і в рівнянні регресії відсутні складові пропорційні добуткам $x_i\ x_j\ (i \neq j)$. У такому випадку рівняння регресії має вигляд:

$$f(x) = a + b_1 x_1 + c_1 x_1^2 + b_2 x_2 + c_2 x_2^2 + \dots b_m x_m + c_m x_m^2 \qquad (96)$$

або

$$f(x) = a + \sum_{k=1}^{m} (b_k x_k + c_k x_k^2)\,. \qquad (96')$$

Це рівняння є рівнянням множинної параболічної регресії 2-го порядку. У нього входять $2m+1$ коефіцієнт регресії (m – число змінних $x_1\ x_2 \dots x_m$ від яких залежить величина *y)*.

Для визначення числових значень коефіцієнтів регресії згідно з умовою мінімуму одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = an + \sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ki} + c_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ni}^2 \right) \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{1i} = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i} + \sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} + c_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ni}^2 x_{1i} \right) \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{1i}^2 = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + \sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i}^2 + c_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ni}^2 x_{1i}^2 \right) \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{mi} = a\sum\limits_{i=1}^{n} x'_{mi} + \sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ki} x_{mi} + c_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ni}^2 x_{mi} \right) \\
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_{mi}^2 = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_{mi}^2 + \sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ki} x_{mi}^2 + c_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ni}^2 x_{mi}^2 \right)
\end{cases} \qquad (97)$$

Розрахувавши за даними вимірювань відповідні суми, утворені значеннями змінних $x_1 \dots x_m$, знаходимо $2m+1$ коефіцієнтів множинної параболічної регресії 2-го порядку.

Часткове рівняння регресії матиме вигляд

$$y_{ji} = a'_j + b_j x_i + c_j x_i^2 \qquad (98)$$

Вільний член цього рівняння a'_i для кожного часткового рівняння регресії має своє значення відмінне від вільного члену а рівняння множинної регресії (97). Його можна розрахувати за формулою:

$$a'_j = a + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} (b_k \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} + c_k \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2)\,. \qquad (99)$$

Згідно з цією формулою вільний член a'_i є сума добутків середніх значень кожної величини помножена на її коефіцієнти регресії. Таким чином з рівняння множинної регресії можуть бути одержані рівняння часткової регресії для всіх змінних, за допомогою яких визначають характер індивідуальних взаємозв'язків у і кожної величини x_i. Оцінку тісноти зв'язку виконують за кореляційним відношенням, яке розраховують аналогічно парному кореляційному відношенню.

Використовуючи методи регресійного аналізу, слід враховувати ряд застережень. Одне з них відноситься до того, що методи регресійного аналізу і метод найменших квадратів передбачають апріорі, що випадкові величини підпорядковані нормальному, або близькому до нього, закону розподілу ймовірностей. Ці методи можуть давати невірні результати, якщо розподіл інший. Тому слід хоч якісно переконатись в характері розподілу. Це можна зробити, побудувавши графік залишків, тобто еліпс кореляції різниці між даними вимірювань та значенням розрахованими за рівнянням регресії. Більшість математичних пакетів, у тому числі і пакет аналізу даних електронної таблиці Excel, мають засоби розрахунку залишків та побудови номограми нормального розподілу. Якщо результати на монограмі розміщуються вздовж прямої лінії, то розподіл величин підпорядкований нормальному закону. Незначні відхилення від прямолінійності допустимі і розподіл можна вважати близьким до нормального, а регресійну модель можна приймати.

Ще одне застереження відноситься до того, що регресійна модель дає тільки кількісні залежності, а нічого не говорить про характер і причини залежності між випадковими величинами. Простий приклад з літературних джерел показує суть проблеми. У деяких дослідженнях було встановлено, що величина пошкоджень нанесених пожежею корелює з кількістю пожежників, які приймали участь у її тушінні й навіть одержано рівняння регресії для такої залежності. Тобто можна зробити висновок: чим більше пожежників приймає участь у тушінні пожежі, тим більші збитки буде нанесено і навіть можна підрахувати величину цих збитків. Проте зрозуміло, що тут взаємозв’язок зовсім інший: на більшу пожежу виїжджає більше пожежників, а величина збитків залежить від сили пожежі. Тобто дві величини кількість пожежників й величина збитків залежать від однієї величини: сили пожежі. Тобто характер та причини залежності регресійна модель не розкриває, а часто може їх маскувати. Цей приклад досить прозорий, тут все зрозуміло. Під час дослідження електромеханічних систем, в яких відбуваються складні процеси, випадки, змішування причин з їх наслідками й впливами сторонніх величин трапляються досить часто. Тому математичні моделі потрібно співвідносити з фізичними процесами і тільки після цього робити висновки.

Лекція 11. **Методи дисперсійного аналізу**

1. Завдання дисперсійного аналізу.
2. Однофактроний дисперсійний аналіз.
3. Двохфактроний дисперсійний аналіз з повторними дослідами.

1. Завдання дисперсійного аналізу

Дисперсійний аналіз це статистичний метод аналізу результатів дії декількох якісних чинників на величину, що визначає показники об'єкта. Цей метод аналізу полягає в порівнянні середніх значень певним чином згрупованих результатів вимірювань (Analysis Of Variances, ANOVA) [31, 32]. Аналогом дисперсійного аналізу є t-критерій Стьюдента, який використовують для порівняння середнього значення двох вибірок (див. табл.3, п. 4-6). Дисперсійний аналіз використовують, як правило, у випадках коли потрібно порівняти дві або більше число вибірок. Назва методу вказує на те, що висновки роблять на основі аналізу складових дисперсії. Суть методу полягає у тому, що загальну зміну (дисперсію) показника розбивають на складові частини, які відповідають дії кожного окремо взятого чинника. Можливість такого розкладу зумовлена адитивністю дисперсії. Адитивність дисперсії це властивість, що загальна дисперсія, викликана рядом причин, дорівнює сумі дисперсій викликаних кожною причиною зокрема.

Типовими завданнями дисперсійного аналізу є, наприклад, такі:

У цеху є ряд верстатів-автоматів, які виготовляють певну деталь. Розмір кожної деталі – це випадкова величина, яка залежить від настройки кожного станка та випадкових відхилень, які виникають у процесі виготовлення деталей. Потрібно за даними вимірювань розмірів деталей визначити, чи однаковою є настройка станків.

Під час виготовлення електричного апарату використовують різні типи ізоляційного паперу: конденсаторний, мікалентний, електротехнічний і др. Апарат можна просочити різними речовинами: епоксидною смолою, тетрафталевим лаком, смолою МЛ-2 і др. Просочування можна виконувати під вакуумом, при підвищеному тиску, при нагріві. Просочувати можна методом занурення в лак, під неперервним струменем лаку і т.п. Електричний апарат в цілому заливають певним компаундом, варіантів якого є декілька. Показниками якості апарата є електрична міцність ізоляції, температура перегріву обмотки в робочому режимі і ряд інших. Зрозуміло, що показники якості апарата залежить не тільки від названих чинників а існує ще ряд причин. Під час відпрацювання технологічного процесу виготовлення апаратів треба визначити як впливає кожен з перерахованих чинників на показники апарата, яка комбінація чинників найкраща.

Інший приклад. Тролейбусне депо обслуговує декілька тролейбусних маршрутів. На них працюють тролейбуси різних типів і оплату за проїзд збирають контролери. Керівництво депо цікавить питання як порівняти економічні показники роботи кожного контролера (виручку) враховуючи різні маршрути, різні типи тролейбусів. Як визначити економічну доцільність випуску тролейбусів певного типу на той чи інший маршрут. Як встановити обґрунтовані вимоги щодо величини виручки, що приносить кондуктор, на кожному маршруті в різних типах тролейбусів.

Завдання, що стоять під час вибору методу аналізу полягає у тому як одержати максимум інформації відносно впливу на кінцевий результат кожного чинника, визначити числові характеристики такого впливу, їх надійність при мінімальних затратах, за максимально короткий час. Вирішити такі завдання дозволяють методи дисперсійного аналізу. Розглянемо вказані методи дисперсійного аналізу більш детально.

2. Однофакторний дисперсійний аналіз

Розглянемо практичне завдання визначення однотипності настройки верстатів-автоматів у заводському цеху. В цеху є ряд станків-автоматів, які виготовляють певну деталь. Потрібно визначити чи однаковими є настройка всіх станків.

Аналіз однотипності настройки виконують шляхом вимірювання розмірів деталей взятих з кожного станка. Отже маємо вибірку деталей згруповану залежно від станка. Позначимо результати вимірювань розміру деталі y_{ij}. Тут і – номер станка, j – номер деталі з даного станка.

Деталі, виготовлені на одному станку, мають відхилення від потрібного розміру зумовлені процесами виготовлення деталі на даному станку. Вважаємо, що всі станки однотипні, відхилення розмірів деталей для кожного з них однакові мають дисперсію σ_ε^2.

Різниця настройки станків є чинник, вплив якого потрібно визначити. Настройку станків в цеху можна характеризувати величиною дисперсії настройки, а саме σ_c^2. Оскільки дисперсія має властивість адитивності то загальна дисперсія розмірів усіх виготовлених в цеху деталей σ^2 складатиме

$$\sigma^2 = \sigma_c^2 + \sigma_\varepsilon^2. \qquad (100)$$

Розглянемо тепер величини σ^2, σ_c^2, σ_ε^2. Порядок визначення кожної з цих величин різний. Для оцінки величини σ_ε^2, яку позначимо S_ε^2 потрібно визначити дисперсію розмірів деталей виготовлених на кожному станку та знайти її середнє значення для всіх станків, які є в цеху. Розрахунок можна виконати згідно з формулою

$$S_{\varepsilon}^{2}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\sum_{y=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i}\cdot\right)^{2}}{m(n-1)}. \qquad (101)$$

Тут y_{ij} - розмір j-ї деталі (j=1, 2, ..., n), виготовленої на верстаті за номером і (і=1, 2 ... m);

$\bar{y}_i\cdot$ - середнє значення розміру деталей, які виготовляє верстат за номером і:

$$\bar{y}_i\cdot=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_{ij} \qquad (102)$$

n – кількість деталей з одного станка (нехай з кожного станка взято по однаковій кількості деталей);

m – кількість станків в цеху.

Оцінку величини σ_c^2, яку позначимо S_c^2, визначаємо як середньоквадратичне відхилення середнього розміру деталей $\bar{y}_i$, які виготовляє кожен верстат

$$S_c^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_{i.}\cdot-\bar{y}..)^2}{m-1}. \qquad (103)$$

Тут $\bar{y}$ - середній розмір деталей виготовлений в цеху:

$$\bar{y}..=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{y}_{i.}\cdot \qquad (104)$$

m – кількість станків у цеху.

Досить часто використовують позначення в якому індекс замінюють крапкою. Ця заміна означає, що зроблено усереднене по відповідному індексу як це показано в формулах (102, 104).

Оцінка S^2 дисперсії всієї вибірки σ^2 може бути розрахована згідно формули (101) або як середнє квадратичне відхилення розмірів деталей від загального середнього, а саме

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}..)}{n\cdot m-1}. \qquad (105)$$

Якщо σ_c^2 дорівнює нулю $\sigma_c^2=0$, тобто всі верстати настроєні однаково, то дисперсія розмірів усіх деталей, виготовлених в цеху, зумовлена тільки відхиленням розмірів, які допускає кожен станок. Результати обчислень S_ε^2 за формулою (101) і σ_c^2 за формулою (103) дають оцінку однієї і тієї ж величини (вплив настройки відсутній)$\sigma^2=\sigma_\varepsilon^2$. Формули обчислень (101) (103) є незалежними і виконавши обчислення σ_ε^2 та σ_c^2 ми маємо дві незалежні оцінки однієї і тієї ж дисперсії (в разі)$\sigma_c^2=0$. Згідно з висновками теорії ймовірностей незалежні оцінки дисперсії виконані для однієї і тієї ж генеральної сукупності мають розподіл який описується формулою Фішера з df_1 та df_2 степенями свободи (див. табл. 6). Користуючись цим можна встановити ймовірність того чи іншого значення для відношення дисперсій. Якщо в результаті одноразової перевірки нульової гіпотези буде отримано результат, імовірність якого мала (наприклад менша p=0,05), то можна твердити, що причиною цього є невірне посилання, відносно настройки станків $\sigma_c^2 = 0$. В такому разі нульову гіпотезу потрібно відхиляють на вибраному рівні значимості $\alpha = 0{,}05$.

Математична модель однофакторного дисперсійного аналізу

Математичну модель однофакторного дисперсійного аналізу записують так [24]:

$$y_{ij} = \mu + C_i + \varepsilon_{ij}. \tag{106}$$

Тут y_{ij} - значення $j-ї$ випадкової величини, у групі значень i;

μ - загальне середнє значення;

C_i - вплив групи;

ε_{ij} - випадкове відхилення.

Як нульову гіпотезу приймають гіпотезу, що величина $C_i = 0$, тобто:

$$H_0 : y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}. \tag{107}$$

Альтернативна гіпотеза:

$$H_1 : y_{ij} = \mu + C_i + \varepsilon_{ij}, \tag{108}$$

тобто величина $C_i \neq 0$

$$\begin{matrix} H_0 : C_i = 0 \\ H_1 : C_i \neq 0 \end{matrix}. \tag{109}$$

Для перевірки нульової гіпотези використовують статистику:

$$F = \frac{S_c^2}{S_\varepsilon^2} \tag{110}$$

Дана статистика має два степені свободи, які визначаються чисельником і знаменником і дорівнюють $df_1 = m - 1; df_2 = m - 1$. Порядок розрахунку який рекомендується у більшості підручників дещо відрізняється від розглянутого щойно. Для спрощення розрахунків і надання їм більш загального характеру розраховують не значення дисперсій а відповідні значення сум квадратів. Схема розрахунку дана нижче.

Нехай дані вимірювань y_{ij} для виконання дисперсійного аналізу об'єднані в групи. Для спрощення пояснення приймемо, що групи мають однакову кількість даних n. Кількість груп позначимо m. В такому випадку дані можна подати у вигляді матриці:

$$y_{ij} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nm} \end{vmatrix} \qquad (111)$$

де i =1, 2, ..., m номер колонки,
j=1, 2, ... n номер рядка.

Обчислюємо середнє для кожної групи (колонки таблиці):

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \,. \qquad (112)$$

Загальне середнє:

$$\bar{y}_{..} = \frac{1}{mn}\sum \bar{y}_{i.} \,. \qquad (113)$$

Розраховують загальну суму квадратів:

$$SS_{.}^{2} = \sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y})^2 \,. \qquad (114)$$

Розраховують суму квадратів всередині груп:

$$SS_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \,. \qquad (115)$$

Суму квадратів між групами:

$$SS_{c} = \sum_{i=1}^{m}(y_{i_0} - \bar{y})^2 \,. \qquad (116)$$

Для кожної суми квадратів визначають числа свободи df. Для загальної суми квадратів вона дорівнює:

$$df = m \cdot n - 1 \,. \qquad (117)$$

Для внутрігрупової суми квадратів:

$$df_{\varepsilon} = n - 1 \,. \qquad (118)$$

Для між групової суми квадратів:

$$df_{c} = m - 1 \,. \qquad (119)$$

Дані обчислень заносять в розрахункову таблицю дисперсійного аналізу табл. 10.

Таблиця 10 – Розрахункова таблиця дисперсійного аналізу

Джерело варіації	**Сума квадратів** SS	**Число ступенів свободи** df	**Середній квадрат MS**	**Критерій Фішера F**	**Критичне** ($F_{V_1V_2\alpha}$)
Між групами (C)	2243	3	747,8	57,87	2,678
Всередині групи (ε)	1602	124	12,9		
Всього	3845	127			

У рядку „Всього” приводять загальну суму квадратів, яку розраховують за формулою (104) і яка дорівнює загальній сумі по колонці. Аналогічно і число ступенів свободи обрахування за формулою (117) дорівнює сумі чисел у всьому колонці.

Величину середнього квадрату MS розраховують шляхом ділення відповідної суми квадратів SS на число ступенів свободи df.

Критерій Фішера розраховують, як відношення середнього квадрату між групової варіацію до середнього квадрату всередині групової варіації:

$$F = \frac{MS_c}{MS_\varepsilon}. \qquad (120)$$

Середній квадрат внутрігрупової варіації часто називають середнім квадратом помилки, оскільки він характеризує варіацію даних в одній групі, тобто даних поміряних при одних і тих же умовах.

У наступній колонці таблиці вказують критичне значення критерію. Його знаходять згідно з таблицями розподілу Фішера, як значення при ступенях свободи $df_1 = df_c$; $df_2 = df_\varepsilon$, та заданому до експерименту рівневі значимості α.

Шляхом порівняння обчисленого значення критерію Фішера F і критичного значення $F_{\nu_1 \nu_2 \alpha}$ роблять висновок про статистичну значимість впливу груп. Тобто, чи суттєвим є вплив чинника, який відповідає групуванню даних. Наприклад, якщо дані в табл. 10 розглядати як результат експерименту по визначенню однорідності настройки верстатів у цеху, описаний на початку параграфу, і під групуванням розуміти розміри деталей виготовлених на одному верстаті, то дані дисперсійного аналізу показують суттєву різницю розмірів деталей які виготовляє кожен верстат, тобто вплив чинника «різна настройка верстатів» є суттєвим.

Всі математичні пакети статистичних розрахунків призначені для дисперсійного аналізу, такі, наприклад, як „ПАКЕТ АНАЛИЗА ДАННЫХ електронної таблиці EXCEL”, пакет „STATISTICA” та пакет „SPSS” крім розрахунку критерію F додатково подають величину імовірності. Ця величина вказує на те, якою є імовірність появи розрахованого значення F при випадковому збігу обставин. Для даного прикладу розрахована імовірність дорівнює $1{,}8 \cdot 10^{-25}$. Тобто не можна вважати, що вплив груп несуттєвий і ми одержали результат ймовірність якого майже абсолютний нуль. В інших випадках ця імовірність не є такою малою і дає додаткову інформацію відносно результату аналізу. Наприклад, якщо до експерименту задано рівень значимості $\alpha = 0{,}05$, одержали результат що між груповий ефект несуттєвий ($F_{V_1 V_2 \alpha}$ >F), але в додатковій колонці одержали імовірність p=0,053, то ця додаткова інформація дозволяє зробити припущення, що між груповий ефект може існувати, але його потрібно перевірити у більш надійних дослідах.

Результати дисперсійного аналізу вказують тільки на те, що вплив групування на дані суттєвий, але нічого не говорить які з груп суттєво відрізняються від інших. Під час досліджень часто виникає потреба виділити певні групи як кращі чи гірші. У нашому прикладі потрібно виділити станки, настройка яких суттєво відрізняється від потрібної. Це роблять шляхом додаткового аналізу.

Коли одержано результат, що вплив групування суттєвий і не є статистичною похибкою, слід виконати ранжування груп (впорядкувати групи по величині середніх значень). Потім порівнюють попарно групи між собою та визначають статистичну різницю між окремими групами даних. Для визначення статистичної різниці двох груп можна використати цілий ряд критеріїв. Найчастіше використовують t-критерій Стьюдента. Опис варіантів цього критерію надано в табл.6, (критерії 11-18). Попарно порівнюють дані різних груп і роблять висновки щодо суттєвості різниці між групами.

Використання критерію Стьюдента має суттєвий недолік. Наприклад, порівняння виконуємо на рівні значимості $\alpha = 0{,}05$. Якщо, є 5 груп, то кількість можливих попарних порівнянь дорівнює 10. При ймовірності помилки в одному порівнянні 5% в разі десяти порівняннях рівень помилки буде майже 40%. Тобто є 40% ймовірність того, що в одному з порівнянь значимий результат буде одержано помилково. Для покращення результатів аналізу використовують критерій Бенферроні. Він аналогічний розглянутому t-критерію тільки у ньому рівень значимості ділять на число парних порівнянь. Часто такий критерій називають „консервативним” з огляду на те, що має меншу чутливість. Існує ще ряд критеріїв, які займають проміжне положення по своїй „консервативності” між двома розглянутими.

Для розглянутих критеріїв важливе значення має допущення, що значення дисперсії рівні у всіх групах даних. Якщо це допущення не оправдується, тобто попередні дані свідчать про суттєву різницю дисперсії, то використовують інші критерії множинного порівняння даних. В математичних пакетах аналізу, наприклад SPSS, цей факт враховано і введено додаткові критерії, які працюють у розглянутому випадку.

3. Багатофакторний дисперсійний аналіз

Завдання багатофакторного дисперсійного аналізу виникає тоді, коли потрібно визначити вплив двох, або більшої кількості чинників, на певну випадкову величину. Багатофакторний дисперсійний аналіз передбачає наявність однієї залежної випадкової величини поміряної в сильній шкалі (різниці чи відношень) і декількох незалежних величин, кожна з яких виражена в шкалі найменувань або в ранговій шкалі.

Дисперсійний аналіз є досить розвинутим розділом математичної статистики, який має масу варіантів. Концепція дисперсійного аналізу загальна як для однофакторного так і для багатофакторного аналізу. Сутність її полягає в тому, що загальну дисперсію розбивають на складові, що відповідають певному групуванню даних. Кожному групуванню даних відповідає своя модель дисперсійного аналізу. Тут ми розглянемо тільки основні положення дисперсійного аналізу потрібні для розуміння та практичного використання найбільш вживаних його варіантів.

Дисперсійний аналіз, у разі багатьох чинників, вимагає досить уважного відношення до збору і подачі вхідних даних, а особливо до інтерпретації результатів. На відміну від однофакторного дисперсійного аналізу результати якого можна умовно розмістити в певній послідовності, результати двохфакторного вимагають більш складного уявлення. Ще складніша ситуація виникає коли є три, чотири або більше чинників. Через це в модель досить рідко включають більше трьох (чотирьох) чинників.

Важливою особливістю багатофакторного дисперсійного аналізу є проблема взаємодії чинників. Взаємодія чинників це такий особливий прояв чинників, коли декілька чинників самі по собі впливають на загальний результат одним чином, а їх певна комбінація призводить до зовсім іншого результату. Прикладом взаємодії чинників може бути виникнення резонансу при певній величині ємності та індуктивності електричного кола, виникнення хімічної реакції при певній сукупності елементів з яких побудована система, виникненні аномальних ефектів у складних системах при певному збігу обставин. Взаємодія чинників потребує детального вивчення і пояснення їх суті. Наявність взаємодії чинників може докорінно поміняти модель системи і подекуди призвести до переосмислення природи явищ з якими має справу експериментатор.

Для виявлення статистичної взаємодії чинників потрібно проводити експерименти з повторними дослідами. В подальшому, як приклад багатофакторного дисперсійного аналізу, буде розглянуто двохфакторний дисперсійний аналіз, а для більш детального вивчення проблеми взаємодії чинників розглянемо двохфакторний дисперсійний аналіз з повторними дослідами.

4. Двохфакторний дисперсійний аналіз із повторними дослідами

Як було відмічено, важливою особливістю багатофакторного дисперсійного аналізу є взаємодія чинників. Для виявлення взаємодії чинників потрібно проводити експерименти з повторними дослідами. Розглянутий вище приклад є таким експериментом. При кожній комбінації чинників було проведено по 12 повторних дослідів. Проте завдання вивчення взаємодії не ставилось і обробку результатів експерименту виконували без урахування взаємодії. Тобто ефект взаємодії ввійшов у загальну похибку експерименту і окремо його не враховують. Врахування взаємодії дещо змінює обробку даних. Якщо взаємодія чинників буде виявлена, то це суттєво змінює трактування результатів експерименту.

Модель двохфакторного дисперсійного аналізу з врахуванням статистичної взаємодії чинників має вигляд:

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + A_i B_j + \varepsilon_{ijk}. \tag{121}$$

Ця модель відрізняється від моделі (106) наявністю члена взаємодії чинників A_i B_j.

Розрахункова таблиця аналізу результатів двохфакторного дисперсійного аналізу з врахуванням статистичної взаємодії чинників приведена в табл.11.

Таблиця 11 – Розрахункова таблиця двохфакторного дисперсійного аналізу з врахуванням взаємодії чинників

Джерело варіації	**Число ступенів свободи df**	**Сума квадратів SS**	**Середній квадрат MS**	**Критерій Фішера F**	**Критична величина** $F_{V_1 V_2 \alpha}$
1	2	3	4	5	6
Чинник A	$df_A = a - 1$	$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{nb} - \frac{Y_{...}^2}{nab}$	$MS_A = \frac{SS_A}{df_A}$	$\frac{MS_A}{MS_\varepsilon}$	$F_{df_1 df_2 \alpha}$ $df_1 = df_A$ $df_2 = df_\varepsilon$
Чинник B	$df_B = b - 1$	$SS_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j.}^2}{na} - \frac{Y_{...}^2}{nab}$	$MS_B = \frac{SS_B}{df_B}$	$\frac{MS_B}{MS_\varepsilon}$	$F_{df_1 df_2 \alpha}$ $df_1 = df_{\mathbf{B}}$ $df_2 = df_\varepsilon$
Взаємодія $A \times B$	$df_{AB} = (a-1)(b-1)$	$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{ij.}^2}{n} - \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i..}^2}{nb} - \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{.j.}^2}{na} + \frac{Y_{...}^2}{nab}$	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{df_{AB}}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_\varepsilon}$	$F_{df_1 df_2 \alpha}$ $df_1 = df_{\mathbf{AB}}$ $df_2 = df_\varepsilon$
Помилка ε	$df_\varepsilon = ab(n-1)$	$SS_3 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{T_{ij.}^2}{n}$	$MS_{AB} = \frac{SS_\varepsilon}{df_\varepsilon}$		
Сума	$df = abn - 1$	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{nab}$			

Для демонстрації використання методу двохкратного дисперсійного аналізу з врахуванням взаємодії чинників та інтерпретації результатів розглянемо приклад.

Під час вивчення шумових характеристик пускорегулюючих апаратів (ПРА) [36] вимірювали рівні шуму апаратів під час роботи їх в колі живлення люмінесцентних ламп. Вимірювання виконували у відповідності зі стандартом ГОСТ 16809-78 [37]. Результати вимірювань рівня звукової потужності 6 серій пускорегулюючих апаратів (по 34 апарати) з чотирьом лампами, розраховані на основі однофакторного дисперсійного аналізу приведені в табл. 12 та 13.

Таблиця 12 – Результати однофакторного дисперсійного аналізу рівнів звукової потужності пускорегулюючих апаратів люмінесцентних ламп. (Октавна смуга частот 4кГц).

Джерело зміни	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-значення*	*F критичне*
Серії апаратів	4406	5	881,14	39,64	1,7E-36	2,225
№ вимірювань	18002	810	22,22			
Всього	22408	815				

Результати дисперсійного аналізу показують, що серії апаратів відрізняються за величиною звукової потужності. Розрахована величина критерію Фішера F=39,64, значно перевищує критичну величину F_{KP} =2,225.

Таблиця 13 – Статистичний аналіз результатів вимірювання звукової потужності ПРА

Чинник	*Кількість*	*Сума*	*Середнє* $L_{АП}$	*Дисп ерсія*	*Стандарт*	*Похибка середнього*
Серія А	136	1094	8,1	22,38	4,7	±0,81
Серія Б	136	1842	13,5	26,62	5,2	±0,88
Серія В	136	899	6,6	23,07	4,8	±0,82
Серія Г	136	1296	9,5	21,00	4,6	±0,79
Серія Д	136	1328	9,8	19,27	4,4	±0,75
Серія Є	136	942	6,9	21,01	4,6	±0,79
Середнє	136			22,23	4,7	±0,81

Результати вимірювань (див табл..13) показують, що апарати різних серій мають різну звукову потужність: найменшу апарати серії В (6,61 дБ) і найбільшу серії Б (13,6 дБ). Похибка середнього доходить до 0,88 дБ. Проте розходження значень у кожній серії досить велике, про що свідчить велика величина стандартного відхилення, яке в середньому становить 4,7дб. Тобто звукова потужність кожного апарату дорівнює

$$L = L_{АП\ i} \pm 9{,}4 \text{ дБ}.$$

Тут $L_{АП\ i}$ – середнє і-ої серії апаратів.

Такі значні розходження величин, які перевищують саму вимірювану величину, свідчать про те, що характеристиках апаратів вкрай незадовільні, або самі вимірюваннях невірні.

Під час подальшого аналізу враховано, що вимірювання виконано з чотирьом люмінесцентними лампами, і проведено двохфакторний аналіз де в якості чинників прийнято: серії пускорегулюючих апаратів (ПРА), люмінесцентні лами (з якими працювали апарати під час вимірювань) та взаємодія чинників лампа-серія апаратів. Результати дисперсійного аналізу наведено в табл. 14.

Таблиця 14 - Результати двохфакторного дисперсійного аналізу звукової потужності ПРА з повторними вимірами

Чинник	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-Значення*	*F критичне*
Серія ПРА	4405	5	881,14	48,46	8,5E-44	2,22
Лампа	937,3	3	312,44	17,18	8,09E-11	2,61
Взаємодія	2664	15	177,63	9,77	1,74E-21	1,67
Внутрі	14400	792	18,18			
Всього	22408	815				

Результати дисперсійного аналізу показують, що значення звукової потужності апарата суттєво залежить від усіх вказаних чинників.

- Перший чинник: серія апарату. Розрахована величина критерію Фішера F=48,46, значно перевищує критичну величину $F_{КР}$ =2,22.
- Другий чинник: лампа. Розрахована величина критерію Фішера F=17,18, значно перевищує критичну величину $F_{КР}$ =2,61.
- Третій чинник: взаємодія лампа – серія апаратів. Розрахована величина критерію Фішера F=9,77, також суттєво перевищує критичну величину $F_{КР}$ =2,61.

Вже одне те, що рівень звукової потужності залежить від лампи, з якою працює апарат, показує, що вимірювана величина не є характеристикою тільки апарату. Тобто встановлення норм звукової потужності апарату згідно ГОСТ 16809-78 [37] без врахування лампи не обґрунтоване. Правда тут є деякий обхідний шлях. Можливо можна відібрати , чи створити стандартну лампу з якою і нормувати рівні шуму. Але інший висновок дисперсійного аналізу вказує що і це не можливе.

Третій чинник, розглянутий у виконаному експерименті, – це взаємодія серії апарату з лампою. Суттєвий вплив його означає, що одна лампа в апаратах певної серії буде створювати менший шум ніж усі інші лампи, в той же час ця ж лампа в апаратів іншої серії може створювати максимальний шум. Тобто не можна підібрати лампи, яка б однаково діяла б на всі апарати.

Такими дослідженнями було показано складний характер виникнення шуму ПРА. Прийшлось змінити стандарт на пускорегулюючі апарати і змінити методи вимірювань. Як виявилось, причина виникнення різного рівня шуму криється в здатності лампи генерувати коливання різних частот звукового діапазону, а апаратів відтворювати звуки на залежно від своїх частотних характеристик. Процеси у лампі нестабільні і змінюються на протязі терміну її експлуатації.

У табл. 15 наведено результати статистичного аналізу рівнів шуму комплекту лампа – апарат, на основі якого можна побудувати математичну модель для його розрахунку.

Статистична взаємодія між чинниками проявляється часто. Приклади статистичної взаємодії є в навчально-методичному посібнику [38]. Під час аналізу терміну роботи покришок для коліс тролейбусу виявлено, що існує статистична взаємодія між заводом-виробником покришок та типом покриття дороги на якій експлуатують покришки. Ця взаємодія призводить до того, що потрібно підбирати покришки з урахуванням покриття дороги. Для деяких доріг більш надійні і довше працюють одні покришки, для інших – другі.

Таблиця 15 – Результати статистичного аналізу рівнів шуму комплекту ПРА – люмінесцентна лампа, одержаного при двохфакторному дисперсійному аналізі з повторами.

Підсумки	**Серія А**	**Серія Б**	**Серія В**	**Серія Г**	**Серія Д**	**Серія Є**	**Всього**
Лампа 1							
Кількість	34	34	34	34	34	34	204
Сума	264,2	497,5	176,6	311,7	381,6	178,6	1810
Среднє	7,77	14,63	5,19	9,17	11,22	5,25	8,9
Дисперсія	11,97	17,81	16,29	26,67	12,03	14,91	27,4
Лампа2							
Кількість	34	34	34	34	34	34	204
Сума	257,0	362,48	157,45	332,21	385,66	228,09	1722
Среднє	7,56	10,66	4,63	9,77	11,34	6,71	8,4
Дисперсія	23,50	15,79	23,49	15,7	20,49	23,43	25,5
Лампа 3							
Кількість	34	34	34	34	34	34	204
Сума	379,83	581,93	245,63	422,72	224,64	361,54	2216
Среднє	11,17	17,12	7,22	12,43	6,61	10,63	10,9
Дисперсія	18,0	23,87	14,867	17,897	14,19	13,40	28,9
Лампа 4							
Кількість	34	34	34	34	34	34	204
Сума	193,14	400,0	319,18	229,39	335,94	174,09	1651
Среднє	5,68	11,76	9,39	6,75	9,88	5,12	8,1
Дисперсія	21,92	25,24	25,32	8,81	17,06	13,73	24,1
Итого							
Кількість	136	136	136	136	136	136	
Сума	1094	1849	899	1296	1328	942,3	
Среднє	8,05	13,54	6,61	9,53	9,76	6,93	
Дисперсія	22,37	26,62	23,07	21,00	19,27	21,01	

5. Багатофакторний дисперсійний аналіз з повторними дослідами

Розглянутий двохфакторний дисперсійний аналіз є найпростішим випадком багатофакторного дисперсійного аналізу. Дані вимірювань досить часто можна групувати дані не за двома, а за більшою кількістю чинників. Так якщо розглядати дисперсійний аналіз терміну служби покришок коліс тролейбусу з урахуванням чинників: завод-виробник і маршрут на якому експлуатують покришки то можна виділити як окремий чинник сезон під час якого експлуатують покришки, а саме: зимова та літня експлуатація. В результаті будемо мати завдання трьохфакторного дисперсійного аналізу. При наявності більшої кількості чинників підхід до дисперсійного аналізу аналогічний як і в двох факторному аналізі. Наприклад, модель трьохфакторного аналізу може бути представлена у вигляді:

$$Y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + C_k + A_i B_j + B_j C_k + A_i C_k + A_i B_j C_k + \varepsilon_{ijkl} \qquad (122)$$

Це найбільш повна модель трьохфакторного дисперсійного аналізу в якій враховані попарні взаємодії чинників, а саме $A_i B_j$, $B_j C_k$, $A_i C_k$ та потрійна взаємодія $A_i\ B_j\ C_k$. У всіх випадках модель намагаються спростити. У першу чергу в модель не включають потрійну взаємодію чинників. Явище взаємодії двох чинників проявляється не так часто, а потрійна взаємодія буває тільки у виняткових випадках. Подвійну взаємодію чинників також не завжди включають в модель. Включають тільки ту взаємодію для якої є попередня інформація і серйозні підстави щоб її врахувати в моделі.

Процес виділення окремих чинників і їх урахування відносно простий. Тому часто виникає бажання виділити більше чинників. Цим не слід захоплюватись. Виділення багатьох чинників призводить до зменшення надійності та статистичної достовірності результатів. Чим більше чинників тим менш надійною стає модель, тим більша ймовірність помилки. Наприклад, при врахуванні 4-х чинників і 6 їх подвійних взаємодій при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ ймовірність, що один з 10 висновків буде помилковим становить 40%. Сама модель, в яку входить велике число незалежних змінних, стає досить складною для інтерпретації і незручною для практичного використання. Тому при наявності багатьох чинників завжди виконують операції з визначення найбільш суттєвих чинників та їх відбору. Завдання такого порядку вирішують спеціальні розділи математичної статистики: факторний аналіз, багатомірний статистичний аналіз, методи випадкового балансу та ін.

Лекція 12. **Планування експерименту**

1. Основні поняття та визначення теорії планування експерименту
2. Основні етапи експерименту
3. Оптимізаційні та імітаційні моделі. Вимоги до чинників і параметру оптимізації
4. Принципи побудови моделей систем

1.Основні поняття та визначення теорії планування експерименту

Побудова математичних моделей складних електромеханічних систем здійснюється або теоретичним шляхом - на основи аналізу фізичних процесів, або експериментально - за результатами експериментальних досліджень. Експеримент є засобом побудови моделі й критерієм її адекватності.

Побудова всякої моделі здійснюється послідовно. На перших етапах розглядають найпростіші моделі, а в процесі вивчення систем моделі ускладнюються. В якості вихідної моделі приймають модель „чорний ящик". Вона має такий сенс. Природа процесів, які відбуваються у складних системах невідома, або відома недостатньо. Ми можемо виділити систему з навколишнього середовища та визначити певну сукупність вхідних та вихідних величин, способів дії на систему і результатів до яких призводять ці дії. Модель „чорний ящик" зображає систему прямокутником який обмежує її границі. Зліва прямокутника стрілками позначають вхідні величини системи, а справа – вихідні. Вже таке просте подання системи є досить корисним. Формальний опис такої моделі досить простий, але маючи справу з реальною системою подання її у вигляді такої найпростішої моделі „чорний ящик" зв'язано з вирішенням ряду проблем. Ці проблеми пов'язані, по-перше, з визначенням границь системи і, по-друге, визначенням вхідних та вихідних величин систем. Визначення границь навіть простих технічних систем не завжди однозначне. Наприклад, розглянемо гальмівну систему тролейбусу з електричним та пневматичним гальмами [39]. Чи входять у дану систему компресор. Адже він забезпечує повітрям не тільки пневматичне гальмо, але і систему підвіски тролейбусу. А пневматичні магістралі входять в гальмівну систему! А манометри? Аналогічна ситуація виникає при визначенні границь електричного гальма. Реостати входять в гальмівну систему чи ні? Отже, визначення границь у випадку, коли маємо технічну, чітко детерміновану систему як тролейбус не завжди є простим. В інших випадках ситуація може ще ускладнюватись і однозначної відповіді не мати.

Аналогічна ситуація виникає і під час визначення вхідних та вихідних величин системи. Всяка система має безліч зв'язків з навколишнім середовищем і вирішити, які з цих зв'язків слід вважати вхідними, які вихідними а які зовсім не враховувати подекуди складно.

В плануванні експерименту ми вважаємо, що модель „чорний ящик" побудована, визначено всі вхідні та вихідні величини і поставлене завдання подальшого вивчення системи. Метою такого вивчення є встановлення взаємозв'язку між вхідними та вихідними величинами, встановлення залежності вихідних величин системи від вхідних. Теорія планування експерименту направлена на те як найбільш ефективно спланувати та здійснити експеримент, обробити його результати, щоб одержати потрібну інформацію з високою надійністю.

Перш за все розглянемо питання термінології.

Теорія планування експерименту, як і всяка теорія має свою термінологію. Згідно з неї вихідну величину чи сукупність вихідних величин системи називають відгуком. Величини, які впливають на систему, тобто вхідні величини, називають чинниками. Кожен чинник може приймати певні значення. Значення чинника називають рівнем чинника. Залежно від того в якій шкалі вимірюють чинники вони можуть бути кількісними чи якісними. Кількісні це чинники значення яких виміряють у шкалі різниці чи відношень, якісні – це чинники значення яких вимірюють у шкалі найменувань чи ранговій шкалі. Систему чи об’єкт називають керованими, якщо чинник впливає на рівень відгуку. Якщо тільки певний чинник впливає на рівень відгуку, то говорять, що система керована по відношенню до цього чинника. Під час наукового вивчення важливо щоб результати дії на систему повторювались, тобто говорять про відтворюваність результатів. Досить часто розглядають не один а декілька чинників і вживають термін простір чинників (факторний простір). Простір чинників – простір утворений сукупністю чинників і обмежений областю їх визначення. У просторі чинники виступають як координатні осі. Оскільки результати експерименту прийнято відображати у просторі чинників, то в цей простір включають додатковий вимір відгуку (їх може бути декілька). У такому випадку вживають термін двох, трьох чи багатовимірний простір чинників.

Кожен чинник має свою область визначення. Область визначення чинника – це сукупність значень, які він може приймати. Ця область визначення може бути обмеженою чи безконечною, неперервною або дискретною. Неперервна, якщо чинник приймає будь-які значення в певному діапазоні, дискретна у випадку, якщо чинник може приймати тільки певні фіксовані значення. Ці значення можуть бути як кількісними так і якісними.

Значення відгуку, залежно від рівня чинників, називають функцією відгуку. Цю залежність записують у вигляді рівняння відгуку.

$$y = f\left(x_1\ x_2 ... x_n\right). \tag{123}$$

Тут y – відгук;

$x_1\ x_2\ ...\ x_n$ – чинники;

n – кількість чинників;

$f\left(x_1\ x_2 ... x_n\right)$ - функція відгуку.

Відображення функції відгуку в n+1 мірному просторі чинників називають поверхнею відгуку, наприклад, при одному чиннику поверхнею відгуку буде лінія на площині (див. рис. 31).

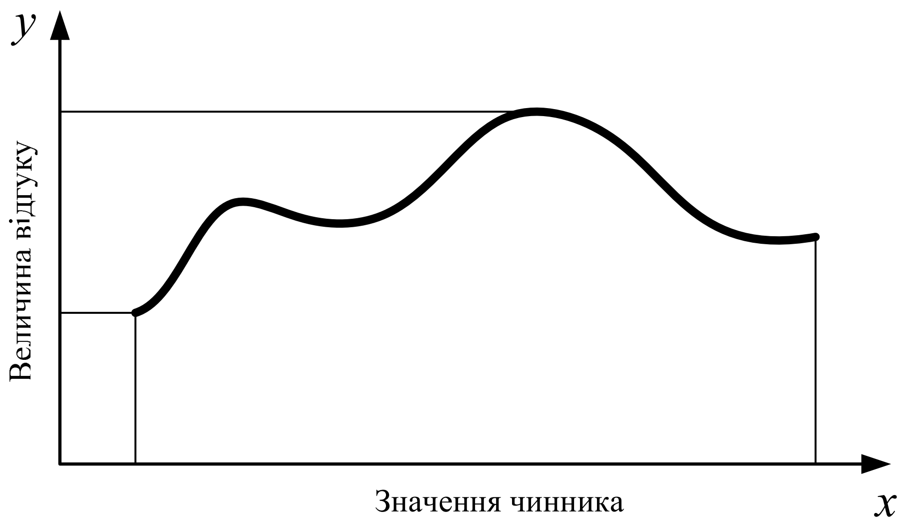


Рис. 31 – *Поверхня відгуку при одному чиннику.*

При двох чинниках поверхня відгуку це поверхня в трьох мірному просторі (див. рис. 32).

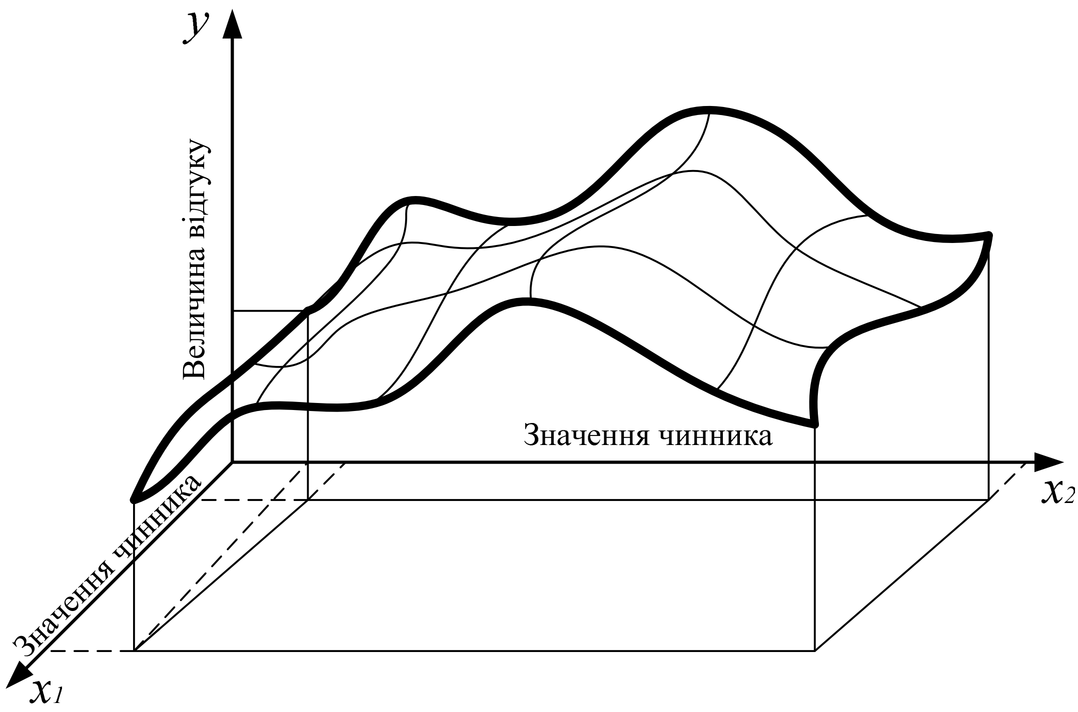


Рис. 32 – *Поверхня відгуку при двох чинниках.*

Якщо $n \geq 3$, то ми маємо $n+1$ мірний гіперпростір для наочного відображення поверхні відгуку в такому гіперпросторі використовують окремі 2-х чи 3-х мірні січення, тобто розглядають тільки окремі компоненти гіперпростору, фіксуючи значення деякого числа чинників. Сукупність різних січень чинникового гіперпростору може дати повну уяву щодо поверхні відгуку.

Залежно від того яку систему ми вивчаємо можливі випадки, коли ми можемо керувати чинниками, задавати їх на певних рівняннях, а можливі випадки, коли ми не можемо керувати рівнями чинників, а тільки фіксуємо їх значення.

В таких випадках говорять про активний (керований) експеримент або про пасивний експеримент, який часто називають спостереженням. В активному експерименті можна наперед вибрати потрібні рівні чинників і підтримувати їх в ході експерименту. В такому випадку говорять про планування експерименту.

Важливе значення має тип експерименту. Експеримент може проводитьсь з метою встановлення невідомих раніше залежностей, або з метою одержання оптимальних умов, при яких значення функції відгуку приймає найбільш бажані значення. У такому випадку експеримент називають оптимізаційним. В оптимізаційному експерименті важливою величиною є параметр оптимізації. Параметром оптимізації може бути певний відгук системи, комбінація відгуків чи певна їх функція. Яку конкретно величина вибирати в якості параметру оптимізації залежить від цілого ряду чинників. Далі будуть розглянуті вимоги до параметру оптимізації, методи його вибору.

2. Основні етапи експерименту

Термін планування експерименту вживають у вузькому й широкому розумінні. У вузькому розумінні це тільки вибір рівнів чинників при яких здійснюють експеримент, тобто точок у просторі чинників та кількості дослідів, які треба провести у кожній точці плану експерименту.

У більш широкому розумінні планування експерименту включаю ряд етапів які розглянуто нижче.

Планування експерименту є однією з важливих складових частин всякого дослідження та побудови моделей системи. На етапі планування вирішують більшість питань, що визначають ефективність експерименту. Часто добре спланований експеримент дає більше корисних результатів ніж від нього очікували. На відміну від цього, погано спланований експеримент може дати мінімум результатів або взагалі не дати ніяких корисних результатів. Тому, під час вивчення системи, а особливо таких складних систем як електромеханічні, планування експерименту має першочергове значення.

Планування експерименту передбачає ряд етапів: постановку завдання дослідження та конкретизацію цілей експерименту, розробку плану проведення експерименту, підготовку до проведення та методику проведення експерименту, методи обробки результатів та їх інтерпретацію, а також використання результатів експерименту. Розглянемо етапи експерименту.

Постановка завдань і цілей експерименту.

I етап. Розпочинається з вивчення завдань досліджень та постановки цілей експерименту, а саме відповідей на запитання для чого потрібен експеримент і на які питання нам потрібно одержати відповідь, провівши експеримент.

II етап – Вибір шляхів вирішення поставлених завдань. Тут потрібно визначити як можна отримати відповіді на поставленні завдання, які треба провести досліди, якою повинна бути точність та надійність результатів при допустимих затратах. Слід мати на увазі що збільшення вимог точності результатів в 2-3 рази подекуди вимагає збільшення затрат в десять або сто разів.

III етап – Складання плану експерименту. Саме на цьому етапі розпочинається безпосереднє планування експерименту. Його виконують на основі аналізу попередньої моделі досліджуваної системи. Всяке планування і проведення експерименту передбачає наявність хоча б найпростішої моделі системи. На основі її вибирають чинники, які будуть змінювати (чи реєструвати якщо система некерована), відгуки, які будуть фіксувати під час проведення експерименту та параметри оптимізації, за якими визначають ефективність експерименту.

Під час складання плану експерименту визначають рівні чинників, тобто сукупність точок вимірювань, кількість дослідів в кожній точці та вимоги щодо точності вимірювань відгуку.

IV етап – підготовка до плану експерименту. Підготовка включає розробку методик проведення окремих дослідів, підготовку системи до проведення експерименту, підготовку обладнання, підготовку спеціалістів, які будуть проводити експеримент, виконання деяких контрольних вимірювань, розробку способів реєстрації результатів експерименту, бланків для запису і т.п.

V етап –Проведення експерименту та обробка його результатів. На цьому етапі, згідно з розробленим планом та методами, проводять експеримент, фіксують його результати та виконують обробку результатів.

VI етап – Інтерпретація результатів експерименту. Залежно від цілей експерименту і результатів обробки даних уточнюють і доповнюють модель системи. Результатом цього етапу є уточнена модель системи та практичні висновки зроблені згідно до цілей досліджень.

VII етап – Реалізація результатів експерименту. Результати експерименту впроваджують у практику. На основі них модернізують систему чи розробляють нову систему. Модернізовану систему використовують для вирішення конкретних практичних завдань. Під час реалізації результатів експерименту перевіряють адекватність моделі, відповідність модернізованої системи вимогам практики. На цьому етапі виникають нові завдання, які є основою подальших досліджень і проведення нових експериментальних та теоретичних досліджень.

Ряд етапів планування експерименту є формалізованим, а деякі неформалізованими. Не піддаються формалізації такі етапи, як постановки цілей експерименту та задач досліджень Важко піддаються формалізації операції вибору чинників та області чинникового простору, в якій потрібно проводити дослідження. Етапи складання плану експерименту, математичне планування та обробка результатів експерименту повністю формалізовані, вони виконуються за певними правилами у визначеному порядку.

Вчені, спеціалісти в певній області знань, інженери завжди намагалися найбільш ефективно вирішувати поставлені перед ними завдання. Завдання ефективності експерименту є загальні і торкається спеціалістів різних областей знань. За весь період розвитку наукових досліджень накопичено великий досвід проведення експерименту. Деякі вчені затратили багато зусиль на теоретичну розробку проблем підвищення ефективності експериментальних досліджень. Є ціла наукова дисципліна, яка вирішує завдання планування експерименту. Частково положення планування експерименту ми розглянемо далі.

3. Оптимізаційні та імітаційні моделі. Вимоги до чинників і параметру оптимізації

Залежно від цілей моделювання та шляхів використання моделі прийнято поділяти на імітаційні та оптимізаційні.

Імітаційні моделі – це моделі, які призначені для вивчення властивостей об'єкту шляхом імітації його функціонування. Властивості системи на імітаційних моделях дослідження поведінки під час зміни рівнів чинників від яких залежить модель. Результати досліджень інтерпретують на поведінку реального об'єкту. Імітаційне моделювання можна здійснювати як на матеріальних та ідеальних моделях. Матеріальні моделі створюють на основі подібності, вони відтворюють систему чи її окремі частини.

Ідеальною моделлю може бути певна система рівнянь, що описує систему або певна абстрактна символічна система. В імітаційному моделюванні широко використовують сучасну обчислювальну техніку. Існує ряд наукових напрямків по розробці та використанню методів імітаційного моделювання. Дані питання розглядають у великій кількості наукових праць. Перелік літературних джерел, в яких розглядають питання імітаційного моделювання, зайняв би не одну сотню сторінок.

Оптимізаційні моделі – моделі, призначені для визначення рівнів чинників, при яких функціонування системи оптимальне.

Оптимізація – це відшукання екстремуму параметру оптимізації в просторі чинників.

Параметр оптимізації – це показник за яким виконують оптимізацію. Ним може бути відгук системи: одна вихідна величина чи певна сукупність вихідних величин.

Вибір параметру оптимізації обумовлений в першу чергу метою експерименту. Досить часто в якості параметру оптимізації може прийматись величина вартості, величина сумарних затрат, час затрачений на виконання певних функцій, сумарні затрати енергії і т.п. Реальні ситуації завжди складні і вимагають оптимізації за декількома параметрами.

Теоретично і логічно обґрунтоване вирішення задачі оптимізації вимагає наявності тільки одного параметру оптимізації. Тому в багатьох випадках формують один узагальнений параметр оптимізації а інші характеристики об'єкту розглядають як обмеження. Одним з можливих шляхів вибору узагальненого параметру оптимізації є подання його у вигляді функції від ряду вихідних величин системи. Наприклад, досить часто використовують подання відгуку системи одним з вказаних нижче способів:

$$q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{q_i}{S_i}, \qquad (124)$$

$$q = \prod \beta_i \frac{q_i}{S_i}. \qquad (125)$$

Тут α_i - та β_i - вагові коефіцієнти;

q_i - величини відгуку, вихідні величини системи;

S_i - коефіцієнти, які служать для проведення розмірних величин до безрозмірних.

Розглянуті приклади формування параметру оптимізації найбільш прості. У ряді випадків використовують інші значно складніші методи визначення параметру оптимізації.

Параметр оптимізації повинен задовольняти ряду вимог, а саме:

1. Ефективності – тобто він повинен забезпечувати досягнення основної мети досліджень самим ефективним, швидким способом.
2. Універсальності – даний параметр оптимізації повинен бути таким, щоб його можна було використати при вирішенні не одного а цілої сукупності завдань, він повинен використовуватись у багатьох задачах.
3. Кількісним – виражатись певним числом.
4. Повинен існувати при всіх можливих станах системи.
5. Повинен мати фізичний чи економічний сенс.

Під час планування експерименту ставлять вимоги до чинників. Головні з них такі:

1. Керованість – повинна бути забезпечено встановлення всіх потрібних рівнів чинників і підтримання їх на цих рівнях під час усього експерименту.
2. Однозначності – значення чинників повинні визначатись однозначно.
3. Точності – визначення величини чинника повинно здійснюватись з максимально можливою точністю, з огляду на поставлене завдання експерименту.

До сукупності чинників ставлять такі вимоги:

1. Сумісності – всі рівні чинників в сукупності повинні бути досяжними і забезпечувати безпечне функціонування системи.
2. Незалежності – повинна бути забезпечена можливість встановлення будь-якого рівня кожного чинника, незалежно від рівня всіх інших чинників.

4. Принципи побудови моделей систем

Математичне планування експерименту – це процедура вибору кількості та умов постановки дослідів необхідних і достатніх для вирішення поставленої задачі з потрібною точністю [40-44]. В плануванні експерименту сам експеримент розглядають як об’єкт дослідження та оптимізації. Теорія планування експерименту розробляє різні типи планів які виключають сліпий пошук під час досліджень, скорочують число необхідних дослідів і дають можливість побудувати модель системи. Перевагою методу планування експерименту є його універсальність та придатність використання для вирішення широкого кола завдань [42-43].

Залежно від того кількісними чи якісними є чинники будують різні моделі систем і використовують різні типи планів експерименту. Якщо чинники кількісні, то модель системи будують на основі регресійного аналізу і використовують плани повного чи дробового факторного аналізу, плани з різним розміщенням експериментальних точок в області факторного простору, які задовольняють певним умовам оптимальності. У випадку якісних чинників використовують методи дисперсійного аналізу і плани експерименту будують на основі грецьких, латинських, греко-латинських та інших квадратів.

Якщо відгук системи є кількісним і всі чинники від якого він залежить також кількісні то використовують регресійну модель для опису системи. У переважній більшості випадків використовують регресійні моделі поліноміального типу, тобто залежність відгуку від рівнів чинників представляють у вигляді поліному. Таке представлення розглянуто у розділі регресійного аналізу. Коефіцієнти поліноміальної моделі безпосередньо показують ступінь впливу на величину відгуку. Завдання планування експерименту зводиться до вибору умов проведення дослідів, їх кількості з тим, щоб одержати якомога точнішу регресійну модель, яка адекватно описує систему.

Регресійна модель, яка описує складні функції відгуку, може бути одержана шляхом розкладу функції розкладу в степеневий ряд:

$$y(x_1\ x_2 \ldots x_n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{ij} x_i x_j x_k + \ldots \qquad (126)$$

Тут величини $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \beta_{ijк}$ – це коефіцієнти регресії;

Обмежуючись тільки β_i, β_0 одержуємо модель 1-го порядку;

Модель 2-го порядку враховує $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}$;

Усе разом – модель 3-го порядку.

x_i, x_j - члени взаємодії.

Таке представлення функції відгуку називають поліноміальною регресійною моделлю. У ній β_0 - вільний член, що описує середнє значення функції відгуку в області визначення. Наступні члени – лінійні і подальші члени вищих порядків. Якщо відкинути всі члени другого і вищих порядків, то одержуємо лінійну регресійну модель. Використання лінійних моделей надзвичайно широке. У багатьох задачах обмежуються тільки лінійними членами, як це було показано в попередніх частинах даного посібника. Таку модель називають моделлю першого порядку. Кривизну поверхні відгуку описують члени другого порядку. Рівняння регресії другого порядку одержують відкинувши всі члени третього та вищих степенів. Модель яка відповідає рівнянню регресії другого порядку називають математичною моделлю другого порядку. Під час вирішення завдань оптимізації переважним чином використовують моделі другого порядку. Більшість планів експериментів [44] розроблена саме для моделей другого порядку. Моделі третього порядку одержують аналогічно моделям першого та другого порядку, відкидаючи в (126) всі члени вищих порядків. Така модель використовується не так часто, але для опису складних нелінійних процесів вона досить корисна. З ростом порядку моделі і кількості чинників модель стає досить складною, оскільки в неї входить велике число доданків. Фізичне трактування такої моделі складне і не завжди можливе. Тому в плануванні експерименту обмежуються, як правило, моделями першого – третього порядків при максимальному числі чинників чотири – п’ять. В лінійних моделях подекуди враховують і більше число чинників.

Лекція 13. **Повний й дробові факторні експерименти**

1. Вимоги до постановки експерименту. Проблема рандомізації.
2. Повний факторний експеримент.
3. Дробовий факторний експеримент.
4. Плани для моделей другого та вищих порядків.
5. Плани експериментів з якісними чинниками.

1. Вимоги до постановки експерименту. Проблема рандомізації

Після того як сформульовані цілі й завдань досліджень, розглянуті чинники, та відгуку системи які визначають її роботу чи встановлені параметри оптимізації приступають до безпосереднього планування експерименту. План експерименту включає:

- перелік дослідів та умов їх виконання;
- визначення кількості дослідів в кожній точці факторного простору (простору чинників);
- визначення умов проведення дослідів;
- встановлення порядку проведення дослідів.

Кількість дослідів, які потрібно провести в кожній точці факторного простору визначається вимогами точності результату.

Умови й порядок проведення дослідів обумовлені вимогами рандомізації експерименту.

Рандомізація – статистичні процедури, в яких рішення приймають випадковим способом. Наприклад, процедури, що забезпечують випадковий відбір екземплярів при побудові випадкової вибірки.

Сенс рандомізації – внесення випадковості в експеримент, забезпечення, щоб всі невраховані під час експерименту чинники проявляли себе як випадкові впливи, які тільки змінюють похибку експерименту, а не спотворюють його результату [42].

Для ілюстрації суті процедури рандомізації розглянемо простий приклад. Нехай деякий експеримент потрібно проводити протягом двох днів. Саме зручніше провести його так, щоб за один день виконати всі вимірювання при одних значеннях чинників, а за другий день при інших. Але в такому разі невраховані впливи, які діяли перший день, проявляться тільки в дослідах, виконаних в цей день. Після обробки результатів не буде впевненості, що ефект викликаний зміною чинників, а не зміною цих неврахованих впливів. Тому порядок проведення досліду потрібно змінити так, щоб звести до мінімуму невраховані впливи. Це можна зробити, якщо половину дослідів при одних значеннях чинників провести в один день, а іншу – в другий. Тоді вплив неврахованих результатів буде рівномірно розподілений на результатах дослідів. Але якщо ми поділимо всі досліди рівномірно на два дні, то цілком можливо, що при цьому ми допустимо, що інший чинник приймав в один день одні значення, а в наступний інші. Знову ж виникає така сама проблема розділення впливу чинника та неврахованих чинників. Щоб такого не трапилось і риск впливу звести до мінімуму, порядок проведення дослідів визначають випадковим чином. У такому випадку вплив неврахованих чинників можна приписати помилці експерименту і під час обробки результатів використати добре розроблені й перевірені методи математичної статистики.

Аналогічна ситуація виникає у багатьох інших ситуаціях, коли в ході експерименту змінюються умови його проведення. Щоб усунути вплив неврахованих чинників, вводять процедуру рандомізації, яку подекуди називають змішуванням ефектів. Як правило, воно полягає у випадковому виборі екземплярів, у встановленні випадкового порядку проведення дослідів, або зміні випадковим чином рівнів чинника. Для кожної з експериментальних схем існують свої методи рандимізації.

2. Повний факторний експеримент

Повним факторним експериментом (ПФЕ) називають експеримент, який реалізує всі можливі комбінації рівнів керованих чинників, кожен з яких варіюють (встановлюють) на декількох рівнях (як правило, на двох або трьох, залежно від порядку моделі).

Повний факторний експеримент використовують для побудови лінійних та неповних степеневих математичних моделей у випадку, коли потрібно емпіричним шляхом одержати математичний опис рівняння відгуку складних систем.

Порядок побудови плану ПФЕ експерименту такий:

1. Формулюють цілі експерименту та його завдання.
2. Виконують аналіз апріорних даних.
3. Вибирають параметр відгуку та модель експерименту.
4. Вибирають той чи інший план експерименту залежно від кількості чинників та порядку моделі.
5. Визначають чинники. Вибирають їх рівні згідно визначення.
6. Перетворюють розмірні значення чинників X_i у безрозмірні величини Z_i які змінюються в границях від -1 до +1. Для цього використовують формули

$$Z_i = \frac{X_i - \left(\frac{X_{min} + X_{max}}{2}\right)}{\left(\frac{X_{min} - X_{max}}{2}\right)}. \qquad (127)$$

7. Складають план експерименту у вигляді матриці.
8. Виконують рандомізацію плану експерименту, визначають порядок проведення дослідів й умови їх проведення.
9. Розробляють методику проведення експерименту і в разі потреби її узгоджують та затверджують.
10. За розробленою методикою проводять експеримент, обробляють результати, інтерпретують їх та розробляють практичні міри реалізації результатів.

Порядок побудови матриці повного факторного експерименту

Розглянемо особливості ПФЕ на прикладі повного трьохфакторного експерименту для лінійної моделі (див.табл. 15). Прийняте [44] позначення такого експерименту ПФЕ N^K, у нашому випадку – це ПФЕ 2^3. Цифра 2 – означає дворівневий план, 3 – позначає кількість чинників.

Таблиця 15 - Матриця плану двохрівневого трьохфакторного експерименту ПФЕ 2^3 для лінійної моделі

№	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1Z_2	Z_2Z_3	Z_3Z_1 у	$Z_1Z_2Z_3$	Y
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	
2	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	
3	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	
7	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
	β_0	β_1	β_2	β_3	β_{12}	β_{23}	β_{31}	β_{123}	

Розглянемо порядок складання плану експерименту. Наприклад, потрібно побудувати лінійну модель. Визначено параметр відгуку, який залежить від трьох чинників. Тобто завдання побудувати трьохфакторну лінійну модель. При лінійній моделі чинники варіюють на двох рівнях -1 та +1. Матриця плану експерименту матиме вигляд, показаний в табл.15.

Побудову матриці будь-якого факторного експерименту здійснюють в такому порядку.

1. Заповнюють „шапку" таблиці в яку заносять:
   - номер досліду по порядку,
   - фіктивний чинник Z_0,
   - всі чинники від яких залежить величина відгуку (параметр оптимізації) $Z_1\ Z_2 \ldots Z_n$;
   - всі можливі взаємодії чинників: подвійний, потрійний і т.д.;
   - величину відгуку у.

2. Визначають кількість дослідів у ПФЕ. Вона дорівнює 2^n для лінійної моделі, 3^n для моделі другого порядку. У табл.15 число дослідів $2^3 = 9$

3. Записують у колонку фіктивного чинника Z_0 значення +1 для всіх дослідів.

4. Записують у колонку першого чинника Z_1 значення починаючи з самого нижнього рівня і змінюючи їх від досліду до досліду -1, +1 (для трьох факторного експерименту -1, 0, +1).

5. Записують у колонку другого чинника Z_2 значення починаючи з самого нижнього рівня і змінюють значення в два рази повільніше ніж для першого чинника (див табл. 15).

6. Записують значення наступних чинників змінюючи для кожного наступного значення в два рази повільніше ніж для попереднього.

7. Заповнюють колонки взаємодії чинників. Рівень кожного чинника визначають, помноживши відповідні рівні чинників які взаємодіють.

Таким чином одержують матрицю будь-якого плану ПФЕ. Позначають плани ПФЕ, наприклад:

2^3 – трьохфакторний експеримент для лінійної моделі.

3^4 – план чотирьохфакторного експерименту для квадратичної моделі.

Наприклад, матриця плану двохфакторного трирівневого експерименту ПФЕ 3^2 наведена у табл.16.

Таблиця 16 - Матриця плану ПФЕ 3^2

№	Z_0	Z_1	Z_2	Z_1^2	Z_2^2	Z_1Z_2	y
1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	
2	+1	0	-1	0	+1	0	
3	+1	+1	-1	+1	+1	-1	
4	+1	-1	0	+1	0	0	
5	+1	0	0	0	0	0	
6	+1	+1	0	+1	0	0	
7	+1	-1	+1	+1	+1	-1	
8	+1	0	+1	0	+1	0	
9	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
	β_0	β_1	β_2	β_{11}	β_{22}	β_{12}	

Рандомізація плану

Наступним кроком є рандомізація плану. Її можна здійснити, наприклад, за допомогою генератору чи таблиць рівномірно розподілених випадкових чисел. Поряд з номером досліду записують випадкове число з таблиці, чи генерують його комп’ютером і потім встановлюють порядок проведення дослідів по мірі зростання цих генерованих чисел. Сенс такої рандомізації, розглянемо ще раз. Він полягає у тому, що коли проводити досліди у вказаному в таблиці порядку, то спочатку будуть проведені всі досліди де чинник Z_3 (див. табл. 15) встановлений на рівні -1, а потім досліди де рівень чинника Z_3 +1. Якщо в ході досліду якісь зовнішні умови зміняться, то ця зміна відобразиться таким чином, що спотворить вплив чинника Z_3. Щоб запобігти цьому порядок дослідів потрібно встановити випадковим. Тоді зміна зовнішніх умов не відобразиться на жодному чинникові, і тільки дещо збільшить загальну похибку експерименту. Наприклад, досліди можна провести в такому порядку 4, 7, 2, 5, 3, 8, 1, 9, 6 який визначений випадковим чином. Якщо кожен дослід проводять по декілька разів або сам експеримент має ряд етапів, то на кожному етапі експерименту потрібно виконувати процедуру рандомізації.

Перевірка відтворюваності результатів

Після проведення експерименту потрібно перевірити відтворюваність результатів. Завдання перевірки відтворюваності результатів в більшості випадків зводиться до перевірки однорідності дисперсії в різних точках плану експерименту. Для цього розраховують загальну дисперсію результатів експерименту $S^2_{заг}$ і дисперсії повторних дослідів у кожній точці експерименту S^2_{∂}. За даними значеннями розраховують критерій Фішера F:

$$F = \frac{S_{\partial}^{2}}{S_{заг}^{2}} \qquad (128)$$

Зрівнюють з критичною величиною $F_{df_1 df_2 \alpha}$ $(df_1 = l-1; df_2 = m-1$, де m – загальна кількість дослідів в експерименті, l – кількість дослідів в одній точці експерименту). Якщо результат задовільний $F < F_{df_1 df_2 \alpha}$ тобто забезпечена однорідність, то виконують подальший аналіз. Якщо хоч для однієї точки експерименту результат незадовільний, то потрібно або збільшити кількість повторних дослідів у кожній точці експерименту, або змінити план експерименту, чи змінити границі варіювання чинників.

Якщо забезпечена однорідність дисперсії результатів у різних точках експерименту, то приступають до обробки результатів та побудови математичної моделі.

Розрахунок коефіцієнтів регресійної моделі

Після перевірки однорідності дисперсії результатів у колонку відгуку ***y*** таблиці плану експерименту записують значення результатів окремих дослідів, якщо їх проводять одноразово, або середнє значення. У випадку коли в кожній точці проведено по декілька вимірювань, та приступають до розрахунку коефіцієнтів моделі (рівняння регресії).

Значення коефіцієнтів рівняння регресії (відповідні коефіцієнти вказано в нижньому рядку матриці плану експерименту на табл.15) розраховують таким чином:

- Перемножують величину в колонку відгуку на відповідні значення колонки плану експерименту,
- Знаходять суму одержаних значень,
- Розділяють одержану суму її на кількість дослідів у плані експерименту (кількість рядків плану).
- Результати розрахунків записують у вигляді регресійної моделі, в якій коефіцієнти безрозмірні, а як значення чинників виступають величини $Z_1\ Z_2 \ldots Z_n$.
- Від безрозмірних величин переходять до розмірних, помноживши безрозмірні величини на величину діапазону їх варіацій, а саме на

$$\Delta X_i = \frac{X_{max}^{i} - X_{min}^{i}}{2}. \qquad (129)$$

Заміняючи безрозмірні величини розмірними одержуємо математичну модель виражену у величинах в яких проводили вимірювання.

Після отримання математичної моделі потрібно перевірити значимість коефіцієнтів регресії, тобто їх відмінність від нуля. Якщо коефіцієнти статистично не відрізняються від нуля, то їх потрібно відкинути, спростивши таким чином модель.

Перевірка адекватності моделі

Наступним кроком обробки результатів експерименту є перевірка адекватності моделі. Адекватність моделі перевіряють за залишковою дисперсією. Для цього порівнюють значення розраховані за одержаною математичною моделлю і експериментальні дані. Визначають дисперсію різниці у всіх точках і порівнюють її з дисперсією повторних випробувань. Якщо ці дисперсії однорідні за критерієм Фішера, то модель вважають адекватною. Питання перевірки адекватності моделі були розглянуті на попередніх лекціях.

Якщо модель адекватна, то аналіз закінчують і приступають до інтерпретації результатів та розробки практичних рекомендацій для впровадження результатів експерименту.

3. Дробовий факторний експеримент

Повний факторний експеримент реалізує всі можливі поєднання чинників. Він вимагає проведення $N = 2^n$ дослідів при дворівневому плані, чи $N = 3^n$ дослідів, якщо план трирівневий. При кількості чинників більш трьох план ПФЕ стає громіздким і важким в реалізації. Наприклад, при лінійній моделі з 7 чинниками по плану ПФЕ потрібно виконати $N = 2^7 = 128$ дослідів. Кількість дослідів значно перевищує кількість коефіцієнтів лінійної моделі. Такий план експерименту називають надлишковим. Надлишковий план досить складний і реалізація його важка. Надлишковий план дозволяє розрахувати не тільки лінійні складові моделі а різноманітні взаємодії чинників. Число таких взаємодій може бути

$$N = \frac{n(n-1)}{2}. \qquad (130)$$

Тобто при великій кількості чинників число взаємодій зростає майже пропорційно квадрату їх числа. Більшість з цих взаємодій несуттєва. Тому надлишковість повного факторного експерименту, в більшості випадків, є непотрібною.

Надлишковість плану може бути використана для визначення нелінійних коефіцієнтів взаємодії чинників чи для зменшення кількості дослідів. Можливість зменшення кількості дослідів зумовлена тим, що в план ПФЕ включені всі можливі взаємодії чинників. Наприклад план ПФЕ 2^3, який щойно розглянуто, крім парних взаємодій включає і потрійну взаємодію. В плани з більшою кількістю чинників входять більш складні взаємодії. В реальних ситуаціях, як вже було відмічено, взаємодії чинників виникають порівняно рідко. Ще рідше виникають потрійні й більш складні взаємодії. Тому в математичну модель багатофакторного експерименту включають тільки ті взаємодії наявність яких зумовлена умовами роботи системи або підтверджена апріорно до експерименту відомою інформацією. Модель яка не включає певних взаємодій чинників, є спрощеною, позбавленою надлишковості, для її побудови можна суттєво спростити план експерименту. Ці спрощені плани являють собою певну частину плану ПФЕ. Їх називають планами дробових факторних експериментів (ДФЕ).

Розглянемо матрицю ПФЕ 2^3 (див. табл.15). Якщо потрійну взаємодію чинників $z_1 z_2 z_3$ замінити четвертим чинником z_4, то ми матимемо план, матриця якого приведена в табл. 17. Тут колонку взаємодії чинників $z_1 z_2 z_3$ перемістили і назвали z_4. Жирною лінією в матриці виділено власне план проведення експерименту. В нього входять 4 чинники і потрібно виконати 8 дослідів. Повний факторний експеримент з 4 чинниками потребує проведення $N = 2^4 = 16$ дослідів. Даний план являє собою половину плану ПФЕ. Тому його називають ½ реплікою ПФЕ 2^4.

У результаті виконання експерименту за цим планом одержимо лінійну математичну модель для чотирьох чинників з врахуванням попарних взаємодій, а саме:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{4} \beta_i z_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{3} \beta_{ij} z_i z_j . \qquad (131)$$

Таблиця 17 - План дробового факторного експерименту 2^{4-1} (1/2 репліка ПФЕ 2^4)

№	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_1Z_2	Z_2Z_3	Z_1Z_3	y
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1	
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	+1	
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
	β_0	β_1	β_2	β_3	β_{12}	β_{23}	β_{13}	β_{123}	

За результатами експериментів проведених за цим планом одержують коефіцієнти регресії для чотирьох чинників і трьох попарних взаємодій.

Побудову чотирьох факторного плану на основі ПФЕ 2^3 можна виконати дещо інакше. В якості Z_4 можна вибрати одну з трьох подвійних взаємодій ту роль яка за попередніми даними не суттєва.

Наприклад $Z_4 = Z_1Z_3$ перейменували відповідним чином колонки плану а саме ПФЕ $Z_1Z_3 = Z_4$; $Z_1Z_2Z_3 = Z_2Z_4$ ми одержуємо той же план ДФЕ з дещо зміненим порядком чинників і їх рівнями в кожному досліді. Це показує, що вибір чинників в експерименті не є довільним. Оскільки в плані ДФЕ враховані не всі взаємодії, то при виборі чинників необхідно враховувати попередні дані про наявність взаємодій і не можна поступати як заманеться. Співвідношення $Z_4 = Z_1Z_2Z_3$ або в другому випадку $Z_4 = Z_1Z_3$ називають генеруючим співвідношенням оскільки воно служить для побудови плану ДФЕ. Визначаюче співвідношення одержують, якщо ліву та праву частину генерую чого співвідношення помножити на Z_4. Оскільки $Z_4^2 = 1$, то одержуємо $Z_1Z_2Z_3Z_4 = 1$ або $Z_1Z_3Z_4 = 1$. Знання визначаючого співвідношення дозволяє знайти оцінку сумісних ефектів різних чинників, або її деколи називають змішуванням чинників. Поняття змішування чинників легко зрозуміти з розгляду плану ДФЕ поданого в табл.. 17. Чинник Z_4 фактично співпадає з потрійною взаємодією $Z_1Z_2Z_3$. Тобто після обробки даних експерименту коефіцієнт β_4 буде враховувати як дію чинника Z_4, так і потрійну взаємодію. Якщо є підстави вважати що потрійна взаємодія несуттєва то β_4 враховує дію чинника Z_4. У другому випадку β_4 буде враховувати сумарний ефект взаємодії Z_1Z_3 та чинника Z_4. визначаюче співвідношення дозволяє враховувати не тільки змішування ефектів, які послужили основою створення моделі, але і всіх інших ефектів. Наприклад, співвідношення $Z_1Z_2Z_3Z_4$ показує, що співпадають такі ефекти: взаємодії Z_1Z_3 із взаємодією Z_3Z_4; взаємодії Z_1Z_3 із Z_2Z_4; взаємодії Z_1 з $Z_2Z_3Z_4$; Z_2 з $Z_1Z_3Z_4$; Z_3 з $Z_1Z_2Z_4$. У цьому можна переконатись, якщо в матриці ДФЕ перемножити відповідні колонки. Співвідношення колонок і означає змішування ефектів. Залежно від визначаючого співвідношення відбувається змішення різних ефектів. Як правило, під час обробки результатів експериментів рідко аналізують ефекти змішування. Але під час інтерпретації результатів експерименту завжди потрібно враховувати можливе змішування ефектів, і робити висновки з врахуванням можливості такого змішування.

У плані ДФЕ розглянутого в табл.17.можна ще ввести від одного до трьох чинників, змінюючи ними колонки взаємодії. Якщо ми додатково одну з взаємодій замінимо наступним п’ятим чинником, наприклад $Z_2Z_3 = Z_5$, то одержимо вже план ДФЕ для п’яти чинників. Цей план позначають ДФЕ 2^{5-2}. Повний факторний експеримент з п’ятьома чинниками включає $N = 2^5 = 32$ досліди. Створений план ДФЕ 2^{5-2} всього має 8 дослідів, тобто становить ¼ репліку ПФЕ. Плани ДФЕ позначають таким чином:

$$ДФЕ\ 2^{n-p},$$

де n – загальне число чинників;

p – число чинників, які прирівняні до ефекту взаємодії.

Розглянуті плани ДФЕ позначають як 2^{4-1} та 2^{5-2}. Читають такі позначення так: дворівневий план для чотирьох чинників на основі ПФЕ 2^3, або ½ репліка дворівневого експерименту чотирьох чинників. дворівневий план для п’яти чинників на основі ПФЕ 2^3 чи ¼ репліка ПФЕ 2^3.

На основі ПФЕ 2^3 можна розробити план експерименту з 7 чинниками. Враховуючи, що в такому експерименті визначають 8 коефіцієнтів (з врахуванням вільного β_0) то кількість дослідів співпадає з кількістю коефіцієнтів регресії. Такий план називають повністю насиченим планом. У ньому всі взаємодії використовують в якості чинників. Повністю насичені плани доцільно використовувати на початкових етапах дослідження для побудови лінійної моделі. Насичені плани дозволяють суттєво зменшити кількість дослідів. Так, при 15 чинниках ПФЕ вимагає проведення 32768 дослідів, а дробовий факторний експеримент 2^{15-11} всього 16 дослідів.

У насичених планах ефекти взаємодії змішані з ефектами чинників. Для аналізу змішування ефектів потрібно враховувати всі генеруючи співвідношення, на основі яких побудовано план.

Особливої уваги при використанні насичених планів ДФЕ потребує рандомізація експерименту. Рандомізацію потрібно проводити на всіх етапах експерименту. Якщо в ході експерименту потрібно виконувати які-небудь операції то порядок кожної з них повинен обов'язково бути рандомізований.

4. Плани для моделей другого і вищих порядків

Дворівневі плани ПФЕ і ДФЕ, в яких чинники змінюють на двох рівнях, не можуть бути використані для побудови моделей другого порядку. Вони дозволяють будувати неповні факторні моделі які враховують ефекти взаємодії чинників, але не дають можливості побудувати моделей з квадратичними членами X_i^2. Це тому, що коли в план дворівневого експерименту ввести колонки Z_i^2, то вони матимуть значення тільки +1 і будуть співпадати з колонкою фіктивного чинника Z_0, а відповідні коефіцієнти регресії співпадають з вільним членом рівняння β_0. Тому для побудови моделей другого порядку використовують плани, в яких чинники варіюють більш ніж на двох рівнях. Планів експериментів де чинники варіюють більш ніж на двох рівнях побудовано дуже багато [44].

Велика кількість таких планів зумовлена проблемою оптимальності. Існують різні види оптимальності планів, які будують розглянуті дещо пізніше. Найпростішими трьохрівневими планами є плани ПФЕ. Ці плани являють собою всі можливі комбінації чинників, які змінюють на трьох рівнях. Трьохрівневий план ПФЕ містить $N = 3^k$ дослідів. Матриця найпростішого плану ПФЕ 3^2 приведена в табл.16.

Будують трьохрівневий план ПФЕ аналогічно як і дворівневий. Фіктивний чинник встановлюють на рівні +1. Перший чинник змінюють на рівнях -1, 0, +1. Кожен наступний чинник змінюють у два рази повільніше. Колонки взаємодії визначають перемножуючи відповідні колонки чинників. Реалізація такого плану розглянута в посібнику для лабораторних робіт [38].

Згідно з планом двох факторного трирівневого ПФЕ видно, що коефіцієнт взаємодії β_{12} розраховують за чотирма дослідами (у відповідній колонці таблиці тільки чотири коефіцієнти відмінні від нуля). Для розрахунку всіх інших коефіцієнтів β_1 β_2 та β_{11}, β_{22}. використовують дані 6 дослідів. Якщо на основі такого плану побудувати план ДФЕ шляхом зміни взаємодії додатковим чинником, то виявиться, що коефіцієнти рівняння регресії для різних чинників будуть обраховані з різною точністю за рахунок того, що для обчислення використовується різна кількість даних. При більшій кількості чинників різниця проявляється ще більше. При визначенні рівняння регресії результати деяких дослідів мають більший вплив ніж результати інших дослідів. Точність визначення різних коефіцієнтів рівняння регресії не одинакова.

З огляду на це можна зробити висновок, що плани ДФЕ побудовані на основі трирівневих повних факторних експериментів не оптимальні з точки зору точності визначення коефіцієнтів регресії та ще по ряду параметрів. Теорія планування експерименту [29, 41-43] розглядає існує понад 20 критеріїв оптимальності плану. Всі критерії поділяють на дві групи [29]. До першої відносять критерії пов'язані з точністю визначення коефіцієнтів регресії. До другої групи відносять критерії пов'язані з помилкою визначення поверхні відгуку.

Критерії першої групи:

Д – оптимальності – коваріаційна матриця має найменше значення визначника із усіх можливих планів. Критерій найбільш загальний та повний.

Є – оптимальності – найбільше власне значення коваріаційної матриці.

А – оптимальності – мінімальна середня дисперсія коефіцієнтів рівняння регресії.

Критерії другої групи:

G – оптимальності – найменше значення дисперсії значень передбачених рівнянням регресії.

Q – оптимальності – найменше значення середньої дисперсії.

Коли експериментатор застосовує методи планування експерименту він самостійно не будує плану, а використовує вже розроблені плани. Перелік планів експерименту даний, наприклад, у збірнику [44]. Найбільш придатний план вибирають на основі аналізу завдань дослідження, попередніх даних про досліджувану систему, кількості чинників, потрібної функції відгуку та математичної моделі системи. Особливості кожного плану дані у збірнику [44]. Проведення експерименту та обробка результатів здійснюється в порядку, який описано вище.

5. Плани експериментів з якісними чинниками

У випадку завдань з якісними чинниками, коли рівні чинників визначають у шкалі найменувань чи ранговій шкалі побудова регресійних моделей неможлива. Модель таких систем будують на основі дисперсійного аналізу. Для побудови таких моделей, як правило, якісні чинники варіюють на більшій кількості рівнів ніж в регресійних моделях. Причому, чинники можуть змінюватись на різному числі рівнів. Для побудови математичної моделі в таких випадках використовують плани побудовані на основі латинських квадратів чи прямокутників, греко латинських квадратів і т.п.

Латинський квадрат являє собою квадратну таблицю з n елементами, кожен з яких зустрічається по одному разу в кожному рядку та кожному стовпчику. Наприклад, латинський квадрат 4х4 може мати вигляд показаний на рис.33.

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \\ C & A & D & B \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \text{ або } \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{bmatrix}$$

Рис. 33 – *Латинський квадрат, дві канонічні форми.*

Латинський квадрат у якого перший рядок та перший стовпець розміщені в стандартній формі, тобто в алфавітному порядку називають канонічною формою латинського квадрата. Число канонічних форм залежить від розміру квадрата. Два латинські квадрати називають ортогональними, якщо при накладанні одного квадрату на інший пара однакових букв зустрічається тільки один раз. Комбінацію двох ортогональних квадратів називають латинським квадратом другого порядку. Якщо елементи першого квадрату позначити латинськими буквами а другого – грецькими то такий квадрат називають греко-латинським. Три чи більше ортогональних квадратів утворюють гіпер-греко-латинський квадрат. Як правило елементи третього ортогонального квадрата позначають цифрами.

У плануванні експерименту використовують плани побудовані на латинських, греко-латинських гіпер-греко-латинських квадратах. У деяких випадках, коли рівні варіювання чинників різні, використовують латинські прямокутники. План на основі латинського квадрату будують у випадку двох чи трьох факторного експерименту. При наявності чотирьох чинників в якості плану експерименту використовують греко-латинський квадрат, а коли чинників 5 чи більше гіпер-греко-латинські квадрати. Рівням чинників у плані відповідають літери та колонки і рядки плану. У роботі [36] використано план на основі гіпер-греко-латинського квадрату 4x4, який являє собою три ортогональні латинські квадрати покладені один на один. В експерименті визначили вплив п’яти чинників на величину шуму пускорегулюючих апаратів. Один з чинників був кількісним – кількість витків обмотки апарату, інші якісні – наявність щілин у витому магнітопроводі, матеріал немагнітного зазору, тип компаунду просочування і вплив корпуса та заливки. Всі чинники варіювали на 4х рівнях. Усього було виконано 16 дослідів і виготовлено 48 апаратів (по 3 в кожному досліді).

Таблиця 18 - Результати дисперсійного аналізу п’яти факторного експерименту виконаного за планом гіпер-греко-латинського квадрату

Джерело дисперсії (чинник)	**Число степенів свободи**	**Величина шуму в дБ**	
		Середній квадрат	**Критерій Фішера**
A	3	34,1	3,5
B	3	35,6	3,7
C	3	31,3	3,2
Д	3	62,0	6,4
E	3	27,0	2,8
Помилка	32	9,63	

Таблиця 19 - Середні рівні шуму ПРА визначені на основі експерименту за планом гіпер-греко-латинського квадрату

Чинник	**Рівень чинника**				**Рівень чинника при якому шум мінімальний**
	1	**2**	**3**	**4**	
А	11,1	9,1	9,2	7	Q_4
В	9,2	10,2	10,2	6,6	b_4
С	9,7	11,0	8,1	7,4	$c_3=c_4$
Д	6,2	10,6	8,2	11,2	d_1
Е	8,6	10,9	9,4	7,3	l_4

Дисперсійний аналіз плану виконано в порядку розглянутого раніше.

Результати дисперсійного аналізу наведені в табл. 18. Порівняння одержаних значень критерію з критичною величиною на рівні значимості $\alpha = 0{,}05$, яка дорівнює 2,7 показує, що всі чинники суттєво впливають на рівень шуму. Найбільш значущим є чинник Д – тип компаунду просочування апарату. У табл. 19 наведено залежність величини відгуку від рівнів чинників і рівні чинників, які мінімізують функцію відгуку.

Використання методу планування експерименту у даному випадку дозволило одержати статистично значимі результати при мінімальній кількості дослідів. Всього в експерименті виконано 16 дослідів в той час як при повному переборі чинників потрібно було б зробити 1024 досліди. Планування експериментів є ефективним методом одержання статистично значимих результатів при суттєвому зменшені об’єму виконаних робіт.

Лекція 14. **ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

1. Загальна характеристика сучасного математичного програмного забезпечення
2. Електронна таблиця Excel.
3. Пакет програм MATLAB.
4. Пакет MATEMATICA.
5. Програмний пакет Statistica (StatSoft Statistica).
6. Програмний комплекс SPSS.

1. Загальна характеристика сучасного математичного програмного забезпечення

Надзвичайно важлива роль обчислювальної техніки у вирішенні завдань математичного моделювання електромеханічних систем визначається складністю завдань моделювання, великим обсягом обчислювальної роботи, різноманітністю практичних завдань та методів їх вирішення, великим обсягом інформації, яку потрібно використовувати та зберігати. Щоб вирішити більшість завдань необхідно прикласти чимало зусиль і затратити багато часу. За довгими обчисленнями втрачається сутність завдання, розуміння основних залежностей. Обчислювальна техніка дозволяє значно скоротити обсяг роботи, виконати розрахунки за короткий час і представити результати в зручному для аналізу вигляді. Правильне використання сучасного математичного забезпечення сприяє підвищенню фундаментального і технічного рівня спеціалістів і значно покращує ефективність їх роботи.

Великою є роль обчислювальної техніки в освітній галузі, у вивченні теоретичного матеріалу. Полегшуючи математичні розрахунки вона знімає психологічні бар’єри використання математики для вирішення інженерних та навчальних завдань. Роблячи процес навчання достатньо простим та цікавим. Зосереджується менше уваги на рутинній обчислювальній роботі і студент має змогу глибше зрозуміти основні закономірності явищ, особливості їх протікання в тих чи інших умовах.

Використання сучасного програмного забезпечення у процесі навчання сприяє інтеграції освітньої системи нашої країни з найбільш розвинутими країнами світу. Розглянуте далі математичне програмне забезпечення вже давно використовується в освітніх системах таких країн як США, Англія, Германія, Франція. На основі цього програмного забезпечення побудовані курси вивчення широкого кола навчальних дисциплін. Термінологія, поняття багатьох навчальних дисциплін давно ввійшли в термінологію програмного забезпечення. Більшість практичних завдань виконується за допомогою розглянутих далі математичних пакетів, незнання яких вважається недоліком в освіті.

Обчислювальна техніка в наш час набула такого рівня, що вирішувати без неї будь-які практичні завдання сучасного виробництва тим більше наукові завдання неможливо.

Перевагами обчислювальної техніки є надзвичайно велика швидкість обробки інформації і величезні об'єми пам'яті. Технічні можливості обчислювальної техніки самі по собі грають важливу роль у вирішенні завдань математичного моделювання. Проте, ще більш значення має те, що розроблено математичне забезпечення, велика кількість програм, у які увійшли практично всі досягнення сучасної науки. Використовуючи це програмне забезпечення студенти піднімаються на рівень цих досягнень.

Спеціалісти з вищою освітою, які працюють на підприємствах, інженери, наукові працівники у наш час повинні вільно володіти обчислювальною технікою, добре знати програмне забезпечення, й вміти використовувати його для вирішення практичних завдань.

Математичне забезпечення ПЕОМ об'єднане в універсальні пакети програм, які призначені для вирішення певного кола завдань. В цих пакетах зосереджені передові досягнення різних напрямків науки. Серед програмних продуктів, які призначені для вирішення завдань математичного моделювання найбільш популярними є: електрона таблиця „Excel", математичний пакет „Mathematics", пакети інженерних і наукових розрахунків „Mat Cad" та „Mat Lab"; пакети статистичної обробки „Stat Graf", „Statistics" та „SPSS". Крім цих універсальних пакетів є цілий ряд програмних продуктів призначених для вирішення більш вузьких завдань. Це такі пакети, як наприклад: Numery, Origin, Siam, Aprocs і маса інших. Вони, подекуди, мають самостійне використання, але, по мірі розвитку програмного забезпечення, вони, чи їх аналоги, входять в універсальні програмні продукти.

Приступаючи до вивчення та використання програмних пакетів математичних систем у студентів і спеціалістів в першу чергу виникає розгубленість від надзвичайно широкого кола задач, які можуть вирішувати сучасні системи. Такі потужні системи як „Mathematics", „Mat Lab", „Statistics", „SPSS" забезпечують, кожна зокрема, сотні методів розрахунку та десятки варіантів вирішення задач. У них, як і в енциклопедії зібрані всі передові досягнення сучасної науки. Тому при першій зустрічі з ними відчувається розгубленість. Але не треба вважати, що користувачу потрібно засвоїти всі методи, які містять дані системи. Це практично неможливо і не потрібно. Адже ніхто не намагається вивчити всю енциклопедію. Нею користуються, коли виникає потреба знайти відповідь на певне запитання. Аналогічна ситуація і під час вивчення та використання сучасних систем математичного забезпечення. У першу чергу потрібно встановити таку систему на комп'ютер і уміти виконувати на ній найпростіші завдання. У міру роботи з системою, засвоєння фактичного матеріалу навчальної програми, виникнення нових завдань і потреб їх вирішення, відбувається набуття досвіду роботи з сучасними математичними системами.

Всі системи побудовані так, що за їх допомогою зручно виконувати найпростіші розрахунки. Від підрахунків у рамках елементарної математики легко перейти до більш складних завдань моделювання електромеханічних систем і до самих складних завдань таких як, наприклад, моделювання роботи всієї системи енергозабезпечення країни.

Під час користування сучасними математичними системами набагато більше значення мають спеціальні знання, тобто ті знання якими повинен володіти кожен спеціаліст інженер-електромеханік. Обчислювальна техніка тільки полегшує працю спеціаліста. Без знань фактичного матеріалу неможливо вирішити будь-яке завдання. Спеціаліст, який використовує обчислювальну техніку і сучасні математичні пакети, повинен чітко формулювати завдання, усвідомлювати що може зробити обчислювальна техніка, уміти інтерпретувати результати одержані за допомогою обчислювальної техніки. Без глибокого знання і розуміння суті виконаних обчислень, використання сучасних математичних пакетів втрачає сенс. Розуміння суті виконаних обчислень особливу роль має при використанні пакетів статистичної обробки даних. Особливістю статистичних обчислень є їх універсальність за якою скривається велика кількість деталей та специфічних моментів, неврахування яких може привести до помилкових висновків.

У нашому навчальному курсі ми розглянемо такі математичні системи, як:

- електронна таблиця Excel;
- „Mathematics”;
- „Mat Lab”;
- „Statistics”;
- „SPSS”.

Це п’ять систем, які доцільно використовувати для вирішення завдань математичного моделювання електромеханічних систем. У практичній роботі інженера-електромеханіка, науковця, студента достатньо використовувати одну з цих систем і добре володіти нею. Проте, коло завдань, які вирішує кожна з цих систем різне. Різними також є ціна і можливість установити ту чи іншу систему на комп’ютері. Крім дорогих професійних систем є системи, які роз поширюються безкоштовно і можуть бути поставлені на кожному комп’ютері. Відповідно до завдань, які потрібно вирішувати, і можливостей придбання здійснюється вибір тої чи іншої системи.

У цьому лекційному курсі розглянуто загальні принципи роботи з вказаними системами. Знання цих принципів достатнє для початку роботи і подальшого поглибленого вивчення систем. Більш важливим є засвоєння матеріалу по основних засадах математичного моделювання, який приведено в попередніх розділах лекціях, а також в навчальних дисциплінах таких як: математика, фізика, електротехніка, теоретична механіка, електропривод, теорія автоматичного керування та інші, що входять у програму підготовки спеціаліста-електромеханіка.

2. Електронна таблиця Excel

Електронна таблиця Microsoft Excel - це програмний засіб, призначений для виконання розрахунків на персональному комп'ютері; статистичних, економічних, інженерних. Це програмне середовище з широкими можливостями, найбільш просте для користувача. Крім виконання розрахунків Excel забезпечує високий рівень виконання текстової частини документа й разом з діаграми, графіками і малюнками Microsoft Excel є складовою частиною найбільш популярного офісного пакету Microsoft Office.

Електронна таблиця Excel – результат розвитку таких програмних засобів, як електронна Super Calk, Visi Calk, Lotus 2-4 -8.

Електронна таблиця являє собою поле, поділене на клітинки.

Нумерація клітинок здійснюється за колонками й рядками. Колонки позначаються літерами англійської абетки (a, b, c, ... aa, ab,…ba, bb, …), колонок вікні робочої книги 256. Нумерація за рядками здійснюється за допомогою цифр від 1, 2, 3 ... Всього може бути до 9999 рядків. Позначаються клітинки за номером колонки і рядка, наприклад А2, ВС6 і т.п.

У кожну клітинку може бути введено до 256 символів. Символи, введені в клітинку, відображаються в рядку формул, розміщеного у верхній частині робочого вікна.

Модель клітинки - клітинка в Excel має п'ять рівнів:

- перший верхній рівень - зображення на екрані;
- другий рівень - сховане форматування;
- третій рівень – формула (текст введений в клітинку);
- четвертий рівень - ім'я клітинки;
- п'ятий рівень - коментар.

Зображення на екрані це дані оброблені комп’ютером відповідно завданню користувача. Комп’ютер обробляє дані, що вводяться, і, як правило, автоматично виконує розрахунки. Після цього на дисплей виводиться результати обробки введених даних. Користувачу тільки здається, що щойно він ввів інформацію і вона з’явилась на екрані. Через швидкодію комп’ютера здається, що виводиться на екран щойно введені в клітинку дані.. Насправді зображення з'являється відповідно до результатів розрахунку даних уведених у клітинку (третій рівень) та інформації, яка міститься на всіх інших рівнях клітинки.

Типи даних: В електронній таблиці Excel використовують такі типи даних:

- текстовий;
- числовий;
- формула.

Формати числових даних можуть бути:

- загальний,
- грошовий;
- фінансовий;
- логічний;
- типу дати та часу.
- процентний;
- експонентний;
- дробовий.

Тип даних визначається автоматично чи може бути встановлений користувачем.

Сховане форматування задає:

- порядок розміщення даних в клітинці на екрані (праворуч, ліворуч, по центру)

- тип та розмір шрифту
- рамки клітинки
- зафарбовування клітинки
- покажчики захисту даних у клітці.
- формат числа який включає кількість значків після, ; поділ тисяч, знак грошової одиниці, формат плаваючого числа (плаваючої коми) або науковий формат (10000 – 1. E4; 1. 10^4 – 1.E - 3; 1.100).

Адресація клітинок: у стандартному режимі роботи при виконанні розрахунків, електронна таблиця використає дані, записані в клітках які знаходяться за вказаною адресою (колонка і рядок), або мають присвоєне ім'я. Адреса клітки складається з позначення колонки й номера рядка. Наприклад A5. При записі групи кліток використається знак – ":" Наприклад, (A5: F8); означає всі клітки в прямокутнику, що включають клітку A5 і F8.

В Excel існують такі адреси клітинок:

- відносна,
- абсолютна,
- за присвоєним іменем.

Відносна адреса – це адреса типу A5, C11, FK12, яка змінюється при копіюванні формул.

Абсолютна адреса – це адреса, яка не змінюється при копіюванні формул. Позначається вона значком $, наприклад, D7, FK12, $A5, B$5. Знак $ означає, що вказана координата не буде змінювати під час копіювання формули в інші клітинки таблиці. Абсолютна адреса при копіюванні не змінюється.

Ім'я клітини Присвоєння імені клітини відповідає тому, що в мові програмування ми називаємо описом змінних. Ряд мов програмування, передбачають, що змінні, які використовуються в програмі повинні бути описані. В описі змінних повинно бути вказано ім'я змінної та її тип. В електронній таблиці описові змінних відповідає присвоєння імені. Хоча можна користуватись даними без присвоєння імені, тоді в якості змінної можна вказувати адресу клітинки, в якій знаходяться потрібні дані. Але в ряді випадків користуватись адресою буває незручно, тому використовують присвоєння імені клітинці.

Коментар. Подекуди, в якості додаткової інформації, в клітинку вводять коментарій. Цей коментарій може, наприклад повідомляти, які дані повинні бути введені в клітинку, порядок вводу даних або іншу інформацію. Повідомлення введене як коментарій з'являється в нижньому рядку таблиці, якщо курсор встановлено на клітинці з коментарієм. Використання коментарю зручно у випадках коли розробляється електронна таблиця для вирішення певного завдання, щоб користувач знав під час використання розробленої програми як вводяться чи виводяться в потрібні дані.

Копіювання в електронній таблиці одна із важливих процедур, оскільки забезпечує автоматичний розрахунок у таблиці. Копіювання здійснюється за допомогою буфера. В електронній таблиці є декілька режимів копіювання. А саме:

- розміщення в буфер тільки адрес скопійованих клітинок;
- розміщення в буфер скопійованого тексту;
- Розміщення в буфер тільки адрес скопійованих клітинок.

На відміну від інших систем в електронній таблиці записуються у буфер, як правило, тільки адреси скопійованих кліток, а самі клітки відзначаються пунктиром. Наступним кроком копіювання є вставка. При вставці виконуються ряд дій: порівняння області скопійованої області з областю вставки, визначення можливості і кратності вставки; зміна адрес у формулах, спеціальні види вставок, деякі види математичних дій.

Обчислення в таблиці

За замовчуванням при введенні й редагуванні формул, обчислення числових значень в робочому аркуші відбуваються автоматично після введення кожного значення та натискання на клавішу ENTER. Під час складних розрахунках, при великих розмірах електронні таблиці, а також під час виконанні ітераційних обчислень, автоматичне обчислення буває незручним . Відмінити автоматичне обчислення можна командою. Після цього всі обчислення в електронній таблиці будуть виконуватися після натискання клавіші F9.

Бібліотека функцій електронної таблиці Excel

Для виконання обчислень Excel має бібліотеку функцій. Категорії функцій бібліотеці такі :

- математична й тригонометрична;
- операції з датою й часом;
- фінансові функції;
- текстові функції;
- логічні функції;
- інформаційні функції;
- функції баз даних;
- функції перегляду й посилань;

Бібліотека містить більше 200 функцій. Майстер функцій дозволяє пошарово задати функцію і записати її текст в електронну таблицю. За допомогою майстра функцій може бути побудовано складні функцій, які потребують введення ряду даних. Бібліотека призначена для виконання найскладніших операції з даними в різних галузях практичної діяльності.

Особливими функціями є функції обчислень дати та часу, фінансові функції. Текстові функції. Функції роботи з базами даних..

Функції обчислення дати та часу дозволяють обчислити день неділі за датою, визначити кількість днів між певними датами, дату. Яка наступить через задана число днів.

Фінансові функції дозволяють обрахувати складні проценти, суми які потрібно заплатити по кредитах, амортизаційні відчислення, загальні суми нараховані по кредитах и ряд інших фінансових функцій.

Текстові функції призначені для полегшення роботи з текстовими даними.

База даних – це масив даних який має певну структуру й взаємозалежність. У загальному понятті база даних складається з декількох таблиць між якими встановлені зв'язки. В Excel як база даних розглядається одна таблиця чи її виділена частина.

База даних розглядається як одне ціле. У ній виконуються операції вилучення та доручення даних, зміна даних, сортування даних, фільтрація даних та вибірка. Функції баз даних дозволяють також зробити обчислення даних числових полів, вираховують математичне очікування, дисперсію, тощо.

Пакети надбудови. Важливим доповненням до електронної таблиці є цілий ряд додаткових програм, які розширюють можливості електронної таблиці. В курсі моделювання використовуються такі додаткові пакети, як пакет аналізу даних та пакет пошуку рішення. Пакети надбудови, як правило не розміщуються на комп’ютері при звичайній інсталяції. Їх можна встановити після інсталяції. Для встановлення потрібного пакету треба зайти в пункт меню СЕРВИС НАДСТРОЙКИ ...У вікні надбудов (рис. 34) потрібно вибрати бажаний пакет програм на відмітити його галочкою. Після цього комп’ютер встановить вибраний пакет та забезпечить можливість працювати з ним.

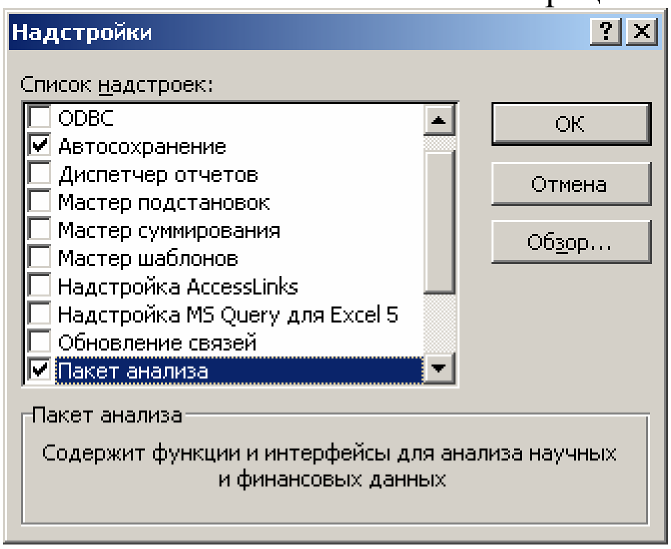


Рис.34 – *Вікно встановлення на комп’ютері пакетів надбудови до електронної таблиці.*

Пакет аналізу даних забезпечує вирішення цілого ряду завдань аналіз. Це відносно непоганий пакет статистичного аналізу. Він звичайно не надає всі можливості таких універсальних пакетів, як Statistica чи SPSS, але є досить корисним і забезпечує широке коло можливостей аналізу. В циклі лабораторних робіт цілий ряд робіт [38], а саме робота 4, 5, 7, 5 і 9 розраховані на використання пакету аналізу даних, а в роботі №3 використано пакет пошуку рішення.

На рис.35 приведена частина вікна вибору програм аналізу даних з переліком таких програм.

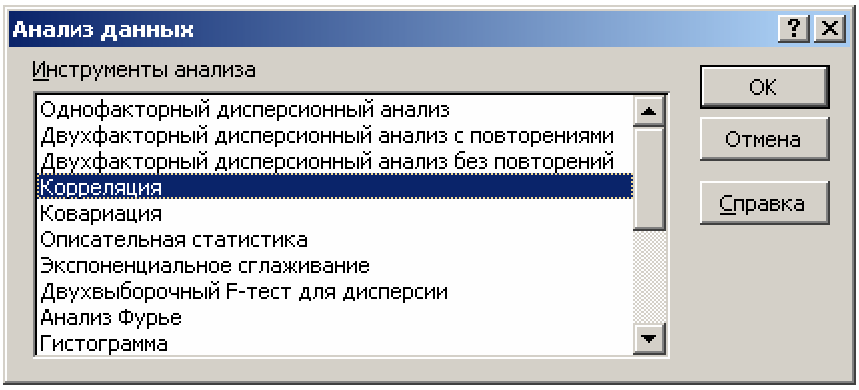


Рис. 35 – *Вікно вибору програм аналізу даних*

Побудова діаграм. Електронна таблиця дозволяє побудувати приблизно до 100 різних типів діаграм. При побудові діаграм вибирається масив даних. приведених на клітинках сторінки електронної таблиці Побудова здійснюється за допомогою майстра діаграм. Залежно від типу діаграми майстер вимагає введення певних даних.. Найчастіше в курсі моделювання електромеханічних систем застосовуються звичайні графіки та точкова діаграми. Точкова діаграма дозволяє побудувати залежності між двома чи більшим числом величин поданих координатами відповідних точок. Звичайна стандартна діаграма ГРАФИК, дещо спрощена вона будує графіки коли масиви даних, приведені до однієї незалежної змінної поданої в одній таблиці.

Макроси. Це серії команд створені користувачем, які зберігаються в модулі Visual Basic і призначені для виконання групи часто повторюваних дій. Вони являють собою програми створені мовою Visual Basic, і мають свою назву. Макроси починаються із символу «s» й закінчуються «end». Виконуються макроси автоматично під час виникнення певних передбачених ситуацій.

Макрос можна створити самостійно на мові програмування Basic, а можна записати вибравши команду СЕРВІС-МАКРОС. Запис здійснюється після вибору команди створення макросу. Після цього всі дії записуються у вигляді програми до моменту натискання клавіші кінець макросу. У файлі книги Excel зберігаються не тільки дані, але й макроси, тексти програм Visual Basic.

3. Пакет програм MATLAB

MATLAB (скорочення від англ. «Matrix Laboratory» – матрична лабораторія) це універсальний математичний програмний пакет, який використовують практично у всіх технічних вищих навчальних закладах світу, інженерних проектах і наукових дослідженнях. Основною особливістю мови MATLAB є направленість на роботу з матрицями, як виразили творці мови в гаслі «думай векторно». Пакет працює на комп’ютерах з усіма основними сучасними операційними системами GNU/Linux, Mac OS, Solaris і Microsoft Windows та ін.

Мова програмування MATLAB розроблена деканом факультету комп'ютерних наук в Університеті Нью-Мексіко Клівом в кінці 1970-х років. Мета розробки - дати студентам факультету можливість використання сучасні на той час програмні бібліотеки. У 1984 програма була переписана на мову С і заснована компанія The MathWorks яка тепер забезпечує комерційне використання. MATLAB. Спочатку MATLAB призначався для проектування систем керування, але швидко завоював популярність в багатьох інших наукових і інженерних областях. а також широко використовується в освіті. Логотип системи MATLAB подано на рис. 36.

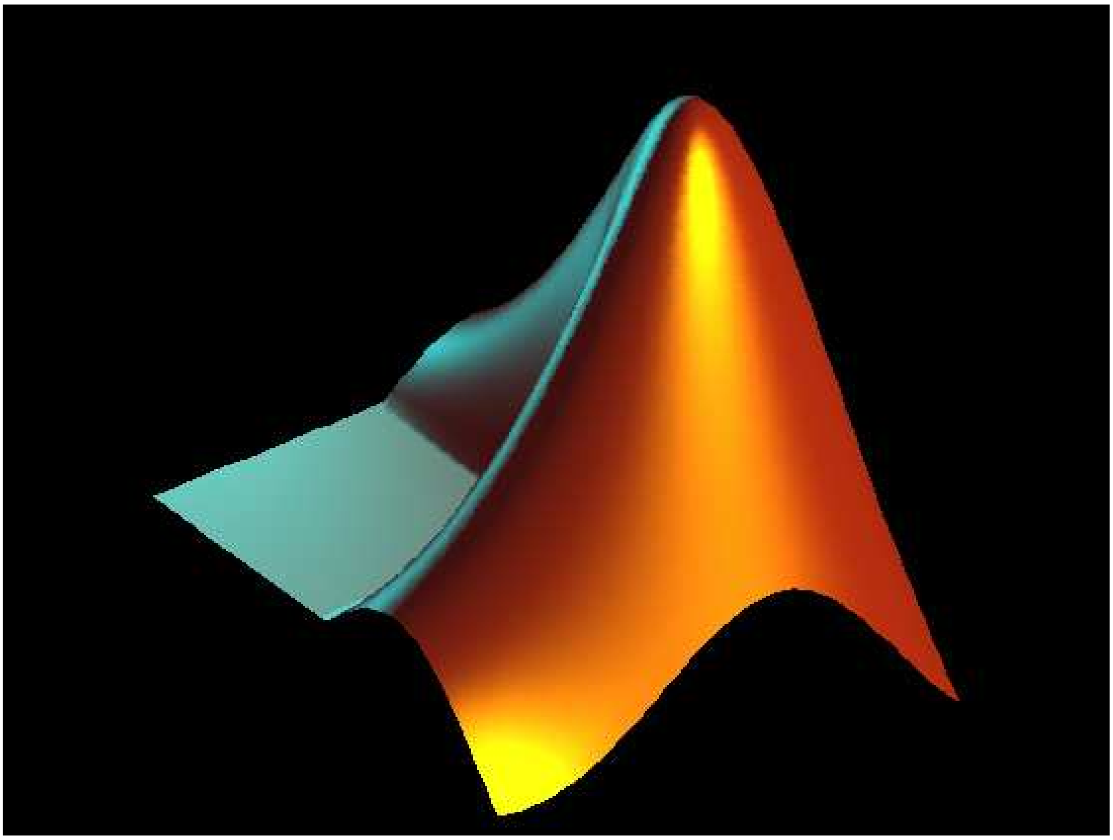


Рис. 36 – *Логотип системи MATLAB*

Система MATLAB працює в режимі інтерпретації. Користувач дає команди, які система ПК перетворює в машинні коди та виконує їх. MATLAB надає користувачу декілька сотень функцій для аналізу даних практично у всіх областях математики: диференційні та інтегральні рівняння, символьна математика, матричні та векторні обчислення, лінійна алгебра, математична статистика, фінансовий аналіз, цифрова обробка та аналіз сигналів, проектування систем зв'язку, нейронні мережі, нечітка логіка, аналіз і синтез географічних карт, візуалізація і представлення даних та ін.

До складу бібліотеки MATLAB входить цілий ряд прикладних пакетів. Наприклад: LTI-Viewer – пакет лінеаризації та аналізу лінійних систем; Control System Toolbox - пакет для розробки систем управління. Є також додаткові бібліотеки блоків для різних областей застосування, наприклад, Power System Blockset - моделювання електротехнічних пристроїв, Digital Signal Processing Blockset - набір блоків для розробки цифрових пристроїв і т.д.

Особливе місце серед пакетів MATLAB займає Simulink - інтерактивний інструмент для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем. При моделюванні з його використанням реалізується принцип візуального програмування, відповідно до якого, користувач на екрані, з бібліотеки стандартних блоків, створює модель пристрою і здійснює розрахунки. При цьому користувачу не потрібно досконально вивчати мову програмування і чисельні методи математики, а досить загальних знань, потрібних при роботі на комп'ютері й знань тієї наукової області, в якій він працює. Він дає можливість будувати графічні блок-діаграми, імітувати динамічні системи, досліджувати працездатність систем і удосконалювати проекти. Simulink також інтегрується з пакетом Stateflow, який служить для моделювання поведінки систем викликаної певними подіями. Ці переваги роблять Simulink найбільш популярним інструментом для проектування систем керування і комунікації, цифрової обробки сигналів та інших додатків.

Типове використання MATLAB - це:

- математичні обчислення;
- створення алгоритмів;
- моделювання;
- аналіз даних, дослідження і візуалізація;
- наукова і інженерна графіка;
- розробка додатків, включаючи створення графічного інтерфейсу.

Основні складові системи та її структура показані на рис. 37, 38.

Рис. 37 – *Основні програмні продукти та доповнення системи MATLAB*

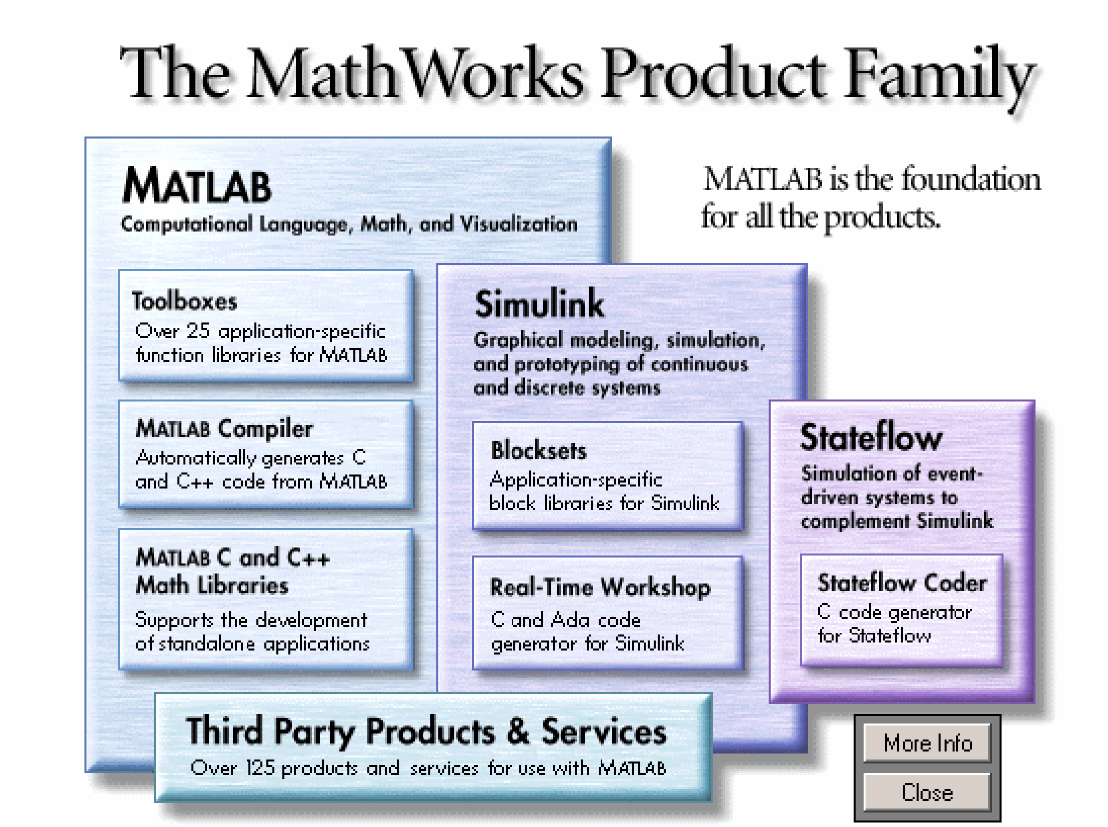


Рис 38 – *Структура системи MatLab*

Приклади роботи системи приведено в навчальному посібнику [47].

4. Пакет MATEMATICA

Система Mathematica – це універсальний математичний пакет призначений для будь-яких наукових і технічних обчислень, це повністю інтегрована система комп'ютерних математичних розрахунків. Розроблялась система починаючи з 60 років XX сторіччя. В 1988 році була система Mathematica була розроблена повністю компанією Wolfram Research і одержала масове використання. Поява системи Mathematica відкрила застосування комп'ютерної алгебри в наукових і технічних обчисленнях. У ній передбачена мова комп'ютерної алгебри, яка дозволяє описати широкий круг об'єктів у наукових і технічних обчисленнях. Сама мова дуже близька до математичних текстів і у ній використовується дуже мало первинних об'єктів. Спершу система Mathematica призначалась для інженерів, фізиків та математиків, але область її застосування швидко розширилася. Практично ніяка розробка теоретичних питань фізики, математики сьогодні не обходиться від використання цього інструменту. Mathematica зіграла вирішальну роль у багатьох важливих наукових відкриттях і стала стандартним математичним інструментом вчених. Важко вказати область, в якій програма Mathematica не застосовується, її використовують: фізики, біологи, соціологи, інженери, студенти і школярі. Вона є стандартом для безлічі організацій і найбільших університетів миру.

Успіх системи Mathematica зумовлений її універсальністю і простотою. Вона може використовуватись як звичайний калькулятор і як потужний інструмент теоретичних математичних розробок. Система вирішує всі задачі, характерні для калькуляторів а також здатної вирішувати, спрощувати, комбінувати, диференціювати, порівнювати рівняння, алгебри, визої математики, нарисної геометрії, статистики. Сьогодні існує більше сотні спеціалізованих комерційних пакетів для програми Mathematica

Система Mathematica складається з двох частин:

Ядро (kernel) безпосередньо здійснює всі обчислення.

Інтерфейс (front end) забезпечує взаємодію користувача з системою.

Файли типу «ноутбук» містять тільки текст і є повністю сумісними. Система має надзвичайно широке коло доповнень в усіх галузях математики і постійно розвивається. Стартове вікно системи показане на рис. 39.

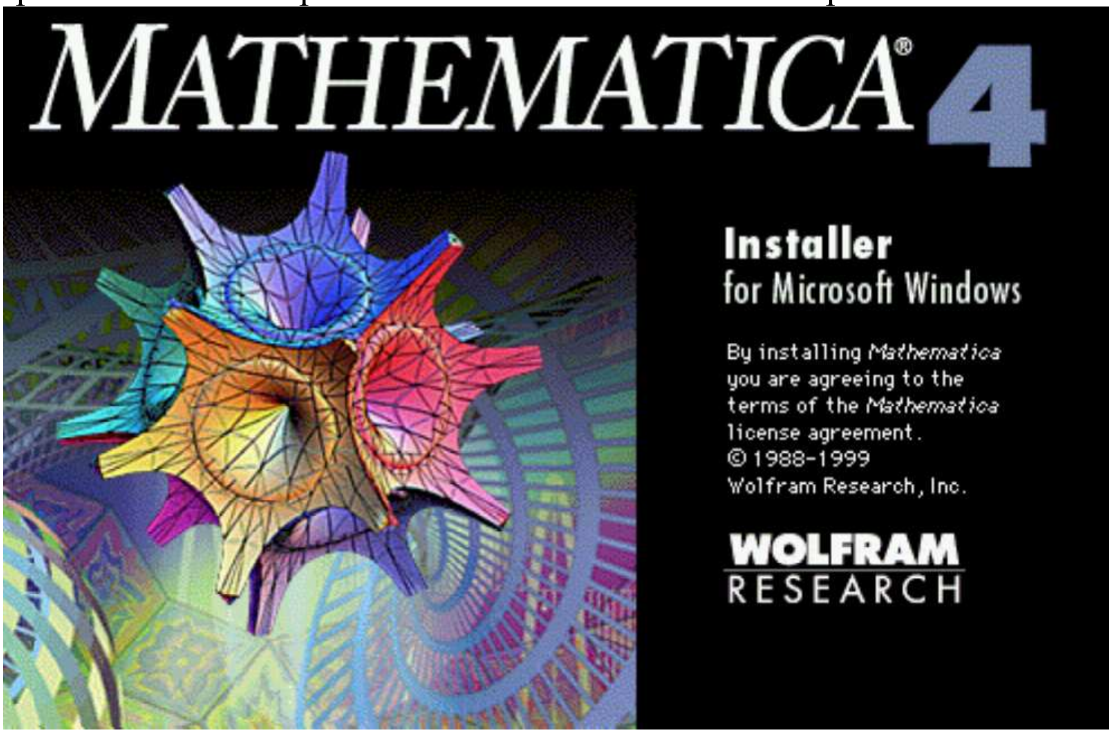


Рис. 39 – *Стартове вікно системи Mathematica 4.*

Засвоєння роботи з системою Mathematica надзвичайно просте. В основі роботи лежить два основні прийоми:

- ввід тексту з клавіатури;
- вибір прикладу, близького до поставленого завдання та його редагування.

Це дає можливість практично без підготовки почати використовувати цю системи.

Розрахунки вона виконує як в числовій, так і в символьній формі.

Єдиним недоліком цієї системи, з точки зору викладача, є те, що вона може служити універсальною шпаргалкою для школяра і для студента по багатьом шкільним та вузівським програмам. Через цей недолік її в багатьох країнах люблять школярі.

Далі розглянуто приклади роботи з системою Mathematica.
На рис 40 показано панель математичних символів системи.

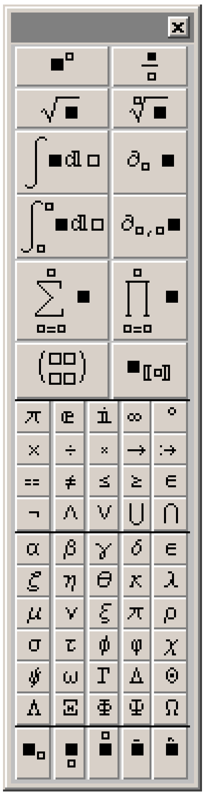


Рис.40 – *Панель інструментів вводу математичних символів системи “Mathematica”*

Введений текст може виглядати наприклад так:

$$\int \frac{\mathrm{Log}[1+\xi]}{\sqrt{\xi}}\, d\xi .$$

Текст у системі Mathematica виділяється як комірка. Виділення комірки відбувається з правої сторони після натискання клавіші вводу, як показано на рис.41.

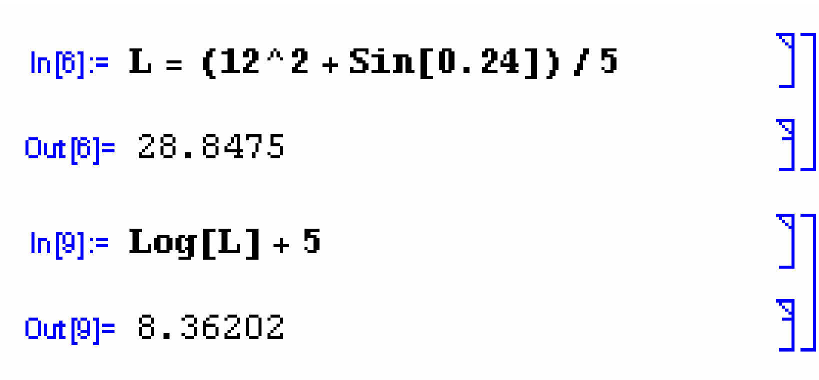


Рис.41 – *Приклад математичного розрахунку за допомогою системи “Mathematica”*

З правої сторони на рис. 41 показано комірки: перша – вводу, друга відповіді. В сою чергу вони об’єднані як комірка завдання разом з відповіддю.

Система виконує числові та символьні розрахунки. Причому форма запису завдання може бути також різною: у символьній чи в операторній формах. Приклад числових розрахунків при поданні завдання в символьній формі показано на рис. 42, а при поданні завдання в операторній формі на рис 14.

In[10]:= $\int_1^2 x\char`^3 \, dx$

Out[10]= $\frac{15}{4}$

Рис.42 – *Приклад числового розрахунку визначених інтегралів за допомогою пакета “Mathematica” (символьна форма запису).*

```
In[4]:= NIntegrate[Cos[Log[x^2 + Sin[x]]], {x, 0, 2}]

Out[4]= 0.972819
```

Рис.43 - *Варіант числового розрахунку визначених інтегралів за допомогою системи “Mathematica” (операторна форма запису).*

Символьні розрахунки виконуються згідно правил математики. Приклад символьних розрахунків показано на рис. 44.

In[9]:= $\int x * \mathrm{Sin}[x] \, dx$

Out[9]= -x Cos[x] + Sin[x]

Рис.44 – *Приклад символьної математики. Знаходження інтегралів за допомогою пакета “Mathematica” (символьна форма запису)*

Далі розглянуто вирішення завдання за допомогою вибору прикладу з бібліотеки близького до поставленого завдання та його редагування. Вигляд вікна з прикладами показано на рис. 45.

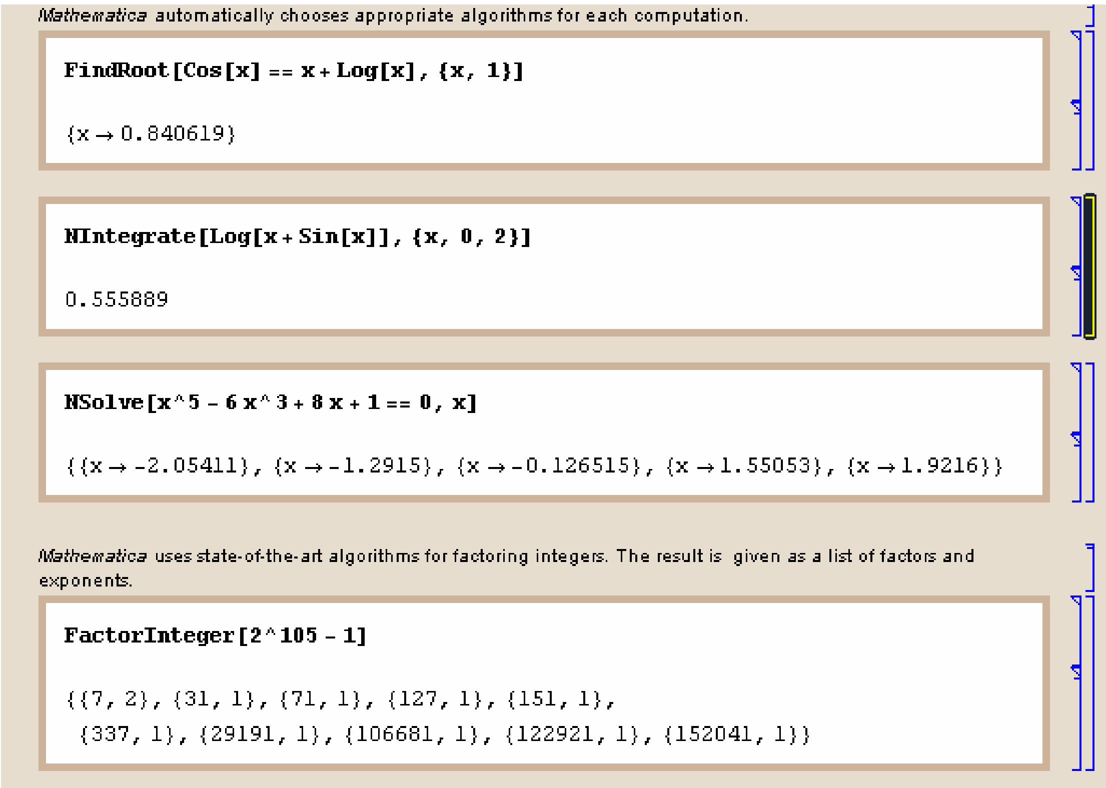


Рис.45 – *Вікно прикладів вводу математичних виразів системи “Mathematica” в операторній формі*

Вибравши найбільш близький приклад розрахунку можна вивести його на дисплей, відредагувати. Ввівши потрібні значення та одержати результат. На рис. 46 наведено приклад символьних обчислень виконаних вказаним чином.

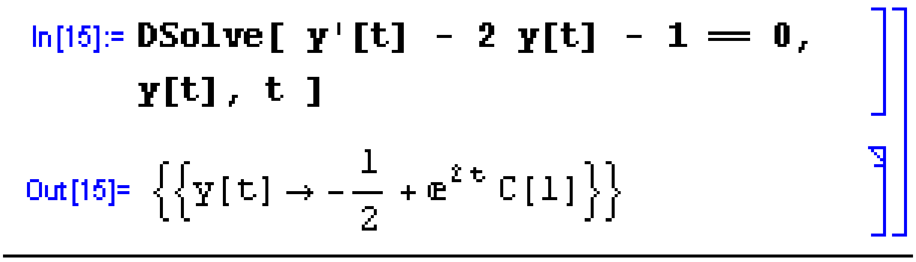


Рис. 46 – *Приклад символьної математики. Розв’язання диференційного рівняння за допомогою системи “Mathematica”*

Система Mathematica має широке коло засобів візуального представлення результатів розрахунків. Команди та приклади побудови двохмірного та об’ємного графіків приведено на рис.47, 48.

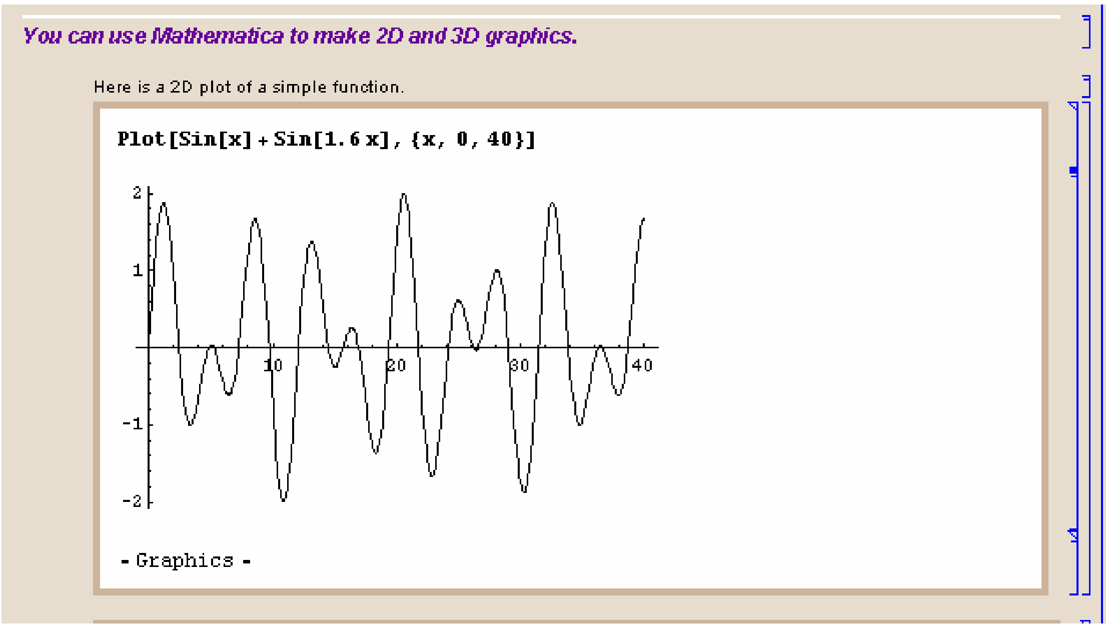


Рис.47 - *Побудова двохмірного графіка в системі “Mathematica”*

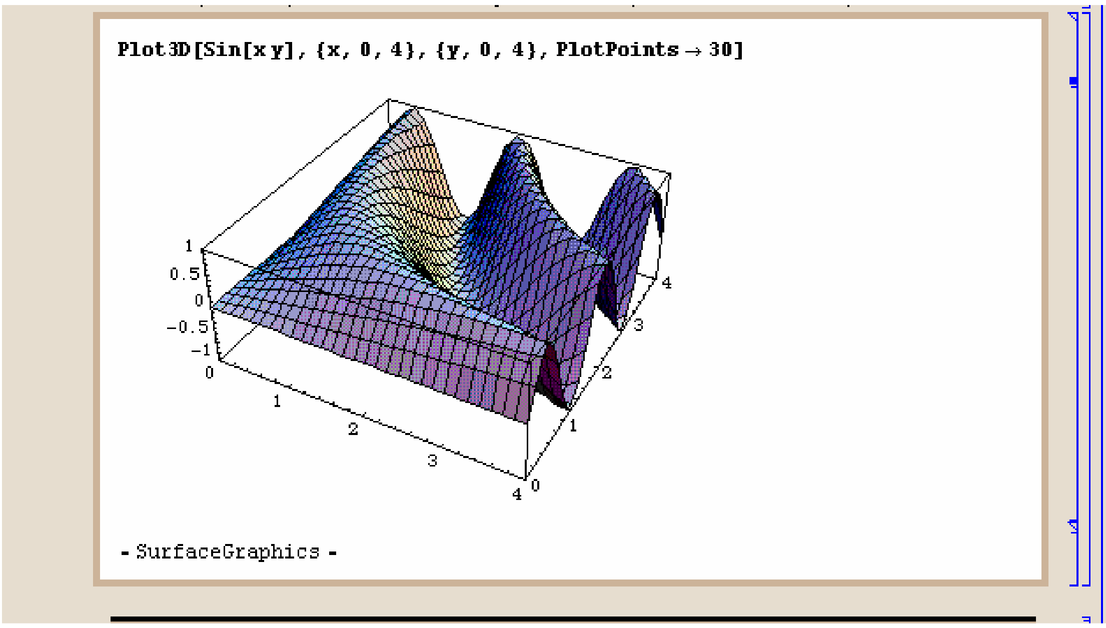


Рис.48 – *Приклад побудови трьохмірного графіка в системі “Mathematica”.*

Наведені приклади роботи з системою Mathematica достатні для засвоєння роботи з нею. Практично кожен студент може встановити систему Mathematica на своєму комп’ютері та розпочати виконувати завдання використавши тільки ці приклади. Можливості системи, як відмічали, досить великі це виконання широкого кола завдань в різних областях знань

5. Програмний пакет Statistica (StatSoft Statistica)

Повністю інтегрований пакет статистичного аналізу даних, який дозволяє виконувати найрізноманітніші статистичні розрахунки, графічна обробка і візуалізація даних, управління базою даних і система розробки додатків, що настроюється.

Стартове вікно пакету показане на рис. 49

Рис.49 – *Стартове вікно пакету STATISTICA.*

STATISTICA – Система для статистичного аналізу даних, що включає широкий набір аналітичних процедур і методів: більше 10 000 різних типів графіків, описових і внутрігрупових статистик, аналізу даних, кореляцій, основних статистик, інтерактивного імовірнісного калькулятора, Т-критеріїв, таблиць частот зв'язаності, аналізу багатовимірних відгуків, множинної регресії, непараметричних критеріїв, дисперсійного і коваріацийного аналізу, підгонки розподілів, багатовимірних пошукових технологій, нейронних мереж, карт контролю якості, аналізу процесів, планування експериментів і ін. Практичний інтерес має весь спектр класичних методів графічного контролю якості. Аналіз процесів Плани вибіркового контролю, аналіз придатності, повторюваності й відтворюваності, а також аналіз надійності.

Це програмний пакет, який практично є енциклопедією статистичних методів. Він призначений для аналізу даних. Як відмічено в [31] сучасний світ перенасичений інформацією і без сучасних технологій аналізу даних людина виявляється безпомічною в жорстокому інформаційному середовищі. В хаосі світу без адекватних технологій обробки інформації відсутня можливість пояснити складну ситуацію, прийняти раціональні рішення.

Система STATISTICA побудована по модульному принципу. Окремі модулі призначені для вирішення завдань з використанням різноманітних методів аналізу. Вони зв’язані між собою через спільні області і можуть використовуватись для обробки даних розміщених у цій області. До одних і тих же даних можна використати цілий ряд методів аналізу.

Для орієнтації у всьому різноманітті методів система має інтерактивний електронний довідник та статистичний порадник. Після вибору пункту ***Советник*** з меню ***Справка*** система задасть декілька простих запитань про характер проблеми, типів вихідних даних та запропонує ряд методів її вирішення. Система створена максимально сприятливою для користувача. У ній є велика кількість прикладів аналізу даних, які можна використати як довідковий матеріал.

Проте робота з системою STATISTICA потребує достатньої теоретичної підготовки, знання методів статистичного аналізу і розуміння особливостей їх використання. Не можна механічно засвоїти прийоми розрахунків та використовувати їх в практичній діяльності. Така практика призводить до результатів, які не мають нічого спільного з дійсністю, носять псевдонауковий характер. Довіряти таким результатам ніяк не можна. В першу чергу треба поповнити знання математичних основ і тільки після цього приступати, до придбання практичних навиків роботи в системі STATISTICA. Початковий теоретичний матеріал, необхідний для користування програмною системою STATISTICA, приведено в попередніх розділах цього посібника. Синтез теорії і практики призводить до грамотного використання методів стохастичного прогнозування в повсякденній виробничій, науковій діяльності, при вирішенні різного типу економічних завдань у бізнесі, маркетингу, фінансах, управлінні. Роботу з системою STATISTICA потрібно починати з вивчення теоретичного матеріалу, вирішення самих простих завдань і поступового засвоєння могутніх методів аналізу, закладених у цій системі. Сама система та робота з нею значно полегшує засвоєння теоретичного матеріалу, сприяє глибокому розумінню особливостей використання статистичних методів. Використовуючи цю систему користувач не тільки одержуєте конкретні результати, але вчиться крок за кроком аналізувати і розуміти дані.

Основні модулі пакету наведено на рис. 50.

Рис. 50 – *Основні розділи системи STATISTICA*

На рис. 51 наведено меню пакету з вказівкою основних методів аналізу.

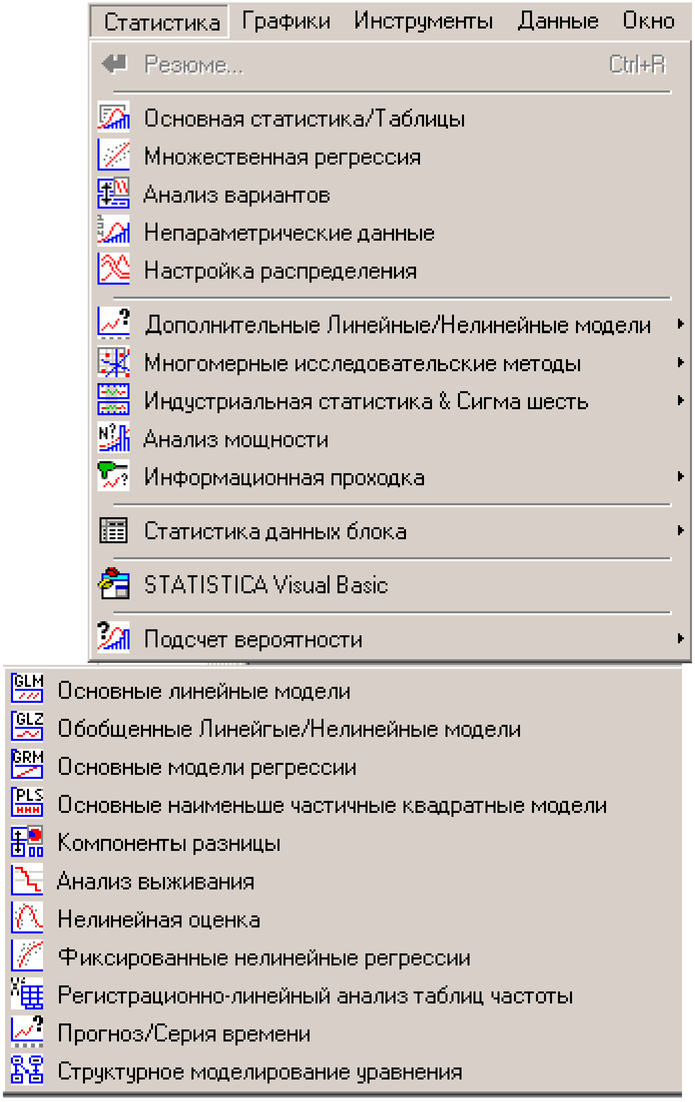


Рис. 51 – *Меню системи STATISTICA*

Для використання методів аналізу даних в першу чергу потрібно сформувати масив даних. Дані можуть бути введені безпосередньо у саму систему як змінні Var 1, Var2 ,… чи передані з електронної таблиці, або текстового файлу. Після цього можна виконувати аналіз. На рис 52 показано діалогове вікно опису змінної, а на рис. 53 – приклад визначення основних статистичних характеристик масиву трьох змінних.

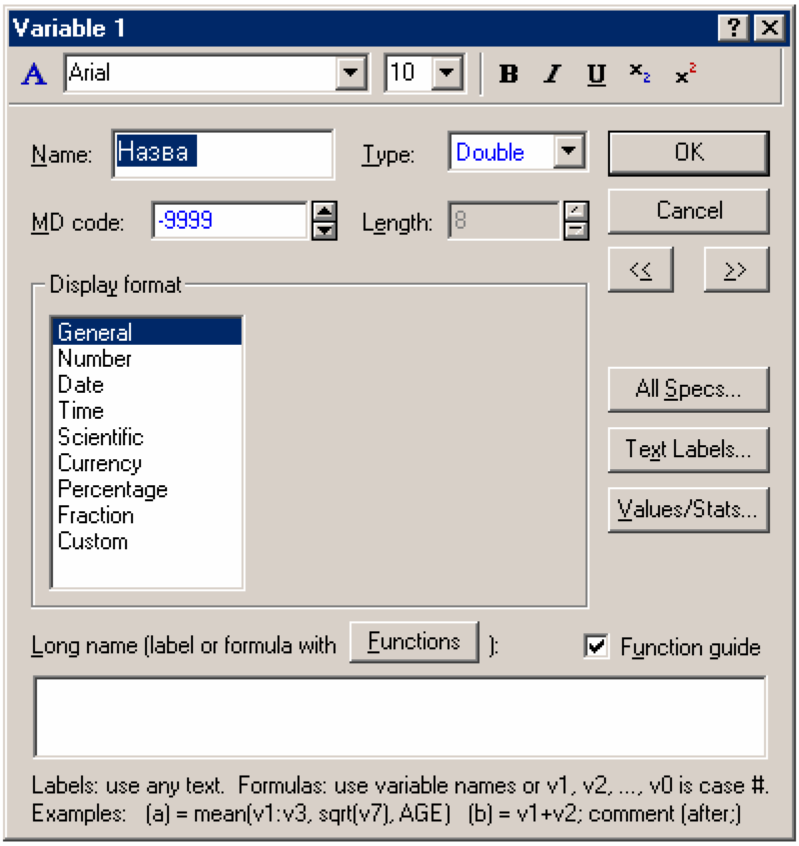
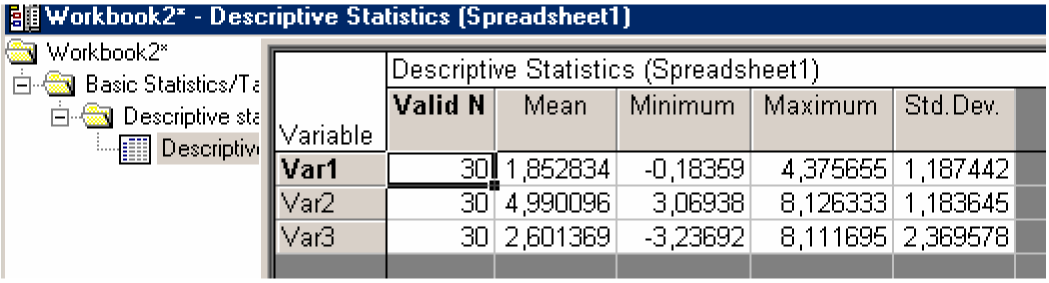


Рис. 52 – *Діалогове вікно опису змінної*



Variable	Descriptive Statistics (Spreadsheet1) Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std.Dev.
Var1	30	1,852834	-0,18359	4,375655	1,187442
Var2	30	4,990096	3,06938	8,126333	1,183645
Var3	30	2,601369	-3,23692	8,111695	2,369578

Рис. 53 – *Приклад визначення основних статистичних характеристик масиву трьох змінних*

Раніше показано приклади виконання статистичного аналізу даних за допомогою електронної таблиці EXCEL. Система STATISTICA надає можливості виконувати такі і багато інших методів аналізу з досить складними розрахунками.. Тут, щоб продемонструвати можливості системи STATISTICA та доцільність використання його у виробничій сфері, розглянемо простий приклад аналізу, який досить часто доводиться виконувати на промислових підприємствах. Розглянемо приклад аналізу стану обладнання тягових підстанцій міського електричного транспорту.

В першу чергу виконується опис можливих значень текстової змінної рис. 54. Заповнюємо дані про обладнання, як приведено на рис. 55.

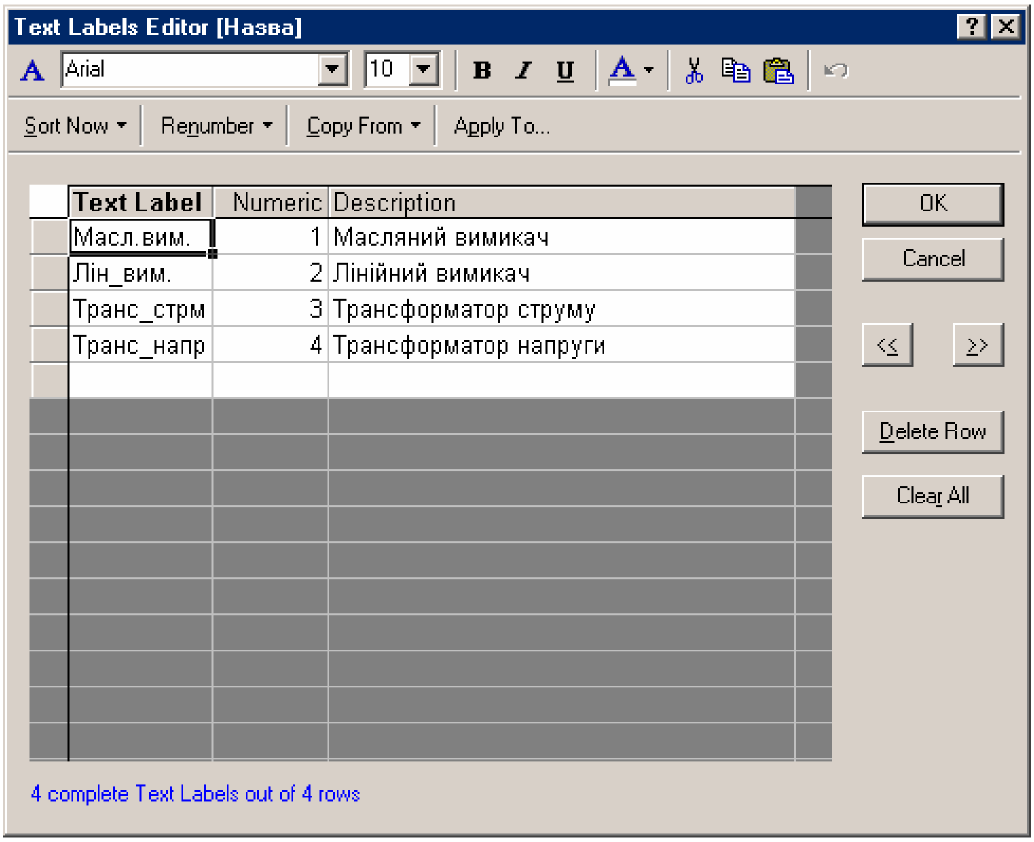


Рис.55 – *Опис можливих значень текстової змінної (тип обладнання тягової підстанції)*

	Назва	Рік вводу	Стан
1	Масл-вимикач	1986	Хороший
2	Масл-вимикач	1978	Критичний
3	Лінійний_вим.	1995	Хороший
4	Лінійний_вим.	1981	Задов.
5	Лінійний_вим.	1981	Критичний
6	Лінійний_вим.	1986	Задов.
7	Лінійний_вим.	1981	Критичний
8	Лінійний_вим.	1978	Критичний
9	Лінійний_вим.	1978	Задов.
10	Транс_струму	1986	Хороший
11	Транс_струму	1986	Критичний
12	Транс_струму	1995	Хороший
13	Транс_напруги	1995	Хороший
14	Транс_напруги	1978	Задов.
15	Транс_напруги	1986	Задов.

Рис. 55 – *Дані по стану обладнання тягової підстанції*

Виконуємо аналіз згідно з розділом «Основна статистика» рис 56 та завдання аналізу рис . 57.

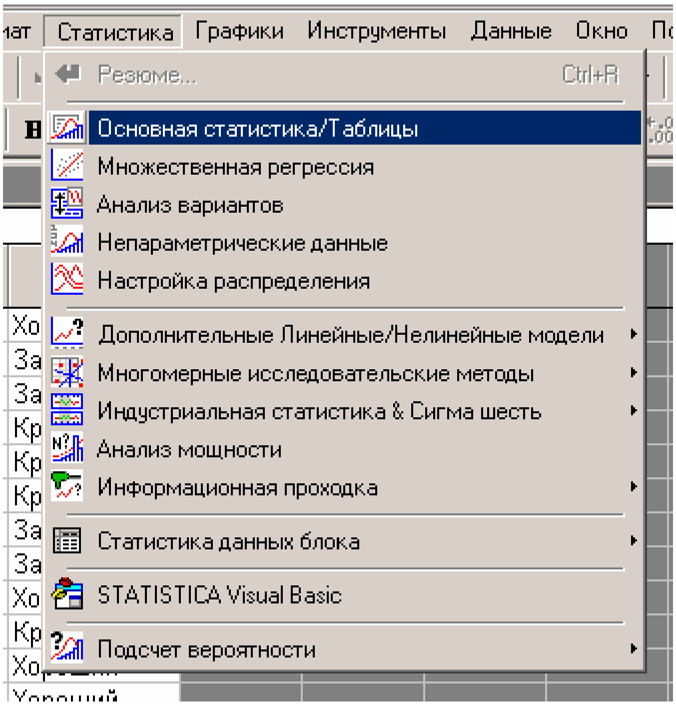


Рис.56 – *Меню статистика, вибір розділу “Основні статистики та таблиці”*

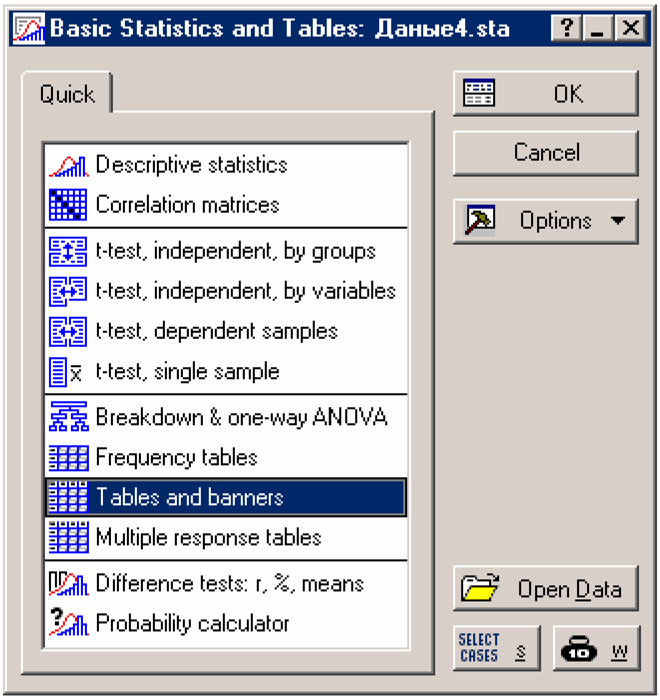


Рис 57 – *Вікно вибору аналізу в розділі “Основна статистика та таблиці”*

Вказуємо змінну, для якої потрібно провести аналіз

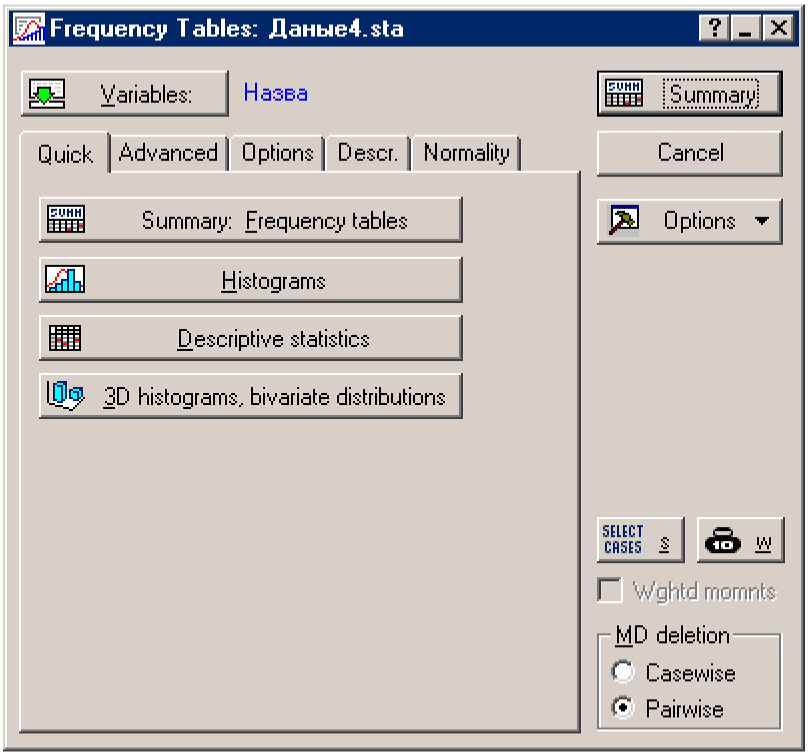


Рис 59 – *Вікно вибору змінної та вигляду звіту “Основна статистика та таблиці”*

Одержуємо результати аналізу пнаведені на рис. 60 - 62

Frequency table: Назва (Даные4.sta)

Category	Count	Cumulative Count	Percent	Cumulative Percent
Масл.вим.: Масляний вимикач	2	2	13,33333	13,3333
Лін_вим.: Лінійний вимикач	7	9	46,66667	60,0000
Транс_стрм: Трансформатор струму	3	12	20,00000	80,0000
Транс_напр: Трансформатор напруги	3	15	20,00000	100,0000
Missing	0	15	0,00000	100,0000

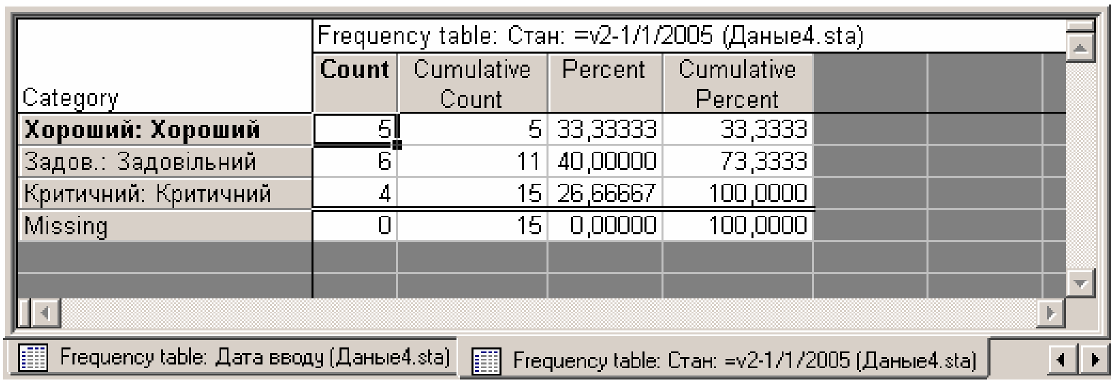
Рис. 61 – *Результати аналізу за типом обладнання*

Frequency table: Дата вводу (Даные4.sta)

Category	Count	Cumulative Count	Percent	Cumulative Percent
Jan-1986:	5	5	33,33333	33,3333
Jan-1978:	5	10	33,33333	66,6667
Jan-1987:	1	11	6,66667	73,3333
Jan-1997:	3	14	20,00000	93,3333
Jan-1998:	1	15	6,66667	100,0000
Missing	0	15	0,00000	100,0000

Frequency table: Назва (Даные4.sta) Frequency table: Дата вводу (Даные4.sta)

Рис. 62 – *Результати аналізу за роками вводу в експлуатацію*



Frequency table: Стан: =v2-1/1/2005 (Даньıе4.sta)

Category	Count	Cumulative Count	Percent	Cumulative Percent
Хороший: Хороший	5	5	33,33333	33,3333
Задов.: Задовільний	6	11	40,00000	73,3333
Критичний: Критичний	4	15	26,66667	100,0000
Missing	0	15	0,00000	100,0000

Рис. 63 – *Результати аналізу за станом обладнання*

Приведені результати показують ефективність проведення аналіз, звичайно, якщо врахувати, що у м. Харкові, наприклад, 60 тягових підстанцій, на кожній з яких встановлено по декілька десятків найменувань різного обладнання.

Далі можна виконати більш детальний аналіз з графічним поданням його результатів.

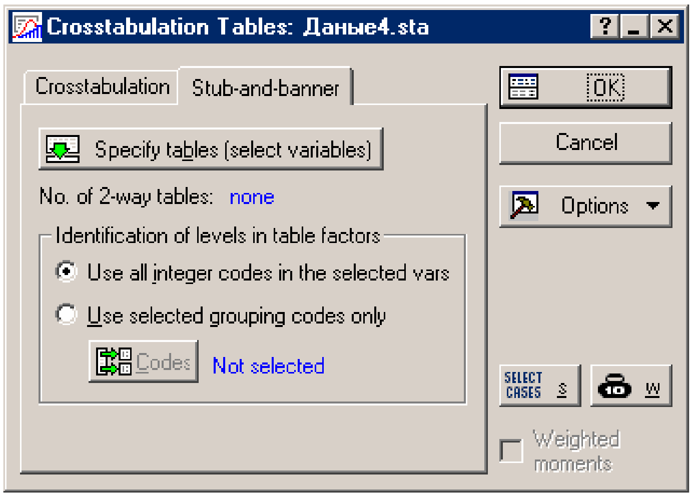


Рис. 64 – *Вікно аналізу таблиць з групуванням даних*

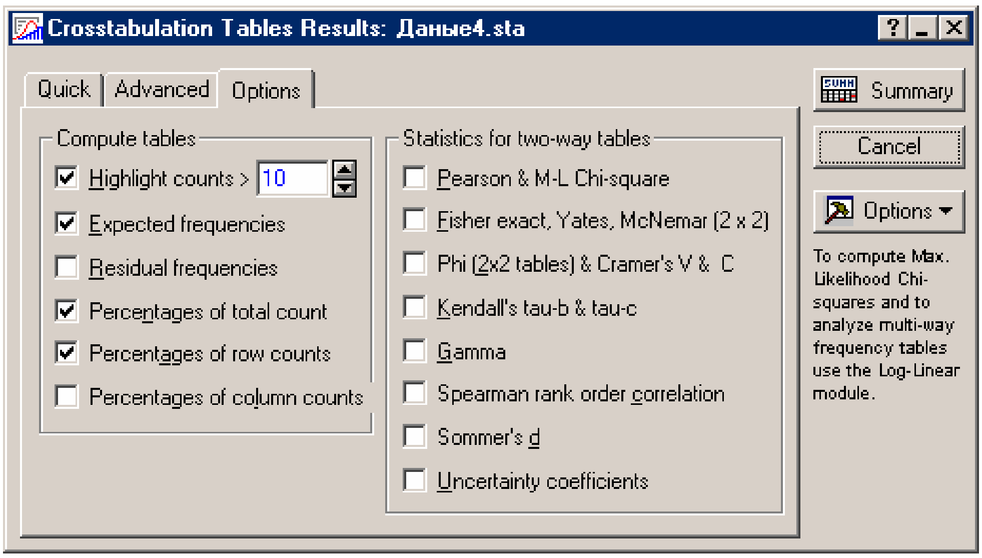
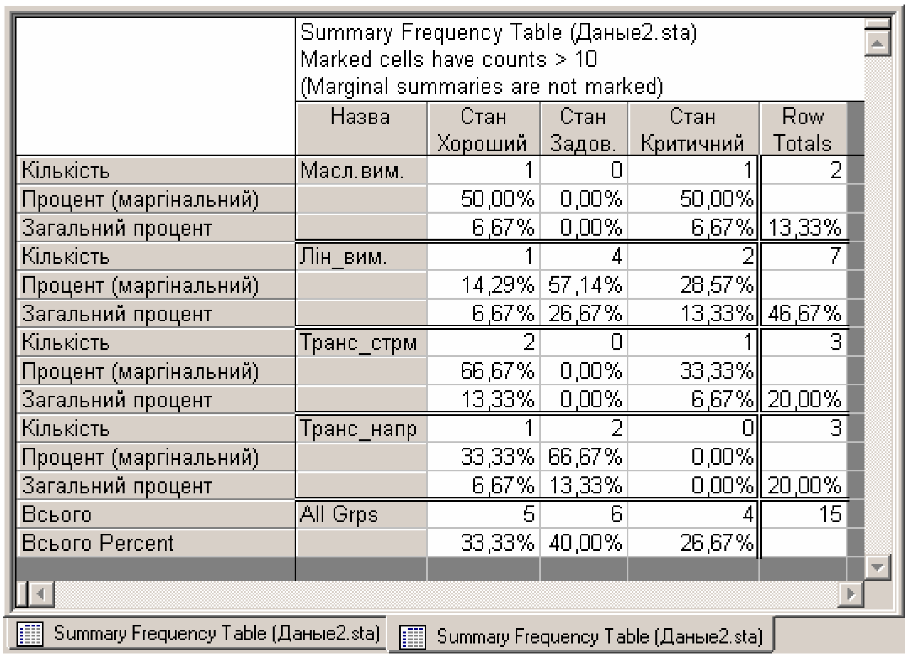


Рис. 65 – *Вікно параметрів аналізу даних з групуванням*



Summary Frequency Table (Даные2.sta) Marked cells have counts > 10 (Marginal summaries are not marked)	Назва	Стан Хороший	Стан Задов.	Стан Критичний	Row Totals
Кількість	Масл.вим.	1	0	1	2
Процент (маргінальний)		50,00%	0,00%	50,00%	
Загальний процент		6,67%	0,00%	6,67%	13,33%
Кількість	Лін_вим.	1	4	2	7
Процент (маргінальний)		14,29%	57,14%	28,57%	
Загальний процент		6,67%	26,67%	13,33%	46,67%
Кількість	Транс_стрм	2	0	1	3
Процент (маргінальний)		66,67%	0,00%	33,33%	
Загальний процент		13,33%	0,00%	6,67%	20,00%
Кількість	Транс_напр	1	2	0	3
Процент (маргінальний)		33,33%	66,67%	0,00%	
Загальний процент		6,67%	13,33%	0,00%	20,00%
Всього	All Grps	5	6	4	15
Всього Percent		33,33%	40,00%	26,67%	

Summary Frequency Table (Даные2.sta) Summary Frequency Table (Даные2.sta)

Рис.66 – *Результати аналізу стану обладнання*

	Назва	Стан хороший	Стан задовільний	Стан Критичний	Всього
Кількість	Масл-вимикач	1	0	1	2
Процент		50,00%	0,00%	50,00%	
Кількість	Лінійний_вим.	1	3	3	7
Процент		14,29%	42,86%	42,86%	
Кількість	Транс_струму	2	0	1	3
Процент		66,67%	0,00%	33,33%	
Кількість	Транс_напруги	1	2	0	3
Процент		33,33%	66,67%	0,00%	
Всього		5	5	5	15

Рис.67 – *Результати аналізу стану обладнання*

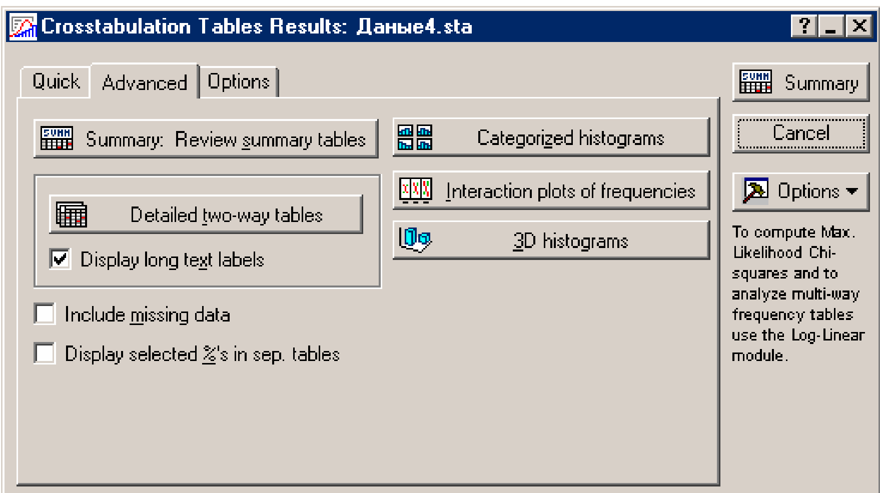


Рис. 68 – *Вікно "Результати" для вибору бажаної форми виводу результатів аналізу*

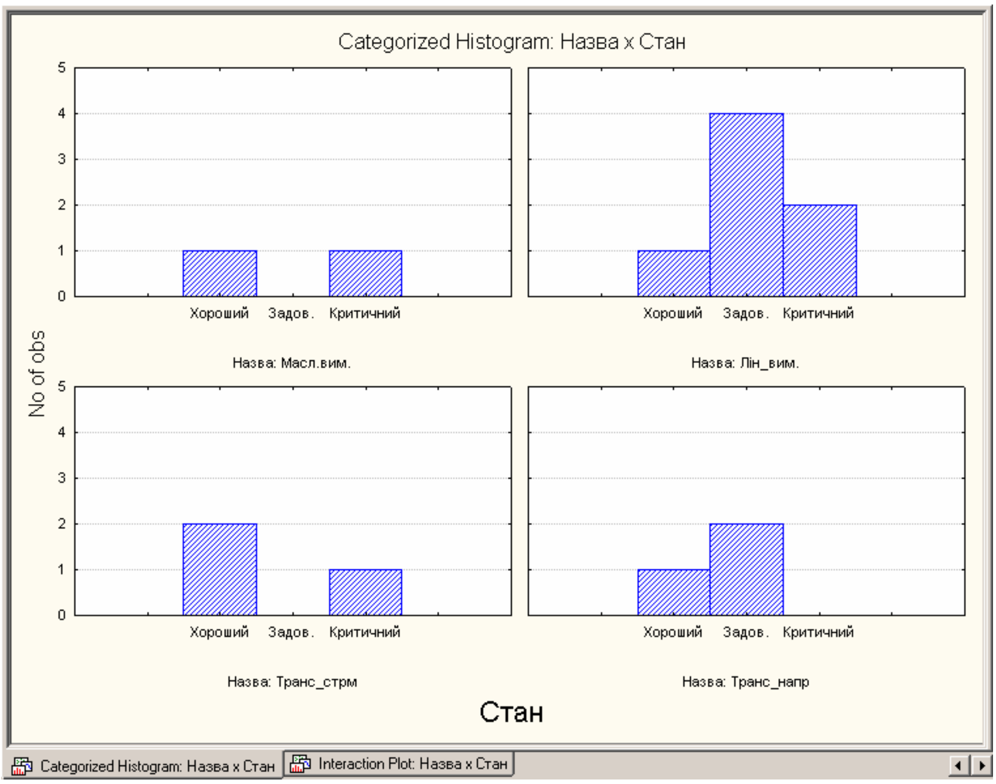


Рис. 69 – *Категорійні гістограми розподілу стану обладнання*

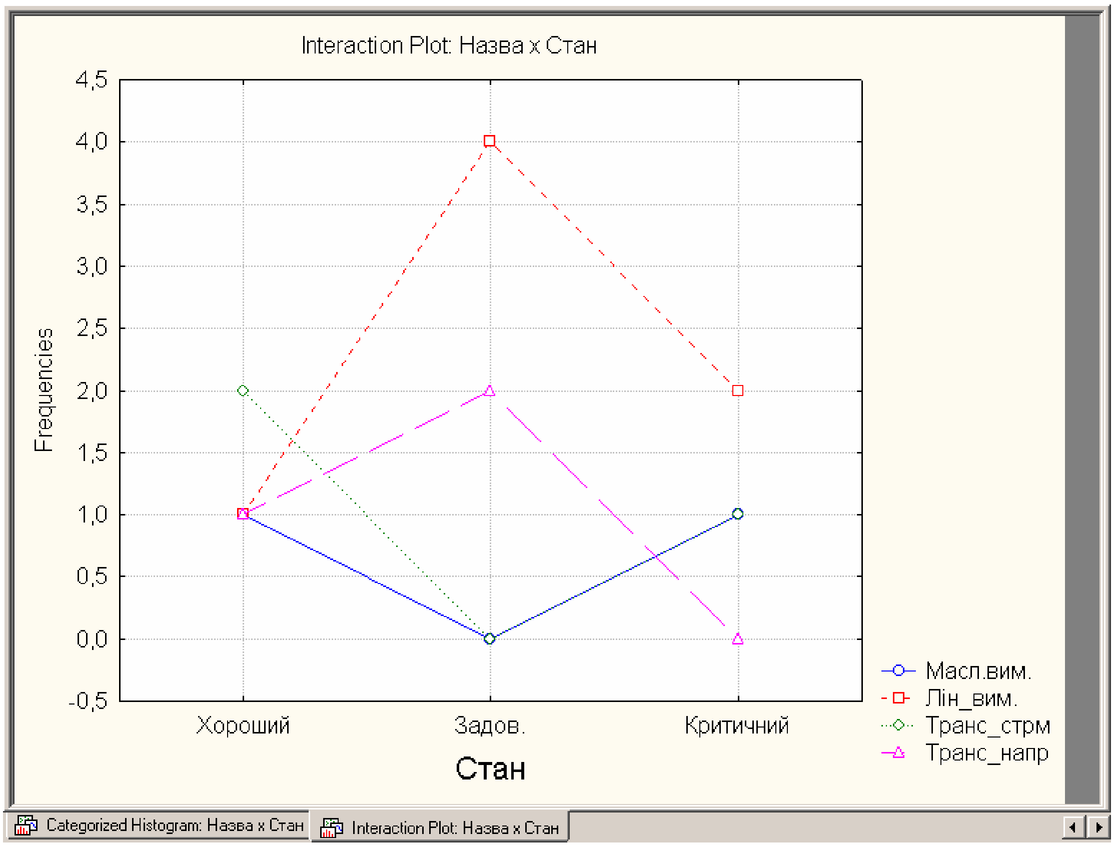


Рис.70 – *Графіки розподілу стану обладнання за категоріями*

	Назва	Рік вводу	Стан хороший	Стан задовільний	Стан Критичний	Всього
Кількість	Масл-вимикач	1978	0	0	1	1
Процент			0,00%	0,00%	100,00%	25,00%
Кількість	Масл-вимикач	1981	0	0	0	0
Процент						0,00%
Кількість	Масл-вимикач	1986	1	0	0	1
Процент			100,00%	0,00%	0,00%	20,00%
Кількість	Масл-вимикач	1995	0	0	0	0
Процент						0,00%
Кількість	Total		1	0	1	2
Процент			50,00%	0,00%	50,00%	
Кількість	Лінійний_вим.	1978	0	1	1	2
Процент			0,00%	50,00%	50,00%	50,00%
Кількість	Лінійний_вим.	1981	0	1	2	3
Процент			0,00%	33,33%	66,67%	100,00%
Кількість	Лінійний_вим.	1986	0	1	0	1
Процент			0,00%	100,00%	0,00%	20,00%
Кількість	Лінійний_вим.	1995	1	0	0	1
Процент			100,00%	0,00%	0,00%	33,33%
Кількість	Total		1	3	3	7
Процент			14,29%	42,86%	42,86%	
Кількість	Транс_струму	1978	0	0	0	0
Процент						0,00%
Кількість	Транс_струму	1981	0	0	0	0
Процент						0,00%
Кількість	Транс_струму	1986	1	0	1	2
Процент			50,00%	0,00%	50,00%	40,00%
Кількість	Транс_струму	1995	1	0	0	1
Процент			100,00%	0,00%	0,00%	33,33%
Кількість	Total		2	0	1	3
Процент			66,67%	0,00%	33,33%	
Кількість	Транс_напруги	1978	0	1	0	1
Процент			0,00%	100,00%	0,00%	25,00%
Кількість	Транс_напруги	1981	0	0	0	0
Процент						0,00%
Кількість	Транс_напруги	1986	0	1	0	1
Процент			0,00%	100,00%	0,00%	20,00%
Кількість	Транс_напруги	1995	1	0	0	1
Процент			100,00%	0,00%	0,00%	33,33%
Кількість	Total		1	2	0	3
Процент			33,33%	66,67%	0,00%	
Кількість	Column Total		5	5	5	15

Рис.71 – *Зведена таблиця стану обладнання за роками вводу в експлуатацію*

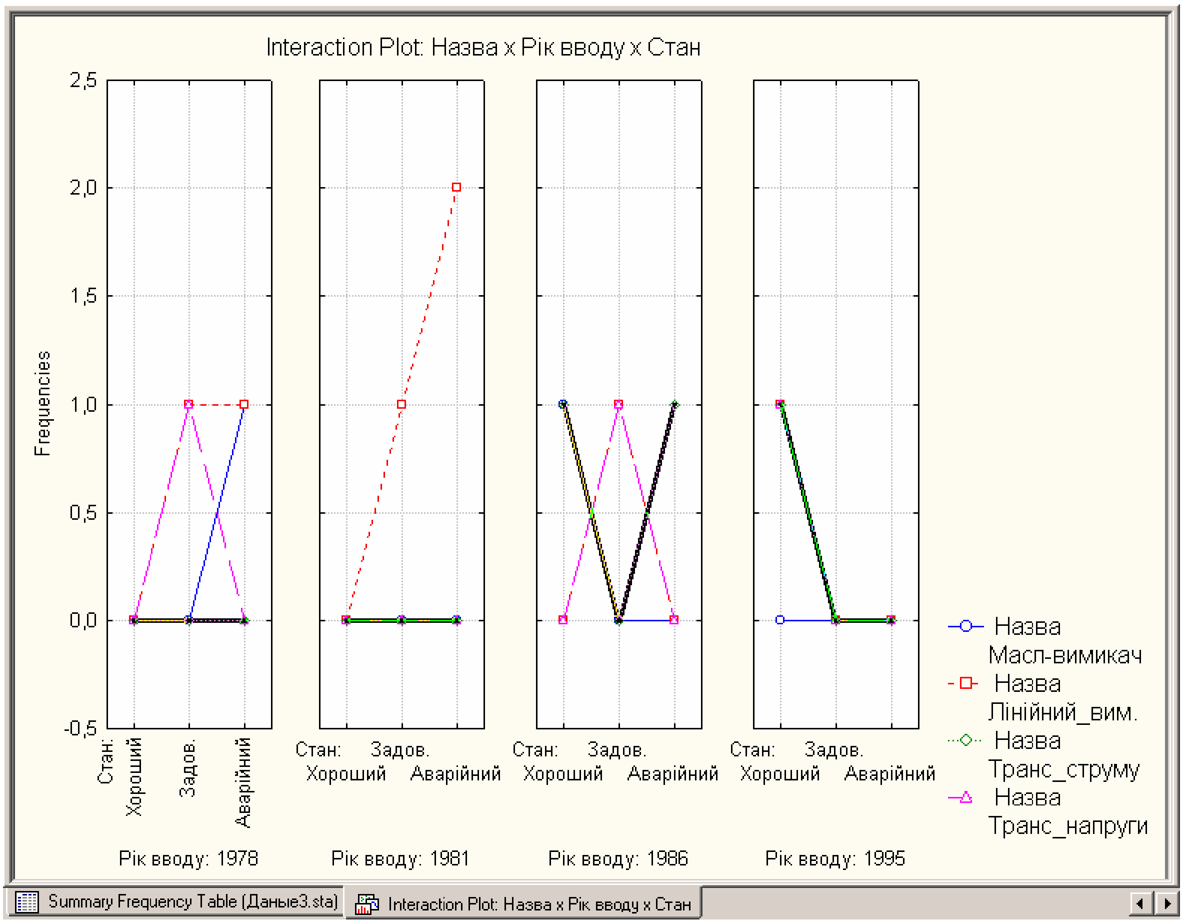


Рис.72 – *Графічне відображення стану обладнання за роками вводу в експлуатацію*

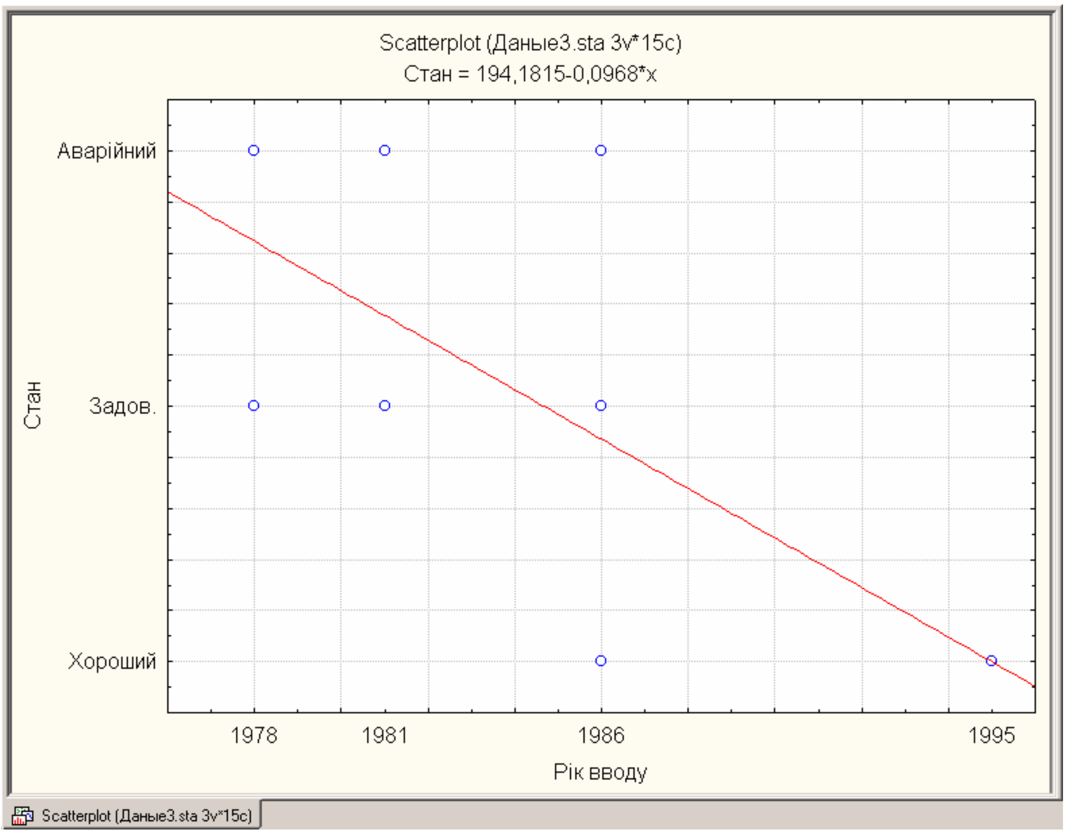


Рис.73 – *Графік зміни стану обладнання за роками вводу в експлуатацію*

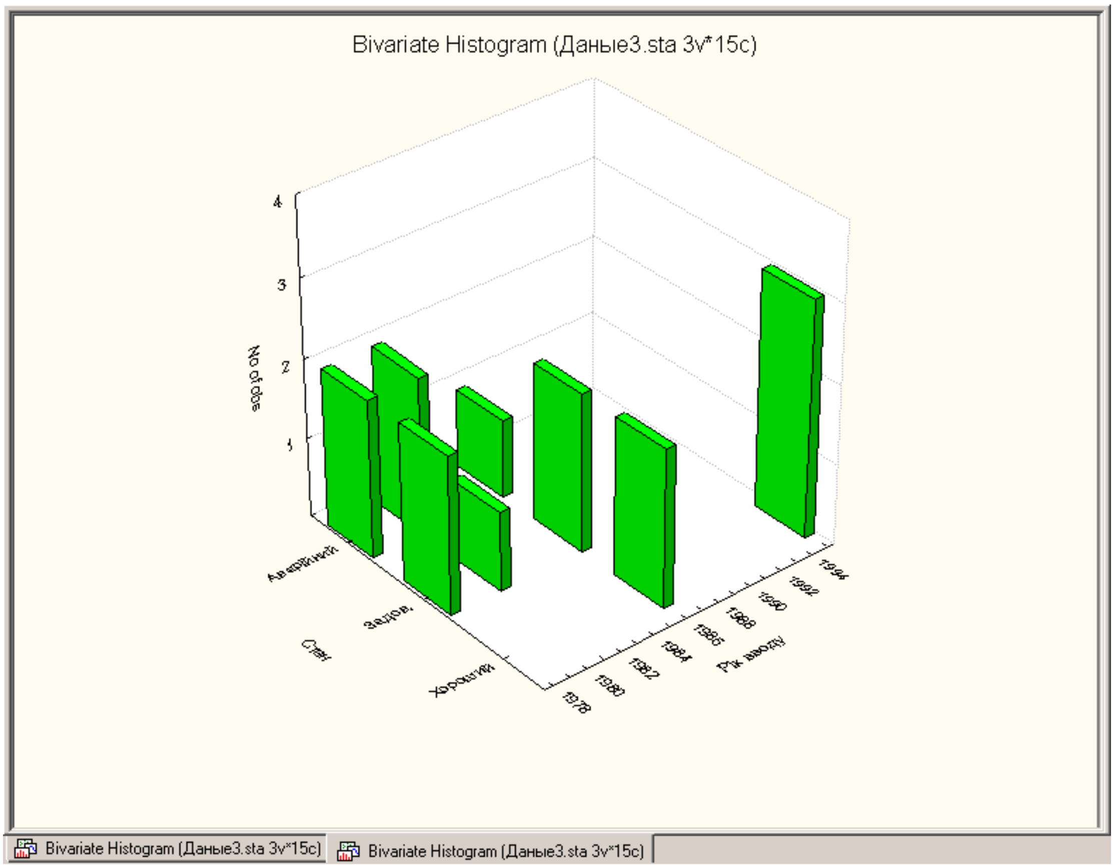


Рис.74 – *Гістограма стану обладнання в залежно від року вводу в експлуатацію*

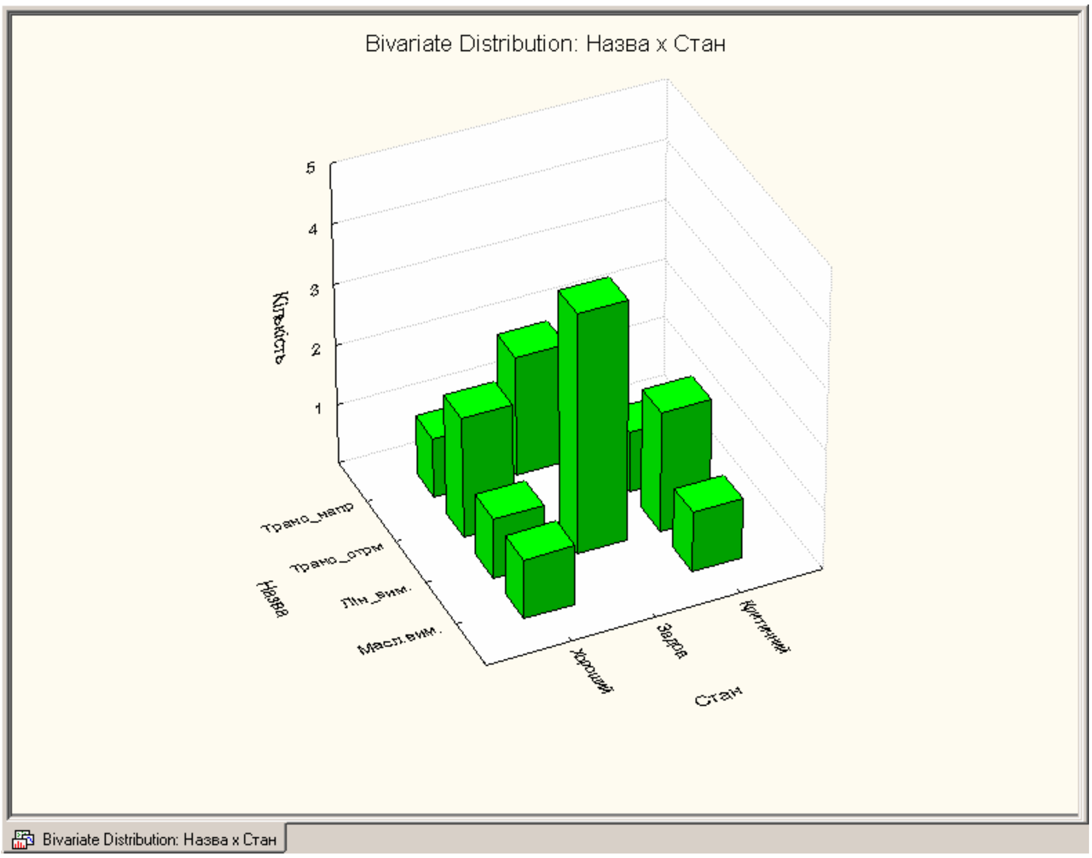


Рис.75 – *Відображення кількості тй стану обладнання у вигляді трьохвимірної гістограми*

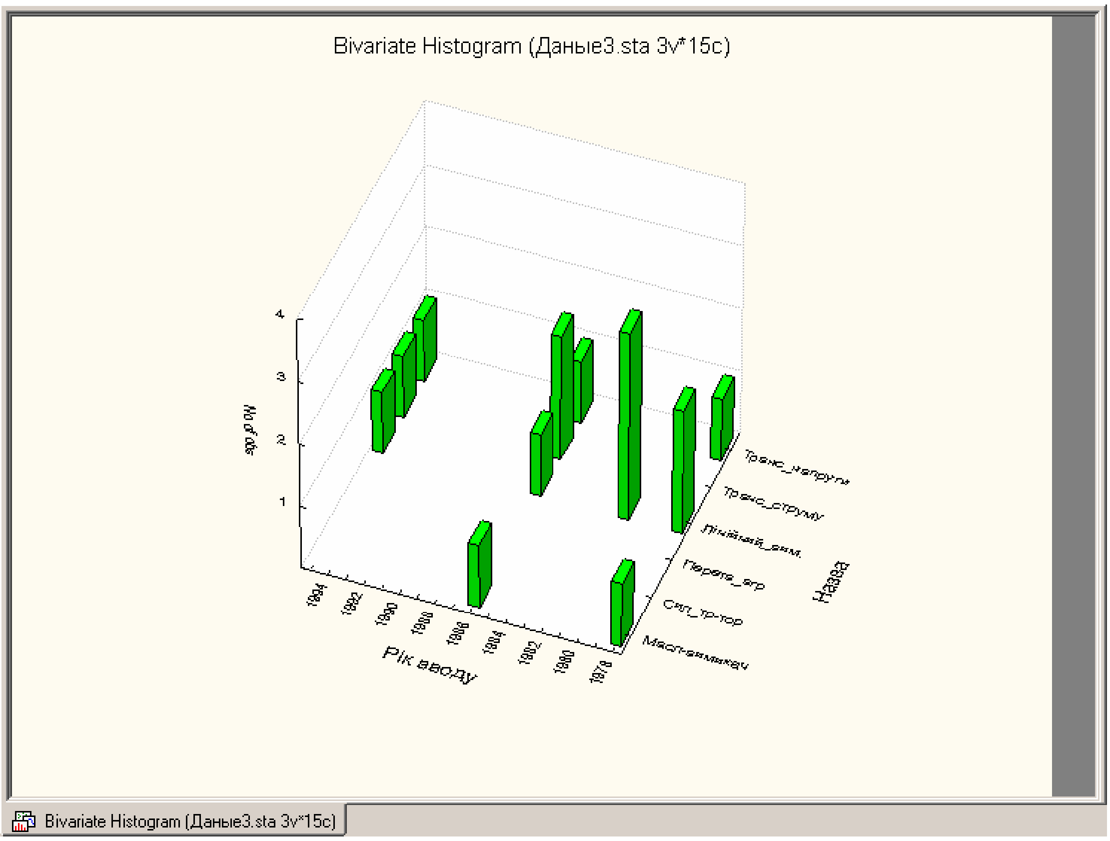


Рис.76 – *Гістограма вводу в експлуатацію обладнання*

Наведений приклад показує наскільки детально та якісно можна виконати аналіз обладнання тягової підстанції. Тут потрібно врахувати, що загальний об’єм обладнання включає до сотні найменувань і декілька тисяч одиниць обладнання.

6. Програмний комплекс SPSS

SPSS для Windows - це модульний, повністю інтегрований, обладнаний всіма необхідними можливостями програмний комплекс, що охоплює всі етапи аналітичного процесу: планування, збору даних, доступу і управління ними, аналізу, створення звітів і розповсюдження результатів. SPSS це абревіатура від Statistical Package for the Social Science (статистичний пакет для соціальних наук). Спочатку розроблявся для використання в психології та соціальних науках. Але в подальшому розвитку знайшов широке використання в наукових дослідженнях, в бізнесі, маркетингу, медицині, в навчальному процесі. Комплекс SPSS працює в середовищі Windows і є програмним забезпеченням, що дозволяє вирішувати проблеми бізнесу, дослідницькі завдання, включає всі функції управління даними, статистичні процедури і засоби створення звітів, необхідних для найскладнішого аналізу. Графічний інтерфейс користувача спрощує роботу з комплексом.

Першу версію системи розробили Норман Най, Хедлі Халл і Дейл Бент в Чікаго 1968 році, на факультеті політичних наук Стенфордського університету Чікаго. Перше, призначене для масового користувача, видання вийшло в 1970 році у видавництві а з 1975 року проект виділився в окрему компанію SPSS Inc. Перша версія пакету для Microsoft Windows вийшла в 1992 році. У 2009 році компанія SPSS провела обновила пакет, який недовго став називатися PASW Statistics (Predictive Analytics SoftWare) але пізніше повернулась до старої назви SPSS.

Комплекс SPSS [3] є однією з найбільш широко використовуваних програм для статистичного аналізу в соціальних науках. Він використовується для дослідження ринку, охорони здоров'я, освіти, маркетингу, урядових досліджень і ін. Коло методів досліджень, які використовує комплекс SPSS певною мірою відповідає системі STATISTICA, але націленість на вирішення питань соціального, економічного, психологічного характеру.

Побудована система за модульним принципом. Для комфортної роботи користувачу комплекс містить довідникову систему об'ємом понад 3000 ст. Наявність різних методів аналізу і довідниковий матеріал робить комплекс універсальною енциклопедією з використання методів аналізу даних у різних галузях практичної і наукової діяльності.

Завдання, які дозволяє вирішувати комплекс, такі:

Статистичний опис даних, перевірка даних, описові статистики, перехресні таблиці, таблиці частот, дослідження відношень

Двовимірна статистика: Т-тест, дисперсійний аналіз, кореляція, непараметричні тести.

Логістичні регресії, порядкові регресії, поліноміально-логістичні регресії,

Прогноз для виявлення груп: аналіз, чинника, кластерний аналіз дискрімінантний аналіз.

Створення дерев класифікації і рішень для виявлення груп і прогнозування поведінки.

SPSS може читати і записувати дані з файлами ASCII текст (включаючи ієрархічні файли), інші пакети статистики, електронні таблиці і реляційні бази даних за допомогою мови SQL.

Для виконання практичних завдань за допомогою SPSS в першу чергу потрібно сформувати масив даних. Масив даних оформляється у вигляді окремого файлу. Файл описується певною структурою, яка відображає організацію даних. Дані заносяться в таблицю аналогічну електронній таблиці. Вони можуть бути перенесені з електронної таблиці чи текстового файлу. Після введення даних вибираються методи їх обробки. При цьому включається певний модуль обробки і після його роботи видаються результати аналізу даних.

Програмні продукти SPSS дозволяють оперативно одержувати аналітичну інформацію, наочно представляти результати у вигляді таблиць і діаграм, а також, поширювати і впроваджувати одержані результати. Це дозволяє знаходити ключові чинники, взаємозв'язки і тенденції у Ваших даних і своєчасно приймати оптимальні рішення.

Комплекс охоплює всі етапи аналітичного процесу: планування, збір даних, доступ до даних і управління даними, аналіз, створення звітів і розповсюдження результатів.

Список літератури

1 Сорока К.О. Основи теорії систем і системного аналізу. Навч. посібник. ХНАМГ. 2004. – 291с

2 Советский Энциклопедический словарь. Гл. ред. А.М.Прохоров. М. изд-во Советская энциклопедия, 1989. -1632 с.

3 Математическая энциклопедия под редакцией И.М. Виноградова т.4 Ок-Сло. М.: изд-во Советская энциклопедия 1984, 1215 с.

4 Новейший философский словарь:3-е изд., исправл. — Мн.: Книжный Дом. 2003.— 1280 с.

5 Кондратьев А.С. Физическое моделирование и иерархия временных масштабов. -"Физическое образование в вузах". Журнал Московского физического общества, серия "Б"., 1996, т.2, N3, с. 5-11.

6 Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин.: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001.

7 Красиков В.М., Новиков А.В. Електромеханіка – Навч. посібник.. К.: Вища школа, 1994, -488 с.

8 Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Теория поля. — Издание 7-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — 512 с

9 http://meduniver.com.

10 А.С. № Дозатор ртуті.

11 Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, - М.: Наука 1971, 375 с.

12 Полищук Е.С Электрические измерения электрических и неэлектрических величин. К.: Вища школа. 1984, -359 с.

13 Бурдун Г.Д.. Марков Б.Н. Основы метрологии. М.: Изд-во стандартов, 1972, 318 с.

14 Грушко И.М., Сиденко В.М. Основы научных исследований. -3-е изд., перераб. и доп.- Харьков: Высш. шк. Изд-во при Харьк. Ун-те. 1983. -224 с.

15 Гаркавий В.К., Ярова В.В. Математична статистика. Навч. посібник. – К.: ВД Професіонал, 2004, – 384 с.

16 ГОСТ 11.008.75 Прикладная статистика. Правила построения и применения вероятностных сеток. – М.: Изд-во Стандартов, 1977.

17 Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1962, 564 с.

18 Білущак Г.І, Чабанюк Я.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум. – Навч. посібник. Львів:2001, 418 с.

19 Боровков А.А. Курс теории вероятностей – М.: Наука, 1972.

20 Ван-дер Варден В. Математическая статистика. М.: - ИЛ, 1960.

21 Айвазян С.А., Енюков И.С., Мелашкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных М.: ФиС 1983

22 Бикел П., Доксам К., Математическая статистика Вып 2. М.: Финансы и статистика 1983, 254с

23 Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. -- М.: Наука, 1983.

24 Джонсон Н., Лион Ф.Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных М.: М.: Изд-во МГУ, 1980 -511.

25 Н.Николь, Р.Альбрехт. Электронные таблицы. Excel 5.0. Практическое пособие. - Пер. с нем. М.: ЭКОМ, 1996.

26 Минько А.А. Статистический анализ в MS EXCEL. – М.: Издтельский дом «Вильямс», 2004, - 408 с.

27 Кендэл М. Ранговые корреляции М.: Статистика 1975, - 214с.

28 Я. Гаек, З. Шидак. Теория рангових критериев. – М.: Наука, 1971, -376 с.

29 Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В.Прохорова. — М.: Большая российская энциклопедия, 2003. — 912 с.

30 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). - М.: Наука, 1974, - 832 с.

31 Боровиков В. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2003, 203, – 688 с.

32 Наследов А.Д. SPSS Компьютерный анализ данных в психологии и социальных науках – СПб.: Питер 2005, 416 с.

33 Капустина Т.В. Компьютерная система Matematica 3.0 для пользователей. Справ. пособие – М.: СОЛОН-Р, 1999 – 240 с.

34 В.П. Дьяконов. MATLAB 6/6.1/6.5+SIMULINK 4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя. М.: СОЛОН. Пресс. – 2003. 576 с

35 S. Campbell Modeling and Simulation in Scilab/Scicos. — New York: Springer, 2006.

36 Сорока К.А., Мотренко Э.И. Исследование факторов влияющих на шум ПРА статистическими методами. Светотехника 1977, №2 с. 11-12.

37 ГОСТ 16809-78. Аппараты пускорегулирующие для люминесцентных ламп.

38 Сорока К.О. Кисельов М.І. Навчально - методичний посібник до виконання лабораторних робіт з курсу “Моделювання електромеханічних систем” Х.: ХДАМГ, 2003. - 118 с.

39 Вишник Г.В. и др. Троллейбус пассажирский ЗиУ-682Б М.: Транспорт 1997 г., 208 с.

40 Дж.Эндрюс и др. Математическое моделирование. – М.: Мир,1979

41 Любарский Г.Я. и др. Математическое моделирование и эксперимент. - Київ: Наукова думка, 1987.

42 Горский В.Г., Адлер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов. – М.: Металургия, 1974, - 264 с.

43 Гусейнов Ф.Г., Мамедяров О.С. Планирование эксперимента в задачах электротехники. М.: Энергоатомиздат 1988, 151 с.

44 Бродский Б.З., Бродский Л.И., Голикова Т.И. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиноминальных моделей.- М.: Металлургия, 1982.- 752 с.

45 Фаронов В.В. Система автоматизированного моделирования. М.: МВТУ им.Баумана, 1989г.

46 Потемкин В.Г. Система инженерных и научных расчетов MatLab 5.x: В 2-х т. Т1 и Т2. М. Диалог МИФИ. 1999

47 Сорока К.О. Теорія автоматичного керування та комп’ютерне моделювання. (Лінійні системи). Навч. посібник. Х.: Тимченко, 2010, 332 с.

Навчальне видання

Сорока Костянтин Олексійович

Конспект лекцій з курсу **«Моделювання електромеханічних систем»** (для студентів 4 курсів денної і заочної форм навчання напряму підготовки 0922 (6.050702) – «Електромеханіка»).

Редактор *М. З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання: *Ю. П. Степась*

План 2009, поз. 82 Л

Підп. до друку 02.07.10 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 11,1
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731 від 19.12.2001