

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО  
ГОСПОДАРСТВА**

**Конспект лекцій  
з курсу**

# **ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ**

**ХАРКІВ ХНАМГ 2010**

УДК 530:531:534:535:536:537

**Петченко О. М.** Конспект лекцій з курсу загальної фізики (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів за напрямком 6.080101 Геодезія картографія та землеустрій, 6.170202 Охорона праці, 6.050701 Електротехніка та електротехнології, 6.070101 Транспортні технології (за видами транспорту)) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; О. М. Петченко, А. С. Сисоєв, Є. І. Назаренко, А. В. Безуглий. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 195 с.

Автори: О. М. Петченко, А. С. Сисоєв, Є. І. Назаренко, А. В. Безуглий

Рецензент: к. т. н., проф. Крот Ю. Є.

Рекомендовано кафедрою фізики, протокол № 2 від 21 жовтня 2009 р.

© Петченко О. М., Сисоєв А. С.,  
Назаренко Є. І., Безуглий А. В.,  
© ХНАМГ, 2010

## Вступ

Останнім часом внаслідок введення нових дисциплін час вивчення курсу фізики значно скорочено, однак програма з фізики залишилась незмінною. Це потребує нових підходів до викладання фізики і нових підручників, які б враховували значно скорочені обсяги часу на вивчення фізики. Підручники з фізики, як правило, багатотомовні й розраховані на трисеместрове викладання. При самостійній роботі це викликає значні труднощі для студентів. Тому виникла потреба разом з новим курсом мати скорочений у вигляді конспекта лекцій, який відповідає обсягу викладання в Академії, а підручники використовувати для більш поглибленого вивчення фізики під час самостійної роботи студентів.

Даний конспект лекцій базується на одному з кращих підручників: "Курс загальної фізики" І. В. Савельєва. Курс лекцій охоплює в скороченому викладанні практично весь матеріал вказаного тритомного курсу. При цьому максимально скорочено математичний апарат, приділено увагу фізичному змісту понять, явищ і законів. Все це сприяє при обмеженому обсягу часу на вивчення дисципліни якісному оволодінню основними поняттями, явищами і законами фізики при незмінній програмі з фізики.

## Розділ 1. МЕХАНІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

### Тема 1. Кінематика матеріальної точки

#### § 1. Загальні положення

Механіка – це вчення про найпростіші види руху матерії, які полягають у переміщенні одних тіл відносно інших.

Для вивчення механічного руху потрібна система відліку – тіло відліку, відносно якого розглядається переміщення даного тіла, і пов'язані з тілом відліку система координат і годинник.

Фундаментальними поняттями механіки є поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, деформаціями якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

Основний принцип механіки полягає в положенні, що будь-який механічний рух можна розкласти на два види рухів – поступальний і обертальний.

Механіка підрозділяється на три розділи:

- а) кінематика – вивчає рух тіл без врахування сил, які діють на тіла;
- б) динаміка – вивчає рух тіл з врахуваннями сил, які діють на тіла;
- в) статика – вивчає умови рівноваги тіл під дією сил, які прикладені до тіла.

Неважко помітити, що статика є частковим випадком динаміки, коли швидкість тіла дорівнює нулю, і тому нами окремо розглядатися не буде.

#### § 2. Швидкість

Рух матеріальної точки по кривій характеризується такими величинами:

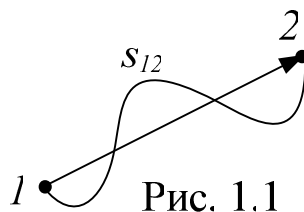


Рис. 1.1

- а) пройденим шляхом  $s_{12}$  – це довжина траєкторії з початкової точки 1 до кінцевої точки 2 (рис. 1.1);
- б) вектором переміщення  $\vec{r}_{12}$  – це вектор, який проведено з початкової точки руху у кінцеву;
- в) часом переміщення  $t_{12}$ .

Щоб в позначеннях було одразу видно напрямок переміщення, першим індексом вказується початкова точка переміщення, другим – кінцева. Якщо поміняти індекси місцями, це буде означати, що змінюється напрям руху.

Положення матеріальної точки у просторі можна задати за допомогою радіуса-вектора  $\vec{r}$ , який проведено з початку координат у дану точку. Тоді проєкції радіуса-вектора на координатній вісі є координати точки, тобто  $r_x = x$ ,  $r_y = y$ ,  $r_z = z$ .

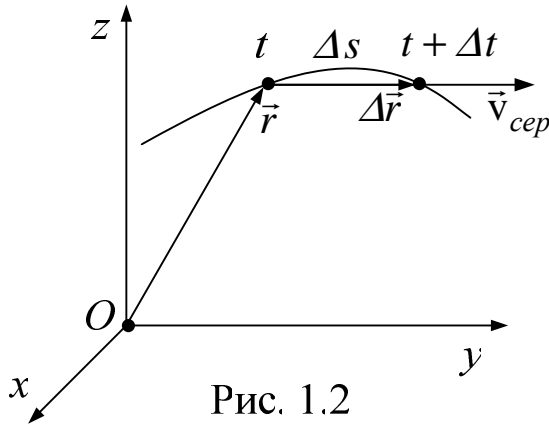


Рис. 1.2

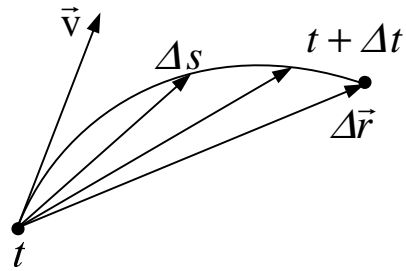


Рис. 1.3

Дуже маленькі зміни величин ми будемо називати елементарними і позначати буквою  $\Delta$ . Тоді  $\Delta t$  – елементарний проміжок часу,  $\Delta s$  – елементарний шлях,  $\Delta \vec{r}$  – елементарне переміщення за час  $\Delta t$  (див. рис. 1.2). Величина, яка дорівнює відношенню елементарного переміщення до часу, за який воно буде виконано, називається середньою швидкістю за час  $\Delta t$

$$\vec{v}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Як це видно з рис. 1.3, границя середньої швидкості при  $\Delta t \rightarrow 0$ , є миттєвою швидкістю  $\vec{v}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Ця границя є першою похідною вектора переміщення за часом, і для миттєвої швидкості отримуємо кінцевий вираз

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

У проєкціях:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt} = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dr_y}{dt} = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dr_z}{dt} = \frac{dz}{dt}.$$

Отже, щоб отримати проєкцію миттєвої швидкості на будь-яку вісь, потрібно координату точки вздовж цієї осі продиференціювати за часом.

Для модуля вектора миттєвої швидкості маємо

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}.$$

Як видно з рис. 1.2, під знаком границі при  $\Delta t \rightarrow 0$  виконується рівняння:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \vec{r}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s.$$

Тому

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Тобто модуль миттєвої швидкості дорівнює першій похідній шляху за часом.

Вектор  $\Delta \vec{r}$  направлений по січній до траєкторії. Граничним положенням січної при  $\Delta t \rightarrow 0$  є положення дотичної (див. рис. 1.3). Тому вектор миттєвої швидкості направлений по дотичній до траєкторії у будь-який момент часу.

### § 3. Розрахунки пройденого шляху

Для малих проміжків часу  $\Delta t$  швидкість приблизно визначається формулою:

$$v \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Чим менше  $\Delta t$ , тим точніша формула (1.1). При  $\Delta t \rightarrow 0$  ця формула переходить у точну формулу, тобто знак приблизної рівності змінюється на знак точної рівності.

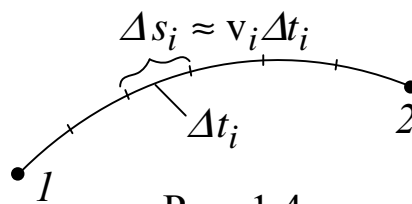


Рис. 1.4

Для розрахунку пройденого шляху розіб'ємо весь шлях на елементарні ділянки наскільки малі, що швидкості на кожній елементарній ділянці шляху можна вважати сталими величинами  $v_i$ , різними для різних ділянок, де  $i$  – порядковий номер ділянки (див. рис. 1.4). Тоді весь шлях від точки 1 до точки 2

$$\Delta s_{12} = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i.$$

Згідно з формулою (1), для  $i$ -ої ділянки шляху

$$v_i \approx \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}.$$

Звідси

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i,$$

а

$$s_{12} \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i.$$

Точний знак рівності можна поставити тільки під знаком границі при  $\Delta t_i \rightarrow 0$ , тобто

$$s_{12} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i.$$

Процедура підсумовування нескінченно малих величин у математиці називається інтегруванням і позначається

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

Тобто, щоб розрахувати пройдений шлях, потрібно проінтегрувати швидкість від початкового моменту часу  $t_1$  до кінцевого  $t_2$ .

На координатній площині  $(v, t)$  пройдений шлях дорівнює площі криволінійної трапеції, що утворюється вгорі графіком  $v(t)$ , ліворуч і праворуч прямими  $t = t_1$  і  $t = t_2$ , а знизу віссю часу (див. рис. 1.5).

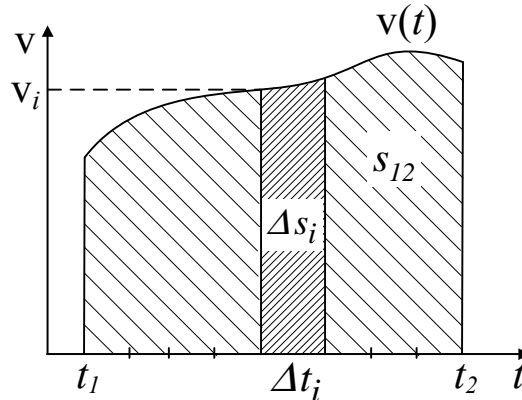


Рис. 1.5

## § 4. Прискорення

Розглянемо матеріальну точку на траєкторії. Швидкість у момент часу  $t$  позначимо  $\vec{v}$ , а у момент  $t + \Delta t$  – через  $\vec{v} + \Delta \vec{v}$ , де  $\Delta \vec{v}$  – приріст вектора швидкості за час  $\Delta t$  (див. рис. 1.6).

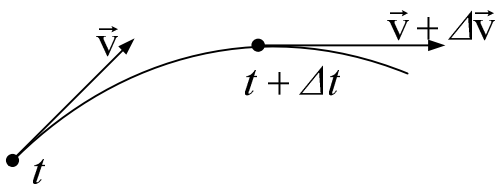


Рис. 1.6

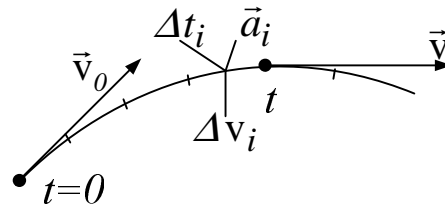


Рис. 1.7

Середнє прискорення за час  $\Delta t$

$$\vec{a}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Миттєве прискорення у момент часу  $t$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

тобто воно дорівнює першій похідній швидкості за часом і характеризує зміну швидкості у одиницю часу. В системі СІ прискорення вимірюється у м/с<sup>2</sup>.

Якщо відомі прискорення  $\vec{a}(t)$  як функція часу і початкова швидкість  $v_0$  у момент  $t = 0$ , то можна визначити швидкість у будь-який момент часу. Для цього весь час руху  $t$  розіб'ємо на елементарні проміжки часу  $\Delta t_i$ . Проміжки  $\Delta t_i$  повинні бути настільки малими, щоб прискорення  $\vec{a}_i$  можна було вважати сталим для кожного проміжку (див. рис. 1.7). Тоді зміна швидкості за час  $t$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \sum \Delta \vec{v}_i,$$

де  $\Delta \vec{v}_i$  – приріст швидкості за час  $\Delta t_i$ , який визначаються за формулою

$$\Delta \vec{v}_i \approx \vec{a}_i \Delta t_i.$$

Отже

$$\vec{v} - \vec{v}_0 \approx \sum \vec{a}_i \Delta t_i.$$

Точний знак рівності можна поставити тільки під знаком границі при  $\Delta t_i \rightarrow 0$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum \vec{a}_i \Delta t_i.$$

Така границя, як вже згадувалося вище, є інтеграл, тобто

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{a} dt.$$

Таким чином, щоб визначити зміну швидкості за час  $t$ , потрібно проінтегрувати прискорення за часом у межах заданого інтервалу часу.

І остаточно

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt. \quad (1.2)$$

Отримані рівняння для розрахунку пройденого шляху і швидкості є найбільш загальними. Всі часткові випадки рухів містяться у цих рівняннях.

**Приклад:** Прямолінійний рівнозмінний рух. При цьому прискорення є константою

$$\vec{a} = \text{const},$$

тобто воно не змінюється ні за модулем, ні за напрямком. Тому його можна винести за знак інтегралу у виразі (1.2)

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t.$$

У скалярному вигляді



$$v = v_0 \pm a t,$$

де знак плюс беруть для рівноприскореного руху, а знак мінус – для рівносповільненого.

Для шляху отримуємо добре відоме рівняння

$$s = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a t dt = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

## § 5. Прискорення при криволінійному русі

У формулі

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

щоб визначити прискорення  $\vec{a}$  потрібно диференціювати вектор  $\vec{v}$ . Це дуже складна справа – диференціювати вектор. Однак цих труднощів можна уникнути, якщо розкласти вектор  $\vec{a}$  на дві складові – тангенціальну  $\vec{a}_\tau$  і нормальну  $\vec{a}_n$  (див. рис. 1.8)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тангенціальна складова  $\vec{a}_\tau$  направлена вздовж дотичної у бік руху тіла. Вона характеризує зміну швидкості за модулем і визначається формулою

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

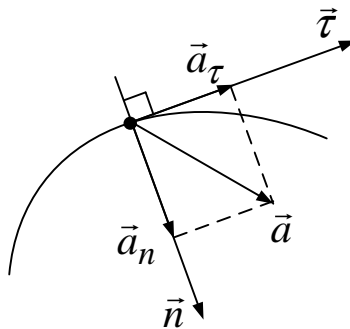


Рис. 1.8

Нормальна складова направлена перпендикулярно до дотичної, характеризує зміну швидкості за напрямком і визначається формулою:

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

де –  $R$  радіус кривизни траєкторії у даній точці.

Тоді повне прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Таким чином, не вміючи диференціювати вектори, ми обходимо це ускладнення і визначаємо повне прискорення тіла.

## Тема 2. Динаміка матеріальної точки

### § 6. Класична механіка. Закони Ньютона

Закони Ньютона і принцип відносності Галілея лежать в основі класичної механіки. Класична механіка – це механіка тіл великих мас, що рухаються з малими швидкостями, тобто

$$m_{\text{тіла}} \gg m_{\text{атома}}, \quad v_{\text{тіла}} \ll c,$$

де  $c$  – швидкість світла ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

**Перший закон (закон інерції).** Усяке тіло знаходиться у стані спокою, чи рівномірного прямолінійного руху, поки (або якщо) дія з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан (тобто якщо прискорення тіла дорівнює нулю).

Системи відліку, в яких виконується перший закон Ньютона, мають назву інерціальних, їх у природі необмежена кількість. Будь-яка система, що рухається відносно інерціальної рівномірно і прямолінійно теж є інерціальною.

**Другий закон (основний закон динаміки).** Прискорення будь-якого тіла прямо пропорційне результуючій силі, яка діє на тіло, і обернено пропорційне його масі

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m}.$$

**Третій закон (закон рівнодії).** Усяка дія тіл носить характер взаємодії. Сили, з якими тіла діють одне на інше, завжди однакові за модулем і протилежні за напрямком

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

### § 7. Принцип відносності Галілея

Розглянемо дві системи відліку, які рухаються одна відносно одної зі сталою швидкістю  $\vec{v}_0$  (див. рис. 2.1). Відлік часу почнемо з моменту, коли центри координат цих двох систем збігалися, тобто при  $t = 0$ ,  $O = O'$ .

На рис. 2.1 нештрихована система нерухома, а штрихова рухається з швидкістю  $\vec{v}_0$ . Координати точки  $P$  у цих двох системах зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t; \\ y = y' + v_{0y}t; \\ z = z' + v_{0z}t. \end{cases} \quad (2.1)$$

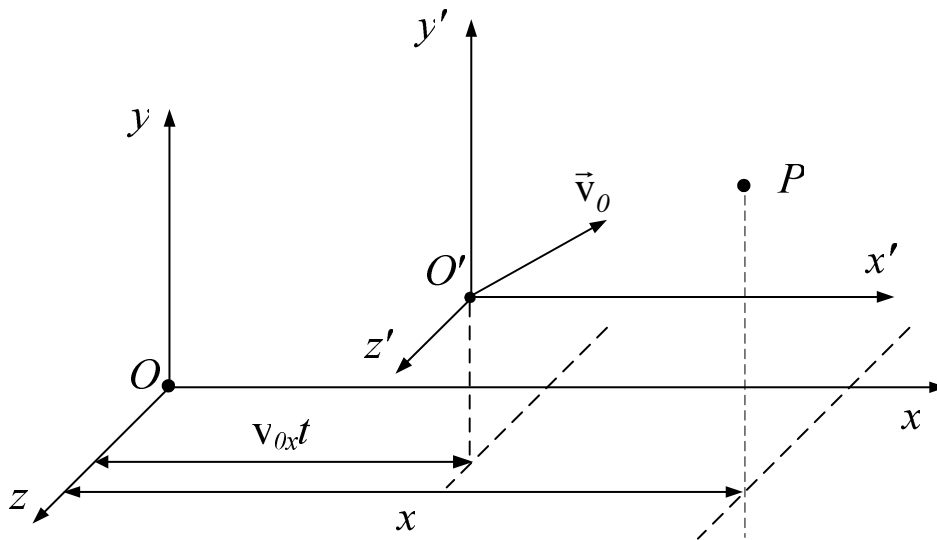


Рис. 2.1

Співвідношення (2.1) мають назву координатних перетворень Галілея. Вони дозволяють за відомими координатами точки у системі, що рухається, обчислити координати у нерухомій системі і навпаки.

Продиференціюємо формули (2.1) за часом і отримаємо перетворення для швидкостей:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v_{0x}; \\ v_y = v'_y + v_{0y}; \\ v_z = v'_z + v_{0z}. \end{cases}$$

Або у векторному вигляді

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \quad (2.2)$$

Продиференціюємо вираз (2.2) за часом і отримаємо

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.3)$$

Тобто прискорення будь-якого тіла у всіх системах відліку, що рухаються одна відносно одної прямолінійно і рівномірно, одне й те ж. Тому, якщо одна з систем інерціальна (за відсутності сил  $\vec{a} = \vec{0}$ ), то і решта будуть інерціальними.

Із (2.3) маємо

$$m\vec{a} = m\vec{a}'.$$

Звідки випливає, що рівняння динаміки (другий закон Ньютона) не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Рівняння динаміки інваріантні (незмінні) по відношенню до інерціальних систем відліку. Звідси і назва принципу – принцип відносності.

## § 8. Імпульс матеріальної точки

Рівнянню другого закону Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

можна надати іншого вигляду.

Якщо  $m = \text{const}$ , то масу можна ввести під знак похідної

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

Величина

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

називається імпульсом матеріальної точки. Тоді рівняння другого закону Ньютона запишеться через імпульс у вигляді

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

У такому вигляді другий закон Ньютона справедливий не тільки у класичній механіці, а й у релятивістській механіці. Імпульс системи матеріальних точок

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N.$$

## § 9. Центр інерції системи матеріальних точок

Положення у просторі кожної матеріальної точки системи  $m_i$  задамо за допомогою радіуса-вектора  $\vec{r}_i$  (див. рис. 2.2).

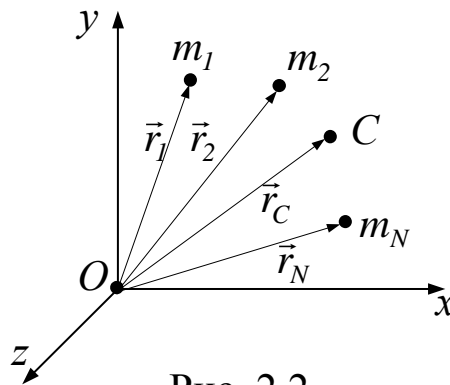


Рис. 2.2

Центр інерції системи – це точка  $C$ , положення якої визначається радіусом-вектором  $\vec{r}_C$

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}.$$

Вектор  $\vec{r}_C$  спрямований у деяку “порожню” точку простору  $C$  всередині системи матеріальних точок, не збігаючись з радіусом-вектором жодної з них.

У проекціях на координатні осі центр інерції визначається формулами:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N};$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N};$$

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}.$$

Визначаємо швидкість центра інерції  $\vec{v}_c$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \left( m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_N \frac{d\vec{r}_N}{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{m} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N) = \frac{1}{m} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \frac{\vec{p}_{сист}}{m},$$

де  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_N$  – маса системи.

З останньої формули отримуємо:

$$\vec{p}_{сист} = m \vec{v}_c. \quad (2.4)$$

З формули (2.4) випливає, що імпульс системи дорівнює добутку маси системи на швидкість її центра інерції.

## § 10. Закон збереження імпульсу

Розглянемо систему, яка складається з кількох тіл (наприклад, трьох – див. рис. 2.3). Сили, які діють на тіла системи, поділимо на внутрішні і зовнішні. Внутрішні – це сили, що діють між тілами системи; ми будемо позначати їх  $\vec{f}_{ij}$  ( $i, j$  – номери тіл системи). Зовнішні – це сили, які діють з боку тіл, що не входять до даної системи; ми будемо позначати їх  $\vec{F}_k$ .

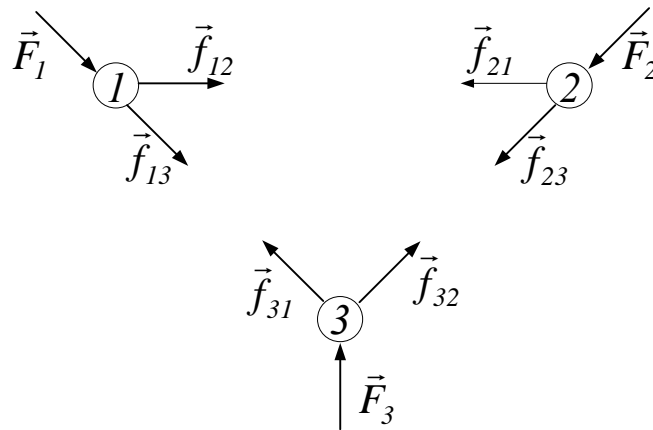


Рис. 2.3

Із третього закону Ньютона

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}, \quad \vec{f}_{23} = -\vec{f}_{32}, \quad \vec{f}_{31} = -\vec{f}_{13};$$

тобто, якщо у сили змінити порядок індексів, то сила змінює знак. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного тіла:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2; \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} &= \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3.\end{aligned}$$

Підсумуємо ці рівняння. Внутрішні сили взаємно знищуються, і в результаті отримуємо рівняння

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Або

$$\frac{d\vec{p}_{cism}}{dt} = \vec{F},$$

де  $\vec{p}_{cism}$  – повний імпульс системи тіл,  $\vec{F}$  – векторна сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему. Якщо зовнішні сили не діють на систему, то така система називається замкненою. Для замкненої системи

$$\frac{d\vec{p}_{cism}}{dt} = 0,$$

звідки

$$\vec{p}_{cism} = \text{const}.$$

Тобто, імпульс замкненої системи тіл з часом не змінюється. Це твердження і є законом збереження імпульсу. Для замкненої системи

$$\vec{p}_{cism} = m\vec{v}_c = \text{const},$$

де  $\vec{v}_c$  – швидкість центра інерції.

Звідки

$$\frac{d\vec{p}_{cism}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\vec{a}_c = 0,$$

де  $\vec{a}_c$  – прискорення центра інерції.

Тобто, для замкненої системи  $a_c = 0$ . У замкненій системі тіл центр інерції системи або рухається рівномірно і прямолінійно, або залишається нерухомим (обидва ці стани об'єднуються умовою  $a_c = 0$ ).

### Тема 3. Робота і енергія

#### § 11. Механічна робота

Дія сили на шляху  $s$  характеризується роботою, яка визначається за формулою (див. рис. 3.1):

$$A = F s \cos \alpha = F_s s, \quad (3.1)$$

де  $F_s = F \cos \alpha$  – проекція сили на напрям переміщення тіла.

Якщо ввести векторну величину  $\vec{s}$  – переміщення, то скалярний добуток

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{F}$  і  $\vec{s}$ , буде визначати роботу (3.1):

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

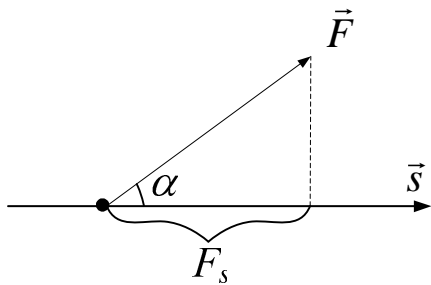


Рис. 3.1

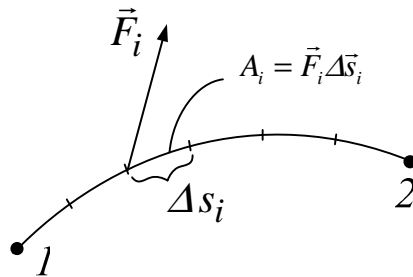


Рис. 3.2

Формулою (3.1) можна користуватися тільки коли  $F_s = \text{const}$ . Якщо  $F_s \neq \text{const}$ , то для розрахунку роботи слід розбити весь шлях на елементарні ділянки  $\Delta s_i$  (див. рис. 3.2). Ці ділянки настільки малі, що  $\vec{F}_i$  можна вважати незмінним на кожній ділянці, і тоді для обчислення роботи на кожній ділянці використовувати формулу (3.1)

$$A_i \approx F_{si} \Delta s_i. \quad (3.2)$$

Формула (3.2) тим точніша, чим менше  $\Delta s_i$ . Уся робота  $A_{12}$  від початкової точки 1 до кінцевої 2

$$A_{12} = \sum_{(i)} A_i \approx \sum_{(i)} F_{si} \Delta s_i.$$

Строгий знак рівності можна поставити тільки під знаком границі при  $\Delta s_i \rightarrow 0$ :

$$A_{12} = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{(i)} F_{si} \Delta s_i.$$

А, оскільки підсумування нескінченно малих є інтегрування, то отримуємо кінцевий вираз для роботи

$$A_{12} = \int_1^2 F_s ds = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s},$$

де  $F_s$  – проекція сили на напрям переміщення (на напрям вектора миттєвої швидкості) у кожній точці траєкторії.

Таким чином, щоб розрахувати роботу потрібно проінтегрувати проекцію сили на напрям переміщення по всьому пройденому шляху від початкової точки 1 до кінцевої точки 2, або, як ще говорять, “скалярно проінтегрувати силу по переміщенню”.

Якщо розглянути описану вище процедуру на координатній площині  $(F_s, s)$ , то легко дійти висновку, що на цій площині виконана робота дорівнює площі криволінійної трапеції, яка зверху обмежена кривою  $F_s=f(s)$ , ліворуч і праворуч – прямими  $s=s_1$  і  $s=s_2$ , а знизу – віссю  $s$  (див. рис. 3.3).

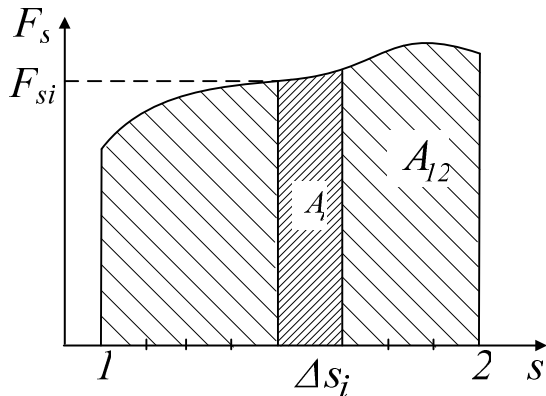


Рис. 3.3

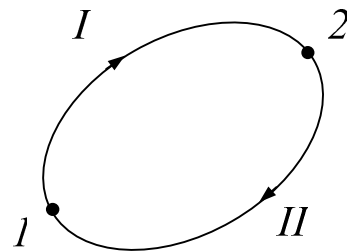


Рис. 3.4

Приклад: визначимо роботу при пружних деформаціях.

Сила пружності

$$F_s = F_x = -kx,$$

де  $x$  – деформація (абсолютне видовження) пружини,  $k$  – її жорсткість. Тоді

$$A_{12} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

## § 12. Потужність

Це фізична величина, яка характеризує роботу за одиницю часу.

Якщо за час  $\Delta t$  виконується робота  $\Delta A$ , то середня потужність за час  $\Delta t$

$$N_{\text{сер}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Миттєва потужність у довільний момент часу  $t$  визначається за формулою

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}.$$

Тобто миттєва потужність дорівнює першій похідній роботи за часом. Використовуючи формулу  $dA = \vec{F} d\vec{s}$ , отримуємо

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$



Таким чином, миттєва потужність дорівнює скалярному добутку сили і швидкості.

У системі СІ потужність вимірюється у ватах

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с.}$$

Позасистемна одиниця – кінська сила

$$1 \text{ к. с.} = 736 \text{ Вт} = 0,736 \text{ кВт.}$$

### § 13. Консервативні і неконсервативні сили

Поле сил, робота яких не залежить від шляху, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла, має назву потенціального, а сили, які діють у цьому полі – консервативних.

Основна властивість потенціального поля сил: робота консервативних сил на замкненому шляху дорівнює нулю.

Покажемо, що це дійсно так. Для цього на замкненому шляху виділимо дві довільні точки 1 і 2, які розбивають весь шлях на дві ділянки I і II (див. рис. 3.4).

Тоді повна робота на замкненому шляху  $A$  буде дорівнювати

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}.$$

Робота на елементарному переміщенні  $dA = \vec{F} d\vec{s}$ .

Якщо змінюється напрямок руху  $ds' = -ds$ , то  $dA' = -dA$ .

Тобто при зміні напрямку руху робота змінює знак. Тому

$$(A_{21})_{II} = -(A_{12})_I$$

і повна робота дорівнює нулю:

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II} = (A_{12})_I - (A_{12})_I = 0.$$

оскільки  $(A_{12})_I = (A_{12})_{II}$ .

Справедливе і обернене твердження: якщо робота на замкненому шляху дорівнює нулю, то поле сил – потенціальне.

### § 14. Приклади полів сил

**1. Поле сил тертя.** Робота сил тертя  $dA_{\text{тер}} = \vec{F}_{\text{тер}} \vec{v} dt = -F v dt < 0$ , тобто завжди негативна. Тому робота сил тертя вздовж замкнутого шляху ніколи не дорівнює нулю і отже сили тертя – неконсервативні сили.

**2. Поле сил тяжіння.** Сила тяжіння  $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$ , де  $\vec{g}$  – прискорення вільного падіння (див. рис. 3.5). Робота при переміщенні тіла з висоти  $h_1$  на висоту  $h_2$  дорівнює

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{тяж}} d\vec{s} = \int_1^2 F_{\text{тяж}} \cos \alpha ds.$$

$ds \cos \alpha = -dh$  – знак мінус обираємо тому, що відлік висоти  $h$  – угору. Тоді

$$A_{12} = - \int_1^2 F_{\text{тяж}} dh = -mg \int_1^2 dh = mg(h_1 - h_2).$$

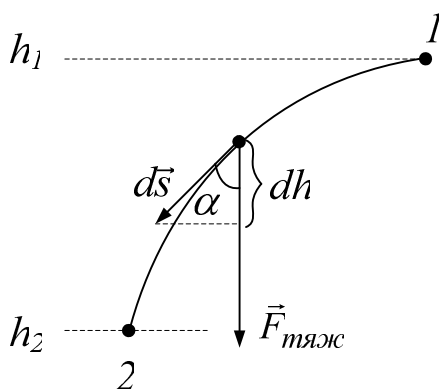


Рис. 3.5

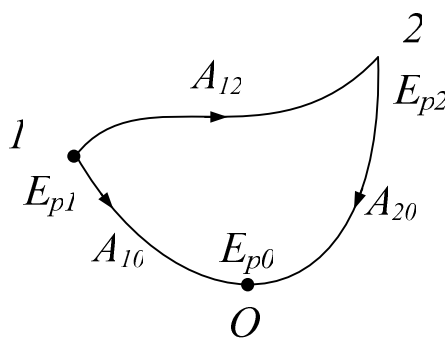


Рис. 3.6

Робота не залежить від форми траєкторії і визначається тільки початковим і кінцевим положенням. Тому поле сил тяжкості потенціальне, а сили тяжкості консервативні.

## § 15. Енергія

Енергія – це фізична величина, яка характеризує здатність тіла виконувати механічну роботу.

Енергія тіла обумовлена двома причинами:

- а) рухом тіла з деякою швидкістю; пов'язана з цією причиною енергія має назву кінетичної енергії (тобто енергії руху);
- б) знаходженням тіла у потенціальному полі сил; пов'язана з цією причиною енергія має назву потенціальної енергії (тобто енергії взаємодії, енергії положення у потенціальному полі сил).

**Кінетична енергія.** Розглянемо тіло, яке рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  і на яке діє сила  $\vec{F}$ . Робота сили  $\vec{F}$  над тілом за час  $dt$  визначається за формулою

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Із другого закону Ньютона

$$\vec{F} dt = m d\vec{v}.$$

Таким чином

$$dA = m \vec{v} d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (3.3)$$

Робота виконується за рахунок зміни величини, яка у формулі (3.3) стоїть у дужках. Величина, яка визначає роботу, є енергія; таким чином, ця величина є енергією руху, тобто кінетичною енергією

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.4)$$

Робота при цьому:

$$dA = dE_k. \quad (3.5)$$

Проінтегрувавши (3.5), отримаємо:

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1}.$$

Тобто робота, яка виконується над тілом, дорівнює приросту його кінетичної енергії.

**Потенціальна енергія.** Розглянемо тіло, яке знаходиться у потенціальному полі сил (див. рис. 3.6). Зіставимо кожній точці поля значення деякої функції  $E_p(\vec{r})$ . У точці  $O$  дамо позначення  $E_{p0}$ . Для точок 1 і 2 значення  $E_p$  дорівнюють:

$$E_{p1} = E_{p0} + A_{10}^{KC}, \quad E_{p2} = E_{p0} + A_{20}^{KC},$$

де  $A_{10}^{KC}$  і  $A_{20}^{KC}$  – робота консервативних сил потенціального поля сил по переміщенню тіла відповідно з точок 1 і 2 у точку  $O$ .

Вчинимо так для будь-якої точки простору і розрахуємо

$$E_{p1} - E_{p2} = (E_{p0} + A_{10}^{KC}) - (E_{p0} + A_{20}^{KC}) = A_{10}^{KC} - A_{20}^{KC} = A_{10}^{KC} + A_{02}^{KC}.$$

Оскільки робота консервативних сил не залежить від форми шляху, то:

$$A_{10}^{KC} + A_{02}^{KC} = A_{12}^{KC}.$$

Отже

$$E_{p1} - E_{p2} = A_{12}^{KC}.$$

Цей вираз не залежить від форми шляху (траєкторії), по якому переміщується тіло з точки 1 у 2. Таким чином за допомогою функції  $E_p(r)$  можна визначати роботу, яка виконується над тілом силами потенціального поля. Ця робота дорівнює зміні функції  $E_p(r)$ . Отже,  $E_p(r)$  є механічною енергією, а саме – потенціальною енергією.

Конкретний вид функції  $E_p(r)$  залежить від характеру силового поля.

**Приклад 1. Потенціальна енергія у полі сил тяжіння.** Робота у полі сил тяжіння, як ми вже визначили раніше, дорівнює:

$$A_{12} = m g (h_1 - h_2).$$

Порівнюючи (3.3) і (3.4), отримуємо формулу для потенціальної енергії у полі сил тяжіння

$$E_p = m g h.$$

**Приклад 2. Потенціальна енергія деформованої пружини.** Робота при деформації пружини

$$A_{12} = \frac{k x_1^2}{2} - \frac{k x_2^2}{2},$$

де  $k$  – жорсткість,  $x$  – деформація пружини. Порівнюючи (3.5) і (3.3), отримуємо формулу

$$E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

**Повна механічна енергія системи тіл**, між якими діють консервативні сили, складається із суми кінетичних енергій усіх тіл системи і потенціальної енергії взаємодії між тілами системи як цілого, тобто

$$E = \sum_{i=1}^N E_{ki} + E_p.$$

Нагадуємо, що кінетична енергія є характеристикою окремого тіла, а потенціальна енергія – характеристика усієї системи тіл.

### § 16. Закон збереження повної механічної енергії

Розглянемо систему із  $N$  тіл, між якими діють як консервативні, так і неконсервативні сили.

Кожному взаємному розташуванню тіл можна приписати певне значення потенціальної енергії, і роботу консервативних сил по зміні конфігурації системи визначити за формулою

$$A_{12}^{KC} = E_{p1} - E_{p2}, \quad (3.6)$$

Повна робота, яка виконується усіма силами (внутрішніми консервативними, внутрішніми неконсервативними і зовнішніми) над  $i$ -тим тілом, йде на збільшення кінетичної енергії тіла

$$(A_{12}^{KC})_i + (A_{12}^{HKC})_i + (A_{12}^{3OBH})_i = (E_{k2})_i - (E_{k1})_i.$$

Підсумуємо по всіх тілах системи

$$\sum_{(i)} (A_{12}^{KC})_i + \sum_{(i)} (A_{12}^{HKC})_i + \sum_{(i)} (A_{12}^{3OBH})_i = \sum_{(i)} (E_{k2})_i - \sum_{(i)} (E_{k1})_i. \quad (3.7)$$

Введемо

$$\sum_{(i)} (A_{12}^{KC})_i = A_{12}^{KC} - \text{повна робота внутрішніх консервативних сил}$$

системи;

$$\sum_{(i)} (A_{12}^{HKC})_i = A_{12}^{HKC} - \text{повна робота внутрішніх неконсервативних}$$

сил системи;

$$\sum_{(i)} (A_{12}^{3OBH})_i = A_{12}^{3OBH} - \text{повна робота зовнішніх сил};$$

$$\sum_{(i)} (E_{k1})_i = E_{k1} - \text{початкова кінетична енергія системи (у початковому}$$

стані);

$\sum_{(i)} (E_{k2})_i = E_{k2}$  – кінцева кінетична енергія системи (у кінцевому стані).

Тоді вираз (3.7) запишеться у вигляді

$$A_{12}^{kc} + A_{12}^{hkc} + A_{12}^{3ovh} = E_{k2} - E_{k1}. \quad (3.8)$$

Враховуючи формулу (3.6), із виразу (3.8) отримаємо

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{12}^{hkc} + A_{12}^{3ovh},$$

звідки

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{hkc} + A_{12}^{3ovh},$$

де  $E_1$  – початкова повна механічна енергія системи;

$E_2$  – кінцева повна механічна енергія системи.

Якщо у системи тіл відсутні неконсервативні сили ( $A_{12}^{hkc} = 0$ ) і система замкнена ( $A_{12}^{3ovh} = 0$ ), то

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0 \quad \text{і} \quad E = const.$$

Тобто у замкненій системі тіл, в якій діють тільки консервативні сили, повна механічна енергія системи є величиною сталою. Це і є закон збереження повної механічної енергії.

### § 17. Зв'язок між потенціальною енергією і силою

Розглянемо роботу з переміщення тіла у потенціальному полі сил з положення 1 у положення 2 (див рис. 3.7)

$$\Delta A = E_{p1} - E_{p2} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_{p1}, \quad (3.9)$$

де  $\Delta E_p$  – приріст потенціальної енергії.

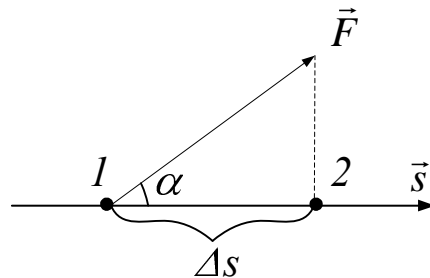


Рис. 3.7

З іншого боку

$$\Delta A = F_s \Delta s. \quad (3.10)$$

З формул (3.9) і (3.10) отримуємо формулу для середнього значення сили на ділянці шляху  $\Delta s$

$$F_s = -\frac{\Delta E_p}{\Delta s},$$

де  $F_s$  – проекція сили  $\vec{F}$  на напрям переміщення  $\vec{s}$  (див рис. 3.7).

Щоб отримати значення сили у даній точці, потрібно взяти границю при  $\Delta s \rightarrow 0$

$$F_s = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta E_p}{\Delta s} = - \frac{\partial E_p}{\partial s}.$$

Тобто, щоб визначити проекцію на напрям переміщення  $\vec{s}$  у даній точці, потрібно продиференціювати потенціальну енергію по даному напрямку і взяти результат з протилежним знаком.

Якщо у ролі напрямку  $\vec{s}$  взяти координатні осі, то для проекцій вектора сили  $\vec{F}$  отримуємо формули

$$F_x = - \frac{\partial E_p}{\partial x}; F_y = - \frac{\partial E_p}{\partial y}; F_z = - \frac{\partial E_p}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Сама сила через проекції записується так:

$$\vec{F} = \vec{x}_0 F_x + \vec{y}_0 F_y + \vec{z}_0 F_z, \quad (3.12)$$

де  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  – орти (одиничні вектори), які визначають напрям координатних осей. Після підстановки (3.11) у (3.12) отримуємо

$$\vec{F} = - \left( \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) E_p. \quad (3.13)$$

Вираз у дужках у (3.13) показує, яку операцію слід здійснити над функцією  $E_p$ . Він називається диференціальним оператором і позначається символом  $\nabla$  (набла):

$$\nabla = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тоді  $\vec{F} = -\nabla E_p$ . Таким чином, сила, яка діє в потенціальному полі сил, дорівнює градієнту потенціальної енергії, взятому з оберненим знаком.  $\nabla$  – це векторний оператор. У результаті застосування його до скалярної функції отримуємо вектор, направлений у бік найбільш стрімкого зростання цієї функції. Знак мінус змінює напрям вектора на протилежний. Тому сила у потенціальному полі сил завжди напрямлена у бік найбільш стрімкого зменшення потенціальної енергії.

### Приклади

**1. Поле сил тяжіння.** У полі сил тяжіння  $E_p = m g z$  (вісь  $z$  вертикальна). З формул (3.11) отримуємо  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $F_z = -mg$ . Тобто сила, яка діє на тіло у полі сил тяжіння, дорівнює  $mg$  і напрямлена вертикально вниз.

**2. Умова рівноваги механічної системи.** В мінімумі потенціальної енергії  $\nabla E_p = 0$ , і сила, яка діє на тіло, дорівнює нулю:  $F = 0$ . Тому для замкненої системи з нерухомими тілами рівноважною може бути тільки конфігурація тіл, яка відповідає мінімуму потенціальної енергії системи

$$E_p = E_{\min}.$$

## Розділ 2. МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

### Тема 4. Кінематика обертального руху

#### § 18. Кутова швидкість. Кутове прискорення

Поворот тіла можна зобразити направленим відрізком, який направлений вздовж осі обертання, його довжина дорівнює величині повороту, а напрям зв'язаний з напрямом обертання за правилом правого гвинта (див. рис. 4.1). Тільки дуже малі повороти задовольняють правилу векторного додавання і отже є векторами.

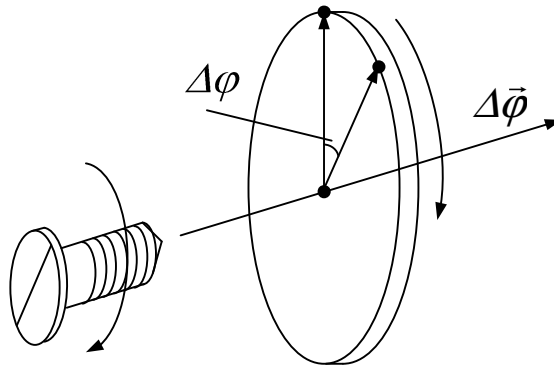


Рис. 4.1

Якщо за елементарний проміжок часу  $\Delta t$  тіло здійснює елементарний поворот  $\Delta\vec{\varphi}$ , то середня кутова швидкість за час  $\Delta t$  визначається за формулою

$$\vec{\omega}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

Щоб отримати миттєву кутову швидкість, потрібно перейти до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Отже миттєва кутова швидкість дорівнює першій похідній кута повороту за часом.

Якщо  $\omega = \text{const}$ , то це рівномірне обертання. Воно характеризується періодом  $T$  – часом повного оберту, частотою  $n = 1/T$  – це кількість обертів в одиницю часу. Для рівномірного обертання кутова швидкість

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

Зміна кутової швидкості в одиницю часу характеризується кутовим прискоренням. Якщо за час  $\Delta t$  зміна кутової швидкості  $\Delta\vec{\omega}$ , то середнє кутове прискорення за  $\Delta t$

$$\vec{\beta}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Миттєве кутове прискорення визначаємо формулою

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

тобто миттєве кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом.

Вектор  $\vec{\omega}$  може змінюватись як за рахунок зміни швидкості обертання, так і за рахунок повороту осі обертання у просторі. Якщо напрям осі обертання у просторі залишається сталим, то модуль кутового прискорення

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt},$$

тобто визначається першою похідною від модуля кутової швидкості за часом.

Тут  $\beta$  – алгебраїчна величина, при  $\beta > 0$  – прискорене обертання, при  $\beta < 0$  – сповільнене (див. рис. 4.2).

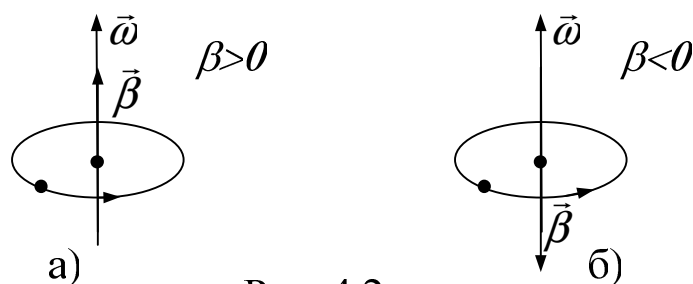


Рис. 4.2

Таким чином, якщо провести такі заміни:

$$s \rightarrow \varphi, \vec{v} \rightarrow \vec{\omega}, \vec{a} \rightarrow \vec{\beta},$$

то усі формули і рівняння кінематики поступального руху перейдуть у відповідні вирази для обертального руху:

Поступальний рух	Обертальний рух
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$	$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega dt$
$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$	$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_0^t \vec{\beta} dt$



Рівнозмінний поступальний рух ( $a = \text{const}$ )	Рівнозмінний обертальний рух ( $\beta = \text{const}$ )
$v = v_0 + a t$ $s = v_0 t + \frac{a t^2}{2}$ $v^2 - v_0^2 = 2 a s$	$\omega = \omega_0 + \beta t$ $\varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \beta \varphi$

### § 19. Зв'язок між лінійними і кутовими величинами

Визначимо зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями. Для цього розглянемо матеріальну точку, яка рухається по колу і за час  $\Delta t$  виконує “поворот”  $\Delta \varphi$  (див. рис. 4.3), проходячи шлях  $\Delta s$ . При цьому

$$\Delta s = R \Delta \varphi,$$

а миттєва швидкість

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega R.$$

Тобто

$$v = \omega R. \quad (4.1)$$

Продиференціюємо формулу (4.1) за часом

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt},$$

звідки

$$a_\tau = \beta R, \quad (4.2)$$

Формули (4.1) і (4.2) і дають зв'язок між лінійними і кутовими кінематичними величинами.

Використовуючи векторний добуток, формулі (4.1) можна надати векторний вигляд. Для цього введемо радіус-вектор  $\vec{R}$  матеріальної точки у площині обертання (див. рис. 4.4). Тоді

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (4.3)$$

Хрестик у формулі (4.3) означає векторний добуток векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{R}$ .

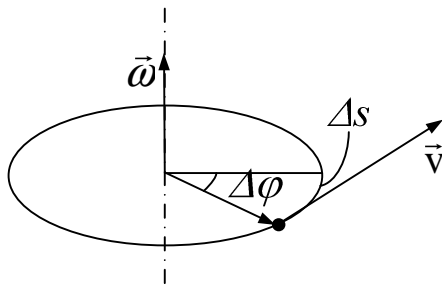


Рис. 4.3

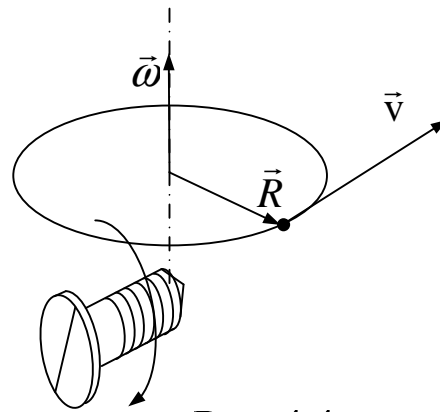


Рис. 4.4

Нагадаємо деякі властивості векторного добутку. Векторним добутком векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є вектор, модуль якого  $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha$ , де  $\alpha$  – кут між векторами. Направлений векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$  перпендикулярно до площини, яку проведено через ці вектори, а його напрям зв'язаний з напрямом найкоротшого обертання від  $\vec{a}$  до  $\vec{b}$  правилом правого гвинта (правилом свердлика – див. рис. 4.5).

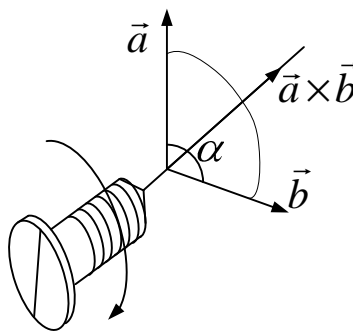


Рис. 4.5

## Тема 5. Динаміка обертального руху

### § 20. Моменти сил

Розділяють моменти сил відносно точки і відносно осі.

а) **Моменти сил відносно точки.** Моментом сили відносно точки  $O$  називається векторний добуток радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного з точки  $O$  у точку прикладання сили, на вектор сили  $\vec{F}$  (див. рис. 5.1), тобто

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5.1)$$

Згідно з визначенням векторного добутку модуль моменту  $\vec{M}$  визначається так:

$$M = F r \sin \alpha = F l,$$

де величина  $l$  – довжина перпендикуляра, який проведено з точки  $O$  на лінію дії сили, називається плечем сили. Таким чином, модуль моменту сили дорівнює добутку сили на плече.

На рис. 5.1 вектор  $\vec{M}$  направлений перпендикулярно до площини, яка проходить через вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ .

б) **Момент сили відносно осі.** Проекція вектора  $\vec{M}$  (див. формулу (5.1)) на деяку вісь  $z$  (див.рис. 5.2) називається моментом сили відносно цієї осі

$$M_z = |\vec{M}| \cos \gamma.$$

Тут вісь  $z$  обов'язково повинна проходити через точку  $O$ , відносно якої визначено  $\vec{M}$ . Як це видно з рис. 5.2, момент  $M_z$  сили відносно осі є добутком модуля тангенціальної складової  $\vec{F}_\tau$  сили  $\vec{F}$  на радіус  $R$  кола, по якому рухається матеріальна точка

$$M_z = F_\tau \cdot R.$$

Момент сили відносно осі є завжди скалярною величиною.

в) **Сумарний момент внутрішніх сил системи матеріальних точок.** Згідно з третім законом Ньютона для будь-якої пари внутрішніх сил (див. рис. 5.3)

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}.$$

Тому

$$\sum \vec{M}_{\text{внутр. сил}} = 0$$

Сумарний момент внутрішніх сил системи завжди дорівнює нулю.

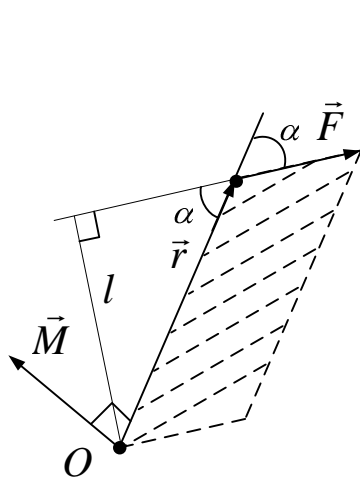


Рис. 5.1

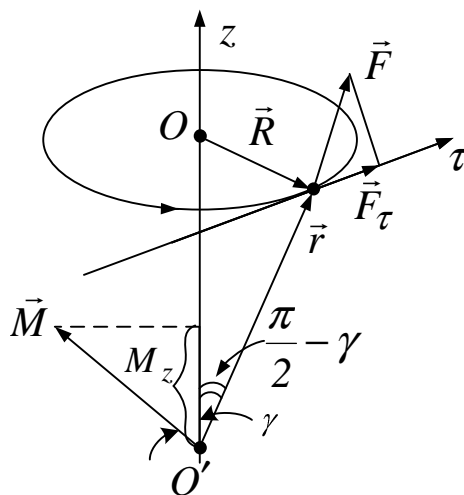


Рис. 5.2

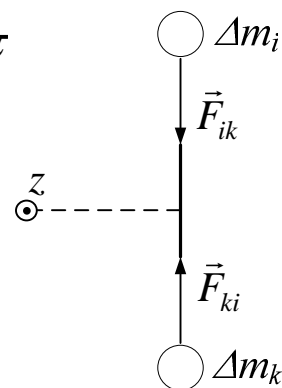


Рис. 5.3

## § 21. Основне рівняння динаміки обертального руху

Розіб'ємо тверде тіло на елементарні ділянки, кожна з яких настільки мала, що її можна вважати матеріальною точкою (на рис. 5.4 показана одна з них  $\Delta m_i$ ,  $i$  – номер елементарної маси).

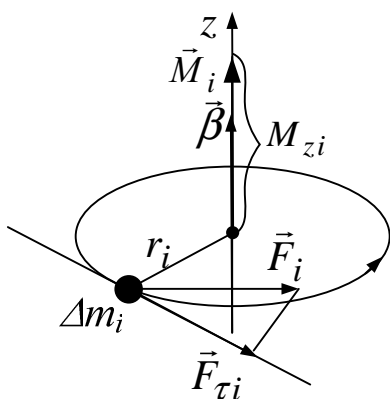


Рис. 5.4

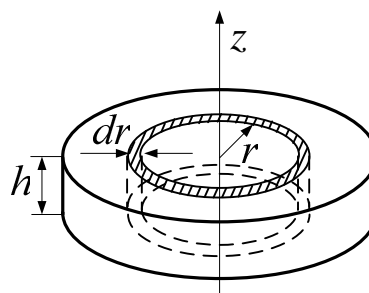


Рис. 5.5

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для елементарної маси

$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i. \quad (5.2)$$

Спроектуємо вектори у формулі (5.2) на напрям вздовж дотичної. У результаті отримуємо

$$\Delta m_i a_{\tau i} = F_{\tau i}. \quad (5.3)$$

Помножимо (5.3) на  $r_i$  і врахуємо, що  $a_{\tau i} = \beta r_i$ . У результаті отримаємо

$$(\Delta m_i r_i^2) \beta = F_{\tau i} r_i = M_{zi}, \quad (5.4)$$

де  $M_{zi}$  – момент сили  $F_i$  відносно осі  $z$ .

Формулі (5.4) можна надати такого вигляду:

$$(\Delta m_i r_i^2) \beta = M_{zi}.$$

Величина

$$I_{zi} = \Delta m_i r_i^2$$

має назву моменту інерції матеріальної точки відносно осі  $z$ .

Результуючий момент  $\vec{M}_{zi}$ , який діє на елементарну ділянку, розіб'ємо на момент внутрішніх сил і момент зовнішніх сил

$$I_{zi} \beta = M_{zi}^{зовн} + M_{zi}^{внутр}. \quad (5.5)$$

Підсумуємо формулу (5.5) за усіма елементарними ділянками, на які ми розбили тверде тіло

$$\beta \sum I_{zi} = \sum M_{zi}^{зовн} + \sum M_{zi}^{внутр}.$$

Вище було доведено, що

$$\sum M_{zi}^{внутр} = 0.$$

Введемо такі позначення:

$$\sum I_{zi} = I_z$$

– момент інерції твердого тіла відносно осі  $z$ ,

$$\sum M_{zi}^{зовн} = M_z$$

– результуючий момент зовнішніх сил.

Тоді отримуємо основне рівняння динаміки обертального руху

$$M_z = I_z \beta. \quad (5.6)$$

Формула (5.6) ще називається другим законом Ньютона для обертального руху. Індекс  $z$  у формулі (5.6) підкреслює той факт, що момент сили  $M_z$  і момент інерції  $I_z$  беруться відносно однієї і тієї осі  $z$ . Нагадаємо, що для поступального руху

$$\vec{F} = m \vec{a}. \quad (5.7)$$

Порівнюючи формули (5.6) і (5.7), бачимо, що при обертальному русі роль сили  $\vec{F}$  виконує момент сили  $\vec{M}$ , роль маси  $m$  – момент інерції  $I$ , роль лінійного прискорення  $\vec{a}$  – кутове прискорення  $\beta$ .

## § 22. Момент інерції твердого тіла

Момент інерції твердого тіла – це міра інертності тіла при обертальному русі. Він дорівнює сумі моментів інерції елементарних ділянок, на які можна розбити тіло

$$I_z = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm. \quad (5.8)$$

Локальна густина тіла, тобто густина у даній точці неоднорідного тіла, визначається за формулою

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (5.9)$$

Тобто, густина дорівнює першій похідній маси за об'ємом. З формули (5.9) випливає, що

$$dm = \rho dV.$$

Тоді формула (5.8) набуває вигляду

$$I_z = \int \rho r^2 dV, \quad (5.10)$$

тобто у формулі (5.10) порівняно з (5.8), ми перейшли від інтегрування по масі до інтегрування по об'єму.

Для однорідного тіла  $\rho = \text{const}$ , тому:

$$I_z = \rho \int r^2 dV. \quad (5.11)$$

У формулах (5.10), (5.11) інтегрування виконується по об'єму тіла.

### Приклад. Момент інерції циліндра

Розіб'ємо весь об'єм циліндра на кільцеві шари товщиною  $dr$  і радіусом  $r$  (див. рис. 5.5). Об'єм одного такого кільцевого шару

$$dV = 2 \pi r h dr.$$

Підставляючи  $dV$  у формулу (5.11), отримуємо

$$I_z = 2\pi \rho h \int r^3 dr.$$

Інтегрування по об'єму звелось до інтегрування по радіусу з межами від 0 до  $R$  (радіус циліндра). У результаті отримуємо формулу

$$I_z = 2\pi h \rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4.$$

Враховуючи, що маса циліндра  $m = \pi \rho R^2 h$ , приходимо до кінцевого виразу для моменту інерції циліндра

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2. \quad (5.12)$$

Формула (5.12) визначає момент інерції однорідного циліндра відносно його власної осі симетрії.

Проводячи аналогічні розрахунки для однорідної кулі, яка обертається навколо осі, що проходить через її центр (див. рис. 5.6, а), отримуємо

$$I_z = \frac{2}{5} m R^2,$$

де  $R$  – радіус кулі,  $m$  – її маса.

Для стрижня масою  $m$  і довжиною  $l$ , який обертається навколо осі, що проходить через його середину (див. рис. 5.6, б), момент інерції дорівнює

$$J = \frac{1}{12} m l^2.$$

**Теорема Штейнера.** Момент інерції тіла  $I$  відносно будь-якої осі дорівнює сумі його моменту інерції  $I_c$  відносно осі, яка паралельна даній і проходить через центр інерції тіла, та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями (див. рис. 5.6, в)

$$I = I_c + m l^2.$$

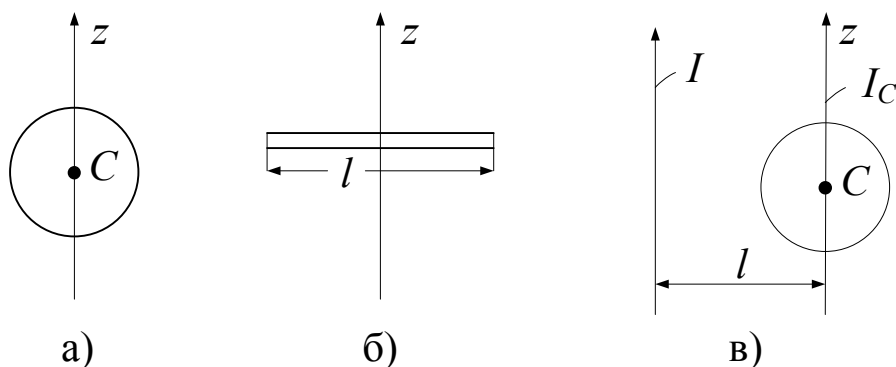


Рис. 5.6

### § 23. Момент імпульсу матеріальної точки

Момент імпульсу матеріальної точки визначається за тими ж формулами, що й момент сили, тільки потрібно замінити силу  $\vec{F}$  на імпульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Так, момент імпульсу  $\vec{L}$  відносно точки дорівнює векторному добутку радіус-вектора  $\vec{r}$  на імпульс  $\vec{p} = m\vec{v}$  (див. рис. 5.7)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Момент імпульсу  $\vec{L}$  перпендикулярний площині, в якій лежать вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{p}$ . На рис. 5.7 вектор  $\vec{L}$  направлений перпендикулярно площині рисунка “від нас”.

Модуль моменту імпульсу

$$L = r p \sin \alpha = p l,$$

де  $l = r \sin \alpha$  – плече моменту імпульсу, де  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки, проведений із будь-якої точки, яка лежить на осі, крім центра обертання.

Момент імпульсу  $L_z$  відносно осі  $z$  є скалярною величиною і визначається формулою

$$L_z = |\vec{L}| \cos \alpha.$$

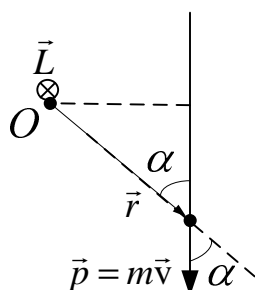


Рис. 5.7

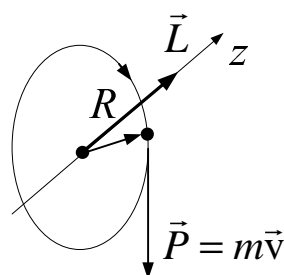


Рис. 5.8

**Приклад.** Матеріальна точка рухається по колу (див. рис. 5.8). Її момент імпульсу

$$L = m \vee R.$$

Момент імпульсу такої точки може змінюватися тільки за рахунок зміни чисельного значення швидкості  $\vec{v}$ .

## § 24. Закон збереження моменту імпульсу

Розглянемо систему, що складається із  $N$  матеріальних точок.

Для  $i$ -ої матеріальної точки системи

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i^{\text{внутр}} + \vec{M}_i^{\text{зовн}} \quad (i=1,2,\dots,N). \quad (5.13)$$

Ми розбили сили (і відповідно моменти сил) на внутрішні і зовнішні. Підсумуємо формули (5.13) по всім матеріальним точкам системи

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{L}_i = \sum \vec{M}_i^{\text{внутр}} + \sum \vec{M}_i^{\text{зовн}}.$$

Для внутрішніх сил завжди

$$\sum \vec{M}_i^{\text{внутр}} = 0.$$

Введемо

$\sum \vec{L}_i = \vec{L}_{\text{сист}}$  – повний момент імпульсу системи,

$\sum \vec{M}_i^{\text{зовн}} = \vec{M}_{\text{сист}}^{\text{зовн}}$  – результуючий момент зовнішніх сил, які діють на систему.

У результаті:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}_{\text{сист}}^{\text{зовн}}.$$

Для замкненої системи

$$\vec{M}_{\text{сист}}^{\text{зовн}} = 0; \quad \frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = 0,$$

і, отже,

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \text{const}.$$

У замкненій системі матеріальних точок повний момент імпульсу є сталою величиною. Це і є закон збереження моменту імпульсу.

## § 25. Момент імпульсу твердого тіла

Розіб'ємо тверде тіло на елементарні маси  $\Delta m_i$ . Для окремої маси  $\Delta m_i$  момент імпульсу (див. рис. 5.9)

$$\Delta L_i = \Delta m_i \vee_i r_i.$$

Оскільки  $\vee_i = \omega r_i$ , то

$$\Delta L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega, \quad (5.14)$$

Тут у величини  $\omega$  індекс відсутній, оскільки кутова швидкість однакова для всіх точок тіла.



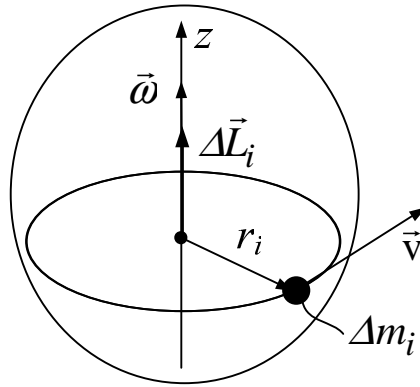


Рис. 5.9

Напрями векторів  $\Delta \vec{L}_i$  і  $\vec{\omega}$  однакові, тому (5.14) можна перетворити у векторне рівняння

$$\Delta \vec{L}_i = (\Delta m_i r_i^2) \vec{\omega}.$$

Момент імпульсу твердого тіла

$$\vec{L} = \sum_i \Delta \vec{L}_i = \vec{\omega} \sum_i \Delta m_i r_i^2.$$

Оскільки

$$\sum \Delta m_i r_i^2 = I$$

– момент інерції тіла, то остаточно для моменту імпульсу твердого тіла

$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

Таким чином, момент імпульсу твердого тіла дорівнює добутку моменту інерції, взятого відносно тієї ж осі, на кутову швидкість.

Нагадаємо, що  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ , тому

$$\frac{d}{dt}(I \vec{\omega}) = \vec{M},$$

де  $\vec{M}$  – результативний момент сил, що діють на тіло.

І якщо  $M = 0$ , то  $I\omega = \text{const}$ .

Таким чином, при  $\vec{M} = 0$  добуток  $I\vec{\omega}$  залишається сталою величиною, і зміна моменту інерції викличе відповідну зміну кутової швидкості тіла.

## § 26. Кінетична енергія твердого тіла

Розглянемо два випадки.

**1. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.** Як і до того, розіб'ємо тверде тіло на окремі елементарні маси. Для окремої елементарної маси  $\Delta m_i$ , кінетична енергія

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} (\Delta m_i r_i^2) \omega^2,$$

оскільки  $v_i = \omega r_i$ , де  $r_i$  – радіус траєкторії маси  $\Delta m_i$ .

Для всього твердого тіла

$$E_k = \sum_{(i)} \Delta E_{ki} = \frac{I}{2} \omega^2 \sum_{(i)} \Delta m_i r_i^2.$$

Оскільки  $\sum \Delta m_i r_i^2 = I$  – момент інерції тіла, то кінцевий вираз для кінетичної енергії тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, має вигляд

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}.$$

**2. Загальний випадок руху тіла.** У загальному випадку рух – це накладання двох рухів: поступального зі швидкістю центра інерції  $\vec{v}_c$  і обертального з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо осі, яка проходить через центр інерції тіла.

У цьому випадку формула для кінетичної енергії отримує настільки простий вигляд:

$$E_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2},$$

де  $I_c$  – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр інерції тіла,  $v_c$  – швидкість центра інерції тіла.

Таким чином кінетична енергія тіла у загальному випадку його руху складається з енергії поступального руху зі швидкістю, яка дорівнює швидкості центра інерції тіла, і енергії обертального руху навколо осі, яка проходить через центр інерції тіла.

## § 27. Робота при обертанні твердого тіла

Як і раніше, розглянемо окрему елементарну ділянку твердого тіла масою  $\Delta m_i$ ,  $\vec{F}_i$  – зовнішня сила, яка діє на ділянку масою  $\Delta m_i$  (див. рис. 5.10).

За час  $dt$  тіло обертається на кут  $d\varphi$  і елементарна ділянка проходить шлях

$$ds_i = r_i d\varphi.$$

При цьому виконується робота

$$dA_i = F_{\tau i} ds_i = F_{\tau i} r_i d\varphi = M_i d\varphi,$$

де  $F_{\tau i}$  – тангенціальна складова сили  $\vec{F}_i$ ,  $M_i$  – момент сили  $\vec{F}_i$  відносно осі обертання.

Робота над усім тілом за час  $dt$

$$dA = \sum_{(i)} dA_i = \varphi \sum_{(i)} M_i = M d\varphi, \quad (5.15)$$

де  $M$  – результуючий момент сил, які діють на тіло. Інтегруючи формулу (5.15), отримуємо:

$$A_{I2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi.$$

Якщо  $M = \text{const}$ , то  $A_{I2} = M \varphi$ .

Таким чином, щоб визначити роботу при обертанні твердого тіла, потрібно результуючий момент сил, який діє на тверде тіло, проінтегрувати по куту повороту від початкового кута  $\varphi_1$  до кінцевого –  $\varphi_2$ .

На координатній площині  $(M, \varphi)$  робота при обертанні твердого тіла дорівнює площі криволінійної трапеції, яка вгорі обмежена графіком  $M(\varphi)$  (див. рис. 5.11).

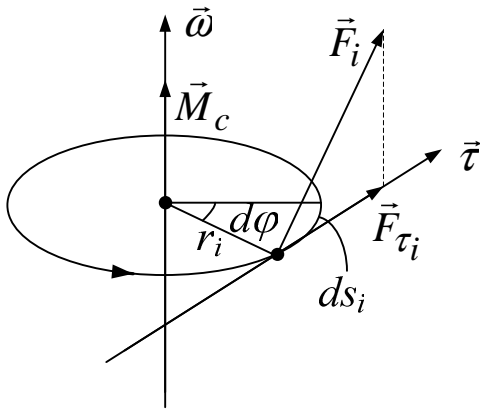


Рис. 5.10

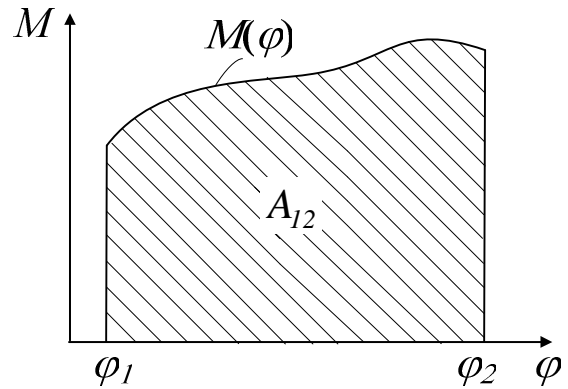


Рис. 5.11

### **Розділ 3. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА**

#### **Тема 6. Загальні поняття молекулярної фізики і термодинаміки**

##### **§ 28. Задачі молекулярної фізики і термодинаміки**

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовин, виходячи із молекулярно-кінетичних уявлень:

- а) будь-яке тіло складається з великої кількості молекул;
- б) молекули будь-якої речовини знаходяться у стані постійного теплового руху;
- в) молекули взаємодіють між собою.

Молекулярно-кінетична теорія розглядає властивості речовин як сумарний результат взаємодії її молекул. При цьому вона користується статистичним методом, цікавлячись лише середніми величинами (середня швидкість молекул, середня енергія тощо).

Термодинаміка вивчає властивості тіл і явищ природи, не цікавлячись їхньою мікроскопічною структурою. Не вдаючись до мікроскопічного розгляду процесів, термодинаміка дозволяє зробити цілий ряд висновків відносно їх протікання.

В основі термодинаміки лежать три фундаментальні закони (принципи, початки), встановлені шляхом узагальнення великої кількості дослідних даних.

Вивчаючи стан речовин з різних точок зору (молекулярна фізика – з мікроскопічного рівня, термодинаміка – з макроскопічного), молекулярна фізика і термодинаміка взаємно доповнюють одна одну.

##### **§ 29. Стани і процеси**

Системою будемо називати сукупність тіл, що розглядаються (у тому числі й молекули).

Будь-яка система може знаходитись у різних станах. Величини, які характеризують стан системи, мають назву параметрів стану. Для газу параметрів стану 3:  $p$  – тиск,  $V$  – об'єм,  $T$  – абсолютна температура.

Не будь-який параметр стану має певне значення. Якщо один або кілька параметрів стану не визначені, то такий стан має назву нерівноважного.

Наприклад, газ у циліндрі під поршнем. При швидкому стискуванні тиск у шарі під поршнем більший, ніж тиск у об'ємі, а при швидкому розширенні навпаки – менший. Таким чином газ не можна характеризувати таким параметром стану як тиск, бо він у різних точках об'єму різний, отже, ці стани газу – нерівноважні.

Рівноважний стан – це такий стан, при якому усі параметри системи мають певні значення, які залишаються незмінними при незмінних зовнішніх умовах.

Усякий рівноважний стан можна зобразити точкою на координатній площині (див. рис. 6.1).

Процес, який складається з неперервної послідовності рівноважних станів, має назву рівноважного. Рівноважним може бути тільки нескінченно повільний процес. Тільки рівноважні процеси на координатній площині можуть бути зображені відповідною кривою (див. рис. 6.2).

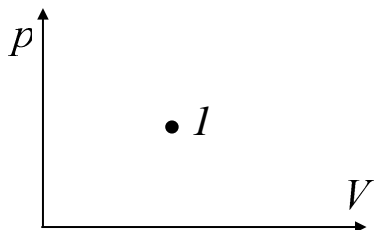


Рис. 6.1

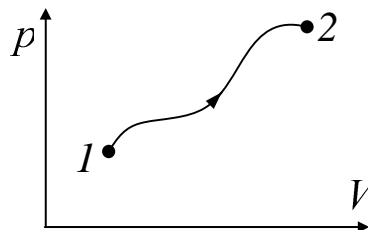


Рис. 6.2

### § 30. Внутрішня енергія системи

Внутрішня енергія тіла  $U_T$  – це кінетична енергія хаотичного руху молекул, потенціальна енергія їх взаємодії і внутрішньомолекулярна енергія.

$$U_T = \sum E_{к\text{ мол}} + E_{р\text{ мол}} + E_{вн\text{ мол}}.$$

Внутрішня енергія системи тіл дорівнює сумі внутрішніх енергій усіх тіл системи і потенціальної енергії взаємодії між тілами:

$$U_{сист} = \sum_{i=1}^N U_{i\text{ тіл}} + E_{р\text{ тілами}}.$$

Внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що всякий раз, коли система опиняється у даному стані, її внутрішня енергія набуває тільки відповідного цьому стану значення (графічно це показано на рис. 6.3).

При переході системи із одного стану в інший зміна внутрішньої енергії  $\Delta U_{12}$  дорівнює різниці значень у цих станах, незалежно від шляху переходу, тобто (див. рис. 6.4)

$$\Delta U_{12}^{(I)} = \Delta U_{12}^{(II)} = \Delta U_{12}^{(III)} = U_1 - U_2.$$

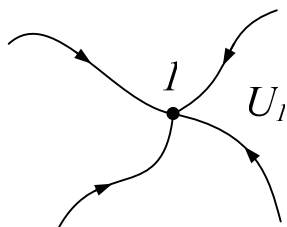


Рис. 6.3

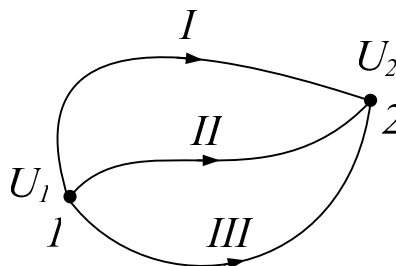


Рис. 6.4

### § 31. Перший закон термодинаміки

Внутрішню енергію можна змінити двома процесами: виконанням над системою роботи  $A'_{12}$  і наданням їй кількості теплоти  $Q$ . Тоді приріст внутрішньої енергії

$$U_2 - U_1 = Q + A'_{12}. \quad (6.1)$$

Якщо ввести  $A_{12} = -A'_{12}$  – роботу системи над зовнішніми тілами, що формула (6.1) набуває вигляду

$$Q = U_2 - U_1 + A_{12}.$$

Це і є зміст першого закону термодинаміки, який говорить, що теплота, яку отримує система, йде на приріст її внутрішньої енергії і на роботу системи над зовнішніми тілами.

Для розрахунків величин  $A$  і  $Q$  доводиться розбивати процес на послідовність елементарних процесів. Для елементарного процесу 1-й закон термодинаміки має вигляд

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A,$$

де  $\Delta Q$  – елементарна кількість тепла,  $\Delta A$  – елементарна робота,  $\Delta U$  – приріст внутрішньої енергії.

При нескінченно малих змінах параметрів системи перший закон термодинаміки запишеться у вигляді

$$dQ = dU + dA. \quad (6.2)$$

Рівняння (6.2) є найбільш загальною формою запису змісту першого закону термодинаміки.

Фізичний зміст закону термодинаміки полягає у тому, що він є законом збереження енергії у теплових процесах.

### § 32. Робота системи при зміні об'єму

Взаємодію тіла з іншими тілами (рідинами і газами), які дотикаються з даним тілом на поверхні, можна характеризувати тиском, який воно на них чинить. Якщо на поверхню  $\Delta S$  діє сила  $\Delta \vec{F}$  то середній тиск на  $\Delta S$  (див. рис. 6.5)

$$P_{\text{сер}} = \frac{\Delta F_n}{\Delta S},$$

де  $\Delta F_n$  – проекція  $\Delta \vec{F}$  на нормаль  $\vec{n}$ .

Якщо сила розподілена по площі нерівномірно, то тиск у даній точці

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}.$$

Тиск – скалярна величина, у системи СІ вимірюється у паскалях (Па):  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ .

Переміщення точок прикладання сил взаємодії супроводжується зміною об'єму тіла. Отже, роботу, яка виконується даним тілом над зовнішніми тілами, можна виразити за допомогою тиску і зміни об'єму тіла.

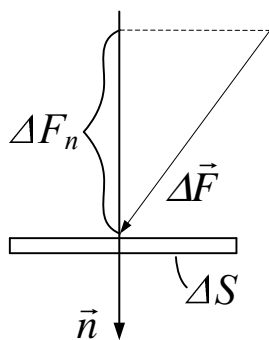


Рис. 6.5

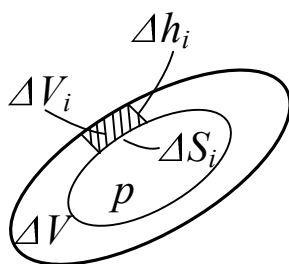


Рис. 6.6

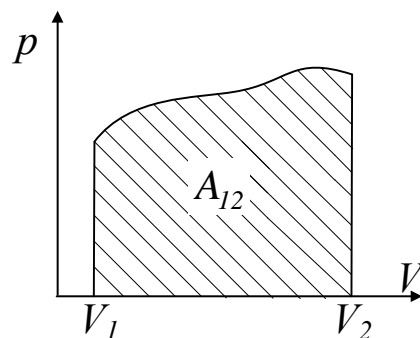


Рис. 6.7

Нехай система отримала приріст об'єму  $\Delta V$  (див. рис. 6.6). Розіб'ємо  $\Delta V$  на елементарні об'єми циліндричної форми  $\Delta V_i$ . Робота  $\Delta A_i$  по зміні елементарного об'єму  $\Delta V_i$  дорівнює

$$\Delta A_i = p \Delta S_i \Delta h_i = p \Delta V_i ,$$

де  $p$  – тиск у системі.

Робота  $\Delta A$  по зміні об'єму система  $\Delta V$

$$\Delta A = \sum \Delta A_i = p \sum \Delta V_i = p \Delta V .$$

Переходячи до нескінченно малих отримуємо:

$$dA = p dV .$$

Тоді робота по зміні об'єму осі  $V_1$  до  $V_2$  буде визначатися формулою:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

На координатній площині  $(p, dV)$  робота дорівнює площі криволінійної трапеції (див. рис. 6.7).

## Тема 7. Елементарна кінетична теорія газів

### § 33. Рівняння кінетичної теорії газів для тиску

Ідеальний газ – це сукупність однакових невзаємодіючих між собою молекул, які хаотично рухаються. Розміри молекул настільки малі, що їх сумарним об'ємом можна знехтувати порівняно з об'ємом посудини.

Розглянемо зіткнення молекул зі стінками посудини (див. рис. 7.1). Кожний елемент поверхні  $\Delta S$  безперервно отримує удари великої кількості молекул.

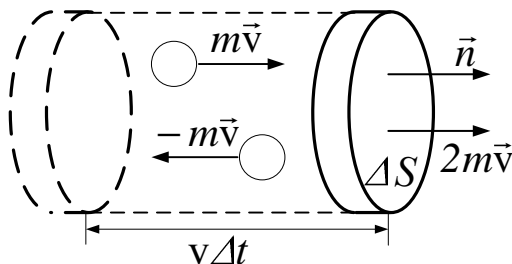


Рис. 7.1

Зміни імпульсу молекули при ударі:

$$\Delta \vec{p}_{\text{мол}} = -m\vec{v} - m\vec{v} = -2m\vec{v}.$$

Стінка отримує імпульс  $\Delta \vec{p} = 2m\vec{v}$  при ударі кожної молекули. Передача імпульсу молекулою при ударі зі стінкою і приводить до тиску газу на стінки посудини.

Оскільки простір тривимірний, то можна вважати, що у вибраному напрямку рухається  $1/6$  усіх молекул. Тоді за час  $\Delta t$  поверхні  $\Delta S$  досягнуть усі молекули, що знаходяться у циліндрі з висотою  $v\Delta t$  і кількість зіткнень  $\Delta N$  за цей час

$$\Delta N = \frac{1}{6} n v \Delta s \Delta t,$$

де  $n$  – число молекул в одиничному об'ємі, тобто концентрація молекул.

Підсумковий імпульс  $\Delta K$ , який передається поверхні  $\Delta S$  за  $\Delta t$ :

$$\Delta K = 2m v \Delta N = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} \Delta s \Delta t.$$

Тиск дорівнює

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta t \Delta s} = \frac{1}{3} n m \overline{v^2}.$$

Якщо ввести  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{m \overline{v^2}}{2}$  – середню кінетичну енергію поступального руху молекули, то

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle. \quad (7.1)$$

Помножимо (7.1) на об'єм моля  $V_m$



$$pV_M = \frac{2}{3}nV_M \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3}N_A \langle \varepsilon \rangle, \quad (7.2)$$

де  $N_A = nV_M$  – число Авогадро, тобто кількість молекул у одному молі.

З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$pV_M = RT. \quad (7.3)$$

Порівнюючи (7.2) і (7.3), отримуємо

$$\frac{2}{3}N_A \langle \varepsilon \rangle = RT,$$

звідки

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3}kT. \quad (7.4)$$

Підставляючи (7.4) у (7.1), одержуємо кінцеву формулу

$$p = nkT,$$

де  $k = R/N_A$  – стала Больцмана.

Таким чином, тиск газу визначається числом молекул у одиничному об'ємі і температурою газу.

### § 34. Рівнорозподіл енергії по ступеням вільності

Ступені вільності механічної енергії – це незалежні величини, за допомогою яких можна задати положення системи у просторі. Наведемо приклади:

**1. Матеріальна точка.** Її положення у просторі однозначно визначається трьома координатами  $\{x, y, z\}$ . Отже вона має три ступені вільності.

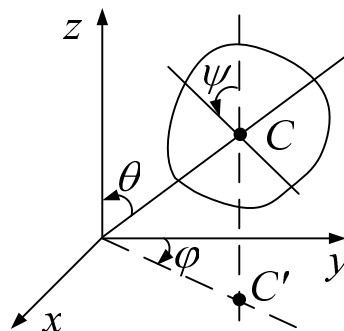


Рис. 7.2

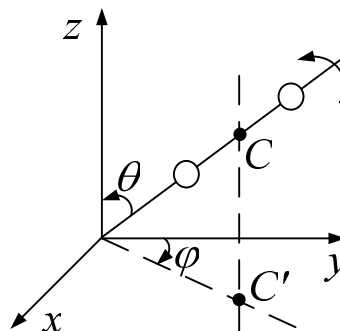


Рис. 7.3

**2. Тверде тіло.** Щоб задати положення і орієнтацію твердого тіла у просторі, потрібно задати три координати його центра інерції  $\{x_c, y_c, z_c\}$  і три кути  $\{\theta, \varphi, \psi\}$ , які визначають положення двох взаємноперпендикулярних осей, котрі проходять через центр інерції тіла (див. рис. 7.2) і визначають орієнтацію тіла.

Отже тверде тіло має шість ступенів вільності, з яких три  $\{x_c, y_c, z_c\}$  змінюються у процесі поступального руху і мають назву поступальних, а ще

три  $\{\theta, \varphi, \psi\}$  змінюються при обертальному русі і називаються обертальними.

**3. Двохатомна молекула** з жорстким зв'язком між атомами має 5 ступенів вільності  $\{x_c, y_c, z_c, \theta, \varphi\}$ . При обертанні навколо осі молекули її положення у просторі не змінюється, і тому потрібно задавати тільки два кути  $\theta$  і  $\varphi$  (див.рис. 7.3).

У § 1 ми одержали формулу для середньої енергії поступального руху молекули

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Скільки б не було ступенів вільності у молекули, поступальних ступенів вільності завжди три. Жоден поступальний ступінь вільності не має переваги перед іншою. Тоді на один поступальний ступень вільності в середньому припадає енергія  $\frac{1}{2} kT$ .

Крім поступального руху, молекула ще й обертається, і в ній відбуваються коливання атомів. Тоді середня енергія теплового руху молекули визначається формулою

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де  $i = n_{\text{пост.}} + n_{\text{об.}} + 2 n_{\text{кол.}}$ ,  $n$  – число відповідних ступенів вільності. Коливальні ступені вільності мають удвічі більшу енергоємність і тому входять до формули подвоєно.

При невисоких температурах (до кімнатних) коливальні ступені вільності незбуджені, тому  $i = 3$  – для одноатомних молекул,  $i = 5$  – двохатомних,  $i = 6$  – для трьох і більш-атомних молекул (тобто для них – як і для твердого тіла).

### § 35. Внутрішня енергія і теплоємність ідеального газу

Внутрішня енергія ідеального газу складається із енергії теплового руху окремих молекул.

Для одного моля внутрішня енергія

$$U_M = N_A \langle \varepsilon_{\text{мол}} \rangle = \frac{i}{2} (N_A k) T = \frac{i}{2} RT.$$

Для довільної маси газу  $U_M$  потрібно помножити на число молів  $m/\mu$

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Існують такі види теплоємностей:

- 1) теплоємність тіла  $C_T = \frac{dQ}{dT}$  (Дж/К) – для довільної маси  $m$ ;
- 2) молярна теплоємність  $C$  (Дж/К·моль) – для маси  $m = \mu$ ;

3) питома теплоємність  $c$  (Дж/(К · кг)) – для маси  $m = 1$  кг.

Із визначень теплоємностей випливає:

$$c = \frac{C_T}{m} = \frac{C}{\mu}.$$

Для газів підрозділяють теплоємність при сталому об'ємі  $C_V$  і теплоємність при сталому тиску  $C_p$ .

1)  $V = \text{const}$  (ізохорний процес), тоді  $dV = 0$  і  $dA = p dV = 0$ .

З першого закону термодинаміки

$$dQ_V = dU_M$$

– для моля речовини. Тоді молярна теплоємність при сталому об'ємі

$$C_V = \frac{dQ_V}{dT} = \frac{dU_M}{dT} = \frac{i}{2} R, \quad C_V = \frac{i}{2} R$$

Тобто  $C_V$  визначається тільки кількістю ступенів вільності.

2)  $p = \text{const}$  (ізобарний процес); для моля

$$dQ_p = dU_M + p dV_M.$$

Тоді молярна теплоємність при сталому тиску

$$C_p = \frac{dQ_p}{dT} = \frac{dU_M}{dT} + p \left( \frac{dV_M}{dT} \right)_p = C_V + p \left( \frac{dV_M}{dT} \right)_p.$$

Індекс показує, який параметр залишився сталим. З рівняння Клапейрона

$$V_M = \frac{RT}{p}; \quad \left( \frac{dV_M}{dT} \right)_p = \frac{R}{p}.$$

І нарешті

$$C_p = C_V + R.$$

Дослід показує, що теплоємність залежить від температури. Для водню ( $H_2$ ) таку залежність наведено на рис. 7.4.

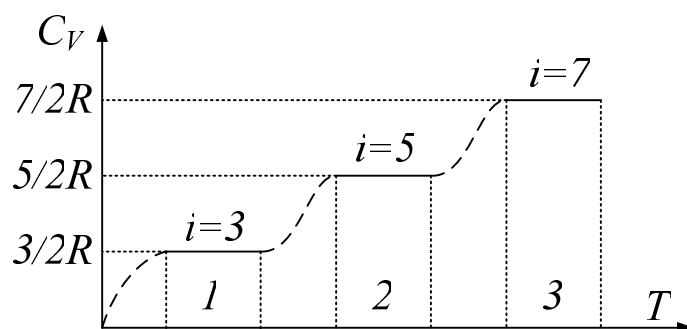


Рис. 7.4

В інтервалі температур ділянки 1 на рис. 7.4 молекули знаходяться у поступальному русі. З підвищенням температури все більша частина молекул втягується додатково в обертальний рух (ділянка 2), а потім – і в коливальний (ділянка 3). Тому число ступенів вільності молекул залежить від температури.

### § 36. Рівняння адіабатного процесу (рівняння Пуассона)

Адіабатним називається процес, який протікає без теплообміну із зовнішнім середовищем. Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T, \quad (7.5)$$

де  $C_V = \frac{i}{2} R$  – молярна теплоємність при сталому об'ємі. З формули (7.5)

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Тоді перший закон термодинаміки набуває вигляду

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT + p dV.$$

Для адіабатного процесу  $dQ = 0$ , і диференціальне рівняння:

$$\frac{m}{\mu} C_V dT + p dV = 0. \quad (7.6)$$

З рівняння Клапейрона  $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$  і рівняння (7.6) набуває вигляду

$$\frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = 0. \quad (7.7)$$

Розділяючи зміни величини в (7.7), отримуємо вираз

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0,$$

який можна переписати у вигляді

$$d(\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V) = 0.$$

Звідки:

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{const}. \quad (7.8)$$

Оскільки

$$R = C_p - C_V,$$

то

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1,$$

де коефіцієнт  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ ,  $i$  – число ступенів вільності.

В результаті вираз (7.8) набуває вигляду:

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \text{const}. \quad (7.9)$$

Виконуючи потенціювання у (7.9), отримуємо

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (7.10)$$

а оскільки  $T = \frac{\mu P V}{m R}$ , то з (7.10) маємо:

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \quad (7.11)$$

Рівняння (7.10) і (7.11) мають назву рівняння Пуассона. Згадаємо, що для ізотермічного процесу

$$pV = \text{const}.$$

Оскільки  $\gamma > 1$ , то на координатній площині  $(p, V)$  адіабата проходить більш круто, ніж ізотерма (див. рис. 7.5). Швидкі процеси близькі до адіабатних.

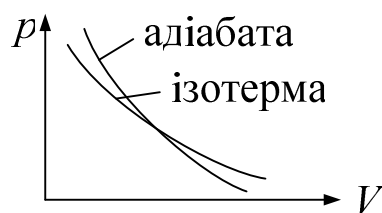


Рис. 7.5

## Тема 8. Розподіл молекул

### § 37. Розподіл молекул за швидкостями (розподіл Максвелла)

Молекули газу рухаються з різними швидкостями, при цьому модуль і напрямок швидкості кожної молекули безперервно змінюються внаслідок їх взаємних зіткнень.

Можливі значення швидкості молекул, які містяться у межах від 0 до  $\infty$ , не рівномірні. Дуже великі і дуже малі порівняно з середніми швидкості малоймовірні.

Будемо відмічати значення швидкостей молекул точками на осі швидкості  $v$  (див. рис. 8.1).

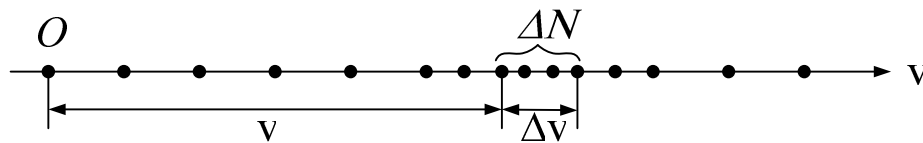


Рис. 8.1

Швидкості молекул розподілені на осі нерівномірно, вони групуються переважно навколо деякого найбільш імовірного значення.

Позначимо  $\Delta N$  кількість точок, які потрапляють у інтервал швидкостей  $v$ .

Тоді густина точок на осі швидкостей

$$p(v) = \frac{\Delta N}{\Delta v},$$

Однаковою для різних порцій газу буде величина

$$f(v) = \frac{p(v)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta v},$$

де  $N$  – загальна кількість молекул газу.

Функція  $f(v)$  характеризує розподіл молекул за швидкостями і має назву функції розподілу.

Величина

$$f(v)\Delta v = \frac{\Delta N_v}{N}$$

дає імовірність того, що швидкість молекули має значення в інтервалі  $v \div v + \Delta v$ .

Сама функція  $f(v)$  визначає густину імовірності, тобто імовірність того, що швидкість молекули лежить в одиничному інтервалі швидкостей навколо значення  $v$ .

Функція розподілу  $f(v)$  за швидкостями була визначена Максвеллом і має вигляд

$$f(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}},$$

де  $A = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$ . Графік функції  $f(v)$  наведено на рис. 8.2.

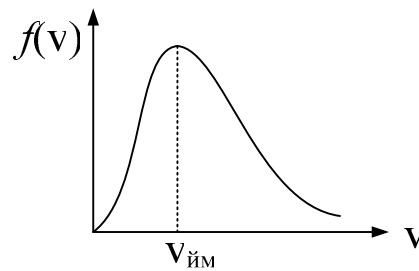


Рис. 8.2

Визначимо швидкість, яка відповідає максимуму функції розподілу  $f(v)$  (ця швидкість  $v_{ім}$  називається найбільш імовірною швидкістю). Для цього функцію  $f(v)$  потрібно дослідити на екстремум

$$\frac{df}{dv} = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left( 2 - \frac{mv^2}{kT} \right) v = 0.$$

Звідки найбільш ймовірна швидкість  $v_i$

$$v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (8.1)$$

Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостями, можна знайти середнє значення швидкості молекул

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (8.2)$$

Порівнюючи (8.2) і (8.1), бачимо, що середня швидкість молекул газу у  $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$  разів більша, ніж найбільша імовірна.

### § 38. Барометрична формула

Атмосферний тиск на будь-якій висоті обумовлений вагою вищих шарів газу.

Якщо на висоті  $h$  тиск повітря дорівнює  $p$ , то на висоті  $h+dh$  тиск прийме значення  $p+dp$ . Тиск зменшується в висоту, тому  $dp < 0$  при  $dh > 0$ .

Тиск стовпа газу висотою  $h$  дорівнює

$$p = \rho g h,$$

а приріст тиску

$$dp = -\rho g dh.$$

З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Тому

$$dp = -\frac{p\mu g}{RT} dh. \quad (8.3)$$

Розділяючи зміни величини у диференційному рівнянні (8.3) отримуємо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (8.4)$$

Якщо температура не змінюється з висотою, то після інтегрування (8.4) маємо

$$\ln p = -\frac{\mu g}{RT} h + \ln C, \quad (8.5)$$

де  $C$  – невідома стала. Після потенціювання (8.5) отримуємо

$$p = Ce^{-\frac{\mu gh}{RT}},$$

Стала  $C$  знаходиться з умови, що  $p(0)=p_0$  – атмосферний тиск на поверхні землі. Кінцева формула має вигляд

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (8.6)$$

і має назву барометричної формули.

З формули (8.6) бачимо, що тиск зменшується з висотою тим більш стрімко, чим важчий газ і чим нижча температура (див. рис. 8.3)

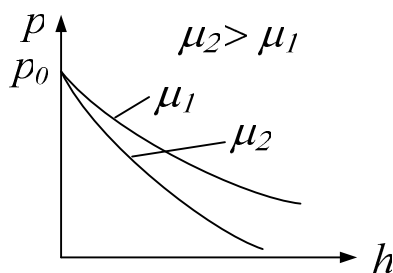


Рис. 8.3

### § 39. Розподіл частинок за потенціальними енергіями (розподіл Больцмана)

Тиск газу визначається формулою  $p = nkT$  і, якщо температура ще не залежить від висоти, то барометрична формула набуває вигляду

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}},$$

де  $n$  – кількість молекул у одиниці об'єму на висоті  $h$ ,  $n_0$  – на висоті  $h = 0$ . Величина  $\mu/R = m_0/k$ , де  $m_0$  – маса молекули,  $k$  – стала Больцмана. У результаті формула (1) набуває вигляду



$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}, \quad (8.7)$$

Формула (8.7) описує розподіл молекул з висотою. Із зниженням температури кількість частинок на висотах, які відмінні від нуля, зменшується і перетворюється в нуль при  $T = 0 \text{ K}$ .

Враховуючи, що  $E_p = m g h$  – потенціальна енергія частинки, формула (8.7) записується у вигляді

$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}. \quad (8.8)$$

Формула (8.8) і дає розподіл частинок за потенціальною енергією – розподіл Больцмана. Частинки розподіляються з більшою щільністю там, де менша їх потенціальна енергія.

Цей розподіл справедливий у будь-якому потенціальному полі сил для великої сукупності однакових частинок, які знаходяться у стані хаотичного теплового руху.

#### § 40. Середня довжина вільного пробігу молекул

Мінімальна відстань  $d$ , на яку зближаються при зіткненні центри двох молекул, називається ефективним діаметром молекули (див. рис. 8.4).

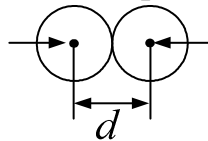


Рис. 8.4

Величина  $\sigma = \pi d^2$  називається ефективним перерізом молекули. Ефективний діаметр зменшується із збільшенням температури.

Молекули газу рухаються хаотично і від зіткнення до зіткнення вільно, тобто рівномірно й прямолінійно. Шлях, який проходить молекула від одного зіткнення до наступного, називається довжиною вільного пробігу. Це випадкова величина, тому мова може йти тільки про її середнє значення.

Середня довжина вільного пробігу  $\langle \lambda \rangle$  дорівнює

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\nu}, \quad (8.9)$$

де  $\langle v \rangle$  – середня швидкість теплового руху молекул,  $\nu$  – середнє число зіткнень за 1 с.

Для того, щоб визначити  $\nu$  припустимо, що всі молекули газу крім даної зупинилися (“заморожені” на своїх місцях), і рухається лише одна молекула. На рис. 8.5 послідовні положення рухомої молекули позначені порожніми кружечками, а нерухомі молекули – заштрихованими. Рухома молекула за 1 с співударяється із всіма “замороженими” молекулами, центри яких потрапляють всередину ламаного циліндра радіусом  $d$ ,

$$\nu = \pi d^2 \langle v \rangle n$$

разів, де  $n$  – кількість молекул в одиничному об'ємі (концентрація молекул),  $d$  – ефективний діаметр молекули.

У дійсності кількість зіткнень визнається не швидкістю молекул відносно стінок посудини, а відносною швидкістю руху молекул, яка у  $\sqrt{2}$  разів більша за швидкість відносно стінок. Тобто

$$v = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n. \quad (8.10)$$

Підставляючи (8.10) в (8.9), отримаємо

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

При  $T = \text{const}$   $n \approx p$  і  $\langle \lambda \rangle = 1/p$ , тобто, чим менший тиск, тим більша довжина вільного пробігу молекул.

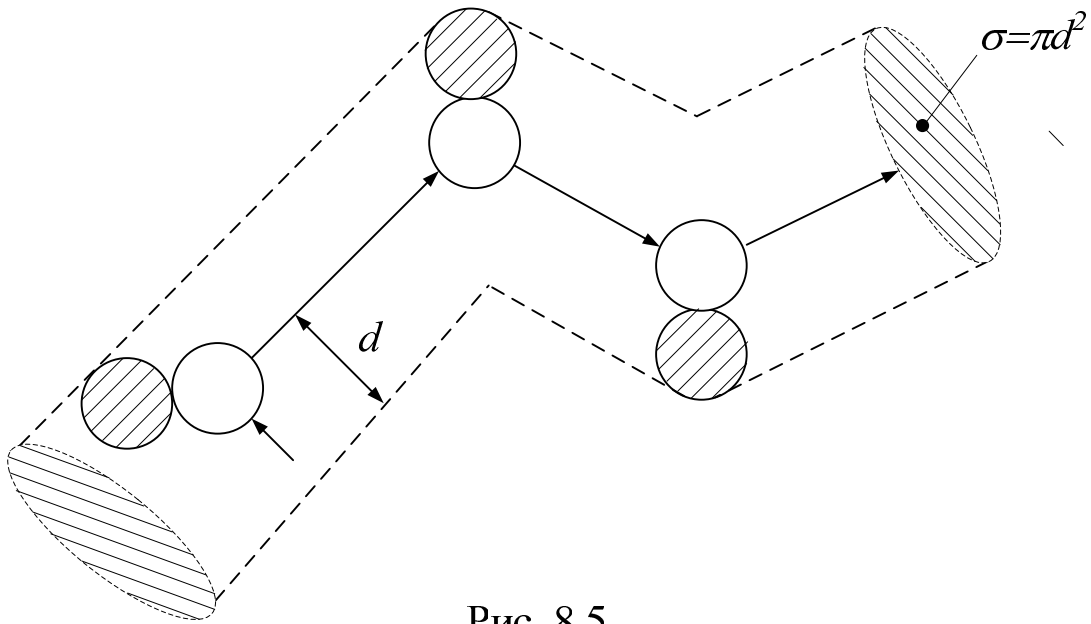


Рис. 8.5

## Тема 9. Явища переносу

### § 41. Явище внутрішнього тертя

Явища переносу – це явища, які виникають при відхиленні газу від стану рівноваги. До них відносяться внутрішнє тертя, теплопровідність і дифузія.

Якщо швидкість  $u$  впорядкованого руху у потоці газу змінюється від шару до шару (див. рис. 9.1), то між шарами виникає сила внутрішнього тертя, яка визначається за формулою:

$$F = \eta \frac{du}{dz} S, \quad (9.1)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя,  $\frac{du}{dz}$  – градієнт швидкості, який характеризує зміну швидкостей шарів у напрямі, перпендикулярному до напрямку їхнього руху,  $S$  – площа поверхні шарів газу. Якщо градієнт швидкості  $\frac{du}{dz} = 1$  і площа  $S = 1$ , то  $|\eta| = |F|$ . Звідси випливає фізичний зміст коефіцієнта внутрішнього тертя – він чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, яка діє на шар рідини одиночної площі при одиничному градієнті швидкості.

Розглянемо, як молекулярно-кінетична теорія газів пояснює явище внутрішнього тертя. Для цього розглянемо два сусідніх шари у потоці газу. Позначимо  $K_1$  і  $K_2$  – імпульси шарів (див. рис. 9.2). Вони не залишаються сталими внаслідок теплового руху молекул газу.

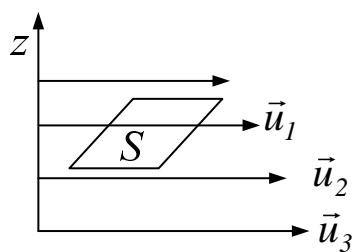


Рис. 9.1

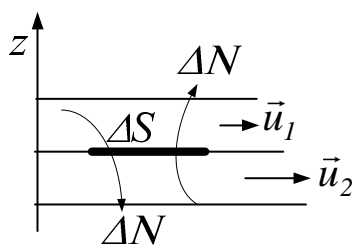


Рис. 9.2

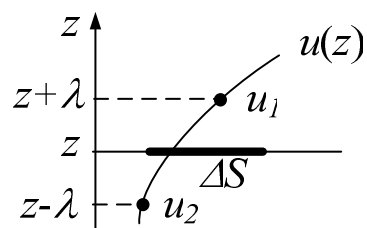


Рис. 9.3

Визначаємо площадку площею  $\Delta S$  на межі між шарами (див. рис. 9.2). Кількість молекул, які внаслідок теплового руху за час  $\Delta t$  переходять через площу  $\Delta S$  із одного шару у інший дорівнює

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \Delta S \Delta t.$$

У результаті імпульс більш швидкого шару зменшується, а імпульс більш повільного – зростає.

Перший шар за час  $\Delta t$  втрачає імпульс

$$\Delta K'_1 = \Delta N m u_1,$$

де  $m$  – маса молекули, а також здобуває імпульс

$$\Delta K_I'' = \Delta N m u_2.$$

Зміни імпульсу першого шару за час  $\Delta t$

$$\Delta K_I = \Delta K_I'' - \Delta K_I' = \Delta N m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (u_2 - u_1) \Delta S \Delta t.$$

На перший шар з боку другого діє сила

$$F_I = \frac{\Delta K_I}{\Delta t} = \frac{1}{6} n m \langle v \rangle (u_2 - u_1) \Delta S. \quad (9.2)$$

На другий шар з боку першого  $\vec{F}_I = -\vec{F}_2$ . Швидкість впорядкованого руху не змінюється стрибком із одного шару до другого, а є безперервною функцією поперечної координати  $z$  (див. рис. 9.3). Можна вважати, що молекули переносять через площадку  $\Delta S$  імпульси, які вони мали у точці останнього зіткнення на відстані довжини вільного пробігу  $\lambda$  від  $\Delta S$ , тобто

$$u_2 = u(z + \lambda) \quad \text{і} \quad u_1 = u(z - \lambda).$$

Враховуючи те, що  $\lambda$  маленька величина, швидкість можна представити у вигляді розкладу в ряд, залишивши два перших члена ряду:

$$u(z \pm \lambda) = u(z) \pm \frac{du}{dz} \lambda.$$

Тоді

$$u_2 - u_1 = 2\lambda \frac{du}{dz}. \quad (9.3)$$

Підставляючи (9.3) у (9.2), отримуємо для сили внутрішнього тертя формулу

$$F = \left( \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda \right) \frac{du}{dz} \Delta S. \quad (9.4)$$

Порівняння теоретичної формули (9.4) з дослідною (9.1) показує, що вони повністю однакові, а для коефіцієнта внутрішнього тертя молекулярно кінетична теорія дає вираз

$$\eta = \left( \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \lambda \right).$$

Отже, коефіцієнт внутрішнього тертя визначається густиною газу  $\rho$ , середньою швидкістю теплового руху молекул  $\langle v \rangle$  і середньою довжиною  $\langle \lambda \rangle$  вільного пробігу молекул.

## § 42. Теплопровідність газів

Якщо у будь-якому середовищі вздовж деякого напрямку  $z$  температура не залишається сталою (див. рис. 9.4), то вздовж цього напрямку виникає потік тепла

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} S, \quad (9.5)$$

де  $q = \frac{dQ}{dt}$  – потік тепла, тобто кількість теплоти, яка переноситься через

площадку  $S$  за одиницю часу і вимірюється в системі Сі у Вт,  $\frac{dT}{dz}$  – градієнт температури, який характеризує зміну температури вздовж координати  $z$ . Знак *мінус* у формулі (9.5) говорить про те, що потік тепла завжди тече у бік зменшення температури. Потік тепла  $q$  – алгебраїчна величина – при  $q > 0$  потік вздовж осі  $z$ , при  $q < 0$  – у бік, протилежний до осі  $z$ .

Середня енергія теплового руху молекул пропорційна температурі

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT.$$

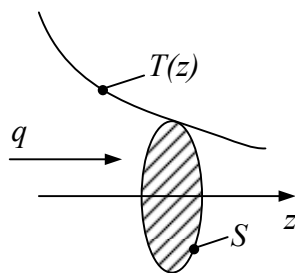


Рис. 9.4

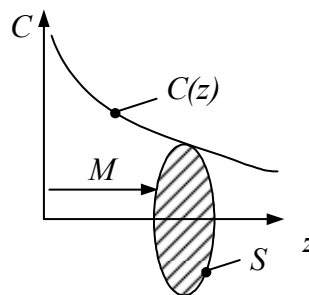


Рис. 9.5

Кількість молекул  $\Delta N$ , які перетинають площадку  $S$  вздовж осі  $z$  за час  $\Delta t$  незмінна, а їхня енергія різна, оскільки різна температура ліворуч і праворуч площадки  $S$ . Потік тепла буде дорівнювати

$$q = \frac{\Delta N}{\Delta t} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

де  $\varepsilon_1$  – енергія молекули на відстані  $\lambda$  з боку більшої температури від площадки  $S$ , а  $\varepsilon_2$  – теж саме з іншого боку. Повторюючи всі викладки наступного розділу отримуємо формулу (9.5), а для коефіцієнта теплопровідності.

$$\kappa = \eta c_V,$$

де  $c_V$  – питома теплоємність газу при сталому об'ємі,  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя.

Таким чином, переміщуючись внаслідок теплового руху з одних місць у інші, молекули переносять накопичену ними енергію. Цей процес і обумовлює теплопровідність.

### § 43. Дифузія в газах

Якщо концентрація молекули  $n$  у різних точках простору неоднакова, то внаслідок теплового руху молекул буде проходити процес вирівнювання концентрації, який супроводжується переносом маси. В напрямі зменшення концентрації встановлюється потік молекул

$$\mu = -D \frac{dc}{dz} S, \quad (9.6)$$

де  $\mu = \frac{dM}{dt}$  – потік молекул газу, тобто кількість молекул яка переноситься через площадку  $S$  за одиницю часу,  $\frac{dn}{dz}$  – градієнт концентрації молекул, який характеризує зміну концентрації вздовж осі  $z$  (див. рис. 9.5).

Оскільки концентрація змінна, то кількості молекул  $\Delta N$ , які за час  $\Delta t$  перетинають площадку  $S$  вздовж осі  $z$  і проти неонакові, і потік молекул

$$\mu = (N_1 - N_2) \frac{m}{\Delta t},$$

де  $N_1$  – кількість молекул, що проходять за час  $\Delta t$  площадку  $S$  на відстані середньої довжини вільного пробігу з боку більшої концентрації, а  $N_2$  – з протилежного боку. Повторюючи викладки параграфу 41, отримуємо формулу (9.6), а для коефіцієнта дифузії  $D$  формулу

$$D = \eta / \rho,$$

де  $\rho$  – густина газу,  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя.

## Тема 10. Термодинаміка

### § 44. Оборотні процеси

Основу термодинаміки утворюють два закони (принципи). Перший закон ми вже згадували раніше, він встановлює кількісні співвідношення, які мають місце при перетворенні енергії з одних видів у інші і є законом збереження енергії у теплових процесах. Другий закон термодинаміки визначає умови, за яких можливі ці перетворення енергії.

У термодинаміці велику роль відіграють поняття рівноважного стану і оборотного процесу.

Оборотним називається процес, який можна провести у оберненому напрямі так, що система проходить через ті ж самі стани, що і при прямому ході, але в оберненій послідовності.

Оборотні процеси мають таку властивість: якщо при прямому ході на деякий елементарній ділянці системи отримує тепло  $dQ$  і виконує роботу  $dA$ , то при оберненому ході на цій ділянці система віддає тепло  $dQ' = dQ$  і над нею виконується робота  $dA' = dA$  (див. рис. 10.1).

Після протікання оборотного процесу в одному, а потім у зворотному напрямках і повернення системи у початковий стан в оточуючих систему тілах не повинно залишатися ніяких змін.

Обернені процеси – це процеси, при яких система повертається назад через інші стани, ніж при прямому ході.

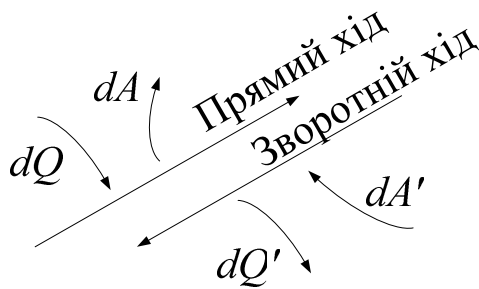


Рис. 10.1

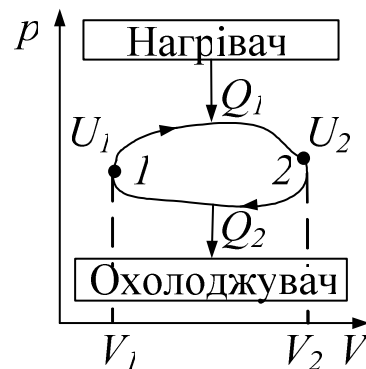


Рис. 10.2

### § 45. ККД теплової машини

Будь-який тепловий двигун являє собою систему, яка виконує деякий круговий процес, у ході циклу робоча речовина спочатку розширюється, а потім стискується.

Щоб робота за цикл була більша нуля (позитивна), цикл повинен бути прямим, тобто за його стадії повинні змінюватись годинниковою стрілкою. Для цього тиск у процесі розширення повинен бути більшим, ніж при стисканні, а для цього, в свою чергу, робочій речовині (“робочому тілу”) у ході розширення потрібно надавати тепло, а в ході стискання – віднімати

тепло. При цьому на координатній площині  $(p, V)$  крива розширення буде вище кривої стискання (див. рис. 10.2).

Тому будь-який тепловий двигун складається з трьох структурних елементів – робочого тіла, нагрівача і охолоджувача.

При розширенні робоче тіло отримує від нагрівача кількість теплоти  $Q_1$  :

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_{12}, \quad (10.1)$$

При стисканні робочого тіла воно віддає охолоджувачу кількість теплоти  $Q_2$  :

$$-Q_2 = U_2 - U_1 + A_{12}. \quad (10.2)$$

Додаючи формули (10.1) і (10.2), отримуємо:

$$Q_1 - Q_2 = A_{12} + A_{21} = A,$$

де  $A$  – повна робота за цикл.

Не все отримане тепло можна використати для виконання корисної роботи. Частина тепла також повинна бути повернена у зовнішнє середовище.

Коефіцієнт корисної дії:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

## § 46. Другий закон термодинаміки

Існують наближене (скорочене) і більш коректне формулювання цього закону.

1. Неможливий самочинний перехід тепла від тіла менш нагрітого до тіла більш нагрітого.

2. Неможливі такі процеси, єдиним кінцевим результатом яких був би перехід тепла від тіла менш нагрітого до тіла більш нагрітого.

Підкреслимо, що такий перехід тепла неможливий, якщо він є єдиним і кінцевим результатом процесу. Якщо він не є єдиним і кінцевим результатом процесу, то він можливий, наприклад, у холодильнику, де тепло переходить від менш нагрітих тіл у камері до більш нагрітих тіл оточуючого середовища. Але цей перехід тепла не є єдиним і кінцевим результатом процесу, при цьому ще виконується робота.

## § 47. Цикл Карно і його ККД

З'ясуємо, який оборотний цикл може виконувати система, яка здатна вступати в оборотний теплообмін з двома тепловими резервуарами із сталими температурами  $T_1$  й  $T_2$  відповідно (див. рис. 10.3).

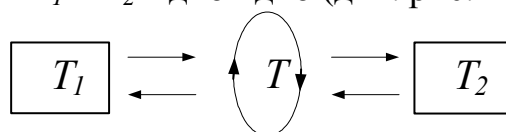


Рис. 10.3



Як це впливає з другого закону термодинаміки, єдиним оборотним процесом, який супроводжується теплообміном з тепловим резервуаром із сталою температурою, є ізотермний процес, який протікає при температурі резервуара. Отже, оборотний цикл повинен складатися із двох ізотерм при температурах  $T_1$  і  $T_2$  і двох адіабат. Такий цикл був введений у розгляд Карно і має назву циклу Карно (див. рис. 10.4). При ізотермічному процесі  $U = \text{const}$  і  $dU = 0$ , а робота

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (10.3)$$

Тому для ізотермічних процесів  $1 \rightarrow 2$  (при  $T=T_1$ ) і  $3 \rightarrow 4$  (при  $T=T_2$ ) з першого закону термодинаміки і формули (10.3) маємо

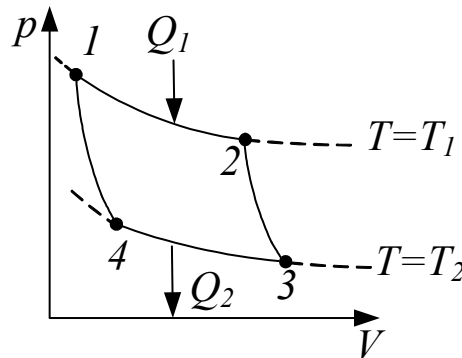


Рис. 10.4

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1},$$

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Для адіабатних процесів  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ , і тому для процесів  $4 \rightarrow 1$  і  $2 \rightarrow 3$  отримуємо

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1},$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

Звідси

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (10.4)$$

ККД циклу Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

З урахуванням (10.4) маємо

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

тобто, ККД циклу Карно визначається тільки температурами нагрівача і охолоджувача.

## § 48. Нерівність Клазіуса

Перейдемо від теплових двигунів до загальних термодинамічних співвідношень. Справедливі два твердження:

1. ККД усіх оборотних машин, які працюють в ідентичних умовах (тобто при однакових температурах нагрівача і охолоджувача) однакові. Це випливає з формули ККД циклу Карно.

2. ККД необоротної машини завжди менший, ніж ККД оборотної, яка працює в тих же умовах. Це випливає з того, що повна робота при необоротному циклі завжди менша, ніж при оборотному. Крім того, у необоротних машинах виконується некорисна робота проти сил тертя.

Ці два твердження можна записати у вигляді нерівності

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (10.5)$$

Знак рівності відповідає оборотній, а нерівності – необоротній тепловій машині.

Співвідношення (10.5) справедливо також для будь-якої системи тіл, яка виконує оборотний чи необоротний цикл.

З формули (10.5) отримуємо послідовно

$$\frac{Q'_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}; \quad \frac{Q'_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}; \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q'_2}{T_2} \leq 0. \quad (10.6)$$

У формулах (10.6)  $Q_1$  – кількість теплоти, яку одержує система, і  $Q'_2$  – кількість теплоти, яку віддає система.

Позначимо:  $Q_i$  – кількість теплоти, яку одержує система від тіла температурою  $T_i$ . Якщо  $Q_i > 0$  – тепло одержується, а якщо  $Q_i < 0$  – тепло віддається.

Тоді –  $Q'_2 = Q_2$ , і вирази (10.6) можна переписати у вигляді:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (10.7)$$

Вираз (10.7) і є нерівністю Клазіуса. Величина  $Q/T$  має назву зведеної кількості теплоти. З формули (10.7) випливає, що сума зведених кількостей теплоти, яку отримує система за цикл, дорівнює нулю, якщо цикл оборотний, і менша нуля, якщо цикл необоротний.

Якщо система вступає у теплообмін не з двома, а з  $N$  тілами, то нерівність Клазіуса набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0,$$

де  $Q_i$  – кількість теплоти, одержана від тіла температурою  $T_i$ .

Якщо при передачі системі тепла температура тіла безперервно змінюється, то необхідно цикл розбити на елементарні процеси (див. рис. 10.5), і тоді нерівність Клаузіуса має вигляд:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0, \quad (10.8)$$

де  $\Delta Q_i$  – елементарна кількість теплоти, яка одержується при температурі  $T_i$ .

Формулу (10.8) можна записувати в інтегральному вигляді

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (10.9)$$

де інтеграл береться по циклу. Формула (10.9) – є найзагальніша форма запису нерівності Клаузіуса.

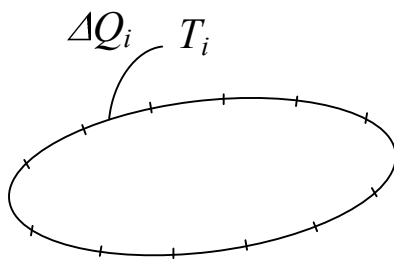


Рис. 10.5

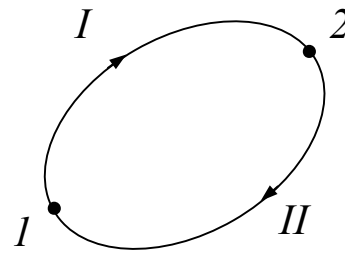


Рис. 10.6

## § 49. Ентропія

Суму зведених кількостей теплоти можна розглядати не тільки для циклу, але й для будь-якого некругового процесу. Візьмемо оборотний цикл і виділимо в ньому два довільних стани 1 і 2 (див. рис. 10.6).

Для циклу, згідно з нерівністю Клаузіуса

$$\sum_{\text{цикл}} \frac{\Delta Q}{T} = 0, \quad (10.10)$$

Суму (10.10) можна розбити на дві суми по ділянках I і II

$$\sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{2 \rightarrow 1(II)} \frac{\Delta Q}{T} = 0. \quad (10.11)$$

Якщо змінити напрям переходу, то, через оборотність процесу, сума змінює знак, тобто

$$\sum_{2 \rightarrow 1(II)} \frac{\Delta Q}{T} = - \sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T}.$$

Тоді вираз (10.11) переписується у вигляді

$$\sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T} - \sum_{1 \rightarrow 2(II)} \frac{\Delta Q}{T} = 0.$$

Звідси:

$$\sum_{1 \rightarrow 2(I)} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2(II)} \frac{\Delta Q}{T}. \quad (10.12)$$

Вираз (10.12) отримано для будь-якого оборотного переходу  $1 \rightarrow 2$ .

Цей вираз констатує, що сума зведених кількостей теплоти, яку одержує система при оборотному переході з одного стану в інший, не залежить від шляху, по якому виконується перехід, а залежить тільки від початкового і кінцевого станів.

Сказане справедливе для будь-якої функції стану, тобто величини, яка однозначно визначається станом системи. Для функції стану

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta f(\text{стану}) = f(2) - f(1), \quad (10.13)$$

тобто сума приростів функції стану не залежить від шляху переходу від першого стану до другого і дорівнює різниці її значень у кінцевому і початковому стані.

Ми вже двічі зустрічалися з функціями стану – це потенціальна енергія системи і внутрішня енергія. З (10.12) бачимо, що властивості (10.13) задовольняє зведена кількість теплоти. Отже, при оборотному процесі

зведена кількість тепла  $\frac{\Delta Q}{T}$  є приростом деякої функції стану, яку називали ентропією і позначили літерою  $S$ . Приріст ентропії  $\Delta S$  дорівнює зведеній кількості теплоти:

$$\left( \frac{\Delta Q}{T} \right)_{\text{обор}} = \Delta S.$$

Таким чином, ентропія – це функція стану, приріст якої при оборотному процесі дорівнює отриманій кількості теплоти, розділеній на температуру, при якій система одержує тепло.

При оборотному процесі:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta S = S_2 - S_1.$$

Або в інтегральній формі:  $\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1.$

## § 50. Властивості ентропії

Розглянемо цикл, який складається із оборотного  $(2 \rightarrow 1)_{II}$  та необоротного  $(1 \rightarrow 2)_I$  переходів (див. рис. 10.6). Оскільки цикл в цілому необоротний то

$$\sum_{(\text{цикл})} \frac{\Delta Q}{T} < 0,$$

або, розбиваючи на дві переходи:

$$\sum_{(1 \rightarrow 2)} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{(2 \rightarrow 1)} \frac{\Delta Q}{T} < 0. \quad (10.14)$$

Оскільки перехід  $2 \rightarrow 1$  за визначенням є оборотним

$$\sum_{(2 \rightarrow 1)} \frac{\Delta Q}{T} = S_1 - S_2,$$

тоді вираз (10.14) можна записати у вигляді

$$S_2 - S_1 > \sum \frac{\Delta Q}{T}$$

– для необоротного переходу.

Об'єднуючи оборотні і необоротні переходи, маємо

$$S_2 - S_1 \geq \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T}, \quad (10.15)$$

де знак рівності беруть для оборотних переходів, а знак “більше” – для необоротних. Вираз (10.15) можна переписати у вигляді

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \Delta S \geq \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T}. \quad (10.16)$$

Співвідношення (10.16) повинно виконуватись для будь-якого елементарного процесу

$$\Delta S \geq \frac{\Delta Q}{T},$$

або у диференціальному вигляді

$$dS \geq \frac{dQ}{T}.$$

Якщо система ізольована ( $dQ = 0$ ), то

$$dS \geq 0.$$

Отже, ентропія ізольованої системи може тільки збільшуватися, якщо процеси у системі необоротні, або залишатися сталою, якщо процеси оборотні. Останнє твердження і є законом збереження ентропії.

Фізичний зміст ентропії розкрив Больцман. Він довів, що

$$S = k \ln W,$$

де  $k$  – стала Больцмана,  $W$  – термодинамічна ймовірність системи, яка характеризує кількість різних способів, якими можна здійснити даний стан системи.

Таким чином ентропія – міра хаосу (невпорядкованості) у системі. Чим більша ентропія системи, тим менше у неї впорядкованості.

## § 51. Вільна і зв'язана енергії системи

Обчислимо роботу, яка виконується при оборотному ізотермічному процесі. За першим законом термодинаміки

$$dA = dQ - dU$$

При оборотному процесі  $dQ = TdS$ . Тому

$$dA = TdS - dU = d(TS) - dU. \quad (10.17)$$

У виразі (10.17) температуру  $T$  введено під знак диференціала, оскільки процес ізотермічний. Виразу (10.17) надамо вигляд

$$dA = -d(U - TS). \quad (10.18)$$

Тобто робота виконується за рахунок зменшення величини, яка стоїть у (10.18) у дужках.

Ця величина має назву вільної енергії  $F$

$$F = U - TS.$$

Вільна енергія є функцією стану системи. Вона являє собою ту частину внутрішньої енергії, яка перетворюється у зовнішню роботу при оборотних ізотермічних процесах.

Величина

$$TS = U - F$$

має назву зв'язаної енергії системи. Таким чином, ентропія разом з температурою визначає зв'язану енергію системи.

Проінтегруємо вираз (10.16) та отримуємо

$$(A_{12})_{\text{ізотерм}} = F_1 - F_2.$$

Для адіабатного процесу  $dQ = 0$ ,  $dS = 0$  і

$$(A_{12})_{\text{адіаб}} = U_1 - U_2.$$

Тобто при ізотермічних процесах роль внутрішньої енергії переходить до вільної енергії системи.

## Тема 11. Твердий стан

### § 52. Відмінні риси кристалічного стану

Більшість твердих тіл мають кристалічну будову. Майже всі мінерали і всі метали у твердому стані є кристалами.

Характерна особливість кристалічного стану, яка відрізняє його від рідинного і газового станів, полягає у наявності анізотропії, тобто залежності властивостей (механічних, теплових, електричних, оптичних) від напрямку. Тіла, властивості яких однакові у всіх напрямках, називаються ізотропними. Ізотропними є гази і, за окремими винятками, всі рідини та аморфні тіла.

Анізотропія кристалів обумовлена впорядкованим розташуванням частинок (атомів, іонів, молекул), з яких вони побудовані.

Структурні елементи кристалу (атоми, іони, молекули) розташовуються у вузлах геометрично правильна просторова ґратка. Увесь кристал може бути отриманий шляхом багаторазового повторення у трьох різних напрямках елементарної комірки (рис. 11.1, а).

Кристалічна комірка являє собою паралелепіпед, побудований на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , модулі яких дорівнюють періодам ідентичності (з такими періодами комірка повторюється у трьох напрямках вздовж векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ) (рис. 11.1, б). Крім ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (періодів ідентичності), кристалічна комірка характеризується ще кутами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  між ребрами (рис. 11.1, б). Величини  $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$  визначають елементарну кристалічну комірку і називаються її параметрами.

Вузли кристалічної ґратки – це рівноважні положення частинок, що утворюють кристали. Самі частинки коливаються навколо вузлів кристалічних ґрат.

Кристалічні ґратки можуть мати різні види симетрії – властивості збігатися самих з собою при просторових переміщеннях. Будь-які ґратки мають трансляційну симетрію (тобто ґратка переходить сама в себе при паралельному переміщенні) на величину періоду ідентичності вздовж векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Поворотною симетрією – це здатність кристалічних ґраток переходити в самих себе при повороті на деякий кут навколо певної осі.

В залежності від форми елементарної комірки всі кристали поділяються на сім кристалографічних систем (сингоній), кожна з яких характеризується своїм набором елементів симетрії.

Найбільш низьку симетрію має так звана триклинна система. Для неї всі ребра і всі кути елементарної комірки різні, тобто  $a \neq b \neq c$ ,  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ . Елементарна комірка має форму косоного паралелепіпеду.

Найвищу симетрію мають кристали кубічної системи. Для цієї системи всі ребра елементарної комірки однакові, а кути – прямі

$$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

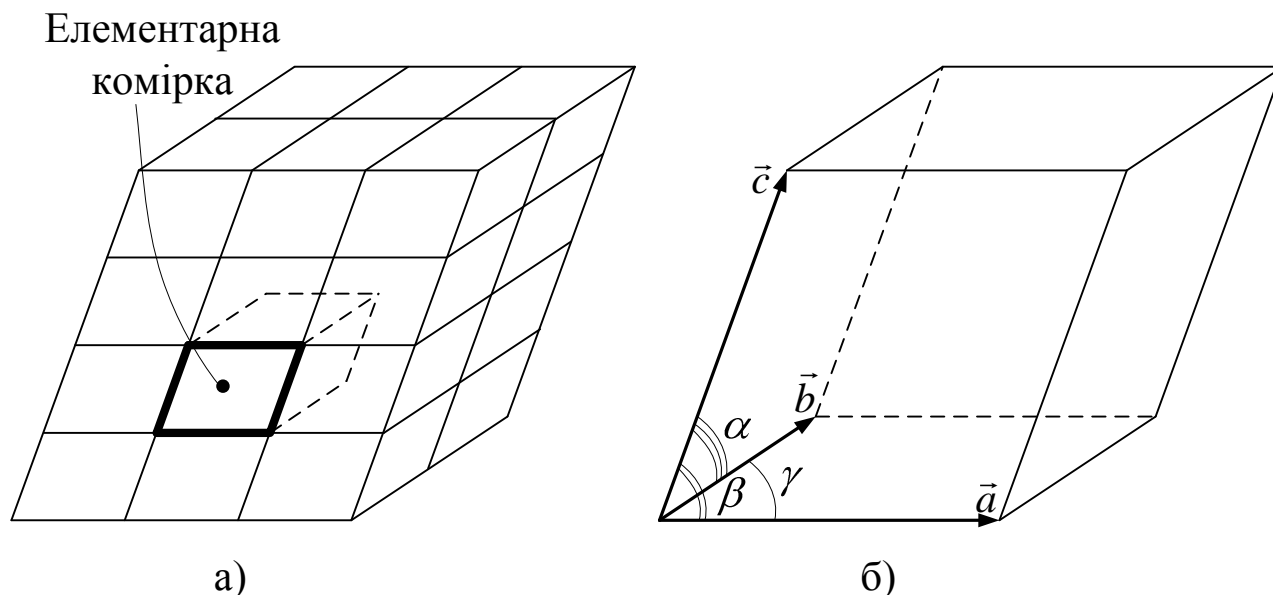


Рис. 11.1

Елементарна комірка кристалів цієї системи має форму куба. Висока симетрія кубічної кристалічної ґратки призводить до того, що у відношенні багатьох фізичних властивостей кристали кубічної системи поведуть себе як ізотропні тіла.

### § 53. Фізичні типи кристалів

В залежності від виду частинок, що розміщуються у вузлах кристалічних ґраток і від характеру сил взаємодії між частинками розрізняють чотири типи кристалічних ґраток: іонні, атомні, металічні, молекулярні.

**1. Іонні кристали.** У вузлах кристалічних ґрат розміщуються іони різних знаків. Сили взаємодії між ними – це електростатичні (кулонівські) сили притягання між іонами протилежного знаку. Цей зв'язок частинок в кристалі носить назву гетерополярного або іонного.

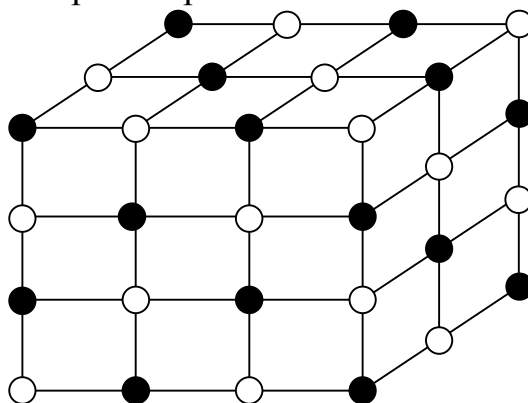


Рис. 11.2

Типовий приклад іонної ґратки – ґратка кам'яної солі  $NaCl$  (див. рис. 64) Належать до кубічної системи. З рис. 11.2 видно, що найближчими



сусідами іона є іони протилежного знаку (на рис. іони протилежного знаку відрізняються "залівкою" кружечків, які позначають іони).

**2. Атомні кристали.** У вузлах кристалічних ґраток розміщуються нейтральні атоми. Зв'язок, що поєднує в кристал нейтральні атоми, називається гомеополярним або ковалентними.

Гомеополярний (ковалентний) зв'язок здійснюється електронними парами, по одному електрону від кожного атома (див. рис. 11.3). Тому гомеополярний зв'язок має напрямлений характер. Він спрямований на атом, з яким у даного атома є спільна пара електронів. Гомеополярний зв'язок здійснюється тільки валентними електронами, які найслабіше зв'язані з ядром атома.

Приклади атомних кристалів – алмаз і графіт. Ці кристали однакові за хімічним складом (вони побудовані з атомів карбону), але відрізняються будовою кристалічної ґратки. На цьому прикладі виразно видно вплив кристалічної структури на властивості речовини: алмаз – дуже міцний мінерал, а графіт – м'який і легко кришиться.

**3. Металічні кристали.** У вузлах кристалічної ґратки розміщуються позитивні іони металу. Між ними хаотично, подібно молекулам газу, рухаються вільні електрони, які відірвалися від атомів при утворенні кристалу (див. рис. 11.4).

Ці електрони відіграють роль цементу, який утримує разом позитивні іони, інакше ґратка розпалася б під дією кулонівських сил відштовхування між іонами). Просторовий заряд вільних електронів утримує позитивні іони, разом з тим і електрони утримуються іонами в межах кристалічних ґраток.

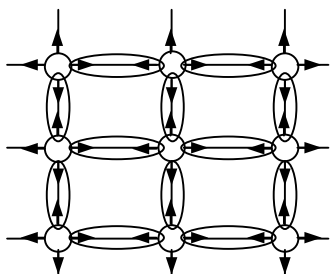


Рис. 11.3

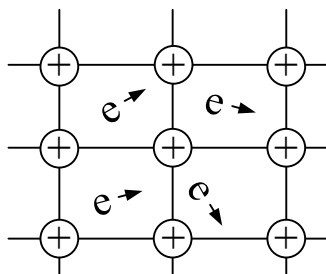


Рис. 11.4

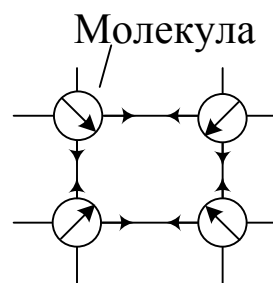


Рис. 11.5

**4. Молекулярні кристали.** У вузлах кристалічних ґраток розміщуються певним чином орієнтовані молекули (рис. 11.5). Між молекулами виникає напрямлений зв'язок. Сили зв'язку між молекулами (сили притягання) мають таку ж природу, що й сили притягання між молекулами газу. Їх природа буде докладніше розглянута в розділі "Квантова теорія". Молекулярними кристалами є звичайний лід ( $H_2O$ ), тверда вуглекислота ( $CO_2$ ) – сухий лід.

#### § 54. Тепловий рух в кристалах

Вузли кристалічних ґраток визначають середні (рівноважні) положення частинок, що утворюють кристал. Самі ж частинки безперервно коливаються

навколо цих положень, при цьому амплітуда коливань зростає з температурою.

Сили притягання між частинками, що утворюють кристал, на достатньо малих відстанях між частинками змінюються стрімко зростаючими із зменшенням відстані силами відштовхування. (це справедливо і для різнойменних іонів). При значному зближенні іонів сили відштовхування між їхніми електронними оболонками перевищують сили притягання між протилежно зарядженими іонами. Така поведінка сил взаємодії між частинками кристалу і обумовлює їх коливальний рух.

Таким чином, взаємодія між сусідніми частинками будь-якого виду в кристалі може бути представлена потенціальною кривою, яку зображено на рис. 11.6 ( $r$  – відстань між частинками). Крива несиметрична відносно мінімуму,  $r_0$  – середня відстань між частинками. При  $r > r_0$  між частинками діють сили притягання, при  $r < r_0$  – сили відштовхування.

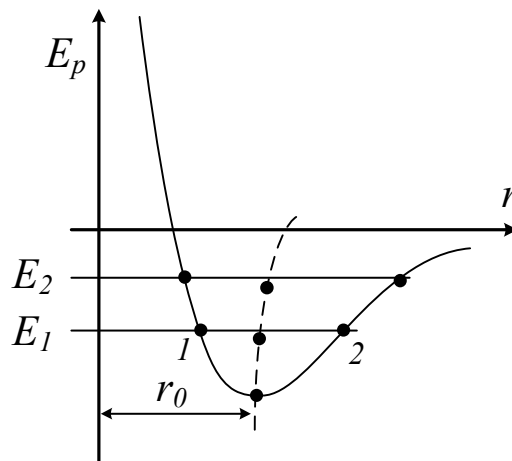


Рис. 11.6

При заданій енергії частинки  $E_1$  вона здійснює коливальний рух між точками 1 і 2. Вийти за межі цієї ділянки вона не може, оскільки там  $E_p > E$ , тобто кінетична енергія  $E_k < 0$ . При такій енергії середня відстань між частинками лежить посередині між точками 1 і 2.

Із збільшенням енергії  $E$  частинки (що відбувається при підвищенні температури) все більше виявляється несиметрія потенціальної кривої. Це призводить до зростання середніх відстаней між частинками і, отже, до збільшення лінійних розмірів кристалу. Так пояснюється теплове розширення кристалів при нагріванні.

## Тема 12. Рідкий стан

### § 55. Будова рідин

Рідинний стан займає проміжне положення між газами і твердими тілами і поєднує в собі деякі риси обох цих станів. Зокрема, рідина, подібно кристалу, має певний об'єм, але подібно газу не має форми. Вона приймає форму тієї посудини, в якій знаходиться. Для кристалічного стану має місце впорядковане розташування частинок (вони утворюють кристалічні ґратки), в газах молекули рухаються хаотично (газ – світ повного хаосу). За характером розташування частинок рідини також займають серединне становище між кристалами і газами.

В рідинах спостерігається так званий близький порядок в розташуванні частинок. Це означає, що по відношенню до будь-якої частинки розташування тільки найближчих до неї сусідніх частинок є впорядкованим, а далі порядок у розташуванні частинок порушується.

У кристалах має місце дальній порядок у розташуванні частинок – впорядковане розташування частинок по відношенню до будь-якої частинки спостерігається у межах всього кристала.

Проміжне положення рідин між кристалами і газами обумовлює ті обставини, що рідинний стан є особливо складним за своїми властивостями. Тому його теорія значно менше розвинена порівняно з кристалами і газами.

Тепловий рух молекул у рідинах також поєднує у собі елементи руху молекул газу і кристала. Кожна молекула рідини протягом деякого часу коливається навколо певного положення рівноваги. Час від часу молекула змінює місце коливання і стрибком переміщується в нове положення, яке розташоване від попереднього на відстані порядку розмірів самих молекул (рис. 12.1). Таким чином, молекули лише повільно переміщуються всередині рідини, перебуваючи частину часу навколо певних місць рівноваги.

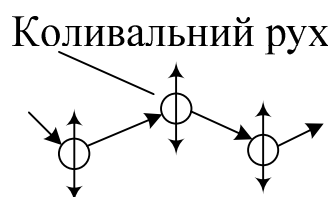


Рис. 12.1

Середня тривалість коливань для кожної рідини є певною величиною, яка значно зменшується при зростанні температури. У зв'язку з цим при підвищенні температури різко зростає рухомість молекул, що в свою чергу тягне за собою зменшення внутрішнього тертя в рідині.

### § 56. Поверхневий натяг

Молекули рідини розташовуються настільки близько одна до одної, що сили притягання між ними виявляються значними. Ці сили притягання

стрімко зменшуються з відстанню між молекулами і, починаючи з деякої відстані, силами притягання між молекулами можна знехтувати. Ця відстань  $r$  називається радіусом молекулярної дії, а сфера радіуса  $r$  – сфера молекулярної дії. Радіус молекулярної дії має значення порядку кількох ефективних діаметрів молекули.

Кожна молекула зазнає притягання з боку всіх сусідніх з нею молекул, що знаходяться у сфері молекулярної дії. Рівнодійна всіх сил притягання для молекули, яка знаходиться від поверхні на відстані, більшій, ніж радіус молекулярної дії  $r$ , дорівнює нулю (в кожному напрямку сили притягання з різних боків компенсують одна одну – рис. 12.2).

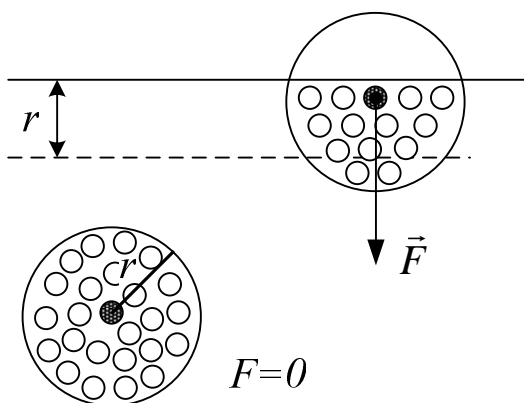


Рис. 12.2

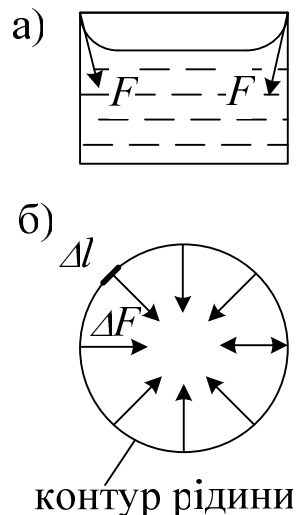


Рис. 12.3

На кожну молекулу, яка знаходиться у поверхневому шарі товщиною, що дорівнює радіусу молекулярної дії  $r$ , діє сила, направлена всередину рідини, оскільки верхня частина сфери молекулярної дії не заповнена молекулами рідини.

Перехід молекули з глибини у поверхневий шар пов'язаний з необхідністю виконання роботи проти сил, які діють у поверхневому шарі. Ця робота виконується за рахунок кінетичної енергії і йде на збільшення потенціальної енергії. Тому поверхневий шар рідини має додаткову потенціальну енергію, яка має назву поверхневої енергії. Поверхнева енергія входить складовою частиною разом з об'ємною внутрішньою енергією у повну внутрішню енергію рідини.

$$U = U_{об} + U_{пов}.$$

Рівноважною конфігурацією системи, як відомо, є конфігурація з мінімумом потенціальної енергії. Поверхнева потенціальна енергія рідини пропорційна площі поверхні рідини, тому рівноважною конфігурацією поверхні рідини буде конфігурація, що відповідає мінімуму площі поверхні рідини. Тенденція до скорочення площі поверхні рідини призводить до того, що по поверхні рідини діють сили поверхневого натягу. Сили поверхневого натягу направлені по дотичній до поверхні рідини і перпендикулярно до контура рідини (межі між рідиною і твердим тілом – рис. 12.3).

Якщо на елемент контура у рідини  $\Delta l$  діє сила поверхневого натягу  $\Delta F$ , то їх відношення називається коефіцієнтом поверхневого натягу

$$\alpha = \frac{\Delta F}{\Delta l}. \quad (12.1)$$

Коефіцієнт поверхневого натягу характеризує силу поверхневого натягу, що діє на одиницю довжини контуру рідини.

Якщо формулу (12.1) помножити і поділити на  $\Delta x$  – переміщення елемента контуру  $\Delta l$  під дією сили поверхневого натягу  $\Delta F$ , то

$$\Delta F \cdot \Delta x = \Delta A$$

– робота сил поверхневого натягу, яке йде на збільшення поверхневої енергії рідини  $U_{нов}$ , а  $\Delta l x = \Delta S$  – приріст площі поверхні рідини при цьому. В результаті для коефіцієнта поверхневого натягу отримуємо

$$\alpha = \frac{\Delta U_{нов}}{\Delta S}.$$

Тобто коефіцієнт поверхневого натягу також визначає поверхневу енергію, що припадає на одиницю площі поверхні рідини.

### § 57. Тиск під викривленою поверхнею рідини

Якщо поверхня рідини не плоска, то тенденція до скорочення площі поверхні рідини призведе до виникнення додаткового тиску. Під опуклою поверхнею тиск буде перевищувати атмосферний  $p_0$ , а під вигнутою – менший за  $p_0$  (див. рис. 12.4).

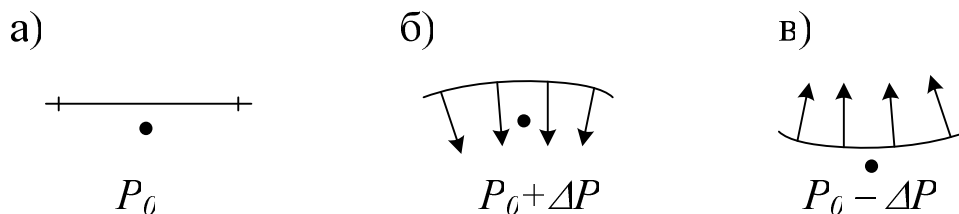


Рис. 12.4

Обчислимо додатковий тиск під викривленою поверхнею рідини для сферичної поверхні рідини. Для цього розсічемо сферичну краплю діаметральною площиною на дві півкулі (рис. 12.5).

Внаслідок поверхневого натягу обидві півкулі притягаються одна до одної із силою

$$F = \alpha l = 2 \pi R \alpha,$$

де  $R$  – радіус сферичної кулі. Ця сила діє по площі  $S = \pi R^2$ . Тому додатковий тиск

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\alpha}{R} = 2\rho_0\alpha,$$

де  $\rho_0 = 1/R$  – кривизна сферичної поверхні.

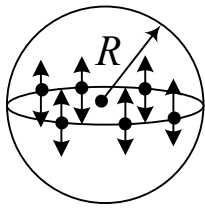


Рис. 12.5

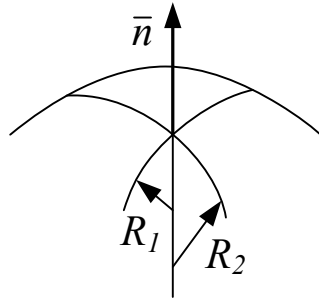


Рис. 12.6

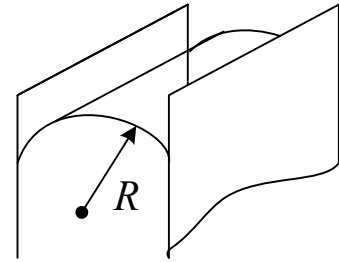


Рис. 12.7

У загальному випадку довільної поверхні рідини середня кривизна

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривизни для будь-якої пари взаємно-перпендикулярних нормальних перерізів поверхні (рис. 12.6). Величини  $R_1$  і  $R_2$  додатні, якщо центр кривизни нормального перерізу знаходиться під поверхнею (опуклість); від’ємні – якщо над поверхнею (вгнутість). Тому у загальному випадку тиск під викривленою поверхнею

$$\Delta p = 2 \rho_0 \alpha.$$

Для циліндричної поверхні рідини (рідина між двома близько розташованими плоскими поверхнями – див. рис. 12.7)  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$  і

$$p = \frac{1}{2R} -$$

додатковий тиск під викривленою поверхнею, у два рази менший порівняно зі сферою того ж радіуса.

## § 58. Явища на межі рідини і твердого тіла

Все сказане про умови, в яких знаходяться молекули поверхневого шару рідини, цілком відносяться також і до твердих тіл. Отже, тверді тіла, як і рідини, мають поверхневий натяг.

На межі поділу двох середовищ поверхнева енергія речовини залежить не тільки від властивостей даної речовини (рідини або твердого тіла), але й від властивостей тієї речовини, з якою вона має спільну межу. На межі поділу двох речовин потрібно розглядати сумарну поверхневу енергію  $\alpha_{12}$  (одиниці площі) двох речовин зі спільною межею.

Якщо межують одразу три речовини – тверде тіло, рідина і газ – то вся система набуває конфігурації, яка відповідає мінімуму сумарної поверхневої енергії. Контур, по якому розмежовуються всі три речовини, розташовується на поверхні твердого тіла так, що сума проекцій усіх прикладених до кожного елементу контуру сил поверхневого натягу на напрям, вздовж якого елемент контуру може переміщуватись (по дотичній до поверхні твердого тіла) дорівнює нулю (див. рис. 12.8)

$$\Delta l \alpha_{T,G} = \Delta l \alpha_{T,P} + \Delta l \alpha_{P,G} \cos \theta, \quad (12.2)$$

де  $\alpha_{T,\Gamma}$  – коефіцієнт поверхневого натягу на межі тверде тіло-газ,  $\alpha_{T,P}$  – на межі тверде тіло-рідина,  $\alpha_{P,\Gamma}$  – на межі рідина-газ,  $\theta$  – крайовий кут, який відраховується всередині рідини між дотичними до поверхні твердого тіла та до поверхні рідини.

З формули (12.2) маємо

$$\cos \theta = \frac{\alpha_{T,\Gamma} - \alpha_{T,P}}{\alpha_{P,\Gamma}}.$$

Якщо  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , то спостерігається змочування рідиною поверхні твердого тіла, а якщо  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  – то незмочування.

Крайовий кут  $\theta$  визначається тільки з умови

$$\frac{\alpha_{T,\Gamma} - \alpha_{T,P}}{\alpha_{P,\Gamma}} \leq 1. \quad (12.3)$$

Якщо умова (12.3) не виконується, тобто

$$\alpha_{T,\Gamma} - \alpha_{T,P} > \alpha_{P,\Gamma},$$

то ні при якому крайовому куті  $\theta$  не встановлюється рівновага контуру рідини.

Це може бути у двох випадках. Перший випадок

$$\alpha_{T,\Gamma} > \alpha_{T,P} + \alpha_{P,\Gamma}.$$

Який би не був малий кут  $\theta$ , величина  $\alpha_{T,\Gamma}$  перевершує дві інші. Рідина при цьому необмежено розтікається, і має місце повне змочування (див. рис. 12.9).

Другий випадок

$$\alpha_{T,P} > \alpha_{T,\Gamma} + \alpha_{P,\Gamma}.$$

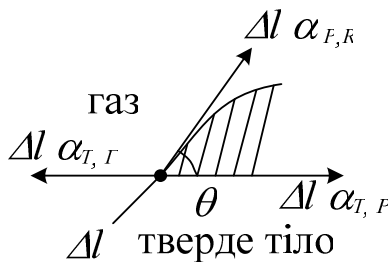


Рис. 12.8

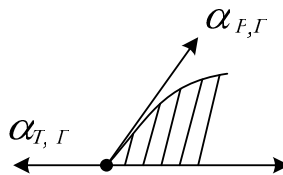


Рис. 12.9

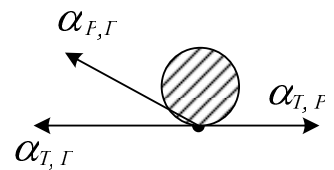


Рис. 12.10

Яким би не був близьким до  $\pi$  кут  $\theta$ , величина  $\alpha_{T,P}$  перевершує дві інші. У цьому випадку спільна поверхня рідини і твердого тіла стягується у точку, і має місце повне незмочування (див. рис. 12.10).

## Розділ 4. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

### Тема 13. Електричне поле у вакуумі

#### § 59. Закон Кулона

Електричний заряд – це невід’ємна властивість деяких елементарних частинок. Елементарний заряд

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Електричні заряди виникають і зникають парами  $q^+$  і  $q^-$ . Звідси випливає закон збереження заряду: сумарний заряд в електрично ізольованій системі є сталою величиною..

Сила взаємодії в повітрі двох точкових зарядів (див. рис. 13.1) визначається законом Кулона. У системі СІ закон Кулона має вигляд

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}, \quad (13.1)$$

де  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – електрична стала.

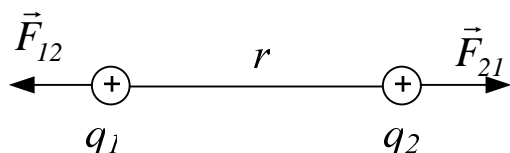


Рис. 13.1



Рис. 13.2

Точковими вважаються заряди, розміри яких малі у порівнянні з відстанню між зарядами. Є один виняток, коли заряди не точкові – це заряджені сферичні поверхні, але формула (13.1) правильна.

#### § 60. Електричне поле. Напруженість поля

Взаємодія нерухомих зарядів здійснюється через електричне поле. Електричне поле – це вид матерії, який породжується зарядженими тілами і здійснює взаємодію між ними.

Розмістимо у полі точкового заряду  $q$  інший маленький (пробний) заряд  $q'$ . З боку електричного поля заряду  $q$  на  $q'$  діє сила  $F$  (див. рис. 13.2).

Відношення сили, яка діє на заряд у електричному полі до значення цього заряду - це силова характеристика електричного поля у даній точці, яка називається напруженістю електричного поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}. \quad (13.2)$$

Напрямок вектора напруженості  $\vec{E}$  збігається з напрямком сили, яка діє на позитивний заряд.



Підставляючи у формулу (13.2) закон Кулона (13.1), отримуємо формулу для напруженості поля точкового заряду на відстані  $r$  від нього

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Якщо електричне поле утворюється не одним зарядом, а системою зарядів, то його напруженість визначається за принципом суперпозиції:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$

Тобто, щоб знайти напруженість поля системи зарядів, потрібно векторно додати напруженості полів, які утворюються у даній точці кожним із зарядів системи.

Електричне поле можна зобразити наочно, якщо вказати для кожної точки поля модуль і напрямок вектора  $\vec{E}$ . Сукупність цих векторів утворює поле вектора напруженості.

Зручніше зображати електричне поле можна за допомогою ліній напруженості, які проводяться за умовами:

- а) лінії напруженості починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних (йдуть на нескінченність чи приходять звідти);
- б) у кожній точці вектор  $\vec{E}$  направлений по дотичній до лінії напруженості;
- в) густина ліній напруженості пропорційна напруженості.

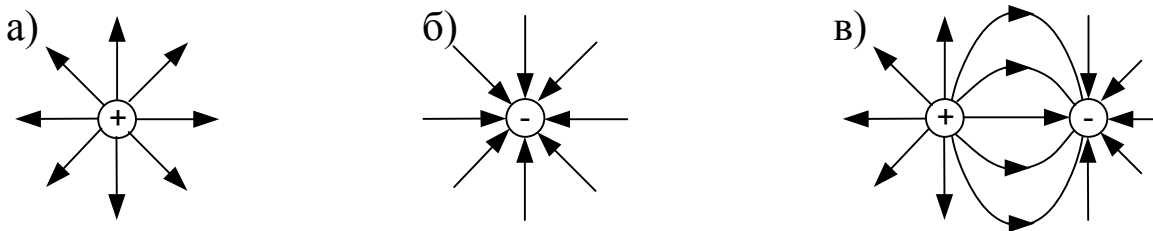


Рис. 13.3

На рис. 13.3, а-в наведено приклади зображення електричних полів різних заряджених об'єктів.

На рис. 13.3, а, б зображено електричне поле позитивного і негативного точкових зарядів, на рис. 13.3, в – поле диполя – системи двох зарядів, які однакові за модулем, протилежні за знаком і розташовані на невеликій відстані один від одного.

Проведемо навколо заряду сферу радіусом  $r$  (див. рис. 13.3, а). Кількість ліній напруженості через цю сферу:

$$N = 4\pi r^2 \cdot E(r) = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{const}.$$

Отже, лінії напруженості ніде крім заряду не починаються і не закінчуються.

## § 61. Потенціал електричного поля

Визначимо роботу електричного поля з переміщення заряду  $q'$  у полі точкового заряду  $q$  (див. рис. 13.4). Сила, яка діє на заряд  $q'$  в полі заряду  $q$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{e}_r = F(r) \vec{e}_r,$$

де  $\vec{e}_r$  – одиничний вектор вздовж  $\vec{r}$ . Робота з переміщення заряду  $q'$  з точки 1 у точку 2

$$A_{12} = \int_1^2 F(r) \vec{e}_r d\vec{l},$$

де  $d\vec{l}$  – вектор елементарного переміщення. Скалярний добуток:

$$\vec{e}_r d\vec{l} = dr,$$

де  $dr$  – приріст модуля  $\vec{r}$  на переміщенні  $d\vec{l}$  (див. рис. 13.4). Тоді робота:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (13.3)$$

З формули (13.3) видно, що робота не залежить від шляху, і тому електричне поле нерухомих зарядів є потенціальним. Для потенціального поля сил:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2}. \quad (13.4)$$

Порівнюючи (13.3) і (13.4), отримуємо формулу потенціальної енергії системи двох електричних зарядів:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (13.5)$$

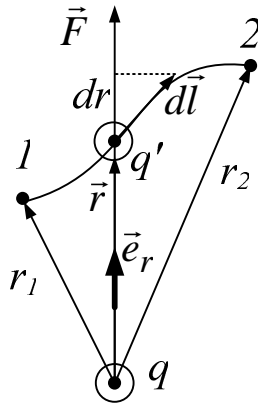


Рис. 13.4

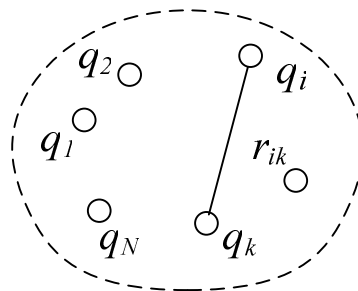


Рис. 13.5

Формула (13.5) дуже нагадує закон Кулона, в (13.5) присутній член  $1/r$ , а не  $1/r^2$ .

Величина  $\phi$ , яка дорівнює відношенню потенціальної енергії заряду до його значення, є енергетичною характеристикою електричного поля у даній точці і називається потенціалом:

$$\phi = \frac{W_p}{q'}. \quad (13.6)$$

З формул (13.5) і (13.6) для точкового заряду потенціал електричного поля на відстані  $r$  визначимо за формулою

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}.$$

Формула потенціалу точкового заряду схожа на формулу напруженості (13.1), тільки  $r$  не в другій степені, а в першій.

З формул (13.4) і (13.6) випливає формула для роботи в електричному полі з переміщення заряду

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де  $\varphi_1$  – потенціал початкової точки,  $\varphi_2$  – кінцевої. Внаслідок потенціальності електростатичного поля ця робота не залежить від форми шляху, який з'єднає точки 1 і 2. Для системи зарядів

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_N,$$

тобто потенціал системи зарядів дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, кожного із зарядів системи. Тому визначення потенціалу системи зарядів є значно простішою процедурою порівняно з визначенням напруженості системи зарядів, де сума векторна.

## § 62. Енергія взаємодії системи зарядів

Розглянемо систему з  $N$  точкових зарядів (див. рис. 13.5). Для двох довільних зарядів  $q_i$  і  $q_k$  потенціальна енергія взаємодії

$$W_{p\,ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Енергія взаємодії системи  $N$  зарядів

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k(k \neq i)} W_{p\,ik}. \quad (13.7)$$

Додавання у формулі (13.7) проводиться по всіх  $i \neq k$  (сам з собою заряд не взаємодіє). Крім того, у подвійну суму кожна пара зарядів входить двічі при обігу по усіх  $i$  і  $k$ , тому її потрібно розділити на 2. Формулу (13.7) можна переписати у вигляді

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \sum_{i=1 \atop (i \neq k)}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}} \right). \quad (13.8)$$

Величина, яка стоїть у дужках у формулі (13.8), є  $\varphi_i$  – потенціал електричного поля, утвореного усіма зарядами, крім  $q_i$  у кожній точці, де розміщено заряд  $q_i$ . Тому остаточно:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

### § 63. Зв'язок між напруженістю і потенціалом

Цей зв'язок випливає із зв'язку між силою і потенціальною енергією

$$\vec{F} = -\nabla W_p, \quad (13.9)$$

де  $\nabla = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial u} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial x}$  – градієнт,  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  – орти координат.

Оскільки  $\vec{F} = q\vec{E}$ , а  $W_p = q\varphi$ , то з формули (13.9) випливає, що

$$\vec{E} = -\nabla \varphi,$$

або у проекціях

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Можна розв'язати і обернену задачу – за відомою напруженістю  $\vec{E}$  знайти різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Робота з переміщення заряду

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (13.10)$$

З іншого боку, робота з переміщення заряду у електричному полі

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (13.11)$$

Порівнюючи формули (13.10) і (13.11), отримуємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}, \quad (13.12)$$

де інтегрування від точки 1 до точки 2 можна проводити (завдяки потенціальності електростатичного поля) по будь-якій кривій, що з'єднує точки 1 і 2.

Визначимо зв'язок між різницею потенціалів та напруженістю для однорідного електричного поля.

Однорідним полем називається поле, у кожній точці якого  $\vec{E}$  однакове. Лінії напруженості такого поля являють собою паралельні лінії, які рівно віддалені одна від одної (див. рис. 13.6).

У ролі контуру інтегрування в (13.12) зручно вибрати контур, який зображений на рис. 13.6, – ділянка інтегрування 1-1' паралельна лініям напруженості, ділянка 1'-2 – перпендикулярна.

Тоді

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^{1'} E_l dl + \int_{1'}^2 E_l dl,$$

де  $E_l$  – проекція вектора  $\vec{E}$  на напрямок інтегрування.

На ділянці 1-1'  $E_l = E$ , на ділянці 1'-2 –  $E_l = 0$ .

Тому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed,$$

де  $d$  – відстань між точками 1 і 2 вздовж лінії напруженості електричного поля. Таким чином, в однорідному електричному полі зв'язок між різницею потенціалів і напруженістю має дуже простий вигляд.

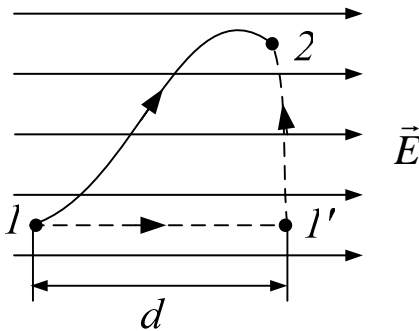


Рис. 13.6

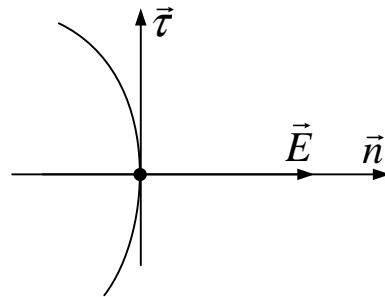


Рис. 13.7

## § 64. Еквіпотенціальні поверхні

Це поверхні, для яких  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ , тобто потенціал у всіх точках такої поверхні сталий. Переріз еквіпотенціальних поверхонь площиною рисунка є еквіпотенціальними лініями.

Візьмемо довільну точку на еквіпотенціальній лінії і задамо два напрями – вздовж дотичної (координатна вісь  $\vec{\tau}$ ) і вздовж нормалі до дотичної – координатна вісь  $\vec{n}$  (див. рис. 13.7).

Проекція вектора  $\vec{E}$  на дотичну

$$E_\tau = -\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Оскільки вздовж дотичної  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ , то  $\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$  і  $E_\tau = 0$ , тобто

вектор напруженості  $\vec{E}$  у кожній точці еквіпотенціальної поверхні напрямлений вздовж нормалі до неї у бік зменшення потенціалу.

Таким чином, лінії напруженості і еквіпотенціальні лінії – це ортогональні криві, у кожній точці дотична до лінії напруженості напрямлена вздовж нормалі до еквіпотенціальної лінії.

Еквіпотенціальних поверхонь можна провести у електричному полі необмежену кількість. Але їх проводять так, щоб різниця потенціалів двох сусідніх поверхонь залишалася весь час сталою:

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \text{const}.$$

Тоді за густиною поверхонь можна визначити напруженість поля: їхня густина пропорційна модулю напруженості.

Таким чином, електричне поле можна зображувати не тільки за допомогою ліній напруженості, але й за допомогою екіпотенціальних ліній. На рис. 13.8, а зображено поле точкового заряду, на рис. 13.8, б – двох різнойменно заряджених площин. Суцільні лінії – лінії напруженості, пунктирні – екіпотенціальні лінії.

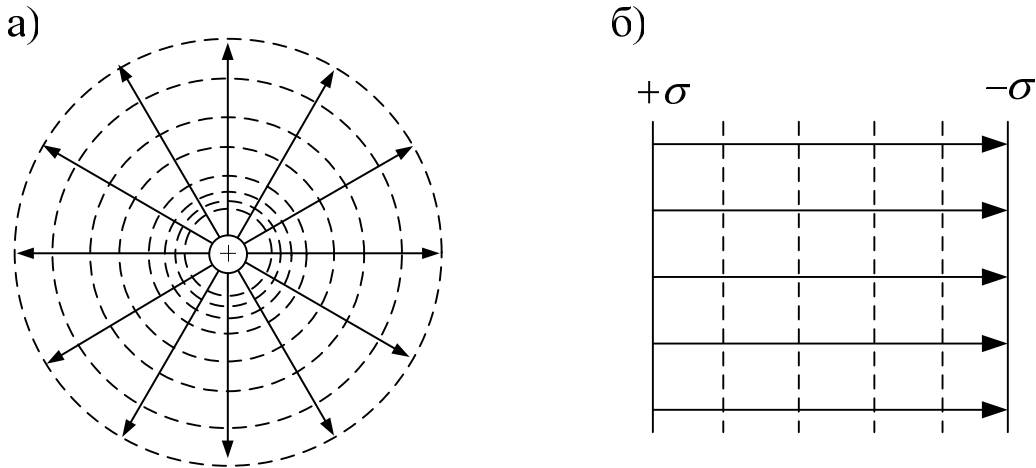


Рис. 13.8

## § 65. Потік вектора напруженості

Визначимо число ліній  $dN$  вектора  $\vec{E}$ , що перетинають площадку  $dS$ . Розглянемо спочатку випадок, коли площадка  $dS$  – перпендикулярна лініям напруженості (див. рис. 13.9).

Оскільки густина ліній напруженості дорівнює напруженості  $E$ , то число ліній, перпендикулярних  $dS$ , буде дорівнювати:

$$dN = E dS.$$

Якщо площадка  $dS$  не перпендикулярна лініям напруженості (див. рис. 13.10), то кількість ліній, які перетинають  $dS$

$$dN = E dS_{\perp}.$$

Оскільки

$$dS_{\perp} = dS \cdot \cos \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між нормаллю до площини і вектором  $\vec{E}$ , то

$$dN = E_n dS, \quad (13.13)$$

де  $E_n = E \cos \alpha$  – проекція вектора  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$  до площадки.

У загальному випадку, розбиваючи довільну поверхню  $S$  на елементарні ділянки  $dS$  (див. рис. 13.11) і визначаючи в кожній точці поверхні  $S'$  проекцію  $\vec{E}$  на нормаль  $\vec{n}$ , кількість ліній, які перетинають поверхню  $S$ , буде визначатися за формулою

$$N = \int_S E_n dS.$$

Величина

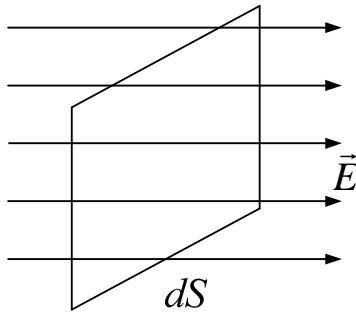


Рис. 13.9

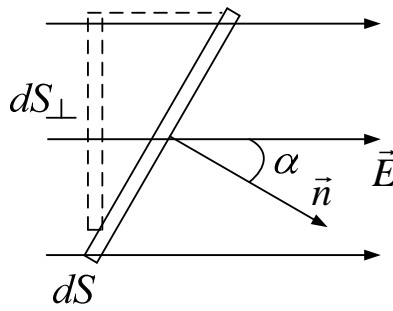


Рис. 13.10

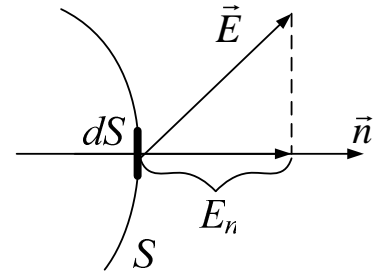


Рис. 13.11

$$\Phi_{el} = \int_S E_n dS. \quad (13.14)$$

має назву потоку вектора напруженості  $\vec{E}$  через поверхню  $S$ . Як видно з формули (13.13) і (13.14), фізичний зміст потоку полягає в тому, що він визначає число ліній напруженості, які перетинають поверхню  $S$ .

Для замкнених поверхонь за нормаль  $\vec{n}$  береться зовнішня нормаль. Тоді лінії напруженості, що виходять з поверхні, дають внесок в потік  $+I$ , а що входять – внесок  $-I$ . (див. рис. 13.12).

## § 66. Теорема Гаусса-Остроградського

Розрахуємо потік вектора  $\vec{E}$  для поля точкового заряду  $q$  через замкнену поверхню  $S$  – сферичну поверхню радіусом  $r$  (див. рис. 13.13). У кожній точці поверхні вектор  $\vec{E}_i$  і нормаль  $\vec{n}$  до поверхні однакові, тому:

$$E = E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Потік вектора  $\vec{E}$  через замкнену поверхню  $S$

$$\Phi_{el} = \oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (13.15)$$

де коло на інтегралі означає, що інтеграл береться по замкненій поверхні.

Хоча формулу (13.15) ми отримали для сферичної поверхні; однак цей результат залишається справедливим для поверхні будь-якої форми.

Для системи зарядів завдяки принципу суперпозиції

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left( \sum \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}. \quad (13.16)$$

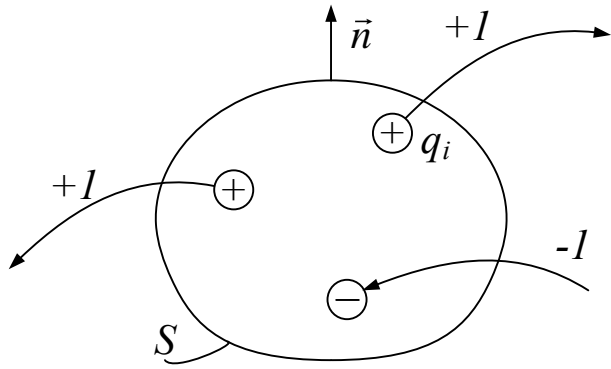


Рис. 13.12

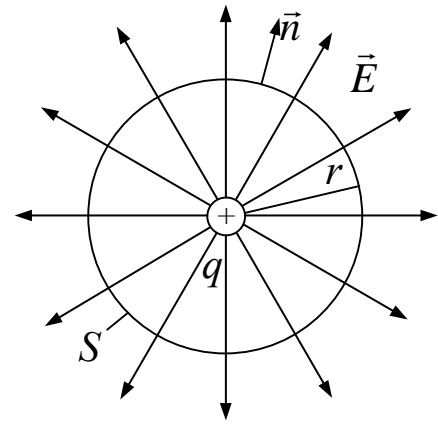


Рис. 13.13

Підставляючи у (13.16) формулу (13.15) отримуємо вираз теореми Гаусса-Остроградського

$$\oint_S E_n ds = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

Потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі через замкнену поверхню  $S$  дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, які потрапляють всередину цієї поверхні, поділену на електричну сталу.

За допомогою теореми Гаусса-Остроградського можна розрахувати напруженість електричного поля заряджених тіл певної геометричної форми (площина, циліндр, сфера).

## § 67. Приклади використання теореми Гаусса-Остроградського

**1. Електричне поле необмеженої однорідно зарядженої площини.** Розглянемо необмежену площину з поверхневою густиною заряду  $\sigma = q/S$  (Кл/м<sup>2</sup>). Нехай це буде позитивна густина заряду. Оскільки будь-яка площина, перпендикулярна до зарядженої площини, є площиною симетрії, то вектор  $\vec{E}$  у будь-якій точці напрямлений вздовж нормалі до зарядженої площини. Інтегрування за теоремою Гаусса-Остроградського будемо проводити по циліндричній поверхні  $S$  (див. рис. 13.14) з площею основи  $\Delta S$ . Для основи циліндра  $E_n = E$ . Для бічної поверхні  $E_n = 0$ . Тоді з теореми Гаусса-Остроградського

$$2E\Delta S = \frac{\Delta S\sigma}{\epsilon_0}.$$

Звідси

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$



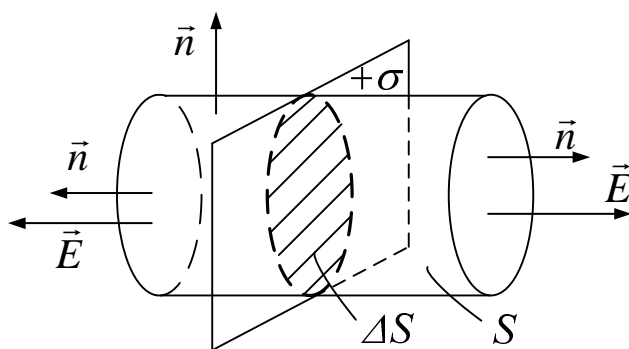


Рис. 13.14

Отже, поле необмеженої зарядженої площини – це однорідне електричне поле, у кожній точці якого  $\vec{E} = \text{const}$ . Лінії напруженості такого поля – паралельні прямі, які знаходяться на однаковій відстані одна від одної (див. рис. 13.15, а, б).

**2. Електричне поле двох різнойменно заряджених площин.** Розглянемо поле, яке утворюється двома різнойменно зарядженими площинами з однаковою поверхневою густиною заряду  $\sigma$ . Кожна заряджена площина утворює електричне поле напруженістю

$$E_+ = E_- = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}.$$

Напрямки векторів напруженості  $E_+$  і  $E_-$  в кожній з ділянок простору показано на рис. 13.16.

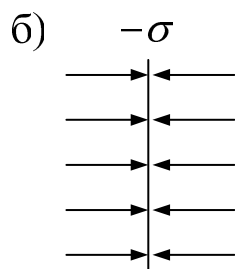
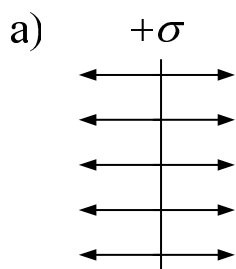


Рис. 13.15

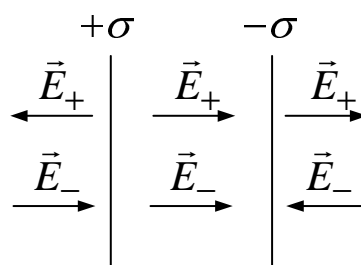


Рис. 13.16

В кожній з ділянок, згідно з принципом суперпозиції, напруженість поля двох площин

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-.$$

В ділянках ліворуч і праворуч площин вектори  $\vec{E}_+$  і  $\vec{E}_-$  напрямлені в різні боки, тому їхня векторна сума тут дорівнює нулю. Між площинами вектори  $\vec{E}_+$  і  $\vec{E}_-$  напрямлені в один бік, і напруженість результуючого поля:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Таким чином, електричне поле повністю зосереджене між різнойменно зарядженими площинами з однаковою густиною заряду, і це поле однорідне.

**3. Поле необмеженого зарядженого циліндра.** Розглянемо поле необмеженої зарядженої циліндричної поверхні радіусом  $R$  з лінійною густиною заряду  $\lambda$ . Лінійна густина заряду  $\lambda = q/l$  – це заряд, який припадає на одиницю довжини. Як і раніше будемо виходити з теореми Гаусса-Остроградського.

За поверхню інтегрування  $S$  візьмемо коаксіальну (тобто, із спільною віссю) циліндричну поверхню радіусом  $r$  і довжиною  $h$  (див. рис. 13.17). Вектор напруженості  $\vec{E}$  електричного поля зарядженої циліндричної поверхні напрямлений вздовж радіуса. Тому для бічної частини поверхні  $S$  нормальна складова  $E_n = E(r)$ , а для основ  $E_n = 0$ . Оскільки у всіх точках бокової частини поверхні  $S$   $E(r)$  однакова, то з теореми Гаусса-Остроградського

$$\oint_S E_n ds = E(r) \oint_S ds = E(r) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0},$$

звідки

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{при } r \geq R.$$

Якщо поверхню інтегрування  $S$  взяти всередині зарядженої поверхні ( $r < R$ ), то ніякий заряд  $q$  усередину поверхні інтегрування не потрапляє, і тому

$$E(r) = 0 \quad \text{при } r < R.$$

Тобто всередині зарядженої циліндричної поверхні електричне поле відсутнє, воно повністю зосереджене поза циліндричною поверхнею, досягає максимального значення на циліндричній поверхні і зменшується за законом  $1/r$  при збільшенні відстані від провідника  $r$ .

**4. Поле двох коаксіальних різнойменно заряджених циліндричних поверхонь.** Розглянемо поле двох коаксіальних різнойменно заряджених циліндричних поверхонь з однаковою лінійною густиною заряду  $\lambda$ ,  $R_1$  – радіус внутрішнього циліндра,  $R_2$  – радіус зовнішнього (див. рис. 13.18).

У ролі поверхні інтегрування в теоремі Гаусса-Остроградського виберемо коаксіальну поверхню  $S$  радіусом  $r$ .

При  $r < R_1$  (усередині внутрішнього циліндра) всередині поверхні  $S$  зарядів немає, тоді

$$E = 0 \quad \text{при } r < R_1.$$

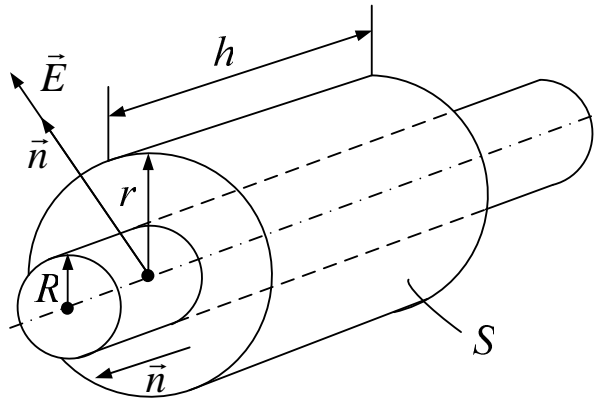


Рис. 13.17

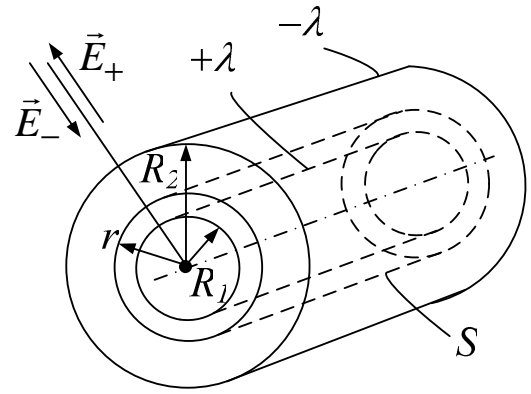


Рис. 13.18

Для ділянки  $R_1 < r < R_2$  (тобто між циліндричними поверхнями) усередину поверхні інтегрування  $S$  потрапляє тільки заряд на внутрішньому циліндрі, тому в цій ділянці поле визначається за тією ж формулою, що і для одного окремого внутрішнього циліндра, тобто

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{при } R_1 < r < R_2.$$

Якщо точка спостереження знаходиться поза зовнішнім циліндром ( $r > R_2$ ), напруженість поля згідно з принципом суперпозиції

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

або у скалярній формі  $E = E_+ - E_-$ . Оскільки лінійні густини заряду однакові, то  $E_+ = E_-$  і

$$E = 0 \quad \text{при } r > R_2.$$

Отже, електричне поле двох різнойменно заряджених циліндричних поверхонь з однаковою лінійною густиною заряду повністю зосереджене між цими поверхнями.

**5. Поле зарядженої сферичної поверхні.** Розглянемо поле зарядженої сферичної поверхні радіусом  $R$  і зарядом  $q$ . У ролі поверхні інтегрування  $S$  у теоремі Гаусса-Остроградського візьмемо концентричну сферичну поверхню  $S$  радіусом  $r$  (див. рис. 13.19). Вектор  $\vec{E}$  напрямлений по радіусу до сфери, і тому в будь-якій точці поверхні інтегрування  $E_n = E(r)$ , причому  $E(r)$  однакове у всіх точках поверхні  $S$ . Тоді з теореми Гаусса-Остроградського випливає, що

$$\oint_S E_n dS = E(r) \oint_S dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

звідси

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{при } r \geq R.$$

Якщо точка спостереження лежить всередині сферичної поверхні ( $r < R$ ), то всередині поверхні  $S$  заряди відсутні, і тому з теореми Гаусса-Остроградського при  $r < R$  маємо

$$E(r) = 0$$

Таким чином, електричне поле всередині зарядженої сферичної поверхні відсутнє.

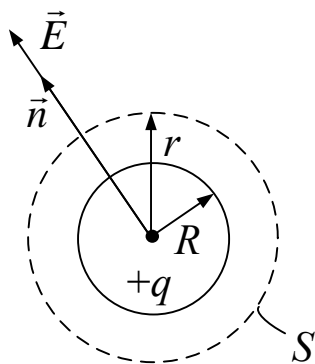


Рис. 13.19

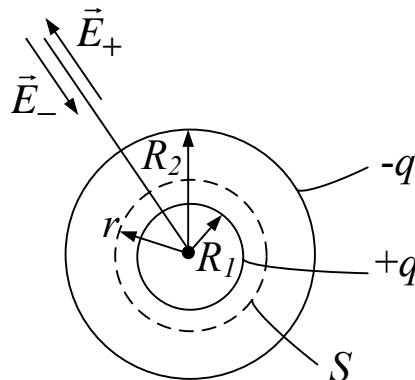


Рис. 13.20

**6. Поле двох концентричних різнойменно заряджених сферичних поверхонь.** Розглянемо поле двох концентричних різнойменно заряджених сферичних поверхонь радіусами  $R_1$  і  $R_2$  і однаковим за модулем зарядом  $q$  (див. рис. 13.20). За поверхню інтегрування у теоремі Гауса-Остроградського виберемо концентричну поверхню  $S$  радіусом  $r$ .

Якщо точка спостереження всередині внутрішньої сфери ( $r < R_1$ ), то всередині поверхні  $S$  заряду немає, і з теореми Гаусса-Остроградського

$$E = 0 \quad \text{при } r < R_1.$$

При знаходженні точки спостереження між зарядженими сферичними поверхнями ( $R_1 < r < R_2$ ) всередину поверхні інтегрування  $S$  потрапляє тільки заряд внутрішньої сфери, тому напруженість поля у цій ділянці визначається за тією ж формулою, що і для окремої зарядженої сферичної поверхні, тобто

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{при} \quad R_1 < r < R_2.$$

Якщо точка спостереження лежить поза зовнішньою сферою ( $r > R_2$ ), то згідно з принципом суперпозиції  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ , або у скалярній формі  $E = E_+ - E_-$ . Оскільки заряди сфер однакові за модулем, то  $E_+ = E_-$  і

$$E(r) = 0 \quad \text{при} \quad r > R_2.$$

Отже, електричне поле двох різнойменно заряджених сферичних поверхонь з однаковим за модулем зарядом повністю зосереджене між цими поверхнями.

## Тема 14. Електричне поле у діелектриках

### § 68. Полярні і неполярні діелектрики

Діелектриками називаються речовини, які не здатні проводити електричний струм, оскільки в них відсутні вільні електричні заряди.

Можна ввести радіуси – вектори центрів тяжіння позитивних і негативних зарядів молекули:

$$\vec{r}^+ = \frac{\sum q_i \vec{r}_i^+}{q}, \quad \vec{r}^- = \frac{\sum q_i \vec{r}_i^-}{-q},$$

де  $\vec{r}_i^+$  – радіус вектор усередненого за часом положення  $i$ -того заряду молекули.

В результаті отримуємо дипольну модель молекули, згідно з якою можна вважати позитивний заряд молекули зосередженим у центрі тяжіння позитивних зарядів, негативний – у центрі тяжіння негативних зарядів (див. рис. 14.1).

Якщо у відсутності зовнішнього електричного поля:

- а) центри тяжіння позитивних і негативних зарядів молекули збігаються ( $\vec{r}_+ = \vec{r}_-$ ), то така молекула називається неполярною, а діелектрики утворені з таких молекул – неполярними (наприклад  $\text{H}_2$ ;  $\text{O}_2$ ;  $\text{N}_2$  – симетричні молекули);
- б) центри тяжіння позитивних і негативних зарядів не збігаються ( $\vec{r}_+ \neq \vec{r}_-$ ), то така молекула називається полярною, а діелектрики – полярними (наприклад  $\text{HCl}$ ,  $\text{CO}$ ).

Для полярної молекули вводиться дипольний електричний момент молекули

$$\vec{p}_e = q\vec{l},$$

де  $\vec{l}$  – вектор, напрямлений із центра тяжіння негативних зарядів у центр тяжіння позитивних.

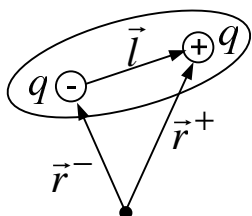


Рис. 14.1

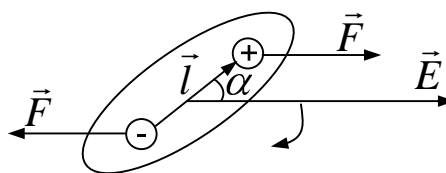


Рис. 14.2

Розглянемо, як поведуть себе неполярна і полярна молекули в електричному полі.

Під дією поля центри тяжіння позитивних і негативних зарядів неполярної молекули розходяться вдовж лінії напруженості, молекула стає полярною і набуває дипольного моменту

$$\vec{p}_e = \beta \epsilon_0 \vec{E},$$

де  $\beta$  – поляризованість молекули.

Для полярної молекули сили, які діють з боку електричного поля на позитивний і негативний заряди молекули, утворюють пару сил з моментом

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = p_e E \sin \alpha,$$

або у векторному вигляді

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}.$$

Момент  $\vec{M}$  обертає молекулу, доки її дипольний момент не встановиться у напрямку  $\vec{E}$  (див. рис. 14.2).

### § 69. Поляризація діелектриків

При внесенні діелектрика в електричне поле, поле і діелектрик набувають суттєвих змін.

У відсутності зовнішнього електричного поля сумарний дипольний момент діелектрика дорівнює нулю

$$\sum \vec{P}_{e_i} = 0,$$

де  $\vec{P}_{e_i}$  – дипольні моменти окремих молекул.

Для неполярного діелектрика всі дипольні моменти молекул  $\vec{P}_{e_i} = 0$ , для полярного  $\vec{P}_{e_i}$  напрямлені хаотично (рис. 14.3), тому їхня векторна сума дорівнює нулю.

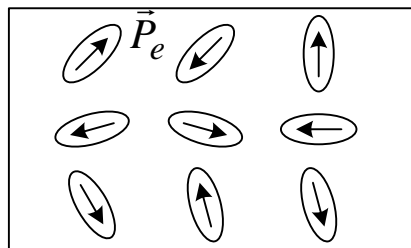


Рис. 14.3

Під дією зовнішнього поля  $\vec{E}_0$  діелектрик поляризується – його результуючий дипольний момент стає відмінним від нуля  $\sum \vec{P}_{e_i} \neq 0$ . При цьому неполярні молекули розтягуються, а полярні набувають переважної орієнтації вздовж вектора  $\vec{E}$  зовнішнього поля (рис. 14.4).

Для полярних діелектриків орієнтуючій дії зовнішнього поля протидіє тепловий рух. В результаті встановлюється переважна орієнтація дипольних моментів у напрямку  $\vec{E}$ .

Ступінь поляризації діелектрика характеризується поляризованістю  $\vec{P}$  – дипольним моментом одиниці об'єму

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{ei}}{\Delta V}.$$

Для всіх діелектриків, за винятком сегнетоелектриків

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E},$$

де  $\kappa$  – діелектрична сприйнятливість.

### § 70. Зв'язані заряди при поляризації

При внесенні діелектрика в електричне поле всі негативні заряди молекул змістяться відносно позитивних проти  $\vec{E}$  на однакову відстань  $l$ . В результаті у поверхневому шарі залишається тільки заряди одного знаку. На тій поверхні, з якої вектор  $\vec{E}$  виходить, залишаються позитивні заряди, на поверхні, в яку вектор  $\vec{E}$  входить – негативні (див. рис. 14.5). Ці заряди не можуть переміщатися по поверхні, оскільки вони зв'язані – кожен у своїй молекулі. Тому вони отримали назву зв'язаних зарядів (позначаються  $q'$ ).

Визначимо значення зв'язаного заряду. У поверхневому шарі об'ємом  $V$ , цей заряд дорівнює:

$$q' = |e| n V, \quad (14.1)$$

де  $|e|$  – заряд молекули,  $n$  – число молекул в одиниці об'єму.

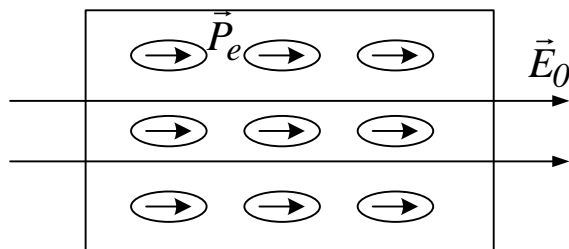


Рис. 14.4

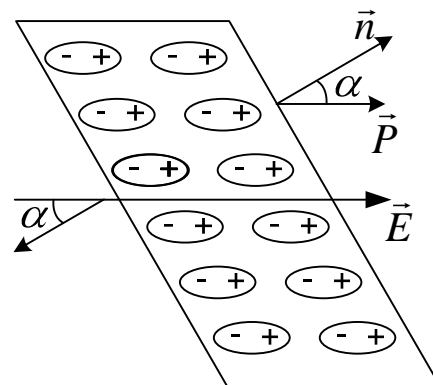


Рис. 14.5

З рис. 14.5 бачимо, що

$$V = S l \cos \alpha,$$

де  $S$  – поверхня шару. Враховуючи, що  $|e| l = p_e$  – дипольний момент молекул, з формули (14.1) отримуємо

$$q' = p_e n S \cos \alpha = P S \cos \alpha,$$

де  $P = p_e n$  – поляризованість діелектрика.

Тоді поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma' = \frac{q'}{S}$  буде дорівнювати

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n, \quad (14.2)$$

де  $P_n$  – проекція  $\vec{P}$  на нормаль до поверхні. Формула (14.2) дає не тільки модуль, але й знак поверхневого зв'язаного заряду.

Якщо  $\alpha$  – гострий, то

$$P_n > 0 \text{ і } \sigma' > 0;$$

якщо  $\alpha$  – тупий, то

$$P_n < 0 \text{ і } \sigma' < 0.$$

Оскільки  $\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$ , то

$$\sigma' = \kappa \varepsilon_0 E_n,$$

де  $E_n$  – проекція  $\vec{E}$  на нормаль до поверхні всередині діелектрика близько до поверхні.

Потік вектора  $\vec{P}$  через замкнену поверхню  $S$

$$\Phi_p = \oint_S P_n dS = - \oint_S \sigma dS = - \sum q', \quad (14.3)$$

де  $\sum q'$  – сумарний зв'язаний заряд на поверхні. Знак мінус у формулі (14.3) з'являється тому, що всередину  $S$  потрапляють заряди протилежного знаку по відношенню до тих, що виступають на поверхні.

## § 71. Опис поля у діелектриках

Напруженість  $\vec{E}$  електричного поля у діелектрику завдяки принципу суперпозиції

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}', \quad (14.4)$$

де  $\vec{E}_0$  – напруженість зовнішнього поля,  $\vec{E}'$  – напруженість поля зв'язаних зарядів. Поляризація діелектрика обумовлена дією сумарного поля (14.4).

Теорема Гаусса-Остроградського у присутності діелектрика

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \sum q + \sum q' \right), \quad (14.5)$$

де  $q$  – відомі вільні заряди, які утворюють зовнішнє поле  $\vec{E}_0$ ,  $q'$  – невідомі зв'язні заряди, що утворюють поле  $\vec{E}'$ .

Формула (14.5) виражає невідому величину  $\vec{E}$  через зв'язані заряди  $q'$ , які в свою чергу визначаються величиною  $\vec{E}$ . Утворюється замкнене коло. Фізично це означає, що для опису стану матеріального об'єкта введено недостатню кількість фізичних величин. У нашому прикладі це означає, що однієї напруженості мало, щоб здійснити опис поля в діелектрику. Потрібно ввести нову фізичну величину, щоб розірвати це замкнене коло.

Враховуючи, що

$$\sum q' = - \oint_S P_n dS,$$

із формули (14.5) отримаємо



$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})_n dS = \sum q. \quad (14.6)$$

У формулі (14.6) величина, що стоїть у дужках, визначається тільки відомими вільними зарядами  $q$ . Це і є та додаткова фізична величина, яку потрібно ввести для опису поля в діелектрику.

Вона визнається за формулою

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (14.7)$$

і називається вектором електричного зміщення.

Теорема Гаусса-Остроградського для вектора електричного зміщення має вигляд

$$\oint_S D_n dS = \sum q. \quad (14.8)$$

Формула (14.7) встановлює зв'язок між векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$ , які описують поле в діелектриках. Розглянемо цей зв'язок більш докладніше.

У вакуумі вектор поляризованості  $P = 0$  і

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}.$$

У діелектрику  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$  і тоді:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \kappa \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E}.$$

Величина  $\epsilon = 1 + \kappa$  називається діелектричною проникністю. Тоді зв'язок між  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  набуває вигляду

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (14.9)$$

Величина  $\epsilon$  є фізично вимірюваною величиною. Знаючи  $\epsilon$  для діелектрика і знайшовши з формули (14.8) вектор електричного зміщення, за формулою (14.9) знайдемо і напруженість електричного поля в діелектрику. Таким чином, замкнене коло, яке виникає при визначенні  $\vec{E}$  з формули (14.5), розірвано.

Розглянемо фізичний зміст нової введенної фізичної величини  $\epsilon$ . Для цього визначимо електричне поле всередині плоскої діелектричної пластини, яку розміщено в однорідному полі напруженістю  $\vec{E}_0$  (див. рис. 14.6).

В результаті поляризації діелектрика на його поверхнях виступають зв'язані заряди з поверхневою густиною  $\sigma'$ , які утворюють своє поле  $\vec{E}'$ , що направлене назустріч зовнішньому  $\vec{E}_0$ .

Сумарне поле в діелектрику:

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}.$$

Оскільки

$$\sigma' = \kappa \epsilon_0 E,$$

то

$$E = E_0 - \kappa E,$$

звідки

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

У кінцевому вигляді

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (14.10)$$

Формула (14.10) розкриває фізичний зміст діелектричної проникності – вона показує, у скільки разів напруженість поля в діелектрику менша, ніж напруженість зовнішнього поля (у вакуумі поза діелектриком). Усі діелектрики послаблюють електричне поле,  $E < E_0$ , тому  $\varepsilon > 1$ .

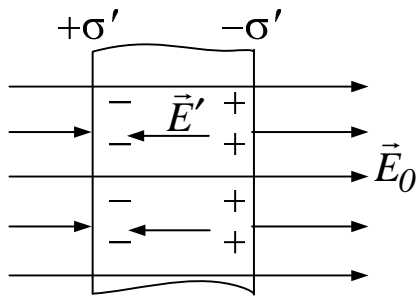


Рис. 14.6

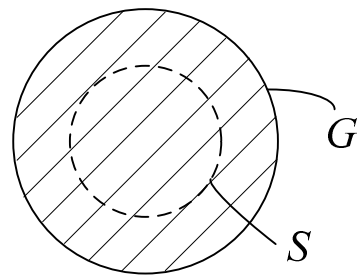


Рис. 14.7

## Тема 15. Провідники у зовнішньому електричному полі

### § 72. Рівновага та розподіл зарядів на провіднику

Рівновага зарядів на провіднику спостерігається при виконанні двох умов:

$$\begin{aligned} E &= 0 - \text{усередині провідника;} \\ E &= E_n - \text{на його поверхні.} \end{aligned} \quad (15.1)$$

З умови (15.1) випливає, що вектор  $\vec{E}$  напрямлений вздовж нормалі до поверхні, тобто поверхня провідника є екіпотенціальною.

Якщо провіднику надати будь-який заряд, то цей заряд розподілиться по провіднику так, щоб виконувалися ці дві умови.

Візьмемо всередині провідника будь-яку поверхню  $S$  (див. рис. 14.7). Теорема Гаусса-Остроградського

$$\oint_S E_n ds = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

стверджує, що усередині провідника  $E = 0$ . Отже, з цього випливає, що  $q = 0$  усередині поверхні  $S$ . Деформуючи поверхню  $S$  до зовнішньої отримуємо висновок, що при рівновазі зарядів на провіднику ні в якій точці всередині провідника не може бути надлишкових зарядів. Всі вони розташуються на зовнішній поверхні провідника (див. 15.1, а). Цей висновок справедливий і для тіла з внутрішньою порожнечою, на внутрішній поверхні заряди відсутні (див. рис. 15.1, б).

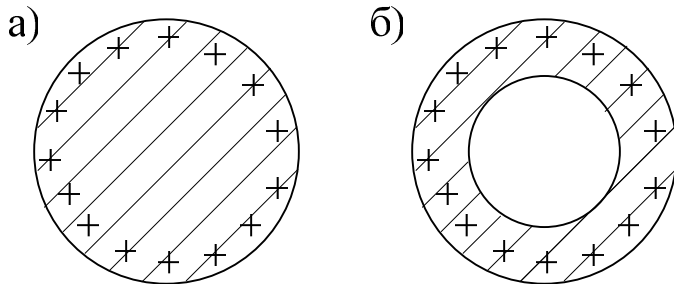


Рис. 15.1

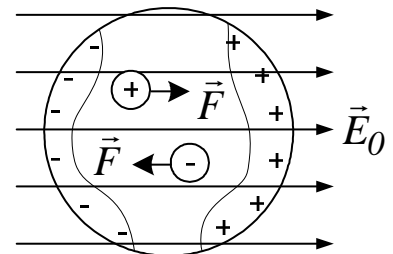


Рис. 15.2

Напруженість поля  $E$  поблизу поверхні провідника  $E \approx \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$ .

Вимірюючи  $E$  поблизу поверхні, можна визначити поверхневу густину заряду у різних точках поверхні, тобто розподіл заряду по поверхні провідника.

Дослід показує, що густина заряду  $\sigma$  на поверхні визначається кривизною поверхні  $\rho = \frac{1}{R}$ , де  $R$  – радіус кривизни у даній точці поверхні.

Поверхнева густина  $\sigma$  заряду зростає із збільшенням позитивної кривизни (опуклості) і зменшується зі збільшенням негативної кривизни (ввігнутості).

На гострих ребрах на провіднику  $\rho = \infty$ , густина заряду аномально велика, заряди не утримуються на гострих ребрах і «стікають» з них внаслідок іонізації повітря.

### § 73. Провідник у зовнішньому електричному полі

При внесенні незарядженого провідника в електричне поле носії заряду в провіднику починають рухатися. На кінцях провідника виникають заряди протилежних знаків – індуковані заряди (див. рис. 15.2). Перерозподіл зарядів закінчиться, коли будуть виконані обидві умови рівноваги зарядів на провіднику.

Індуковані заряди розподіляються на зовнішній поверхні провідника, їх  $\vec{E}$  напрямлена назустріч зовнішньому полі, компенсуючи його. Тому результуюче поле всередині провідника, який внесено в електричне поле, дорівнює нулю. На цьому явищі засновано електростатичний захист.

### § 74. Електроємність провідників

Потенціал відокремленого провідника пропорційний заряду, який на ньому знаходиться

$$q = C\varphi, \quad (15.2)$$

Коефіцієнт пропорційності  $C$  у формулі (15.2) називається електроємністю провідника

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (15.3)$$

При одному й тому ж потенціалі  $\varphi$  чим більше  $C$ , тим більший заряд на провіднику. Тому величина  $C$  характеризує здатність провідника накопичувати електричний заряд і отримала назву електроємності.

Електроємність провідника залежить від форми, розмірів провідника й електричних властивостей середовища, яке оточує провідник (від діелектричної проникності середовища  $\epsilon$ ).

Розрахуємо електроємність кулі радіусом  $R$  (див. рис. 15.3). Будемо виходити з формули

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl.$$

Напруженість поля зарядженої кулі

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2},$$

де  $r$  – відстань від центра кулі до точки спостереження.

За точку 1 візьмемо точку на поверхні кулі, тоді  $\varphi_1 = \varphi$ , де  $\varphi$  – потенціал кулі, а за точку 2 – точку на нескінченності, тоді  $\varphi_2 = 0$ ; контур інтегрування виберемо вздовж радіуса  $r$ , тоді  $E_l = E = 0$ ,  $dl = dr$ . У підсумку

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R}. \quad (15.4)$$

Порівнюючи (15.4) і (15.3), бачимо, що електроємність кулі визначається формулою

$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R.$$

Форму й розмір провідника характеризує параметр  $R$ , а електричні властивості оточуючого середовища – діелектрична проникність  $\varepsilon$ .

## § 75. Конденсатори

Відокремлені провідники мають малу електроємність. Так металева куля завбільшки із Землю має електроємність

$$C \approx 700 \text{ мкФ}.$$

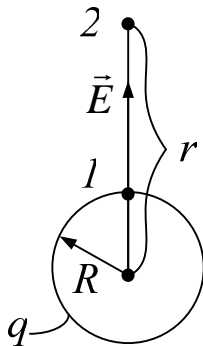


Рис. 15.3

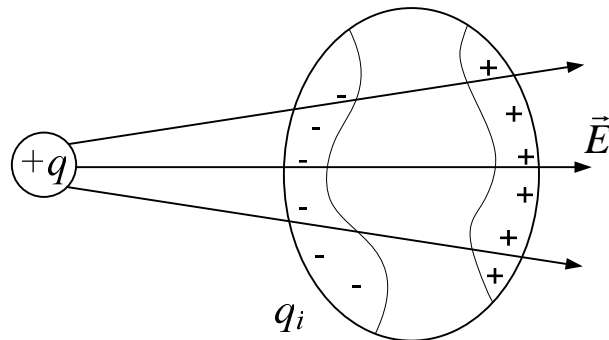


Рис. 15.4

Конденсатори – це пристрої, які при невеликому потенціалі накопичують (конденсують) значні заряди.

Будова конденсатора базується на тому, що електроємність провідника зростає при наближенні до нього інших тіл. Під дією ближчого індукованого заряду, який завжди протилежного знаку до індукованого заряду (див. рис. 15.4), потенціал провідника зменшується, а електроємність  $C = q/\varphi$  – зростає.

Конденсатор складається, як найменше, з двох обкладинок (провідників). Обкладки конденсатора повинні мати таку форму, щоб електричне поле було повністю зосереджене між ними. Тоді зовнішні тіла не впливають на поле конденсатора і отже, на електроємність конденсатора. Цій умові відповідають три форми обкладинок: плоскопаралельні (рис. 15.5, а), циліндрична (рис. 15.5, б) і сферичні (рис. 15.5, в). Звідси впливають три типи конденсаторів – плоскі, циліндричні і сферичні.

Електроємність конденсатора:

$$C = \frac{|q|}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (15.5)$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2$  різниця потенціалів між обкладинками.

Для плоского конденсатора напруженість поля

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon S},$$

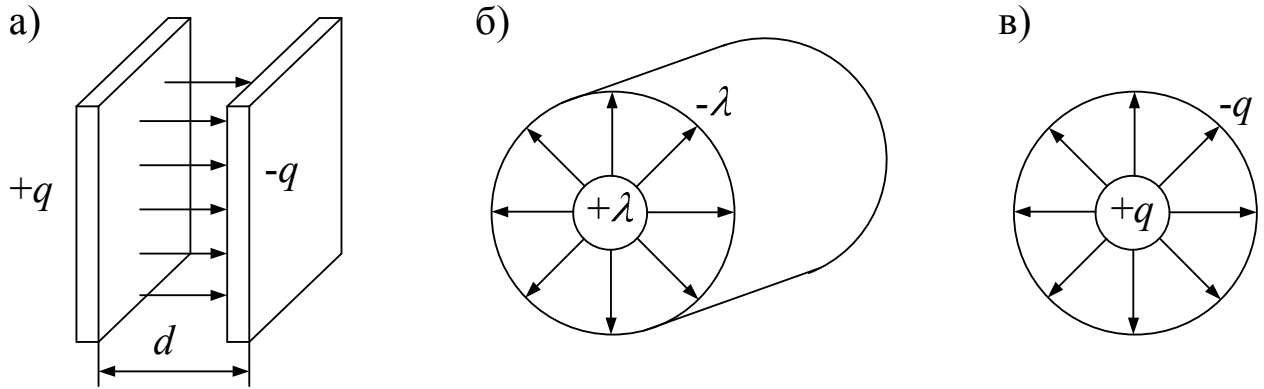


Рис. 15.5

де  $q$  – заряд на обкладинці,  $S$  – її площа, а різниця потенціалів

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E d = \frac{q d}{\epsilon_0 \epsilon S}. \quad (15.6)$$

Порівнюючи (15.5) і (15.6) отримуємо формулу для електроємності плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d},$$

де  $d$  – відстань між обкладинками,  $\epsilon$  – діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між обкладинками.

## Тема 16. Енергія електричного поля

### § 76. Енергія зарядженого провідника

Розглянемо заряд  $q$  на провіднику як систему точкових зарядів  $q_i$ . Як відомо, заряд концентрується лише на поверхні провідника і потенціал у всіх точках поверхні однаковий. Енергія системи елементарних зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_{(i)} q_i \varphi_i.$$

Оскільки поверхня провідника екіпотенціальна, то  $\varphi_i = \varphi = \text{const}$  вдовж поверхні і тоді

$$W = \frac{1}{2} \varphi \sum_{(i)} q_i = \frac{1}{2} q \varphi,$$

де  $q$  – заряд провідника,  $\varphi$  – потенціал провідника. Використовуючи формулу електроємності провідника  $C = q/\varphi$ , можна формулі енергії надати вигляд

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Ця енергія зосереджена в електричному полі зарядженого провідника.

### § 77. Енергія зарядженого конденсатора

Процес виникнення заряду на обкладинках конденсатора можна уявити собі як перенесення порції заряду  $dq$  з однієї обкладинки на іншу (див. рис. 16.1). Для такого перенесення необхідно виконати роботу

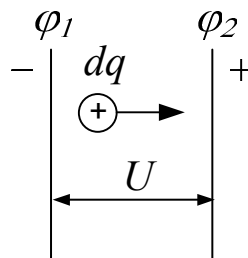


Рис. 16.1

$$dA = dq (\varphi_1 - \varphi_2) = U dq, \quad (16.1)$$

де  $U$  – напруга, а  $\varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів. Оскільки

$$U = \frac{q}{C}, \quad (16.2)$$

то формула (16.1) набуває вигляду

$$dA = \frac{q}{C} dq.$$

За рахунок роботи  $dA$  відбувається збільшення енергії конденсатора на  $dW$ :

$$dA = dW = \frac{q}{C} dq.$$

Тоді енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C}.$$

З урахуванням формули (16.2) вираз (16.1) набуває вигляду:

$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$ . Ця енергія зосереджена у електричному полі конденсатора.

### § 78. Енергія електричного поля

Раніше ми визначали енергію зарядженого провідника і енергію зарядженого конденсатора через параметри провідника і параметри конденсатора.

Енергію конденсатора можна виразити через величини, які характеризують електричне поле у зазорі між пластинами.

Будемо виходити з формули

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

і розглянемо плоский конденсатор, для якого

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

Підставляючи  $C$  і у формулу для енергії отримуємо

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{2d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V,$$

де  $V = Sd$  – об'єм конденсатора. Оскільки електричне поле конденсатора однорідне, то можна ввести густину енергії електричного поля

$$w = \frac{W}{V}.$$

Густина енергії електричного поля дорівнює  $w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$ ,

тобто густина енергії електричного поля пропорційна напруженості поля. З урахуванням зв'язку між напруженістю і вектором електричного зміщення

$$D = \epsilon \epsilon_0 E$$

густині енергії електричного поля можна надати ще й такого вигляду:

$$w = \frac{ED}{2}.$$

Носієм цієї енергії є електричне поле.



## Розділ 5. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

### Тема 17. Постійний електричний струм

#### § 79. Електричний струм. Сила струму

Впорядкований рух електричних зарядів утворює електричний струм. Електричний струм можливий тільки у речовинах, які мають вільні електричні заряди. Такі речовини називаються провідниками (метали, електроліти тощо).

Для характеристики електричного струму вводиться сила струму. Розрізняють середню

$$I_{\text{сер}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

і миттєву силу струму

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

Одиницею вимірювання сили струму в системі СІ є 1 ампер,  $1\text{А} = 1\text{Кл/с}$ .

За напрямок струму приймається напрям руху позитивних зарядів. Перенесення негативних зарядів у одному напрямку еквівалентно перенесенню такого ж позитивного заряду у протилежному напрямку. Тому визначення напрямку струму є слушним і для металів, де носіями є негативні частинки – вільні електрони.

Якщо у провіднику є вільні носії заряду обох знаків, то

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \left| \frac{dq^-}{dt} \right|.$$

Заряду в електричному струмі перебувають у двох рухах – у хаотичному тепловому русі зі швидкістю  $\vec{v}$  і впорядкованому русі під дією електричного поля з швидкістю  $\vec{u}$ .

Середня швидкість заряду

$$\langle \vec{v} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \rangle,$$

оскільки  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  але  $\langle v \rangle \neq 0$ .

Якщо розподіл струму вздовж поперечного перерізу провідника нерівномірний, то струм характеризується вектором густини струму, модуль якого

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}},$$

де  $dS_{\perp}$  – елемент площини, перпендикулярної до напрямку струму, тобто до вектора  $\vec{u}$ . Знаючи густину струму, можна визначити силу струму

$$I = \int_S j_n dS,$$

де  $\vec{n}$  – нормаль до площадки  $S$ .

## § 80. Електрорушійна сила

Сили електричного поля переміщують позитивні заряди від точок з більшим потенціалом до точок з меншим потенціалом, тобто у напрямі зменшення потенціалу (це впливає з формули зв'язку між напруженістю і потенціалом  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ ).

У замкненому колі поряд з ділянками із зменшенням потенціалу обов'язково є ділянки зі збільшенням потенціалу. Переміщення позитивних зарядів на ділянках зі збільшенням потенціалу можливе через дію сторонніх, тобто неелектричних, сил.

Розглянемо провідник, на кінцях якого створено різницю потенціалів (див. рис. 17.1). Під дією сил електричного поля позитивні вільні заряди переміщуються від кінця з більшим потенціалом до кінця з меншим потенціалом. В результаті цього менший потенціал зростає, а більший зменшується. Коли потенціали кінців вирівнюються, струм припиняється. Але якщо утворити замкнене електричне коло, де на ділянці зі збільшенням потенціалу позитивні заряди будуть переміщатися за допомогою сторонніх сил, то в такому колі виникне кругообіг зарядів, тобто електричний струм.

Будь-яка сила, яка може переміщувати заряди від точок з меншим потенціалом до точок з більшим потенціалом, відноситься до класу сторонніх сил. Сторонні сили діють у джерелі струму. Сторонні сили можна характеризувати роботою з переміщення одиничного заряду – це і є електрорушійна сила джерела струму

$$\mathcal{E} = \frac{A_{cm}}{q}. \quad (17.1)$$

Джерело струму витрачає енергію на переміщення заряду вздовж замкнутого електричного кола.

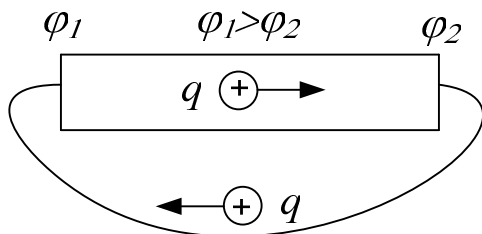


Рис. 17.1

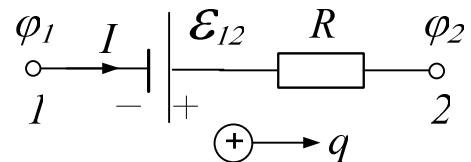


Рис. 17.2

Розглянемо ділянку кола, яка містить джерело струму (див. рис. 17.2). Повна робота з переміщення заряду  $q$  на ділянці складається з роботи

електростатичних сил  $A_{ел}$  поза джерелом струму і роботи сторонніх сил  $A_{см}$  всередині джерела струму

$$A_{I2} = A_{ел} + A_{см}. \quad (17.2)$$

Розділимо формулу (17.2) на заряд  $q$

$$\frac{A_{I2}}{q} = \frac{A_{ел}}{q} + \frac{A_{см}}{q}. \quad (17.3)$$

Відношення повної роботи з переміщення заряду до цього заряду називається напругою  $U_{I2}$  на ділянці кола

$$U_{I2} = \frac{A_{I2}}{q}. \quad (17.4)$$

Нагадаємо, що різниця потенціалів

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{ел}}{q}. \quad (17.5)$$

З урахуванням формул (17.1), (17.4), (17.5) формула (17.3) набуває вигляду

$$U_{I2} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{I2}.$$

Напруга на ділянці кола дорівнює алгебраїчній сумі різниці потенціалів і ЕРС, яка діє на цій ділянці.

## § 81. Закон Ома

Однорідною називається ділянка електричного кола, в якій не діють сторонні сили, тобто яка не містить джерела струму.

Г. Ом експериментально довів, що сила струму на однорідній ділянці прямо пропорційна різниці потенціалів і обернено пропорційна електричному опору ділянки

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (17.6)$$

Формула (17.6) має назву – закон Ома для однорідної ділянки у звичайній формі.

Для циліндричних провідників електричний опір  $R$  визначається за формулою

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де  $l$  – довжина,  $S$  – площа поперечного перерізу,  $\rho$  – питомий опір.

Закон Ома (17.6) можна переписати у диференціальній формі. Для цього виділимо у провіднику елементарний циліндричний об'єм  $dV = dl \cdot dS$  вздовж напрямку вектора  $\vec{E}$  (див. рис. 17.3). Сила струму у такому об'ємі

$$I = j \, dS,$$

де  $j$  – густина струму.

Величина  $dl$  настільки мала, що електричне поле в об'ємі  $dV$  можна вважати однорідним, тому опір цієї ділянки

$$R = \rho \frac{dl}{dS}.$$

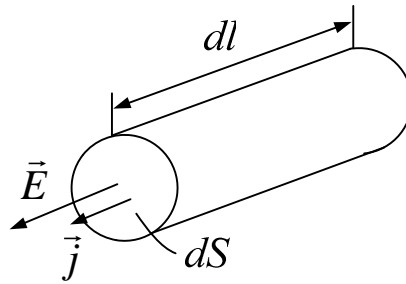


Рис. 17.3

Різниця потенціалів між кінцями елемента  $dl$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E dl.$$

Тоді з формули (17.6) випливає, що вектор густини струму

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (17.7)$$

Величина  $\sigma = 1/\rho$  називається електропровідністю. З нею формула (17.7) набуває остаточного вигляду:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (17.8)$$

Формула (17.8) і є виразом закону Ома для однорідної ділянки кола в диференціальній формі. Він дозволяє відповісти на запитання, як густина струму розподілена по поперечному перерізу провідника. Густина струму пропорційна напруженості електричного поля. Як змінюється напруженість по поперечному перерізу провідника, так змінюється і густина електричного струму.

Для більшості металів питомий опір в залежності від температури визначається формулою

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

де  $\rho$  – питомий опір при температурі  $t$ ,  $\rho_0$  – питомий опір при  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – температурний коефіцієнт опору.

Для металів при кімнатних температурах між питомим опором і абсолютною температурою існує пропорційна (лінійна) залежність. Дослідна залежність  $\rho$  від  $T$  наведена на рис. 17.4. З неї видно, що при низьких температурах лінійність порушується, і при  $T = 0$  питомий опір  $\rho \neq 0$ , а існує залишкове значення  $\rho_s$ , яке залежить від чистоти металу і наявності в ньому механічних напружень. Для ідеальної кристалічної ґратки металу  $\rho_s = 0$ .

Але існують речовини, в яких при температурах нижче певної, яка має назву критичної  $T_{кр}$ , опір речовини стрибком зникає в нуль (ртуть, свинець, олово, цинк, алюміній та інші.). Це явище отримало назву надпровідності, а самі речовини – надпровідників. Для більшості надпровідників  $T_{кр}$  порядку кількох кельвін.

Ділянка електричного кола, яка містить джерело струму (тобто джерело сторонніх сил) називається неоднорідною ділянкою (див. рис. 17.2). Будемо називати напругою  $U_{12}$  на неоднорідній ділянці електричного кола величину

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}.$$

Закон Ома для неоднорідної ділянки електричного кола має такий вигляд:

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}.$$

## § 82. Закон Джоуля-Ленца

При протіканні вздовж провідника електричного струму провідник нагрівається. Якщо струм постійний і опір провідника не змінюється з часом, то кількість виділеної у провіднику теплоти визначається формулою

$$Q = I^2 R t, \quad (17.9)$$

де  $I$  – сила постійного струму,  $R$  – опір провідника,  $t$  – час протікання струму. Формула (17.9) має назву закону Джоуля-Ленца у звичайному вигляді.

Для змінного струму весь час протікання струму розділимо на елементарні проміжки часу  $\Delta t_k$  ( $k$  – поточний номер), причому  $\Delta t_k$  повинні бути настільки малими, щоб струм і опір для кожного проміжку часу можна було вважати незмінними, але різними для різних проміжків часу. Для проміжку часу  $\Delta t_k$  будемо позначати струм  $I_k$ , а опір –  $R_k$ . Тоді кількість теплоти  $Q_k$ , яка виділиться за проміжок часу  $\Delta t_k$ , можна визначити за формулою

$$Q_k = I_k^2 R_k \Delta t_k. \quad (17.10)$$

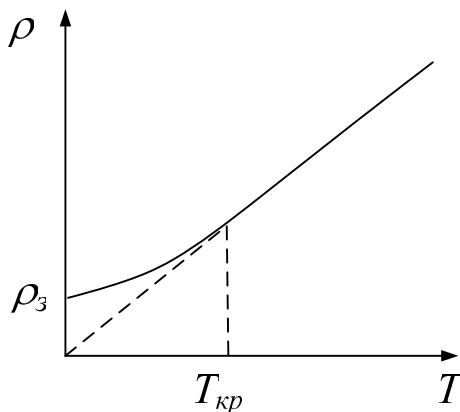


Рис. 17.4

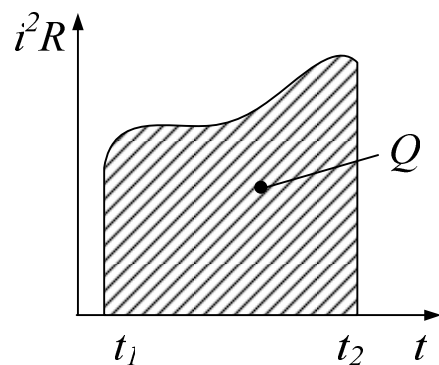


Рис. 17.5

Формула (17.10) тим точніша, чим менш  $\Delta t_k$ . За весь час  $t$

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_k I_k^2 R_k \Delta t_k.$$

Сума нескінченно малих є інтеграл, тому

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt.$$

На координатній площині  $(I^2 R, t)$  кількість виділеної теплоти дорівнює площі криволінійної трапеції (див. рис. 17.5).

Таким чином, щоб визначити кількість виділеної теплоти при змінному струмі потрібно знати залежності  $I^2(t)$  і  $R(t)$ . Якщо опір провідника в часі не змінюється, то

$$Q = R \int_{t_1}^{t_2} I^2 dt.$$

Можна перейти від звичайної форми (17.9) до диференціальної, що характеризує виділення теплоти у різних місцях провідника. Всередині об'єму  $dV$  кількість виділеної теплоти

$$dQ = I^2 R dt = (j ds)^2 \rho \frac{dl}{ds} dt = \rho j^2 dv dt. \quad (17.11)$$

Величина

$$w = \frac{dQ}{dv dt}$$

називається питомою потужністю електричного струму, й характеризує кількість енергії, що виділяється в провіднику єдиного об'єму у одиницю часу. Для питомої потужності з формули (17.11) маємо

$$w = \rho j^2,$$

або з урахуванням, того що  $j = \sigma E$ , отримуємо

$$w = \sigma E^2.$$

Тобто питома потужність електричного струму пропорційна квадрату напруженості електричного поля.

### § 83. Закони послідовного і паралельного з'єднання провідників

На рис. 17.6 а) показано послідовне з'єднання двох резисторів опору  $R_1$  і  $R_2$ .

Для такого з'єднання загальний опір ділянки АВ є сумою опорів  $R_1$  і  $R_2$ :

$$R_{AB} = R_1 + R_2.$$

Сила струму у двох резисторах однакова:

$$I_1 = I_2.$$

Падіння напруги (або просто напруга) на ділянці АВ є

$$U_{AB} = U_1 + U_2,$$

де  $U_1$  і  $U_2$  – падіння напруги на першому та другому резисторі відповідно.

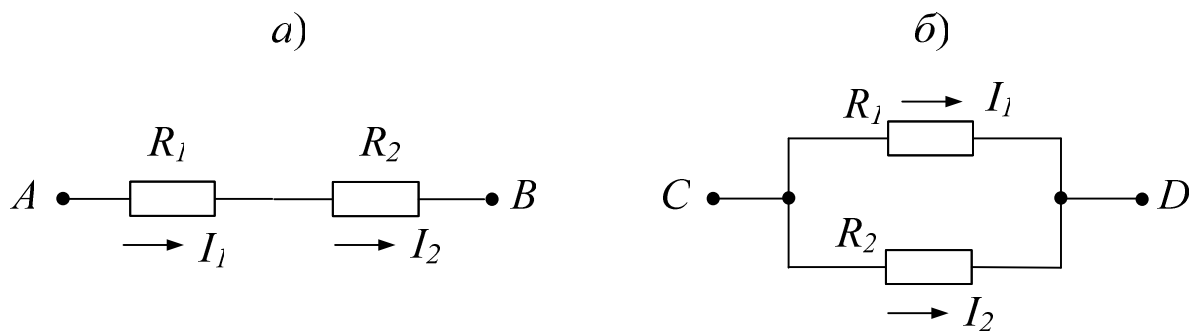


Рис. 17.6

На рис. 17.6 б) показано паралельне з'єднання двох резисторів опороми  $R_1$  і  $R_2$ . У цьому випадку загальний опір  $R$  ділянки CD визначається так:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Напруга на резисторах однакова:

$$U_{CD} = U_1 = U_2,$$

а сила струму у точках C і D є сумою струмів  $I_1$  і  $I_2$ :

$$I_C = I_D = I_1 + I_2.$$

#### § 84. Розгалужені електричні кола. Правила Кірхгофа

Точка розгалуженого електричного кола, в якій сходяться більше ніж два провідники, називається вузлом (див. рис. 17.7). Ділянка кола, яка з'єднує два сусідніх вузли, називається гілкою електричного кола.

Будемо розглядати розгалужені електричні кола струму. Для того щоб струми у ділянках були постійними, потрібно щоб потенціали вузлів залишалися сталими. Для цього необхідно, щоб сумарний заряд, який тече до вузла в одиницю часу, дорівнював заряду, що витікає з вузла.

Звідси перше правило Кірхгофа

$$\sum I_k = 0,$$

тобто алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю. Струми, що втікають у вузол, беруться з одним знаком, струми, що витікають – із протилежним.

Якщо в електричному колі  $N$  вузлів, то згідно з першим правилом Кірхгофа можна записати  $N-1$  незалежних рівнянь.

Виділимо у розгалуженому колі замкнений контур і задамося напрямком його обходу (див. рис. 17.8). Застосуємо для кожної ділянки закон Ома

$$I_1 R_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_1;$$

$$I_2 R_2 = (\varphi_2 - \varphi_3) + \mathcal{E}_2;$$

$$I_3 R_3 = (\varphi_3 - \varphi_1) + \mathcal{E}_3.$$

Підсумовуючи ці рівняння, отримуємо друге правило Кірхгофа

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k.$$

Алгебраїчна сума добутків струмів на опір (тобто напруг на резисторах) при обході замкненого контура дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, увімкнених у даний контур.

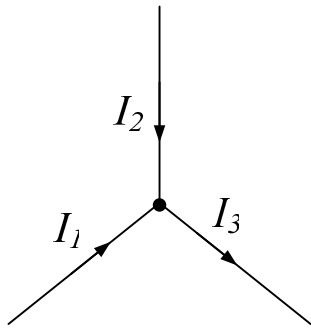


Рис. 17.7

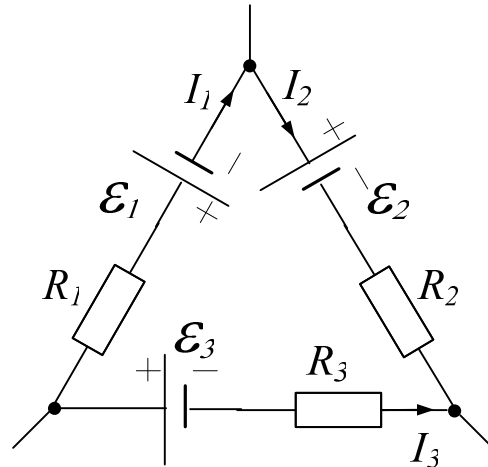


Рис. 17.8

Порядок розрахунку електричного кола за правилами Кірхгофа такий:

1. У кожній гілці довільно задаємо напрямки електричного струму і позначаємо їх стрілками. Число невідомих струмів у розгалуженому електричному колі дорівнює числу гілок.
2. Складаємо  $N - 1$  рівняння за першим правилом Кірхгофа ( $N$ —число вузлів).
3. У колі виділяємо замкнені контури і довільно задаємося напрямком їх обходу (за годинниковою стрілкою або проти).
4. Складаємо рівняння за другим правилом Кірхгофа. Якщо напрямок обходу контуру збігається з напрямком струму, то  $I_k R_k > 0$ . Якщо при обході контуру переходимо з мінуса на плюс, то  $\mathcal{E}_k > 0$ .
5. Загальна кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих струмів.
6. Розв'язуємо отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь і знаходимо невідомі електричні струми.



## Тема 18. Магнітне поле у вакуумі

### § 85. Взаємодія струмів. Магнітне поле

Електричні струми взаємодіють між собою. Струми одного напрямку притягаються (див. рис. 18.1, а), а струми протилежних напрямків – відштовхуються (див. рис. 18.1, б). Сила взаємодії, яка приходить на одиницю довжини двох паралельних нескінченно довгих прямолінійних струмів у системі СІ визначається формулою

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r},$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнітна стала,  $r$  – відстань між провідниками і струмами.

Взаємодія струмів відбувається за допомогою магнітного поля. Магнітне поле – це вид матерії, який утворюється рухомими зарядами і діє тільки на рухомі заряди.

Для дослідження магнітного поля використовується контур зі струмом малих розмірів – пробний контур. Його орієнтація у просторі визначається позитивною нормаллю  $\vec{n}$ , яка зв'язана з напрямом струму за правилом правого гвинта.

Основна характеристика контуру зі струмом – магнітний момент  $\vec{p}_m$ , який визначається формулою

$$\vec{p}_m = I S \vec{n},$$

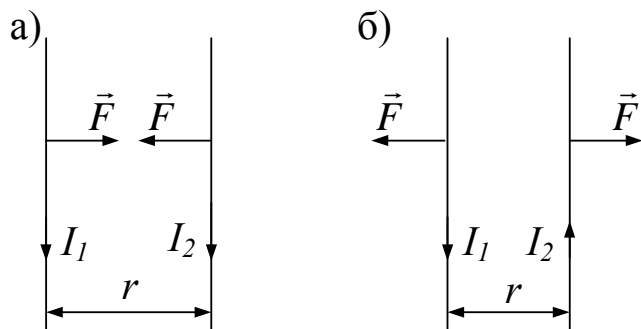


Рис. 18.1

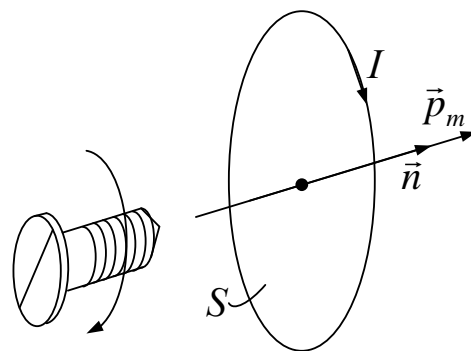


Рис. 18.2

де  $I$  – сила струму;  $S$  – площа контуру,  $\vec{n}$  – одиничний вектор, перпендикулярний до площини контуру. За напрямом магнітного моменту контуру приймається напрямок позитивної нормалі (див. рис. 18.2).

При розміщенні контуру зі струмом у магнітному полі на нього з боку магнітного поля діє обертальний момент  $M$ , під дією якого контур обертається і займає рівноважне положення.

Відношення

$$\vec{B} = \frac{M_{\max}}{p_m} \vec{n}_{\text{рівн}}.$$

є силовою характеристикою магнітного поля у точці і називається вектором магнітної індукції. Напрямок визначається рівноважним положенням  $\vec{n}_{\text{рівн}}$ .

Одиницею вимірювання магнітної індукції є тесла (Т):  $1 \text{ Т} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}}$ .

Зображується магнітне поле за допомогою ліній магнітної індукції – це замкнені криві, у кожній точці яких вектор  $\vec{B}$  напрямлений по дотичній до них, і густина яких дорівнює  $B$  (див. рис. 18.3).

Для магнітного поля, як і для електричного, справедливий **принцип суперпозиції**: магнітна індукція системи струмів дорівнює векторній сумі магнітних індукцій, які утворюються струмами, тобто

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_N.$$

Потік вектора магнітної індукції через поверхню  $S$  визначається аналогічно потоку вектора напруженості електричного поля, з заміною  $\vec{E}$  на  $\vec{B}$ , тобто

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

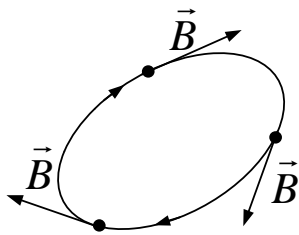


Рис. 18.3

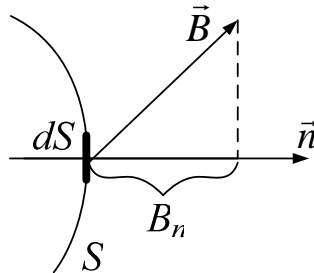


Рис. 18.4

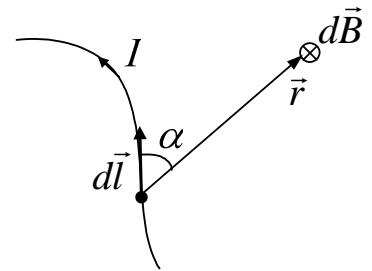


Рис. 18.5

де  $B_n$  – проекція вектора  $\vec{B}$  на нормаль до поверхні (див. рис. 18.4). Фізичний зміст цієї величини полягає у тому, що вона визначає кількість ліній магнітної індукції, що перетинають поверхню  $S$ .

Оскільки лінії магнітної індукції замкнені, то потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнює нулю, тобто

$$\int_S B_n dS = 0. \quad (18.1)$$

Рівняння (18.1) є одним з основних в теорії електромагнітного поля.

## § 86. Закон Біо-Савара-Лапласа

Щоб визначити магнітну індукцію провідника зі струмом довільної форми, потрібно знати магнітну індукцію нескінченно малої ділянки

провідника, так званого елемента струму  $d\vec{l}$ . Загальне міститься у нескінченно малому. Тоді, розбиваючи провідник довільної форми на елементи струму і використовуючи принцип суперпозиції, можна визначити індукцію будь-якого провідника зі струмом.

Закон Біо-Савара-Лапласа визначає магнітну індукцію, яка породжується елементом струму  $d\vec{l}$ . Елемент струму  $d\vec{l}$  – це векторна величина, модуль якої дорівнює довжині нескінченно малої ділянки струму, а напрямком є напрямок струму (див. рис. 18.5).

Індукція  $d\vec{B}$ , яка утворюється елементом струму  $d\vec{l}$ , визначається законом Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (18.2)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений з елемента струму  $d\vec{l}$  у точку спостереження. Модуль вектора  $d\vec{B}$ , як це випливає з (18.2), буде визначатися формулою

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}.$$

Щоб визначити індукцію  $\vec{B}$ , яка утворюється у даній точці спостереження скінченним провідником, необхідно обчислити інтервал

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B},$$

де контур інтегрування  $L$  збігається із провідником.

## § 87. Поле прямолінійного струму

Розглянемо застосування закону Біо-Савара-Лапласа для визначення індукції магнітного поля прямолінійного провідника з струмом. Нехай  $b$  – відстань від провідника до точки спостереження,  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки спостереження,  $d\alpha$  – приріст кута  $\alpha$  на елементі струму  $dl$  (див. рис. 18.6). Тоді

$$r = \frac{b}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{b d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

З закону Біо-Савара-Лапласа (2) маємо

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{b} \sin \alpha d\alpha. \quad (18.3)$$

Таким чином інтегрування по  $dl$  звелось до інтегрування (18.3) по куту  $\alpha$ . Усі  $d\vec{B}$  для різних елементів струму  $d\vec{l}$  мають однаковий напрямок, тому

векторне інтегрування зводиться до скалярного, і для необмеженого провідника інтегрування проводиться у межах від 0 до  $\pi$ .

$$B = \int_0^{\pi} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha.$$

І тоді отримуємо

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}. \quad (18.4)$$

Магнітне поле прямолінійного струму зображено на рис. 18.7. Лінії індукції являють собою концентричні кола, які лежать у перпендикулярній до струму площині, і густина яких зменшується обернено пропорційно відстані від провідника. Їхні напрямки зв'язані із напрямком струму за правилом свердлика.

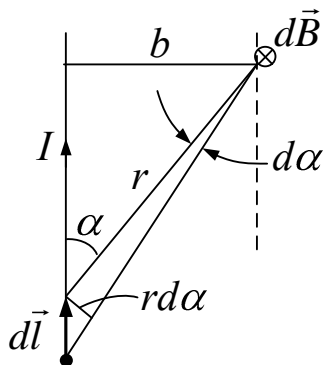


Рис. 18.6

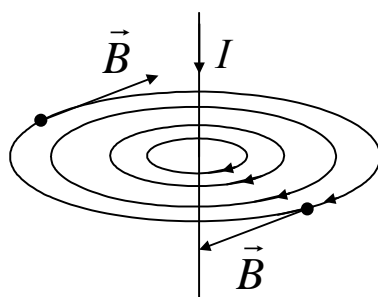


Рис. 18.7

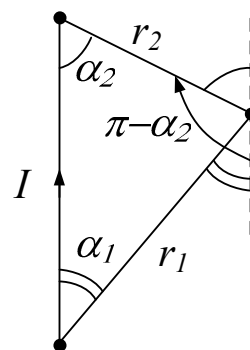


Рис. 18.8

Для провідника кінцевих розмірів положення кінців відносно точки спостереження можна задати кутами  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , які утворюються провідником з радіусами векторами  $r_1$  і  $r_2$  (див. рис. 18.8). Тоді

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2). \quad (18.5)$$

Для необмеженого провідника  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , і формула (18.5) переходить у формулу (18.4).

## § 88. Циркуляція вектора магнітної індукції

Інтеграл вздовж замкнутого контура

$$\oint_L B_l dl,$$

де  $B_l$  – проекція вектора  $\vec{B}$  на напрям дотичної до контуру інтегрування у кожній точці контура, називається циркуляцією вектора  $\vec{B}$ .

Обчислимо циркуляцію вектора  $\vec{B}$  у найпростішому випадку, коли контур інтегрування  $L$  лежить у площині, яка перпендикулярна прямому струму  $I$ ;  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки спостереження,  $d\alpha$  – приріст кута  $\alpha$  на елементарній ділянці інтегрування  $d\vec{l}$ .

Для прямого струму магнітна індукція

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Як видно з рис. 18.9, проекція елементарної ділянки інтегрування  $d\vec{l}$  на вектор  $\vec{B}$  визначається формулою

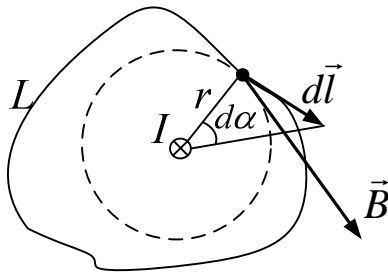


Рис. 18.9

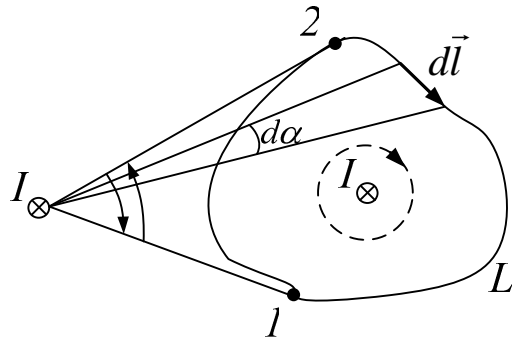


Рис. 18.10

$$dl_B = r d\alpha.$$

Тоді підінтегральну функцію у виразі для циркуляції можна записати у вигляді

$$B_l dl = B l dl_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha,$$

і інтегрування вздовж контура зводиться до інтегрування по куту  $\alpha$ , який при обігу по контуру змінюється від 0 до  $2\pi$

$$\oint B_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int d\alpha.$$

Причому, як видно з рис. 18.10,

$$\oint d\alpha = \begin{cases} 2\pi, & \text{контур } L \text{ охоплює струм;} \\ 0, & \text{контур } L \text{ не охоплює струм.} \end{cases}$$

Ці два результати можна звести в один, якщо під струмом  $I$  будемо розуміти струми, які охоплюються контуром інтегрування  $L$ . Тоді циркуляція визначається формулою

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 I.$$

Якщо контур охоплює кілька струмів, то циркуляція

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 \sum I_k, \quad (18.6)$$

де  $I_k$  – всі струми, що охоплюються контуром інтегрування. При цьому позитивними вважаються струми, напрямки яких пов'язаний з напрямком інтегрування правилом правого гвинта (правилом свердлика).

Хоча вираз (18.6) ми отримали для найпростішого випадку плоского контуру і прямого струму, можна показати, що він залишається справедливим для довільних форм контуру і провідника зі струмом.

## § 89. Поле соленоїда

Застосуємо теорему про циркуляцію вектора  $\vec{B}$  для визначення індукції магнітного поля нескінченно довгого соленоїда.

За контур інтегрування  $L$  доцільно взяти прямокутний контур, одна сторона якого лежить усередині соленоїда (див. рис. 18.11). Вектор  $\vec{B}$  всередині соленоїда направлений вздовж осі соленоїда. Тому на ділянці 1-2  $B_l = B$ , на ділянках 2-3 і 4-1  $B_l = 0$ , а ділянку 3-4 можна спрямувати на нескінченність, де  $B = 0$ . Отже з інтегрування вздовж замкненого контура у формулі для циркуляції залишається тільки інтегрування вздовж ділянки 1-2

$$\oint_L B_l dl = \int_1^2 B dl = B l = \mu_0 n l I, \quad (18.7)$$

де  $n$  – кількість витків на одиницю довжини соленоїда,  $l$  – довжина ділянки 1-2.

З формули (18.7) отримуємо, що всередині соленоїда

$$B = \mu_0 n I. \quad (18.8)$$

Щоб отримати значення індукції зовні соленоїда, треба контур інтегрування провести так, щоб ділянка 1-2 лежала поза соленоїдом (див. рис. 18.12). У цьому разі контур інтегрування ніяких струмів не охоплює, і циркуляція  $\oint B_l dl = 0$ , звідки  $B = 0$ , тобто поза необмежено довгим соленоїдом магнітне поле відсутнє. Воно повністю сконцентровано всередині соленоїда і є однорідним магнітним полем. Для обмеженого соленоїда поле існує і зовні соленоїда. Всередині достатньо довгого соленоїда поле практично однорідне (див. рис. 18.13) і визначається формулою (18.8).

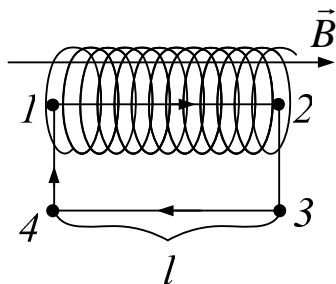


Рис. 18.11

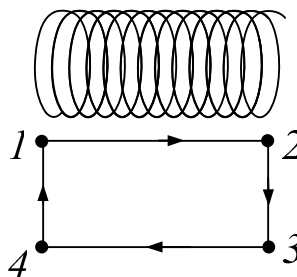


Рис. 18.12

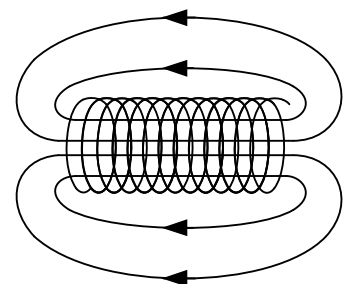


Рис. 18.13

## Тема 19. Взаємодія струмів і частинок з магнітним полем

### § 90. Закон Ампера

Закон Ампера визначає силу  $d\vec{F}$ , яка діє у магнітному полі на елемент струму  $I \cdot d\vec{l}$ , за формулою:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B},$$

або у скалярній формі

$$dF = I B dl \sin \alpha,$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{B}$  (див. рис. 19.1).

Напрямок сили  $d\vec{F}$  пов'язаний з найкоротшим обертом від  $d\vec{l}$  до  $\vec{B}$  правилом правого гвинта (правилом свердлика, див. рис. 19.1).

Якщо розбити провідник на елементи струму і визначити за законом Ампера силу, яка діє на кожний елемент струму, то можна визначити і результуючу силу, що діє на весь провідник, і точку прикладання.

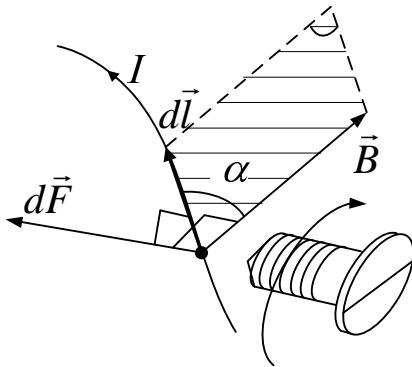


Рис. 19.1

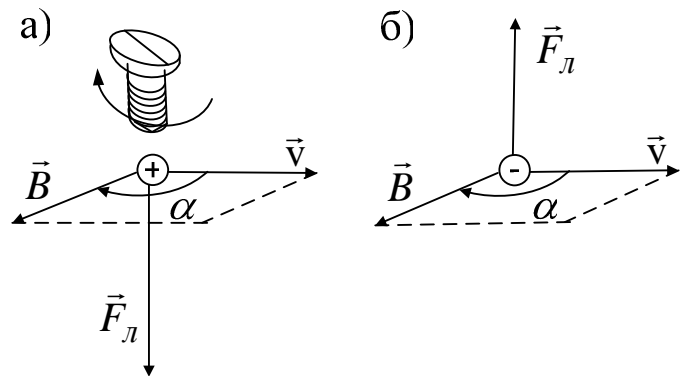


Рис. 19.2

### § 91. Сила Лоренца

Сила, яка діє на провідник зі струмом у магнітному полі, обумовлена дією сил на окремі заряди, що рухаються у провіднику

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = dS dl \vec{j} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV,$$

де  $dV = dS dl$  – об'єм елемента струму,  $dS$  – площа його поперечного перерізу,  $\vec{j}$  – вектор густини сили струму.

Сили, які діють на одиницю об'єму

$$\vec{F}_{\text{од об}} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \vec{j} \times \vec{B}.$$

Оскільки

$$\vec{j} = n q \vec{v},$$

де  $n$  – кількість вільних носіїв заряду у одиниці об'єму,  $q$  – заряд носія,  $\vec{v}$  – швидкість впорядкованого руху носія заряду, то

$$\vec{F}_{\text{од об}} = n q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Сила, що діє на окремий заряд з боку магнітного поля індукцією  $\vec{B}$ :

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{F}_{\text{од об}}}{n} = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Якщо разом з магнітним є електричне поле, то на заряд діє сила:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_m + \vec{F}_e = q \vec{v} \times \vec{B} + q \vec{E}.$$

Ця сила і має назву сили Лоренца. Вона визначає силу, що діє на заряд, який рухається у магнітному полі. Напрямок сили  $\vec{F}_L$  пов'язаний з найкоротшим обертанням від  $\vec{v}$  до  $\vec{B}$  за правилом правого гвинта (правилом свердлика – див. рис. 19.2, а). Якщо заряд негативний, то напрям сили Лоренца потрібно змінити на протилежний (див. рис. 19.2,б) порівняно з позитивним зарядом.

Оскільки сила Лоренца  $\vec{F}_L$  завжди перпендикулярна вектору швидкості, то вона ніякої роботи не виконує, і тому швидкість по модулю змінити не може, а тільки змінює напрямок вектора швидкості.



## Тема 20. Магнітне поле у речовині

### § 92. Намагнічування речовини

Усяка речовина є магнетиком, тобто здатна під дією магнітного поля отримувати магнітний момент (намагнічуватися). Намагнічена речовина утворює власне магнітне поле  $\vec{B}'$ , яке накладається на утворене струмами зовнішнє поле  $\vec{B}_0$ .

Індукція магнітного поля у речовині

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

Намагнічування речовини характеризується намагніченістю  $\vec{J}$  – магнітним моментом одиниці об'єму:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m,$$

де  $\vec{p}_m$  – магнітні моменти окремих молекул.

Для пояснення намагнічування тіл Ампер припустив, що в молекулах циркулюють колові молекулярні струми з магнітними моментами  $\vec{p}_m$ . Завдяки хаотичній орієнтації магнітних моментів окремих молекул магнітний момент тіла

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_m$$

за відсутності зовнішнього магнітного поля дорівнює нулю (див. рис. 20.1, а).

Під дією зовнішнього магнітного поля магнітні моменти молекул набувають упорядкованої орієнтації вздовж вектора  $\vec{B}_0$  зовнішнього магнітного поля, магнітний момент тіла стає відмінним від нуля (див. рис. 20.1, б). У цьому полягає явище намагнічування тіла.

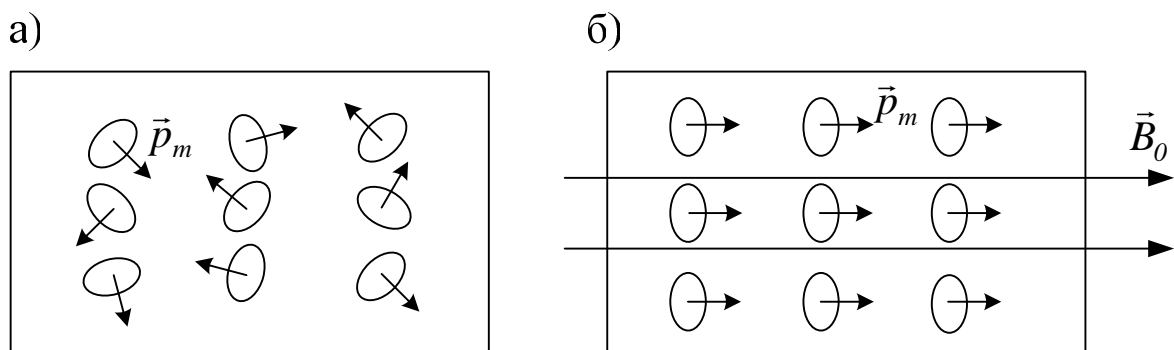


Рис. 20.1

### § 93. Опис поля у магнетиках

Циркуляція вектора  $\vec{B}$  у речовині записується у вигляді

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 (\sum I)_L + \mu_0 (\sum I_M)_L, \quad (20.1)$$

де  $I$  – відомі макроскопічні струми у провідниках, які утворюють зовнішнє поле  $\vec{B}_0$ , і які охоплюються контуром інтегрування  $L$ ;

$I_M$  – невідомі мікроскопічні молекулярні струми, які утворюють поле намагніченої речовини  $\vec{B}'$  і охоплюються контуром інтегрування  $L$ .

Таким чином, за формулою (20.1) вектор  $\vec{B}$  визначається через невідомі молекулярні струми  $I_M$ , які в свою чергу визначаються через  $\vec{B}$ . Виникає замкнене коло. Його можна розірвати, якщо для опису поля речовини ввести ще одну величину крім індукції  $\vec{B}$ , яка була б просто зв'язана з  $\vec{B}$ , але визначалася тільки відомими макроскопічними струмами.

З цією метою встановимо зв'язок між невідомими молекулярними струмами  $I_M$  і параметрами намагніченої речовини. Для цього розглянемо, які молекулярні струми охоплює елементарна ділянка інтегрування  $dl$ .

Елемент контуру інтегрування  $d\vec{l}$  перетинає ті молекулярні струми, центри яких попадають всередину косої циліндра з об'ємом

$$dV = S_m dl \cos \alpha,$$

де  $S_m$  – площа молекулярного струму,  $\alpha$  – кут між вектором магнітного моменту  $\vec{p}_m$  молекулярного струму та елементом інтегрування  $d\vec{l}$  (див. рис. 20.2).

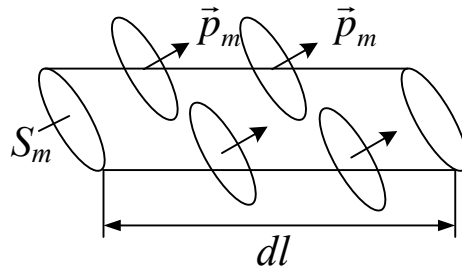


Рис. 20.2

Якщо  $n$  – кількість молекул у одиниці об'єму, то сумарний молекулярний струм, який охоплюється елементом контуру  $d\vec{l}$ .

$$\left( \sum I_M \right)_{dl} = I_M n dV = I_M S_m n dl \cos \alpha = p_m n dl \cos \alpha = J \cos \alpha \cdot dl = J_l dl,$$

де  $J_l$  – проекція вектора намагніченості  $\vec{J}$  на елемент інтегрування  $d\vec{l}$ .

Тоді сумарний струм, що охоплюється усім контуром інтегрування  $L$ ,

$$\left( \sum I_M \right)_L = \oint_L J_l dl, \quad (20.2)$$

тобто дорівнює циркуляції вектора намагніченості.

Підставляючи (20.2) в (20.1), приводимо останню формулу до вигляду.

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) dl = \sum I. \quad (20.3)$$

У лівій частині формули (20.3) стоїть величина, яка визначається тільки відомими струмами у провідниках  $\sum I$  і яку додатково необхідно ввести для опису поля у речовині. Вона отримала назву напруженості магнітного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

У вакуумі:

$$J = 0, \quad \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \quad (20.4)$$

У речовині, як свідчить дослід, намагніченість

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

де  $\chi$  – магнітна сприйнятливість.

Тоді

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

звідки

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}.$$

Величина  $\mu = 1 + \chi$  має назву відносної магнітної проникності. Тоді:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (20.5)$$

Ця формула встановлює зв'язок між індуктивністю  $\vec{B}$  магнітного поля і новою величиною, яка введена для опису поля в речовині – напруженістю магнітного поля  $\vec{H}$ . Магнітна проникність піддається вимірюванню. Тоді, визначивши з формули (20.3) напруженість  $\vec{H}$  магнітного поля, з формули (20.5) визначаємо магнітну індукцію  $\vec{B}$ , і замкнене коло, яке впливає з формули (20.1), розірване.

З формул (20.4)

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0},$$

тоді з формули (20.5)

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \mu \vec{B}_0,$$

де  $\vec{B}$  – індукція у речовині,  $\vec{B}_0$  – індукція у вакуумі. Тобто  $\mu$  показує, у скільки разів індукція у речовині  $|\vec{B}|$  відрізняється від індукції у вакуумі  $|\vec{B}_0|$ . У цьому і полягає фізичний зміст величини  $\mu$  і на цьому засновано вимірювання магнітної проникності.

У залежності від значення магнітної сприйнятливості  $\chi$  усі речовини поділяються на три групи:

- а) діамагнетики, для яких  $\chi < 0$ , а за модулем – дуже мала величина;
- б) парамагнетики, для яких  $\chi > 0$ ; а за модулем – дуже мала величина;
- в) феромагнетики, для яких  $\mu$  залежить від  $H$ , і  $\mu_{max} \gg 1$ .

## § 94. Діамагнетизм

Діамагнетики – це речовини, атоми яких не мають власного магнітного моменту  $p_m = 0$  (див. рис. 20.3, а). Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається прецесія (обертання) електронних орбіт навколо зовнішнього магнітного поля, що приводить до виникнення індукційного магнітного моменту атома  $\vec{p}_i$ , направлено протилежно зовнішньому полю  $\vec{B}_0$  (див. рис. 20.3, б).

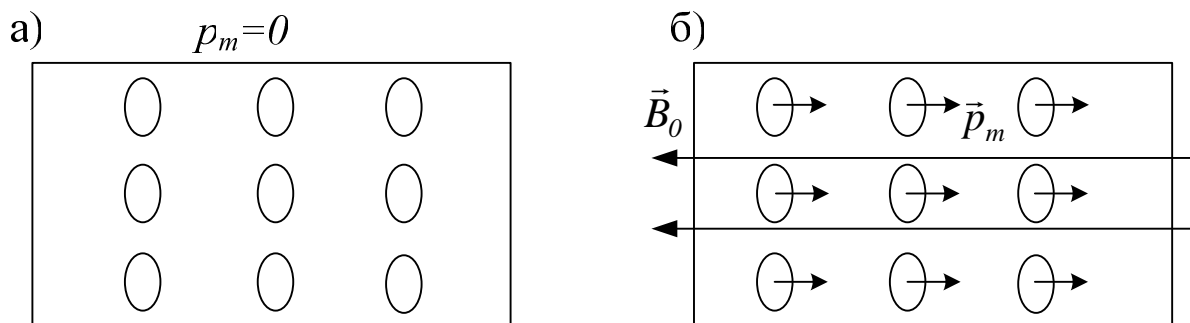


Рис. 20.3

Повне поле у діамагнетику  $B = B_0 - B'$ , тому  $B < B_0$  і  $\mu < 1$ . У результаті діамагнетики трохи ослаблюють зовнішнє поле  $\vec{B}_0$ , утворюючи власне поле  $\vec{B}_i$  у протилежному напрямі. Приклади діамагнетиків – вода, мідь, та інші.

## § 95. Парамагнетизм

Якщо магнітний момент атома відмінний від нуля, речовина називається парамагнетиком  $p_a \neq 0$ . Внаслідок теплового руху атомні магнітні моменти хаотично направлені і тіло не виявляє магнітних властивостей (див. рис. 20.4, а). Зовнішнє магнітне поле намагається встановити магнітні моменти атомів  $\vec{p}_a$  вздовж вектора  $\vec{B}_0$  зовнішнього поля (див. рис. 20.4, б).

Виникає позитивний магнітний момент, значно більший за негативний індукційний. Результуючий магнітний момент позитивний. Тому власне поле  $\vec{B}$  намагніченої речовини за напрямом збігається з зовнішнім і результуюче поле у речовині  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ , тобто більше, ніж зовнішнє  $\vec{B}_0$  і  $\mu > 1$  (але не

набагато). Тобто парамагнетики трохи посилюють зовнішнє поле. До таких речовин належать алюміній, платина, повітря та інші.

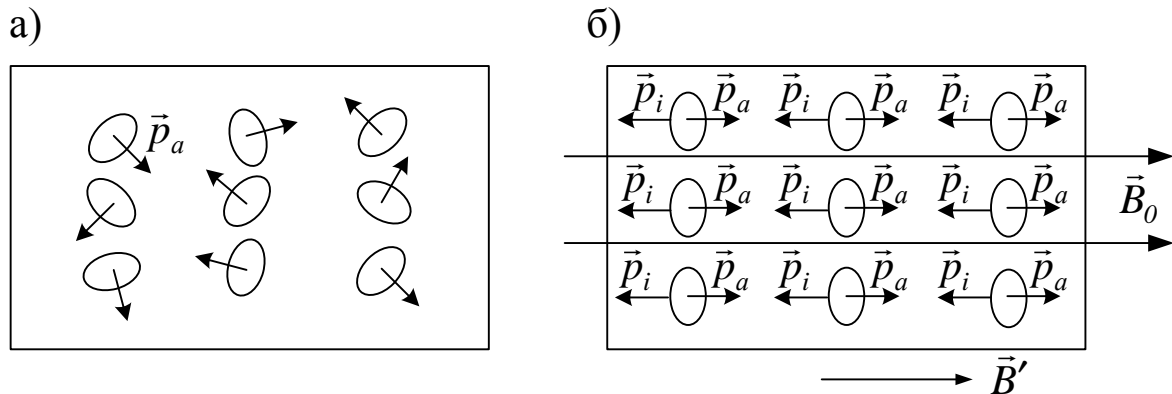


Рис. 20.4

## § 96. Ферромагнетизм

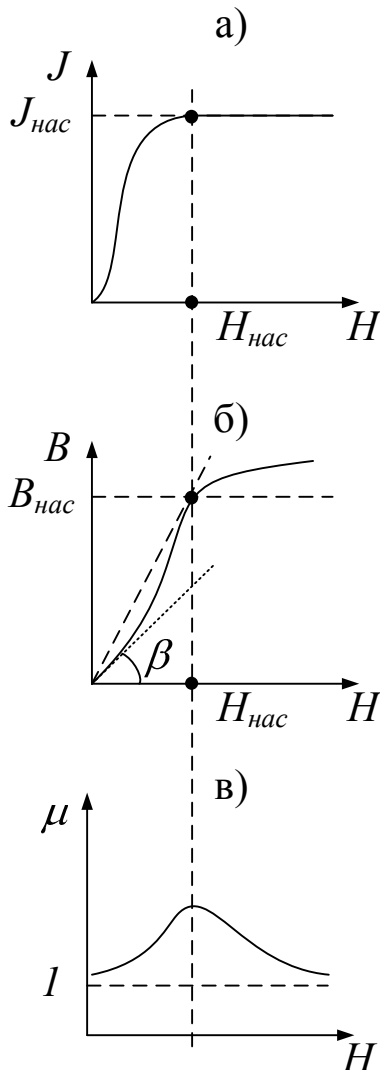


Рис. 20.5

Ферромагнетики – це речовини, які здатні бути намагніченими за відсутності магнітного поля (залізо, нікель, кобальт, гадоліній та їх сплави). Вони у багато разів посилюють зовнішнє магнітне поле, так що їх магнітна проникність набагато перевищує одиницю.

Намагніченість  $J$  ферромагнетиків залежить від напруженості магнітного поля  $H$ . При певній напруженості намагніченість  $J$  досягає стану насичення  $J_{нас}$  (див. рис. 20.5, а). Зв'язок між індукцією  $B$  і напруженістю  $H$  визначається формулою

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}).$$

При досягненні стану насичення

$$\vec{B} = (\mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{J}_{нас}),$$

де  $\mu_0\vec{J}_{нас} = const$ , і при подальшому збільшенні  $H$  індукція  $\vec{B}$  змінюється дуже повільно, оскільки магнітна стала  $\mu_0$  дуже мала величина ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м),  $\tan \alpha = \mu_0$ , де  $\alpha$  – кут наклону прямої при  $H > H_{нас}$  (див. рис. 20.5, б).

Якщо на графіку залежності  $B$  від  $H$  (він має назву кривої намагнічення) взяти довільну точку і провести через неї пряму, то кут її нахилу буде визначатися формулою  $\operatorname{tg} \beta = \frac{B}{H} = \mu_0 \mu$ . Тобто при зміні напруженості  $H$  магнітна проникність буде змінюватися так, як змінюється  $\operatorname{tg} \beta$ . Там, де хорда перетворюється у дотичну, магнітна проникність досягає максимального значення (див. рис. 20.5, в). Оскільки  $\mu = 1 + \chi = 1 + \frac{J}{H}$ , то при  $H > H_{\text{нас}}$   $\mu = 1 + \frac{J_{\text{нас}}}{H}$  і при збільшенні  $H$ ,  $\mu$  прямує до одиниці.

Крім нелінійної залежності  $J$  і  $B$  від  $H$ , у феромагнетиках спостерігаємо явище гістерезису. При циклічному перемагнічуванні феромагнетика (тобто напруженість  $H$  збільшується, а потім зменшується у одному напрямку, а потім збільшується і зменшується у протилежному напрямку). Точка, яка визначає  $B$  як функцію  $H$ , рухається вздовж замкненої кривої, яка має назву петлі гістерезису, проти годинникової стрілки (див. рис. 20.6). Крива 1 на рис. 20.6 описує вихід з ненамагніченого стану. При напруженості  $H = 0$ , тобто у відсутності зовнішнього магнітного поля, індукція у феромагнетик не дорівнює нулю і має місце залишкова індукція  $B_z$ , завдяки тому можливе існування постійних магнітів.

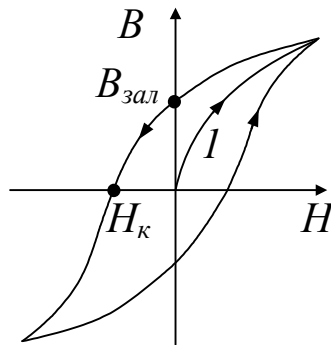


Рис. 20.6

Всі ці властивості феромагнетиків пояснюються їхньою доменною структурою. При певних умовах у кристалах виникають сили, що змушують магнітні моменти електронів вишикуватися паралельно один одному. Виникають ділянки з внутрішньою впорядкованістю магнітних моментів електронів – домени, які мають розміри  $\sim 10^{-4} \div 10^{-3}$  см. Коли під дією зовнішнього магнітного поля домени вишиковуються вздовж поля, то досягається стан насичення феромагнетиків. При винесенні феромагнетиків з магнітного поля домени зберігають часткову впорядкованість у орієнтації завдяки тому і утворюється залишкова індукція.

При нагріванні феромагнетиків до певної температури, яка називається точкою Кюрі  $T_K$ , домени “розсипаються”, і феромагнетики перетворюються на парамагнетики, для заліза  $t = 768^\circ \text{C}$ , нікелю  $t = 365^\circ \text{C}$ .

## Тема 21. Електромагнітна індукція

### § 97. Явище електромагнітної індукції

У будь-якому замкненому контурі при зміні магнітного потоку, який його пронизує, виникає електричний струм (так званий індукційний струм). У цьому полягає явище електромагнітної індукції. Сила індукційного струму не залежить від способу, яким здійснюється зміна магнітного потоку і визначається тільки швидкістю його зміни

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (21.1)$$

Формула (21.1) має назву закону електромагнітної індукції. Напрямок індукційного струму визначається за **правилом Ленца**: індукційний струм завжди направлений так, щоб своїм магнітним полем протидіяти зміні магнітного потоку, що його породжує.

При збільшенні магнітного потоку через контур індукція  $\vec{B}_i$  магнітного поля індукційного струму напрямлена назустріч індукції  $\vec{B}$  зовнішнього поля і заважає його збільшенню (див. рис. 21.1, а). При зменшенні магнітного потоку  $\vec{B}_i$  напрямлено у той же бік, що й  $\vec{B}$  і заважає зовнішньому полю зменшуватися (див. рис. 21.1, б).

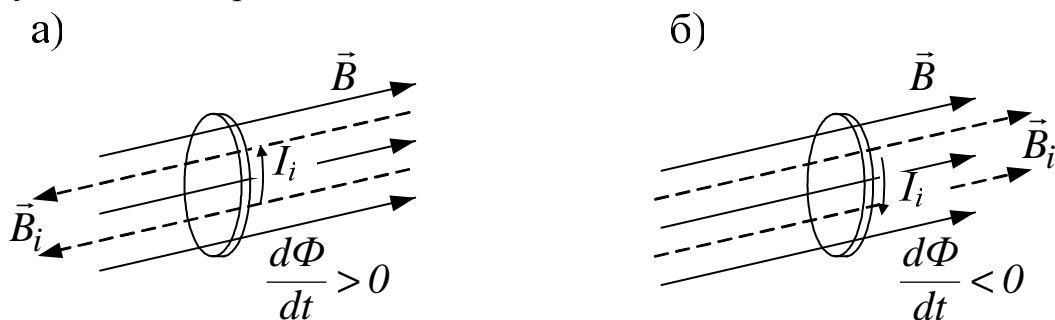


Рис. 21.1

Якщо контур складається не з одного витка, а з  $N$  витків, з'єднаних послідовно, то

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \left( \sum \Phi_i \right) = -\frac{d\psi}{dt},$$

де

$$\psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

– повний магнітний потік через контур,  $\Phi_i$  – потік через  $i$ -й виток контуру. Якщо усі витки контура однакові, то  $\psi = \Phi N$ , де  $N$  – кількість витків,  $\Phi$  – потік через один виток.

Явище електромагнітної індукції свідчить про те, що зміна магнітного поля викликає появу електричного поля, яке, на відміну від поля,

породженого зарядами, отримало назву вихрового, його силові лінії замкнені. Наявність контуру лише дозволяє виявити за виникненням у ньому індукційного струму наявність вихрового електричного поля.

## § 98. Індуктивність

Магнітний потік, утворений контуром, пропорційний струму, який тече у контурі:

$$\psi = L I. \quad (21.2)$$

Коефіцієнт пропорційності  $L$  має назву індуктивності контуру. Індуктивність характеризує здатність контуру впливати на магнітний потік: чим більша індуктивність контуру, тим більший магнітний потік утворюється при одному й тому ж струмі.

При сталій силі струму у контурі його індуктивність може змінюватись за рахунок форми і розмірів контуру. Індуктивність контуру залежить від форми, розмірів контуру і магнітних властивостей середовища, в якому знаходиться контур.

Одиниця вимірювання індуктивності – 1 генрі (Гн). Це індуктивність контуру, який при силі струму у 1 А утворює магнітний потік у 1 Вб.

Піракуемо індуктивність соленоїда. Індукція соленоїда:

$$B = \mu_0 \mu n I,$$

де  $n = N/L$  – кількість витків на одиницю довжини соленоїда,  $N$  – загальна кількість витків,  $l$  – довжина соленоїда.

Магнітний потік через один виток

$$\Phi = B S,$$

де  $S$  – площа витка.

Тоді повний магнітний потік через соленоїд:

$$\Psi = N \Phi = n l B S I = \mu \mu_0 n^2 V I.$$

Все, що стоїть перед струмом  $I$ , згідно з формулою (21.2) є індуктивністю:

$$L = \mu \mu_0 n^2 l S = \mu \mu_0 n^2 V,$$

де  $V = l S$  – об'єм соленоїда.

Звертаємо увагу, що індуктивність соленоїда пропорційна квадрату кількості витків, які припадають на одиницю довжини.

## § 99. Самоіндукція

Електричний струм, який тече в контурі, утворює пронизуючий цей контур магнітний потік  $\Phi$ . При зміні струму буде змінюватись і магнітний потік, і отже у контурі буде виникати ЕРС індукції. Це явище називається самоіндукцією. ЕРС самоіндукції дорівнює

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot I).$$

При відсутності феромагнетиків  $L = \text{const}$



$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

тобто ЕРС самоіндукції визначається бистротою зміни струму у контурі і індуктивністю контура.

Напрямок струму самоіндукції визначається правилом Ленца, згідно з яким струм самоіндукції протидіє зміні струму у контурі. При збільшенні струму у контурі він не дає йому зростати і тече назустріч (див. рис. 21.2, а), при зменшенні – струм самоіндукції не дає зменшуватись і напрямлений у той же бік, що і струм у контурі (див. рис. 21.2, б).

Внаслідок самоіндукції встановлення струму при розмиканні проходить не миттєво, а поступово, в електричному колі спостерігається перехідний процес, тривалість якого тим більша, чим більша індуктивність контуру.



Рис. 21.2

При розмиканні кола струм зменшується з часом за формулою

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

де  $I_0$  – початкове значення струму,  $L$  – індуктивність контуру,  $R$  – електричний опір контуру (див. рис. 21.3 та криву а на рис. 21.4).

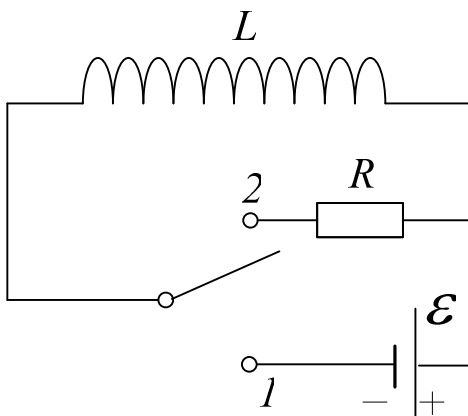


Рис. 21.3

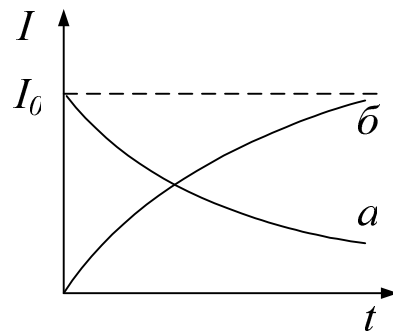


Рис. 21.4

При замиканні електричного кола з індуктивністю електричний струм збільшується з часом за формулою

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

де  $I_0$  максимальне значення сили струму (див. криву б на рис. 21.4).

### § 100. Енергія магнітного поля

Розглянемо електричне коло, яке містить котушку індуктивності (див. рис. 20.3). Спочатку перемикач знаходиться в положенні 1. Через соленоїд. установлюється струм  $I$ . Якщо відімкнути джерело струму (перемикач у положенні 2), то у колі деякий час внаслідок самоіндукції буде протікати струм. Робота цього струму за час  $dt$

$$dA = \mathcal{E}_s i dt = - \frac{d\Psi}{dt} i dt = -i d\Psi,$$

Оскільки  $\Psi = Li$ , то

$$dA = -L i di.$$

Вся робота за час зменшення струму від  $I$  до нуля буде дорівнювати

$$A = - \int_1^0 L i di = -L \int_1^0 i di = \frac{LI^2}{2}.$$

Робота йде на приріст внутрішньої енергії провідників і супроводжується зникненням магнітного поля. Отже, магнітне поле і є носієм енергії, за рахунок якої виконується робота  $A$ . Таким чином, енергія магнітного поля провідника зі струмом визначається формулою

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Виразимо енергію магнітного поля через параметри поля, а не провідника зі струмом. У випадку необмежено довгого соленоїда

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \quad I = \frac{H}{n},$$

де  $n$  – кількість витків на одиницю довжини;  $H$  – напруженість магнітного поля;  $V$  – об'єм соленоїда.

Тоді

$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V.$$

Оскільки поле соленоїда однорідне, то можна ввести  $w = \frac{W}{V}$  – густину енергії магнітного поля, для якої отримуємо кінцеву формулу

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Тобто густина енергії магнітного поля пропорційна квадрату напруженості.

## Тема. 22. Класична теорія провідності металів

### § 101. Основні положення

Основними положеннями класичної теорії провідності металів є такі:

- 1) електрони провідності в металі ведуть себе подібно молекулам ідеального газу, тобто утворюють своєрідний електронний газ, який пронизує кристалічну ґратку;
- 2) між зіткненнями електрони рухаються вільно, пробігаючи у середньому відстань – довжину вільного пробігу  $\langle \lambda \rangle$ ;
- 3) на відміну від молекул газу, пробіг яких визначається співударами молекул одна з одною, електрони провідності стикаються переважно не між собою, а з позитивними іонами, які утворюють кристалічну ґратку металу;
- 4) зіткнення електронів провідності з іонами кристалічної ґратки призводить до встановлення теплової рівноваги між електронним газом і кристалічною ґраткою;
- 5) до електронного газу металу можуть бути застосовані результати кінетичної теорії газів.

Тоді оцінку середньої швидкості теплового руху електронів провідності можна провести за формулою

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Для кімнатної температури ( $\sim 300$  K) підрахунок за цією формулою дає  $\langle v \rangle \approx 10^5$  м/с.

При встановленні електричного поля в металі на хаотичний тепловий рух електронів провідності накладається впорядкований рух під дією поля із середньою швидкістю  $\langle u \rangle$ . Величину цієї швидкості легко, оцінити виходячи з формули густини струму

$$j = n e \langle u \rangle,$$

де  $n$  – концентрація електронів (кількість електронів в одиниці об'єму),  $e$  – заряд електрона. Гранична густина струму для міді

$$j = 10 \text{ А/мм}^2 = 10^7 \text{ А/м}^2, n \approx 10^{23} \text{ см}^{-3} = 10^{29} \text{ 1/м}^{-3}.$$

Тоді

$$\langle u \rangle = j / n e = 10^7 / 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29} = 10^{-3} \text{ м/с}.$$

Таким чином, навіть при дуже великих густинах струму

$$\langle v \rangle \approx 10^5 \langle u \rangle.$$

Тобто середню швидкість теплового руху електронів провідності приблизно у 100 тисяч разів перевищує їхню середню швидкість впорядкованого руху під дією електричного поля. Тому

$$\langle |\vec{v} + \vec{u}| \rangle = \langle |\vec{u}| \rangle.$$

Знайдемо викликаний електричним полем приріст середнього значення кінетичної енергії електронів

$$\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle (\vec{v})^2 \rangle + \langle (\vec{u})^2 \rangle + 2 \langle \vec{v} \rangle \langle \vec{u} \rangle.$$

Але  $\langle \vec{v} \rangle = 0$ , тому

$$\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle (\vec{v})^2 \rangle + \langle (\vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle.$$

Отже, впорядкований рух електронів провідності під дією електричного поля збільшує кінетичну енергію електронів в середньому на величину

$$\langle \Delta \epsilon_k \rangle = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}.$$

## § 102. Закон Ома

Можна вважати, що після чергового зіткнення електрона з іоном кристалічної ґратки швидкість впорядкованого руху електрона дорівнює нулю. В кінці вільного пробігу електрона перед наступним зіткненням з іоном швидкість впорядкованого руху під дією електричного поля сягає максимального значення  $u_{\max}$ . Рух електрона між співударами є прискореним з прискоренням

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m},$$

де  $E$  – напруженість електричного поля,  $e$  – заряд електрона,  $m$  – маса електрона.

Максимальна швидкість впорядкованого руху електрона

$$u_{\max} = a \tau,$$

де  $\tau$  – середній час між двома послідовними співударами електрона з іонами кристалічної ґратки

$$\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{v},$$

де  $\langle \lambda \rangle$  – середня довжина вільного пробігу електрона,  $v$  – швидкість теплового руху електрона. В результаті отримуємо

$$u_{\max} = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{mv}.$$

Швидкість впорядкованого руху електрона  $u$  змінюється під час вільного пробігу лінійно. Тому її середнє значення

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{eE \langle \lambda \rangle}{2mv}. \quad (22.1)$$

Густина електричного струму

$$j = n e \langle u \rangle. \quad (22.2)$$

Підставляючи (22.1) в (22.2) отримуємо

$$j = \sigma E, \quad (22.3)$$

де електропровідність  $\sigma$  визначається формулою

$$\sigma = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m\nu}.$$

Формула (22.3) і є законом Ома в диференціальній формі.

Якщо б електрони провідності не стикалися з іонами кристалічної ґратки, то довжина вільного пробігу електронів,  $\lambda$  і, відповідно, електропровідність  $\sigma$  були б нескінченно великі, а питомий опір  $\rho = 1/\sigma$  дорівнював би нулю. Таким чином електричний опір обумовлений зіткненнями електронів провідності з іонами кристалічної ґратки.

### § 103. Закон Джоуля-Ленца

В кінці вільного пробігу електрон провідності набуває додаткову кінетичну енергію

$$\Delta\epsilon_k = \frac{m u_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \lambda^2}{2m\nu^2} E^2.$$

Зіткнувшись з іоном, електрон повністю передає цю енергію кристалічній ґратці. Ця енергія йде на збільшення внутрішньої енергії металу, і метал нагрівається.

Кожний електрон за  $l$  с має в середньому кількість співударів з іонами

$$\frac{l}{\tau} = \frac{\nu}{\tau}.$$

В одиниці об'єму за  $l$  с виділяється кількість теплоти

$$w = n \frac{\nu}{\lambda} \Delta\epsilon_k = \frac{ne^2 \lambda}{2m\nu} E^2. \quad (22.4)$$

Формулу (22.4) можна записати у такій формі:

$$w = \sigma E^2. \quad (22.5)$$

Формула (22.5) є законом Джоуля-Ленца. Таким чином нагрівання металевого провідника при протіканні електричного струму обумовлено тим, що електрони провідності отримують під дією електричного поля додаткову кінетичну енергію і при зіткненні електрона з іоном передають її кристалічній ґратці металу. В результаті встановлюється теплова рівновага між електронним газом і кристалічною ґраткою металу.

## Розділ 6. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

### Тема 23. Гармонічні коливання

#### § 104. Коливальний рух

Коливаннями називаються періодичні процеси, при яких коливальна система по чергові з різних боків проходить так званий стан рівноваги.

В залежності від фізичної природи розрізняють коливання механічні, електромагнітні, електромеханічні, та інші.

Коливання широко розповсюджені у природі і техніці. В багатьох випадках вони відіграють негативну роль (коливання моста, корпусу корабля, крил літака). В інших випадках вони лежать в основі різних областей техніки – так уся радіотехніка базується на електромагнітних коливаннях.

У залежності від характеру зовнішнього впливу розрізняють:

1. Вільні коливання – це коливання, які здійснюються у системі, яка виведена з стану рівноваги і надана сама собі.

2. Вимушені коливання – це коливання, що відбуваються під дією зовнішньої періодичної у часі сили.

3. Автоколивання – вони, як і вимушені, здійснюються під дією зовнішньої сили, однак миті часу, коли відбувається ця дія, задаються самою коливальною системою.

4. Параметричні коливання – при цьому за рахунок зовнішньої дії чиниться періодична зміна якось одного параметра системи.

#### § 105. Гармонічні коливання

Найпростішими силами є гармонічні коливання, при яких коливальна величина змінюється за часом по закону синуса або косінуса

$$\xi = \xi_m \cos (\omega t + \alpha),$$

де  $\xi$  – поточне значення коливальної величини;

$\omega t + \alpha$  – фаза коливання;

$\alpha$  – початкова фаза;

$\omega = 2\pi\nu$  – циклічна частота коливання;

$\nu = 1/T$  – частота коливання;

$T$  – період коливань;

У ролі величини  $\xi$  можуть виступати

$$\xi = \{x, \varphi, q, U_c, I, E, H\},$$

де  $x$  – зміщення тіла від положення рівноваги (див. рис. 23.1, а);

$\varphi$  – кут відхилення (див. рис. 23.1, б);

$U_c$  – напруга на конденсаторі;

$I$  – сила струму,

$E$  – напруженість електричного поля конденсатора  $C$ ,  
 $H$  – напруженість магнітного поля котушки  $L$  у коливальному контурі  
(див. рис. 23.1, в).

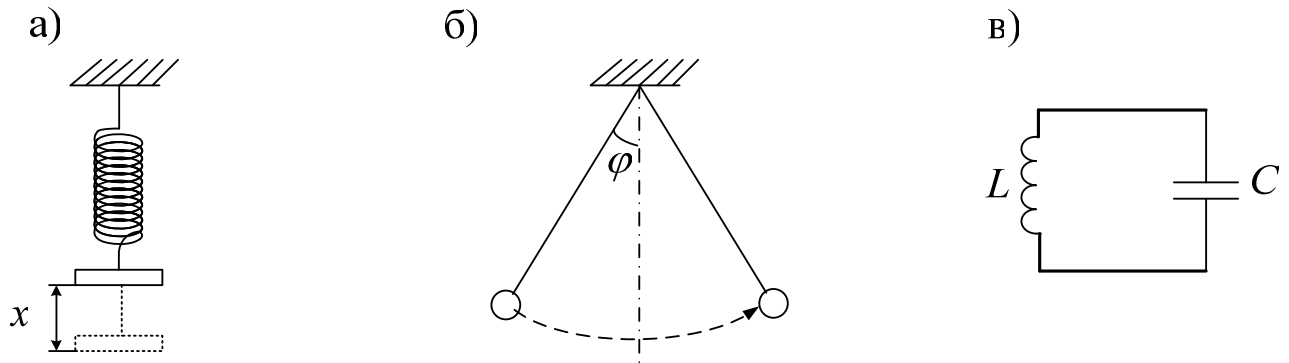


Рис. 23.1

Будь-який періодичний у часі процес можна розкласти у послідовність гармонічних коливань. У цьому полягає особлива цінність гармонічних коливань.

### § 106. Вільні механічні гармонічні коливання

Система, у якій діє сила

$$F = -kx, \quad (23.1)$$

називається коливальною системою. Сила, яка пропорційна зміщенню  $x$  тіла від стану рівноваги і весь час напрямлена до положення рівноваги (знак мінус формулі (23.1)) називається квазіпружною силою,  $k$  – жорсткість.

Рівняння руху тіла під дією квазіпружної сили

$$m\ddot{x} = -kx,$$

де дві крапки означають другу похідну за часом, або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (23.2)$$

де  $\omega_0^2 = k/m$ .

Розв'язок рівняння (23.2) записується у вигляді:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (23.3)$$

де  $a$  – амплітуда коливань.

З формули (23.3) бачимо, що  $\omega_0$  – кутова частота вільних коливань. Період вільних коливань

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

тобто частота і період вільних коливань визначаються масою тіла і жорсткістю системи.

### § 107. Вільні електромагнітні коливання

Такі коливання спостерігаються у коливальному контурі, який складається з конденсатора  $C$  і котушки індуктивності  $L$ .

Припустимо, що в момент часу  $t = 0$  конденсатор повністю заряджений (див. рис. 145, а). Одразу розпочинається розряд конденсатора і у контурі виникає струм розряду, який утворює у котушці магнітне поле  $H$ . Енергія електричного поля конденсатора

$$W_c = \frac{q^2}{2C}$$

і енергія магнітного поля котушки

$$W_M = \frac{Li^2}{2}$$

у сумі складають повну енергію коливального контура

$$W = W_c + W_M.$$

Оскільки активний опір відсутній, то відсутні витрати енергії, тому повна енергія контуру є сталою величиною. Через чверть періоду (див. рис. 23.2, б), коли заряд на конденсаторі  $q = 0$ , струм у контурі досягає максимального значення.

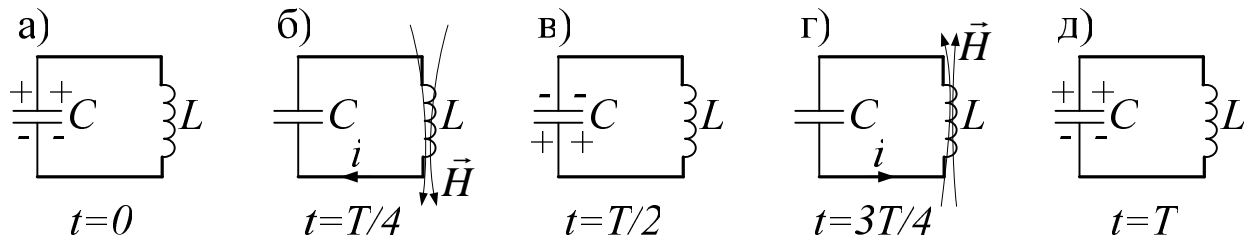


Рис. 23.2

При зменшенні струму в контурі виникає струм самоіндукції, який підтримує його і перезаряджає конденсатор. Через півперіод струм у контурі дорівнює нулю, а заряд на конденсаторі досягає максимального значення (див. рис. 23.2, в). Далі все повторюється у зворотньому напрямку (див. рис. 23.2, г, д).

За час коливань зовнішню напругу до конденсатора не прикладено, тому

$$U_L + U_C = 0, \quad (23.4)$$

де  $U_L = L di/dt$  – напруга на котушці;  $U_C = q/C$  – напруга на конденсаторі. Підставляючи  $U_L$  і  $U_C$  у (23.4) отримуємо рівняння

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (23.5)$$

Введемо позначення

$$i = \frac{dq}{dt} = q'; \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = q''.$$

Тоді формула (23.5) набуває вигляду



$$q'' + \frac{1}{LC} q = 0,$$

або

$$q'' + \omega_0^2 q = 0, \quad (23.6)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

Розв'язок рівняння (23.6) має вигляд:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

тобто заряд на конденсаторі здійснює гармонічні коливання. Аналогічно гармонічні коливання здійснює напруга  $U_c = q/C$  на конденсаторі і струм  $i = dq/dt$  у коливальному контурі.

Період вільних електромагнітних коливань у коливальному контурі

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC},$$

тобто період і частота вільних коливань визначаються електроємністю конденсатора і індуктивністю котушки.

### § 108. Згасаючі механічні коливання

У будь-якій реальній системі діють сили опору

$$F_0 = -r \dot{x} = -r \dot{x}.$$

Тоді рівняння руху коливальної системи набирає вигляду

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (23.7)$$

Рівняння (23.7) можна перетворити до вигляду

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (23.8)$$

де

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Розв'язок рівняння (23.8)

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

де

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (23.9)$$

– частота згасаючих коливань,  $\omega_0$  – частота вільних коливань;  $\beta$  – коефіцієнт згасання;  $a_0$  – початкова амплітуда.

Графік згасаючих коливань наведено на рис 23.3. Як видно з формули (23.9), частота згасаючих коливань завжди менше за частоту вільних коливань. Тобто силу опору у коливальній системі проводять не тільки до згасання коливань, але і до зменшення частоти коливань.

Умова існування згасаючих коливань

$$\omega_0^2 > \beta^2.$$

При  $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$  період  $T = \infty$ , і коливання припиняються.

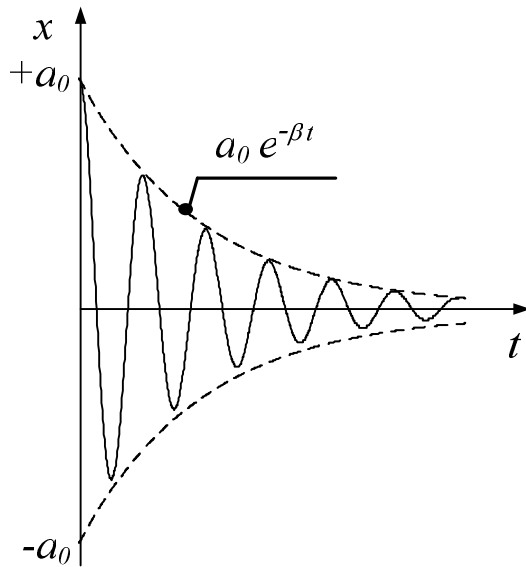


Рис. 23.3

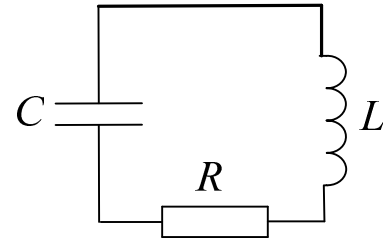


Рис. 23.4

### § 109. Згасаючі електричні коливання

Вони виникають у контурі з резистором (активним опором)  $R$  (див. рис. 23.4). Енергія, яку накопичено в контурі, поступово витрачається на нагрівання резистора в результаті чого коливання згасають.

Оскільки джерело струму в контурі відсутнє, то з другого правила Кірхгофа

$$U_L + U_R + U_C = 0. \quad (23.10)$$

Розписуючи напругу на кожному елементі, формулу (23.10) приводимо до вигляду:

$$L \frac{di}{dt} + R I + \frac{q}{c} = 0. \quad (23.11)$$

Введемо  $I = \frac{dq}{dt} = q'$ ,  $\frac{d^2 q}{dt^2} = q''$ , тоді вираз (23.11) перепишеться у вигляді

$$q'' + \frac{R}{L} q' + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Вводячи  $2\beta = \frac{R}{L}$  і  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , отримуємо кінцевий вигляд рівняння для заряду на конденсаторі

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0. \quad (23.12)$$

Розв'язок рівняння (23.12) має вигляд

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

де частота згасаючих коливань у контурі визначається формулою

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

При  $\beta^2 > \omega_0^2$  замість коливань відбувається аперіодичний розряд конденсатора.

При  $\beta^2 = \omega_0^2$  – критичний випадок, коли коливання зникають. З цієї умови визначаємо критичний опір

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При  $R < R_{кр}$  згасаючі коливання існують у контурі, а при  $R > R_{кр}$  – аперіодичний розряд конденсатора.

## § 110. Вимушені коливання

Вимушені коливання виникають під дією зовнішньої періодичної у часі сили:

$$F = F_0 \cos \omega t.$$

Тоді рівняння руху тіла, що коливається

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Або

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (23.13)$$

де  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{r}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}.$

Рівняння (23.13) – це неоднорідне диференціальне рівняння. Його розв'язок – сума двох доданків:

$$x = x_1 + x_2.$$

де  $x_1$  – загальний розв'язок однорідного рівняння (тобто, коли права частина (23.13) дорівнює нулю);  $x_2$  – часткове рішення неоднорідне рівняння (23.13).

Розв'язок  $x_1$  ми отримали в попередньому розділі

$$x_1 = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Через деякий час  $x_1$  стає нульовим, і розв'язок для стаціонарних вимушених коливань має вигляд:

$$x = x_2 = a \cos (\omega t + \varphi),$$

Таким чином, вимушені коливання є гармонічними коливаннями з частотою, яка дорівнює частоті зовнішньої періодичної сили.

Амплітуда вимушених коливань

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (23.14)$$

При деякій частоті амплітуда досягає максимального значення – це явище має назву резонансу (див. рис. 23.5). Для визначення резонансної частоти першу похідну по  $\omega$  від підкорінного виразу у (23.14) потрібно прирівняти до нуля

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Звідси

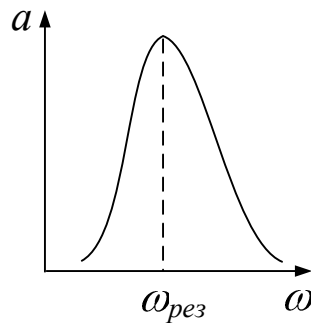


Рис. 23.5

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Резонансна амплітуда при цьому

$$a_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

При  $2\beta^2 > \omega_0^2$  резонанс не спостерігається.

## Тема 24. Хвилі

### § 111. Хвилі і їх характеристики

Процес розповсюдження коливань у просторі називаються хвилею. Частинки середовища, в якому розповсюджується хвиля, не переносяться, а лише коливаються навколо своїх положень рівноваги. Хвилі переносять енергію, не переносячи речовину.

Хвилі мають, звичайно, той же період зміни у часі  $T$ , що і джерело хвиль. Напрямок перенесення енергії хвилі називається променем. Поверхня, куди дійшла хвиля, називається хвильовим фронтом. Промінь завжди перпендикулярний до хвильового фронту.

Хвилі підрозділяються на поперечні і поздовжні. У поперечних хвиль напрямок коливань частинок середовища перпендикулярний напрямку хвилі (див. рис. 24.1, а), у поздовжніх хвилях частинки середовища коливаються вздовж напрямку хвилі (див. рис. 24.1, б).

Поперечні хвилі можуть виникати лише у середовищі, яке має опір зсуву. Тому в рідинах та газах можуть виникати тільки поздовжні хвилі (за одним винятком – поперечні хвилі на поверхні рідини). У твердому тілі можливе виникнення як поздовжніх, так і поперечних хвиль.

Різні частинки у хвилі коливаються із зміщенням за фазою. Частинки, відстань між якими дорівнює  $vT$ , де  $v$  – швидкість поширення хвилі,  $T$  – період коливань, коливаються у однакових фазах. Ця відстань називається довжиною хвилі

$$\lambda = vT. \quad (24.1)$$

Вводячи частоту коливань  $\nu = \frac{1}{T}$ , формулу (24.1) можна переписати у вигляді

$$\lambda \nu = v.$$

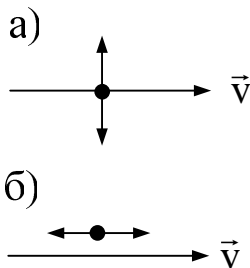


Рис. 24.1

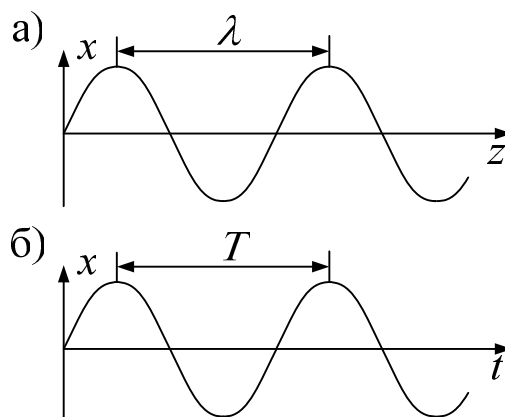


Рис. 24.2

Таким чином хвиля – це, так би мовити, двічі періодичний процес: він “періодичний” у просторі з “періодом”  $\lambda$  і періодичний у часі з періодом  $T$ . Ця ситуація зображена на рис. 24.2, де  $x$  – зміщення точок, що коливаються

навколо положення рівноваги,  $z$  – координата поширення коливань. Тому говорять, що довжина хвилі  $\lambda$  – просторовий період коливань у хвилі, а  $T$  – часовий період коливань.

Поверхня, точки якої коливаються в однакових фазах, називається хвильовою поверхнею. За виглядом хвильової поверхні хвилі розділяються на плоскі, циліндричні і сферичні (див. рис. 24.3).

Стрілочками на рис. 24.3 показані промені. Плоскі хвилі породжуються плоскими джерелами коливань, циліндричні – лінійними, сферичні – точковими джерелами.

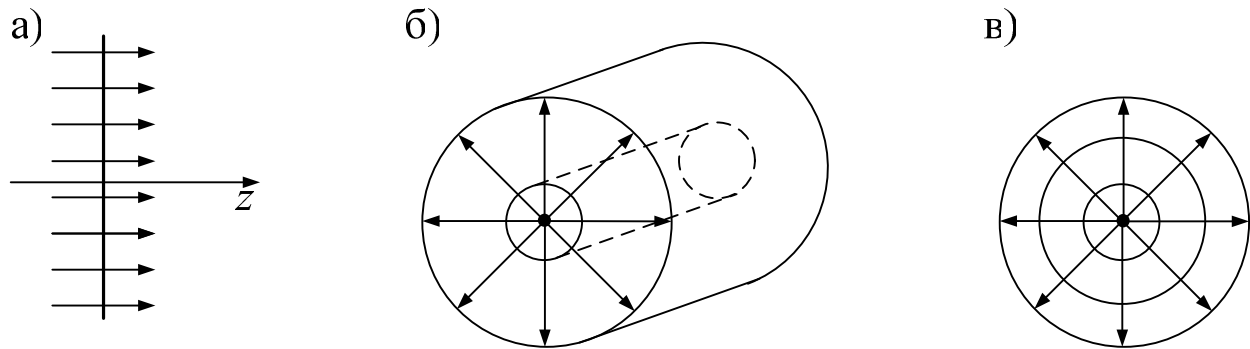


Рис. 24.3

## § 112. Рівняння плоскої хвилі

Припустимо, що у площині  $z = 0$  збуджені коливання (див. рис. 24.4)

$$x(0, t) = a \cos \omega t.$$

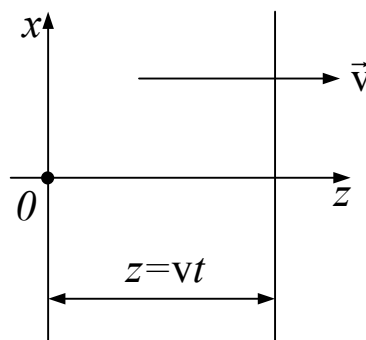


Рис. 24.4

Коливання поширюються вздовж осі  $z$  з швидкістю  $v$ . Тоді у точці  $z \neq 0$  коливання відстають від коливань при  $t = 0$  на час  $z/v$

$$x(z, t) = a \cos \omega(t - z/v). \quad (24.2)$$

Зафіксуємо у формулі (24.2) якесь значення фази

$$\omega(t - z/v) = \text{const}$$

і продиференціюємо за часом:

$$dt - \frac{1}{v} dz = 0.$$

Звідси отримуємо, що швидкість:

$$v = \frac{dz}{dt}.$$

Це швидкість руху фази хвилі у просторі, і тому її називають фазовою швидкістю.

Формулу (24.2) остаточно перепишемо у вигляді:

$$x(z, t) = a \cos(\omega t \pm k z), \quad (24.3)$$

де  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число. Формулу (24.3) називають рівнянням плоскої хвилі. Знак мінус у формулі (24.3) береться, коли хвиля поширюється вздовж осі  $z$ , знак плюс – у протилежний бік

### § 113. Хвильове рівняння

Рівняння плоскої хвилі є розв'язком деякого диференціального рівняння, яке має назву хвильового. Обчислимо від цього розв'язку другу похідну за часом і координатою

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} x,$$

звідки видно, що  $x$  є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (24.4)$$

Диференційне рівняння (24.4) у частинних похідних другого порядку і є хвильовим рівнянням. Усяка функція, яка задовольняє рівнянню (24.4), описує деяку хвилю.

### § 114. Електромагнітні хвилі

Змінне електричне поле породжує змінне магнітне, яке в свою чергу породжує електричне поле. Таким чином, у просторі виникає послідовність взаємних перетворень електричного і магнітного полів, які поширюються від точки до точки. Цей процес періодичний у просторі й часі і являє собою електромагнітну хвилю.

Висновок про можливість існування електромагнітних хвиль впливає з рівнянь електромагнітного поля.

Розглянемо плоску електромагнітну хвилю, яка поширюється вздовж осі  $z$ . З рівняння електромагнітного поля випливають рівняння для  $E_y$  і  $H_x$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \quad (24.5)$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2}, \quad (24.6)$$

де  $E_y$  і  $H_x$  компоненти напруженостей електричного і магнітного полів.

Рівняння (24.5) і (24.6) – це хвильові рівняння, їх розв’язок описує плоску електромагнітну хвилю

$$E_y = E_m \cos(\omega t - k z + \alpha); \quad (24.7)$$

$$H_x = H_m \cos(\omega t - k z + \alpha). \quad (24.8)$$

Таким чином, в електромагнітній хвилі коливаються вектори напруженості електричного і магнітного полів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ .

У плоскій електромагнітній хвилі коливання векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  відбуваються у площині, перпендикулярній до напрямку хвилі, тому плоска електромагнітна хвиля є хвиля поперечна. Крім того, як це видно з формул (24.7) і (24.8), коливання векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  в електромагнітній хвилі відбувається з однаковою фазою і в перпендикулярних площинах. Вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  електромагнітної хвилі утворюють з напрямом поширення правогвинтову систему. На рис. 24.5 наведено миттєву “фотографію” плоскої електромагнітної хвилі у довільну мить часу.

Швидкість електромагнітних хвиль визначається формулою

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}.$$

У вакуумі  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ , і швидкість

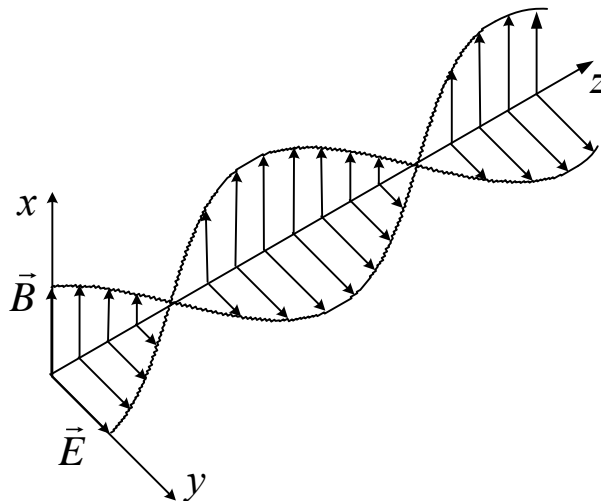


Рис. 24.5

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

тобто збігається з швидкістю світла. Базуючись на цьому висновку, творець електромагнітної теорії Максвелл припустив, що світлові хвилі мають електромагнітну природу.



## Розділ 7. ОПТИКА

### Тема 25. Хвильова оптика

#### § 115. Світло і його природа

Оптика вивчає поширення світла і його взаємодію з речовиною. Основне поняття оптики – світло.

Світло має складну, подвійну природу. З одного боку світло – це електромагнітні хвилі, з іншого – потік світлових частинок ("корпускул"), а точніше квантів, які отримали назву фотонів. Ця подвійність світла називається корпускулярно-хвильовим дуалізмом (точніше – квантово-хвильовим).

Оптику умовно підрозділяють на 3 розділи:

1) Геометрична оптика – це розділ, який нехтує довжиною світлової хвилі. Довжина світлової хвилі дуже мала величина  $\sim 10^{-7}$  м. У граничному випадку, коли  $\lambda \rightarrow 0$ , закони оптики можна сформулювати на мові геометрії. Світло поширюється вздовж деяких ліній, що називаються променями.

2) Хвильова оптика – охоплює коло оптичних явищ, в основі яких лежить хвильова природа світла (це явища інтерференції, дифракції).

3) Квантова оптика – охоплює коло оптичних явищ, що обумовлені квантовою природою світла (теплове випромінювання, фотоефект, Комптон ефект, гальмівне рентгенівське випромінювання та інші).

#### § 116. Світлова хвиля

Світлова хвиля – це електромагнітна хвиля. Фотофізіологічна, фотохімічна та фотоелектрична дія світла обумовлені електричною компонентою  $\vec{E}$  світлової хвилі. Тому вектор напруженості  $\vec{E}$  електричного поля світлової хвилі називається світловим вектором. Тоді рівняння світлової хвилі, яка поширюється вздовж осі  $x$ , має вигляд

$$a = A \cos (\omega t - kx + \alpha),$$

де  $a$  – поточна значення світлового вектора,  $A$  – амплітуда світлового вектора;  $\omega = 2\pi\nu$  – циклічна частота;  $\nu = 1/T$  – частота,  $T$  – період коливань;  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$  – хвильове число;  $v$  – швидкість світлової хвилі;  $\lambda = v T$  – довжина світлової хвилі.

При переході через межу поділу двох середовищ довжина хвилі змінюється, а частота залишається незмінною.

Довжина світлової хвилі у вакуумі

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu},$$

де  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла у вакуумі.

Довжина світлової хвилі у середовищі

$$\lambda = \frac{v}{\nu},$$

де  $v$  – швидкість світла у середовищі.

Згадаємо відому зі шкільного курсу фізики велечину – абсолютний показник заломлення

$$n = \frac{c}{v}.$$

Тоді довжина світлової хвилі в речовині

$$\lambda = \frac{c}{n \nu} = \frac{\lambda_0}{n},$$

де  $\lambda_0$  – довжина світлової хвилі у вакуумі.

Видиме світло – це сукупність світлових хвиль, довжини яких знаходяться в діапазоні

$$\Delta\lambda = (0,40 \div 0,76) \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

в діапазоні частот це

$$\Delta\nu = (0,39 \div 0,75) \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Око людини не встигає за такою частотою та реагує тільки на середній за часом потік енергії. Середня за часом густина потоку енергії, що переноситься світловою хвилею, називається інтенсивністю світла

$$I = \langle E H \rangle = n A^2.$$

## Тема 26. Інтерференція світла

### § 117. Поняття про інтерференцію світла

Розглянемо накладання двох світлових хвиль однакового напрямку коливань світлового вектора і однакової частоти  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  (див. рис. 26.1). В точці  $P$  хвилі породжують коливання

$$a_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1),$$

$$a_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2),$$

сума яких є результуючим коливанням

$$a = A \cos(\omega t + \alpha).$$

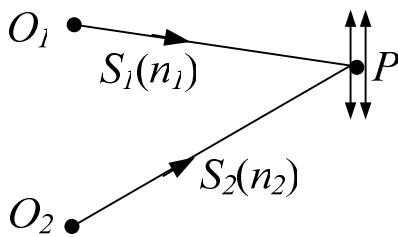


Рис. 26.1

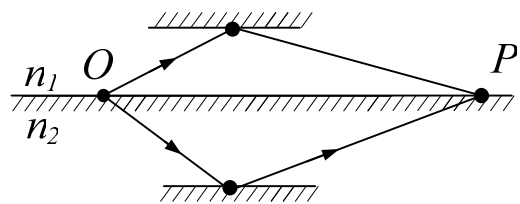


Рис. 26.2

Амплітуда  $A$  результуючого коливання визначається за формулою

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

а його інтенсивність –

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Якщо різниця фаз двох хвиль у часі змінюється, то хвилі називаються некогерентними, оскільки середнє значення  $\langle \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \rangle = 0$ , то інтенсивність результуючого коливання

$$I = I_1 + I_2. \quad (26.1)$$

Формула (26.1) визначає закон додавання некогерентних хвиль.

Якщо різниця фаз  $\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const}$ , то хвилі називаються когерентними. Для когерентних хвиль у точках, де

$$1) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) > 0, \quad I > I_1 + I_2 - \text{підсилення світла};$$

$$2) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) < 0, \quad I < I_1 + I_2 - \text{послаблення світла}.$$

Тобто при додаванні когерентних хвиль інтенсивність результуючого коливання може бути як більшою, так і меншою за суму інтенсивності хвиль, які додаються.

Таким чином, при додаванні когерентних хвиль в одних точках простору світло підсилюється, а в інших – послаблюється. Це явище і називається інтерференцією світла. При цьому у просторі виникає чергування максимумів і мінімумів інтенсивності (інтерференційна картина).

Максимуми інтенсивності виникають у точках простору, де

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 1,$$

при цьому

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2.$$

Якщо  $I_1 = I_2$ , то  $I_{\max} = 4 I_1$ .

Мінімуми інтенсивності виникають у точках простору, де  $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = -1$ , при цьому

$$I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2.$$

Якщо  $I_1 = I_2$ , то  $I_{\min} = 0$ .

Таким чином, при додаванні двох когерентних хвиль однакових інтенсивностей у точках простору, де хвилі накладаються в однаковій фазі, виникають максимуми, інтенсивність яких у чотири рази більша інтенсивності хвилі, а там, де хвилі накладаються у протифазі, виникають мінімуми, інтенсивність яких дорівнює нулю.

### § 118. Умови утворення інтерференційних максимумів і мінімумів

Для спостереження інтерференції потрібні когерентні джерела світла, але в природі такі джерела не існують. Когерентні джерела світла можна одержати, розділяючи хвилю, яка випромінюється джерелом, на дві частини.

Нехай, джерело світла розташоване на межі поділу двох середовищ в точці  $O$ . В точку  $P$  приходять дві хвилі, які поширюються в різних середовищах і пройшли різні геометричні шляхи  $S_1$  і  $S_2$  (див. рис. 26.2).

Коливання світлового вектора у точці  $O$

$$a = A \cos \omega t.$$

Коливання світлового вектора першої та другої хвиль у точці  $P$ :

$$a_1 = A_1 \cos \omega \left( t - \frac{S_1}{v_1} \right);$$

$$a_2 = A_2 \cos \omega \left( t - \frac{S_2}{v_2} \right),$$

де  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ,  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  – швидкість світла у 1-му і 2-му середовищах.

Різниця фаз коливань в точці  $P$

$$\delta = \omega \left( \frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 S_2 - n_1 S_1),$$

оскільки  $\omega/c = 2\pi/\lambda_0$ , де  $\lambda_0$  – довжина світлової хвилі у вакуумі.

Введемо такі величини:  $L_1 = n_1 S_1$  і  $L_2 = n_2 S_2$  – оптичні шляхи променів у 1-му і 2-му середовищах.

Тоді різниця фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L,$$

де  $\Delta L = L_2 - L_1$  – оптична різниця ходу променів.

Якщо

$$\Delta L = \pm m \lambda_0,$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$ , тоді  $\delta = \pm 2\pi m$ , і коливання у точці  $P$  відбувається у одній фазі. Тому в даній точці спостерігається інтерференційний максимум.

Якщо

$$\Delta L = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0.$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$ , тоді

$$\delta = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) 2\pi = \pm (2\pi m + \pi)$$

коливання променів у точці  $P$  відбуваються у протифазі, і спостерігається інтерференційний мінімум.

Тобто, якщо для даної точки простору на оптичній різниці променів вкладається ціле число довжин хвиль, то в ній спостерігається інтерференційний максимум, а якщо – напівціле, то – мінімум.

### § 119. Дослід Юнга

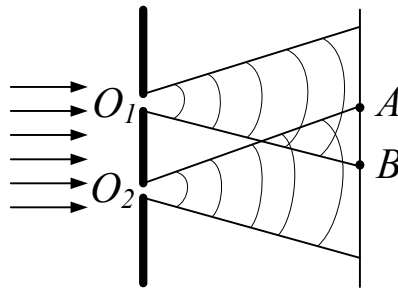


Рис. 26.3

Дві когерентні хвилі у цьому досліді з'являються за допомогою двох щілин у непрозорому екрані  $O_1$  і  $O_2$ , які являють собою два когерентних джерела світла (див. рис. 26.3). На екрані в ділянці  $AB$  когерентні хвилі накладаються, і утворюється інтерференційна картина – чергування світлих і темних смуг.

Схему досліду показано на рис. 26.4, а. Оптична різниця ходу промінів, які приходять у точку  $P$  з координатою  $x$ , дорівнює

$$\Delta L = n (s_1 - s_2). \quad (26.2)$$

З рис. 26.4, а випливає

$$s_1^2 = l^2 + \left( x - \frac{d}{2} \right)^2;$$

$$s_2^2 = l^2 + \left( x + \frac{d}{2} \right)^2.$$

Тоді

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 2 x d . \quad (26.3)$$

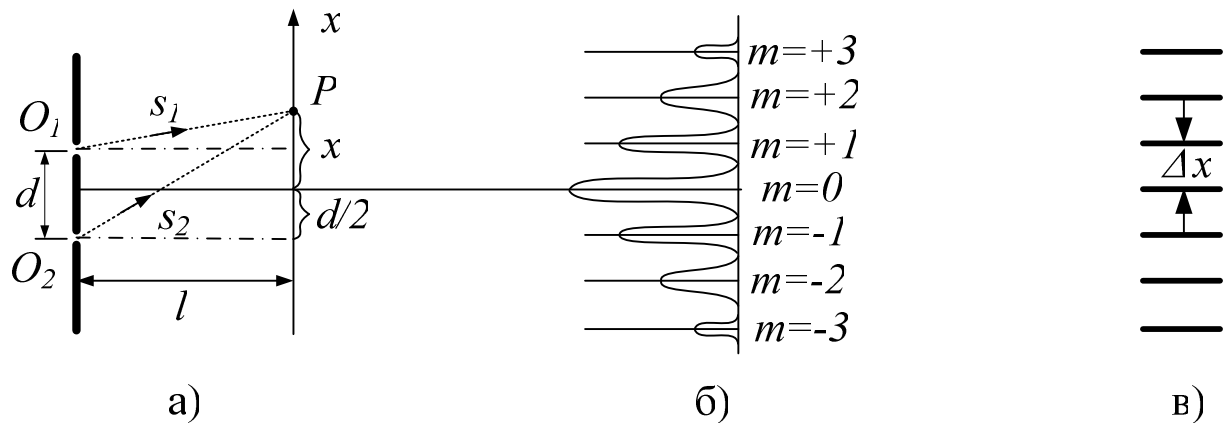


Рис. 26.4

Чітка інтерференційна картина спостерігається при  $x \ll l$  і  $d \ll l$ , де  $x$  – координатна точка спостереження,  $d$  – відстань між щілинами,  $l$  – відстань від щілин до екрану. За цих умов  $s_1 + s_2 \approx l$  і з формули (26.3) виливає, що

$$s_2 - s_1 = \frac{xd}{l} .$$

Підставляючи цей результат в (26.2), отримуємо формулу оптичної різниці ходу променів

$$\Delta L = n \frac{xd}{l} ,$$

де  $n$  – оптичний показник заломлення середовища.

Якщо  $\Delta L = \pm m \lambda_0$ , де  $m = 0, 1, 2, \dots$ , а  $\lambda_0$  – довжина світлової хвилі у вакуумі, то в цих точках спостерігаються інтерференційні максимуми. Координати максимумів

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda , \quad (26.4)$$

де  $\lambda = \lambda_0/n$  – довжина світлової хвилі у середовищі.

В точках простору, для яких  $\Delta L = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0$ , спостерігаються інтерференційні мінімуми, координати мінімумів

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda . \quad (26.5)$$

У формулах (26.4), (26.5) величини  $m$  називаються порядком відповідного максимуму або мінімуму.

Позначимо  $\Delta x$  відстань між двома сусідніми максимумами або мінімумами (див. рис. 26.4, б, в). Як видно з формули (26.4) і (26.5)

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda. \quad (26.6)$$

Формула (26.6) (формула Юнга) була використана Юнгом для визначення довжини світлових хвиль різних кольорів. Величини  $l$ ,  $d$  і  $\Delta x$  легко піддаються вимірюванню, і з формули (26.6) визначається  $\lambda$ .

У білому світлі інтерференційна картина змазується, оскільки максимуми для різних довжин хвиль зсунуті один відносно одного (див. формулу (26.4)).

## § 120. Інтерференція в тонких плівках

Розглянемо випадок нормального падіння пучка променів на тонку плівку товщиною  $d$  (див. рис. 26.5). Відбитих променів буде два – від верхньої і нижньої межі плівки. На рис. 26.5 вони схематично зміщені у різні боки, щоб було зрозуміло, від якої межі плівки вони відбиті.

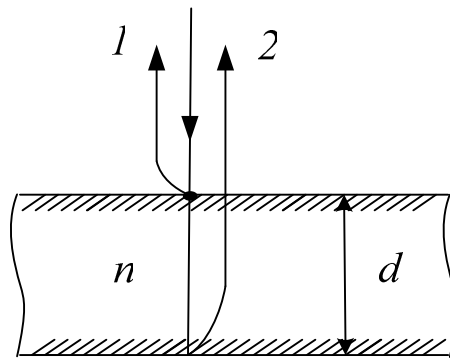


Рис. 26.5

Оптична різниця ходу відбитих променів

$$\Delta L = 2nd \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (26.7)$$

де  $n$  – абсолютний показник заломлення плівки.

При відбиванні від оптично більш густого середовища фаза відбитого променя змінюється на  $\pi$ , а оптичний шлях на  $\lambda_0/2$ . Тому у формулі (26.7) з'являється член  $\pm \lambda_0/2$ , це – внесок відбитого променя 1. Промінь 2 відбивається без зміни фази. Якщо

$$\Delta L = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0, \quad (26.8)$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то відбувається послаблення відбитого світла. Підставляючи (26.7) у (26.8), маємо формулу для визначення товщини плівки, при якій спостерігається послаблення відбитого світла

$$d = m \frac{\lambda_0}{2n} = m \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі у плівці. Мінімальна товщина плівки при  $m = 1$ , тоді

$$d = \frac{\lambda}{2}.$$

Таким чином, "напівхвильова" плівка послабляє відбите світло, при цьому спостерігається мінімум інтенсивності відбитого світла.

Якщо

$$L = m\lambda_0, \quad (26.9)$$

то відбувається підсилення відбитого світла. Підставляючи (26.7) у (26.9) маємо формулу для обчислення товщини плівки, при якій відбувається підсилення відбитого світла:

$$2nd - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0.$$

Звідси

$$d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2},$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$

Мінімальна товщина плівки при  $m = 0$ . Тоді

$$d = \frac{\lambda}{4}.$$

Тобто "чвертьхвильова" плівка підсилює відбите світло, при цьому, спостерігається максимальна інтенсивність відбитого світла на даній довжині хвилі.

Інтерференційні ефекти в тонких плівках використовуються для просвітлення оптики, тобто для усунення відбитого світла.

При проходженні світла через оптичну систему на кожній межі поділу повітря-скло втрачається 4% падаючого світлового потоку на відбиття і при цьому у оптичній системі виникають бліки. Щоб уникнути відбиття світла, поверхні лінз покривають тонкими прозорими плівками. При цьому виникають вже два відбитих променя, вони когерентні і інтерферують. Якщо товщина плівки

$$d = \frac{\lambda}{4},$$

то ці промені складають у протифазі  $I_{\text{відб}} = I_1 - I_2$  ;

і, якщо виконується умова

$$n_{\text{плівки}} = \sqrt{n_{\text{лінзи}}},$$

то інтенсивності цих двох відбитих променів однакові  $I_1 = I_2$ . Тобто  $I_{\text{відб}} = 0$ .

Таким чином, два відбитих промені повністю компенсують один одного, і відбиття світла від поверхні лінзи відсутнє. Це оптичне явище і має назву просвітлення оптики.



## Тема 27. Дифракція світла

### §121. Дифракція

Огинання хвилями перешкод або неоднорідностей називається дифракцією хвиль. Виникнення дифракції можна пояснити за допомогою принципу Гюйгенса: кожна точка хвильового фронту є джерелом вторинних сферичних хвиль, огинання яких дає положення хвильового фронту у наступний момент часу (див. рис. 27.1, а).

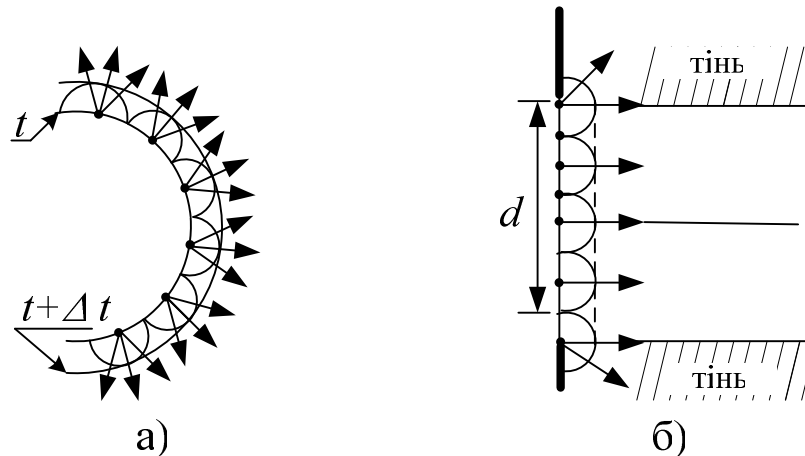


Рис. 27.1

Принцип Гюйгенса дозволяє якісно пояснити явище дифракції. Покажемо це на прикладі дифракції на отворі (див. рис. 27.1, б). Завдяки принципу Гюйгенса поблизу межі світло-тінь хвильовий фронт викривляється, в результаті чого після проходження отвору частина світлових променів поширюється під кутом  $\varphi$  до початкового напрямку. Отже, проходження через отвори або огинання перешкод призводить до відхилення поширення світла від прямолінійного. Це явище називається дифракцією світла, а кут  $\varphi$  – кутом дифракції.

Дифракція світла призводить до проникнення світла в ділянку геометричної тіні і утворення дифракційної картини, яка являє собою чергування світлих і темних ділянок.

Дифракція значно залежить від співвідношення розмірів перешкоди  $d$  і довжини хвилі  $\lambda$ . При розмірі перешкоди  $d \gg \lambda$  дифракція практично непомітна. Дифракція виразно спостерігається при  $d \approx \lambda$ .

Розділяють два види дифракції:

1. Дифракція в паралельних променях (дифракція Фраунгофера). Вона спостерігається, коли відстань від джерела світла  $a$  до перешкоди, на якій відбувається дифракція, і відстань  $b$  до точки спостереження  $P$  задовольняють умові

$$a, b \gg d,$$

де  $d$  – розмір перешкоди. При цьому практично всі промені, які падають від джерела на перешкоду, і промені, які йдуть від перешкоди у точку спостереження, поширюються паралельними пучками.

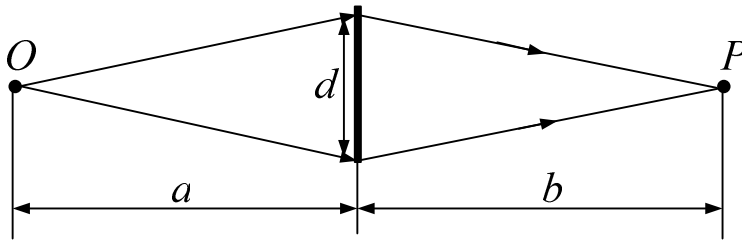


Рис. 27.2

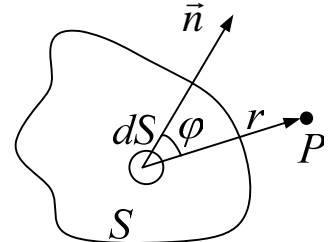


Рис. 27.3

2. Дифракція в непаралельних пучках – дифракція Френеля (див. рис. 27.2) – спостерігається при виконанні умови

$$a, b \sim d.$$

При цьому промені, які падають на перешкоду, і промені, які йдуть у точку спостереження, являють собою непаралельні пучки.

## § 122. Принцип Гюйгенса-Френеля

Френель доповнив принцип Гюйгенса уявленням про інтерференцію вторинних хвиль. Підрахунок амплітуд і фаз вторинних хвиль дозволяє знайти амплітуду результуючої хвилі у будь-якій точці простору.

Розглянемо довільну хвильову поверхню  $S$  (див. рис. 27.3). Згідно з принципом Гюйгенса, кожна точка хвильової поверхні є джерелом вторинних хвиль. Коливання світлового вектора на елементі  $dS$  хвильової поверхні

$$da = A_0 \cos(\omega t + \alpha).$$

Коливання світлового вектора у точці спостереження  $P$ , які викликані усіма вторинними хвилями, що прийшли з елемента  $dS$ , задовольняють таким вимогам:

1)  $da \sim ds$  – тобто вони пропорційні елементу  $dS$ ;

2)  $da \sim \frac{1}{r}$ , де  $r$  – відстань від елемента  $dS$  до точки  $P$ , оскільки вторинні хвилі сферичні;

3)  $da \sim k(\varphi)$ , тобто коливання є функцією кута між радіус-вектором  $\vec{r}$  точки спостереження і нормаллю  $\vec{n}$  до елемента  $dS$ . При цьому:

$$k(\varphi=0) = 1, \quad k(\varphi=\pi/2) = 0.$$

В результаті внесок елемента хвильової поверхні  $dS$  у коливання в точці  $P$  визначиться формулою

$$da_p = k(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS,$$

де  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число.

Результуюче коливання в точці  $P$  являє собою суперпозицію вторинних хвиль, які приходять від усіх елементів хвильової поверхні  $S$  з урахуванням їх амплітуд і фаз, тобто визначається інтегралом

$$a_p = \int_S k(\varphi) \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS. \quad (27.1)$$

Таким чином, результуюче коливання дорівнює сумі (інтегралу) коливань, які приходять у точку  $P$  від усіх елементів хвильової поверхні  $S$  з урахуванням їхніх амплітуд і фаз.

Це твердження є принципом Гюйгенса-Френеля, а формула (27.1) – його математичним виразом.

### § 123. Зони Френеля

Використаємо принцип Гюйгенса-Френеля для того, щоб знайти амплітуду світлового коливання, яке збуджується у точці  $P$  сферичною хвилею, що поширюється з точкового джерела  $S$  (див. рис. 27.4).

Френель подумки розбив хвильову поверхню на кільцеві зони таких розмірів, щоб відстані від меж двох сусідніх зон відрізнялись на  $\lambda/2$ , тобто

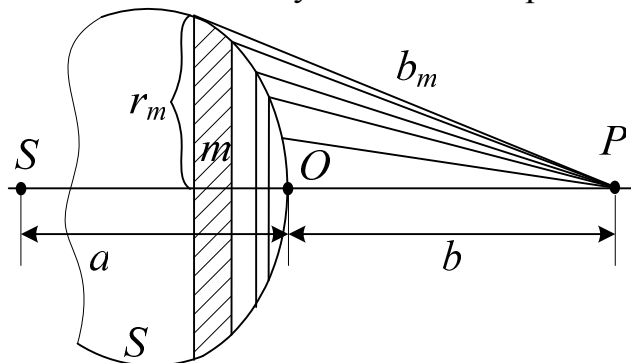


Рис. 27.4

$$b_m = b + m \frac{\lambda}{2}, \quad (m=1,2,3\dots)$$

де  $b$  – відстань від вершини  $O$  хвильової поверхні  $S$  до точки  $P$ ,  $b_m$  – відстань від зовнішньої межі  $m$ -ої зони до точки  $P$ .

Тоді результуючі коливання, які приходять у точку спостереження  $P$  від двох сусідніх зон, будуть знаходитись у протифазі (тобто будуть відрізнятися за фазою на  $\pi$ ).

Площі зон  $S_m$  для досить малих  $m$  не залежать від номера зони (тобто  $S_m = \text{const}$ ), а радіуси зовнішньої межі

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda},$$

де  $a$  – відстань від джерела до вершини хвильової поверхні.

Тоді амплітуди  $A_m$  коливань, які збуджуються  $m$ -ою зоною у точці  $P$ , будуть монотонно зменшуватися зі збільшенням її номера, тобто

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > A_5,$$

а фази коливань для сусідніх зон відрізняються на  $\pi$ . Тому амплітуда результуючого коливання в точці  $P$ , яке утворене всією хвильовою поверхнею, буде визначатися формулою

$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + \dots \quad (27.2)$$

Формулу (27.2) можна переписати у вигляді

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots,$$

Внаслідок монотонного зменшення величини

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2},$$

отримаємо такий результат

$$A_p = \frac{A_1}{2}.$$

Отже амплітуда, яка утворена у точці  $P$  сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, що утворена першою ( $m=1$ ) зоною Френеля.

Таким чином, для того щоб обчислити амплітуду коливань у точці  $P$ , не потрібно обчислювати інтеграл Гюйгенса-Френеля по всій хвильовій поверхні, достатньо його обчислити тільки по першій зоні Френеля. При  $a = b = 1$  м,  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м, радіус першої зони  $r_1 = 0,5$  мм.

## § 124. Дифракція Френеля на круглому отворі

Розмістимо на шляху сферичної хвилі екран з отвором радіусом  $r_0$  (див. рис. 27.5, а).

Радіус  $m$ -ої зовнішньої зони Френеля визначається за формулою

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}.$$

Звідси число зон Френеля, які відкриває отвір

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Амплітуда коливань у точці  $P$

$$A_p = A_1 - A_2 + A_1 - A_2 + \dots \pm A_m, \quad (27.3)$$

де знак плюс береться, якщо  $m$  – непарне, і знак мінус, якщо  $m$  – парне.

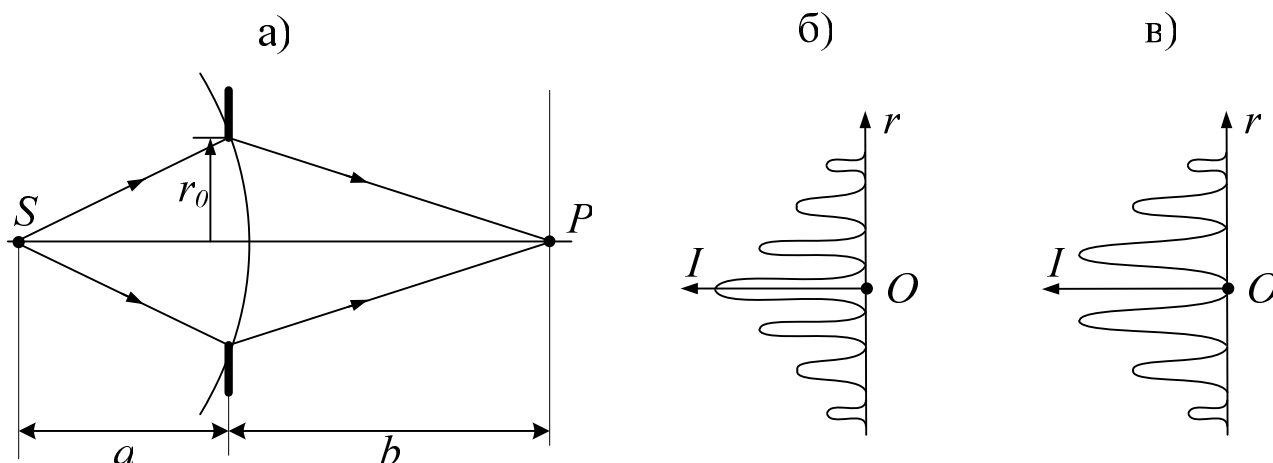


Рис. 27.5

Формулу (27.3) можна перетворити до вигляду

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots +$$

$$+ \begin{cases} \left( \frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2}, & (m - \text{непарне}) \\ \left( \frac{A_{m-3}}{2} - A_{m-2} + \frac{A_{m-1}}{2} \right) + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m, & (m - \text{парне}) \end{cases}$$

Всі вирази у дужках через монотонність спадання  $A_m$ , дорівнюють нулю, а

$$\frac{A_{m-1}}{2} - A_m = -\frac{A_m}{2}.$$

У результаті

$$A_p = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}.$$

При досить малих  $m$  виконується умова  $A_1 = A_m$  і тоді амплітуда коливань у точці  $P$

$$A_p = \begin{cases} A_1, & m - \text{непарне}; \\ 0, & m - \text{парне}. \end{cases}$$

Тобто амплітуда коливань у центрі дифракційної картини досягає максимуму, якщо отвір відкриває непарне число зон Френеля (див. рис. 27.5, б), і обертається в нуль (мінімум), якщо отвір відкриває парне число зон Френеля (див. рис. 27.5, в). У першому випадку зони попарно компенсують одна одну, але дія однієї зони залишається некомпенсованою. У другому випадку зони повністю компенсують одна одну і утворюється дифракційний мінімум.

Якщо отвір відкриває не більше однієї зони Френеля, то дифракційної картини не спостерігається, на екрані розмита світла пляма.

## § 125. Дифракція Фраунгофера на щілині

Нехай на безмежно довгу щілину падає плоска світлова хвиля (див. рис. 27.6). Щілина розсіює промені у всіх напрямках. Промені, які йдуть у одному напрямі, інтерферують між собою, і в результаті на екрані спостерігається дифракційна картина.

Розглянемо сукупність розсіяних щілиною променів, які йдуть під кутом дифракції  $\varphi$  (див. рис. 27.7).

Різниця ходу крайніх променів

$$\Delta = b \sin \alpha.$$

Якщо  $\Delta = \pm k \lambda$ , де  $k = 1, 2, 3, \dots$ , то хвильова поверхня на щілині розбивається на  $2k$  (парне) число зон Френеля, які попарно компенсують одна одну, і тому у цьому напрямку спостерігається дифракційний мінімум. Тобто дифракційні мінімуми спостерігаються під кутами дифракції, які задовольняють умові

$$b \sin \varphi_k = \pm k \lambda,$$

де  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Величина  $k$  називається порядком дифракційного мінімуму.

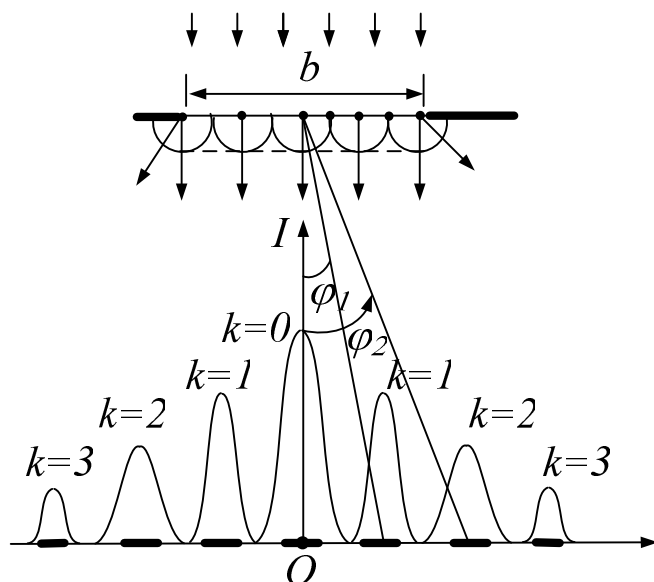


Рис. 27.6

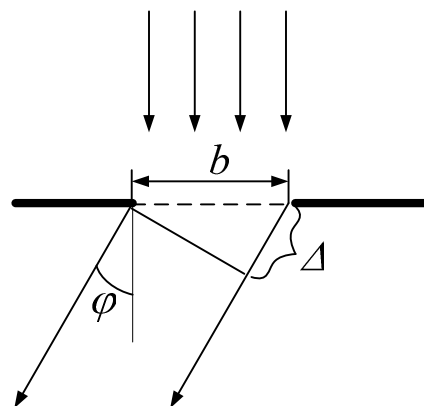


Рис. 27.7

Якщо  $\Delta = \pm \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda$ , де  $k = 1, 2, 3, \dots$ , то хвильова поверхня на щілині розбивається на  $2k + 1$  (непарне) число зон Френеля, дія однієї зони залишається некомпенсованою, і в цьому напрямку спостерігається дифракційний максимум. Таким чином, дифракційні максимуми виникають під кутами дифракції, які задовольняють умові

$$b \sin \varphi_k = \pm \left( k + \frac{1}{2} \right) \lambda,$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Величина  $k$  називається порядком дифракційного максимуму.

Під кутом  $\varphi = 0$  усі вторинні промені додаються у однаковій фазі, і під цим кутом спостерігається головний дифракційний максимум ( $k = 0$ ).

Дифракційна картина являє собою чергування світлих і темних смуг. Дифракційним максимумам відповідають світлі смуги; дифракційним мінімумам – темні смуги. Найбільшу інтенсивність має центральний ( $k = 0$ ) основний дифракційний максимум. Зі збільшенням порядку дифракційного максимуму його інтенсивність зменшується.

## § 126. Дифракційна ґратка

Періодична послідовність щілин називається дифракційною ґраткою. Коливання, які поширюються від різних щілин ґратки, когерентні і інтерферують. Амплітуда результуючого світлового вектора під кутом дифракції  $\varphi$  дорівнює

$$\vec{A}(\varphi) = \sum_{i=1}^N \vec{A}_i(\varphi),$$

де  $i$  – номер щілини,  $N$  – кількість щілин у ґратці,  $\vec{A}_i(\varphi)$  – амплітуди світлових векторів від окремих щілин. Модулі  $\vec{A}_i(\varphi)$  однакові для усіх щілин, і результат підсумовування залежить від різниці фаз для двох сусідніх щілин.

Різниця фаз між променями від двох сусідніх щілин (див. рис. 27.8) визначається формулою

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta,$$

де

$$\Delta = d \sin \varphi$$

– оптична різниця ходу променів від двох сусідніх щілин під кутом дифракції  $\varphi$ ,  $d$  – період дифракційної ґратки.

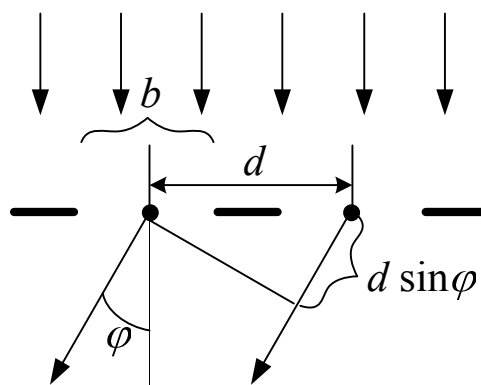


Рис. 27.8

Якщо

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda,$$

де  $m = 0, 1, 2, \dots$  то коливання від окремих щілин підсилюються, і в їх напрямках виникають головні дифракційні максимуми (див. рис. 27.9, а). Якщо

$$b \sin \varphi = \pm k \lambda,$$

де  $k = 1, 2, \dots$ ,  $b$  – ширина щілин (див. рис. 27.8), то в цих напрямках усі  $A_i = 0$  і у цих напрямках спостерігаються дифракційні мінімуми.

Дифракційну картину при дифракції монохроматичного пучка світла наведено на рис. 27.9, а. Максимальний порядок  $m$  головних максимумів знаходиться з умови  $m \leq d/\lambda$ . При дифракції монохроматичного світлового пучка виникають  $2m+1$  дифракційних пучків, амплітуди яких зменшуються з збільшенням порядку дифракційного максимуму.

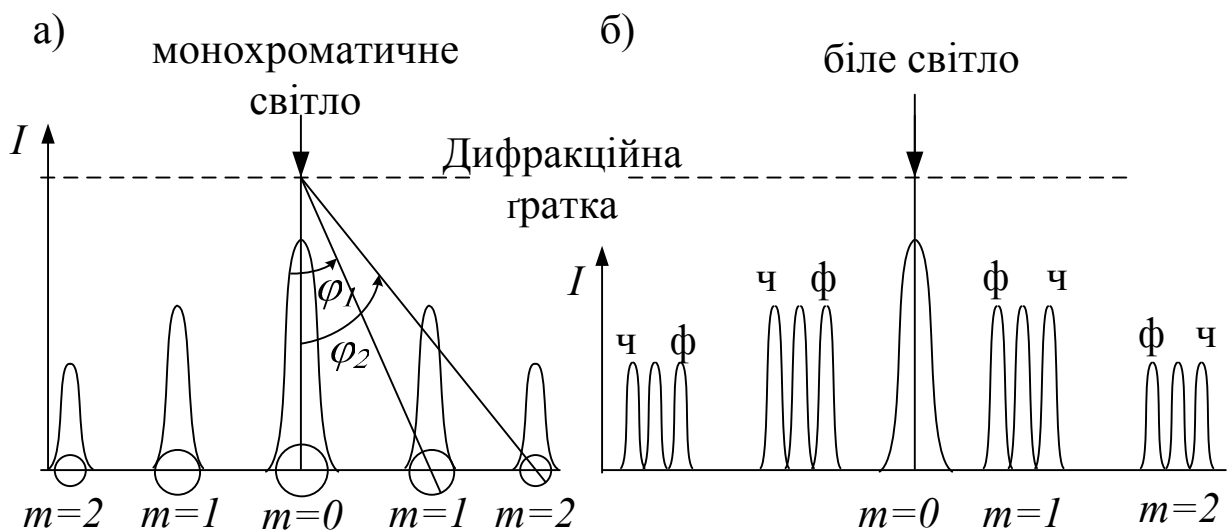


Рис. 27.9

Положення головних максимумів залежить від довжини хвилі світла, тому при дифракції білого світла на дифракційній ґратці усі максимуми, крім центрального, розкладаються на спектри (див. рис. 27.9, б). За допомогою дифракційної ґратки можна одержати найбільш якісні спектри, тому вони широко застосовуються в спектральних приладах.



## Тема 28. Поляризація світла

### § 127. Види поляризації

Впорядкованість коливань світлового вектора світлової хвилі називається поляризацією світла.

У природному світлі коливання світлового вектора різних напрямків у площині, поперечній до напрямку поширення, швидко і безпорядно змінюють одне одне. Світлова хвиля з деяким напрямком коливання світлового вектора відповідає випромінюванню окремого атома. Але одночасно випромінюють світло багато атомів, і це світло не має ніякої впорядкованості у коливаннях світлового вектора і носить назву неполяризованого (див. рис. 28.1, а).

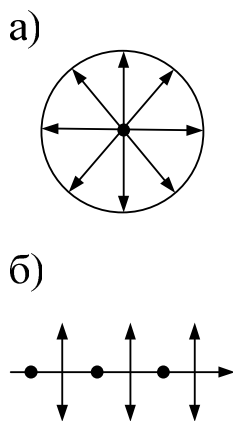


Рис. 28.1

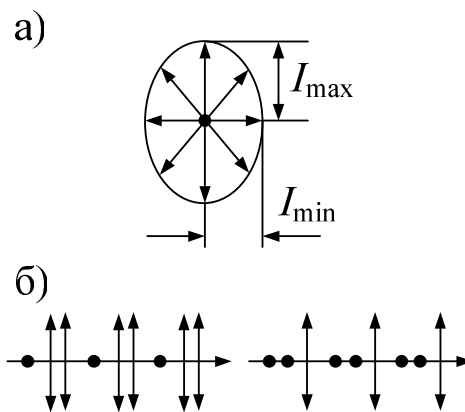


Рис. 28.2

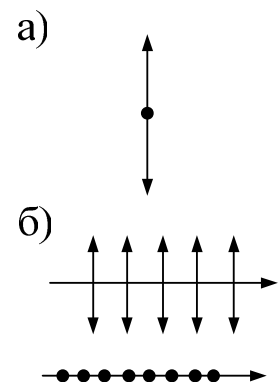


Рис. 28.3

Амплітуда коливань по всіх напрямках у площині, перпендикулярній до напрямку поширення, у неполяризованого світла однакова, тому якщо з'єднати кінці світлових векторів різних напрямків, одержимо коло. На промені поляризація позначається таким чином. Коливання у площині рисунка позначаються стрілочками, а у перпендикулярній площині – цятками. Якщо густина стрілок і крапок однакові, це значить, що амплітуда коливань у взаємно перпендикулярних напрямках однакова. На рис. 28.1, б умовно зображено неполяризоване світло.

Світло, у якого напрямки коливань світлового вектора впорядковані деяким чином, називається поляризованим. Розрізняють часткову і повну поляризацію.

Якщо амплітуда коливань світлового вектора у одному напрямку більша, ніж у перпендикулярному, то таке світло має часткову впорядкованість коливань і називається частково поляризованим (див. рис. 28.2, а). Якщо з'єднати кінці світлових векторів частково поляризованого світла, то отримаємо еліпс. Умовне позначення часткової поляризації наведено на рис. 28.2, б. У одному випадку домінують коливання паралельні

площині аркушу паперу, в іншому – перпендикулярні (переважають цяточки).

Мірою поляризації є ступінь поляризації

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

де  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$  – максимальна і мінімальна інтенсивності коливань.

Для неполяризованого світла  $I_{\max} = I_{\min}$  і  $P = 0$ . Для частково поляризованого світла  $0 < P < 1$ .

Якщо коливання світлового вектора світлової хвилі повністю впорядковані, то така хвиля називається повністю поляризованою. Якщо коливання світлового вектора здійснюються в одній площині, то світлова хвиля називається плоскополяризованою (див. рис. 28.3, а).

Умовне позначення плоскої поляризації наведено на рис. 28.3, б. У першому випадку площина коливань є площиною рисунка, у другому – перпендикулярна до неї.

Для повної поляризації  $I_{\min} = 0$ , і ступінь поляризації досягає максимального значення  $P = 1$ .

## § 128. Поляризатори

Це прилади (або пристрої), які вільно пропускають коливання, паралельні певній площині, яка має назву площини поляризації, і повністю затримують перпендикулярні до неї коливання.

Розкладемо світловий вектор  $\vec{A}$  на дві складові:  $\vec{A}_{\parallel}$  – паралельну площині поляризації і  $\vec{A}_{\perp}$  – перпендикулярну площині поляризації. (див. рис. 28.4).

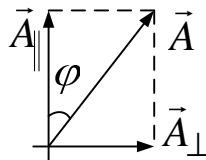


Рис. 28.4

Паралельна складова  $\vec{A}_{\parallel}$  повністю проходить через поляризатор,  $\vec{A}_{\perp}$  повністю затримується. Оскільки  $A_{\parallel} = A \cos \varphi$ , де  $\varphi$  – кут між світловим вектором  $\vec{A}$  і площиною поляризації, то інтенсивність світла на виході поляризатора

$$I_{\text{вих}} = A^2 \cos^2 \varphi. \quad (28.1)$$

Нехай на поляризатор падає повністю поляризоване (плоскополяризоване) світло інтенсивністю  $I_0$ . (див. рис. 28.5), площина коливань якого складає з площиною поляризації кут  $\varphi$ . На виході маємо також плоскополяризоване світло з площиною коливань, яка збігається з площиною

поляризації, тобто утворює кут  $\varphi$  з площиною коливань падаючого світла (див. рис. 28.5).

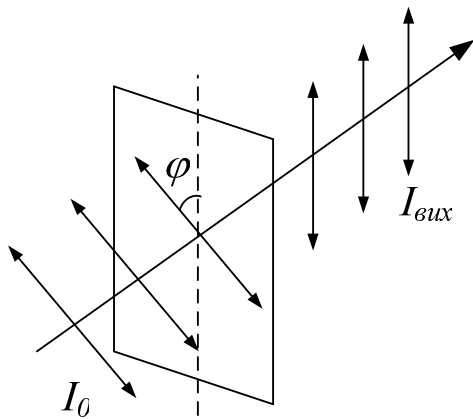


Рис. 28.5

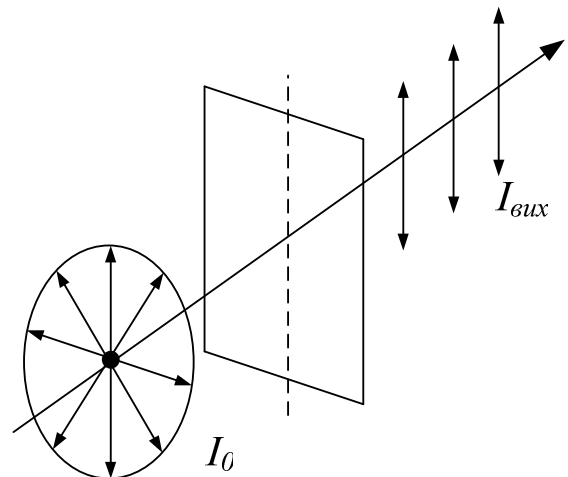


Рис. 28.6

Інтенсивність світла на виході, згідно з (28.1), визначається формулою

$$I_{\text{вих}} = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (28.2)$$

Формула (28.2) має назву закону Малюса. Таким чином, поляризатор обертає площину коливань плоскополяризованого світла на кут  $\varphi$ .

Нехай тепер на поляризатор падає повністю неполяризоване світло (див. рис. 28.6), а на виході – повністю поляризоване світло. Кут  $\varphi$  у цьому випадку може мати будь-які значення від 0 до  $2\pi$ , і у формулі (28.2) ми повинні взяти середнє значення  $\cos^2 \varphi$  на періоді його зміни, яке дорівнює  $1/2$ . Тому

$$I_{\text{вих}} = I_0 \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2} I_0,$$

тобто при падінні повністю неполяризованого світла на поляризатор воно перетворюється на поляризоване, а інтенсивність його зменшується вдвічі.

## § 129. Поляризація при відбиванні і заломленні

Якщо на межу поділу двох середовищ падає природне, тобто повністю неполяризоване, світло, то відбитий і заломлений промені будуть вже частково поляризованими. При цьому у відбитому світлі домінують коливання, перпендикулярні площині падіння, а у заломленому – паралельні площині падіння (див. рис. 28.7, а).

Ступінь поляризації відбитого і заломленого світла залежить від кута падіння. Можна підібрати такий кут падіння  $i_B$  так, щоб відбите світло було повністю поляризоване, а ступінь поляризації заломленого досягає максимального значення (див. рис. 28.7, б). Кут  $i_B$ , який зветься кутом повної поляризації, визначається за законом Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1},$$

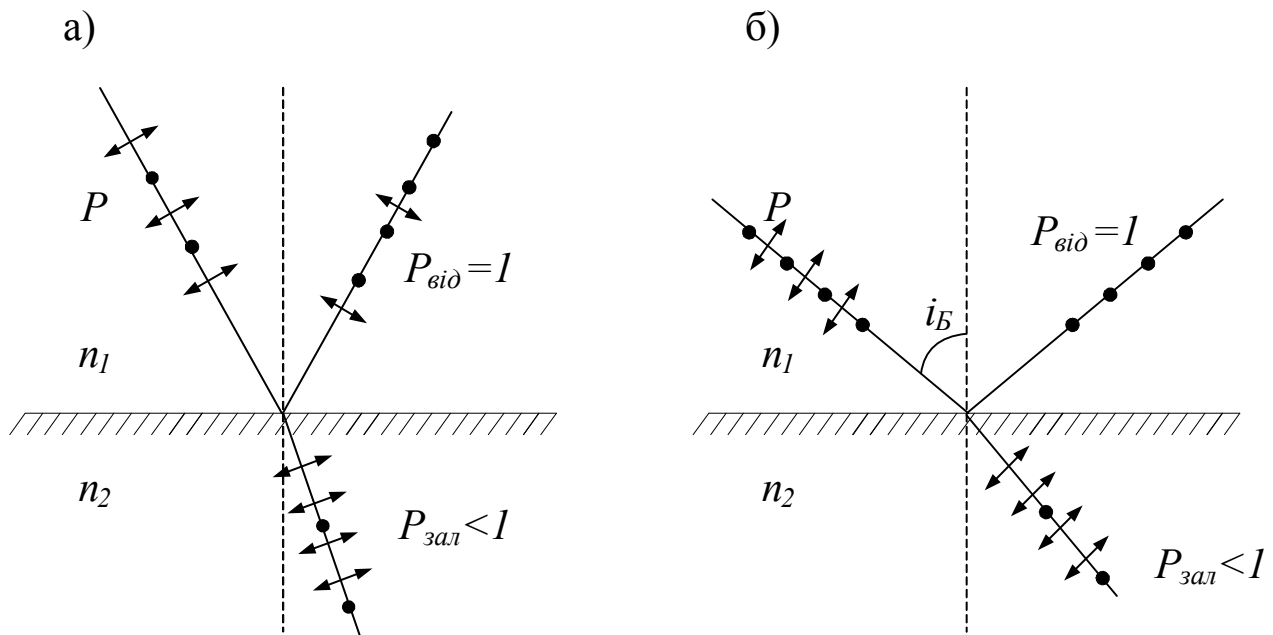


Рис. 28.7

де  $n_1$  – показник заломлення першого середовища, де поширюється падаючий промінь,  $n_2$  – показник заломлення другого середовища, де поширюється заломлений промінь.

Зміна ступеня поляризації відбитого і заломленого світла при зміні кута падіння пояснюється тим, що випромінювання зарядів, що коливаються, має направлений характер. На рис. 28.8 зображена діаграма спрямованості випромінювання точкового заряду, який коливається. Вздовж кожного напрямку на діаграмі відкладається інтенсивність випромінювання. З діаграми видно, що інтенсивність випромінювання максимальна у напрямку, перпендикулярному до напрямку коливання заряду, і випромінювання відсутнє у напрямку коливань.

Відбитий і заломлений промені утворюються вторинними хвилями, які випромінюються зарядами середовища, що коливаються під дією падаючого світла. Розкладемо ці коливання заряду на коливання у площині падіння світла і коливання, перпендикулярні площині падіння. На рис. 28.8 зображені тільки коливання у площині падіння.

При кутах падіння, для яких напрямки коливань заряду не збігається з напрямком відбитого світла, існують невеликі коливання світлового вектора у площині падіння (див. рис. 28.9, а). При куті падіння  $i_B$  напрямки коливання заряду збігається з напрямком поширення відбитого світла, а заряд вздовж напрямку коливань не випромінює (див. рис. 28.9, б). Тому у відбитому світлі

відсутні коливання світлового вектора у площині падіння, а залишаються тільки коливання, перпендикулярні площині падіння, і відбите світло стає повністю поляризованим.

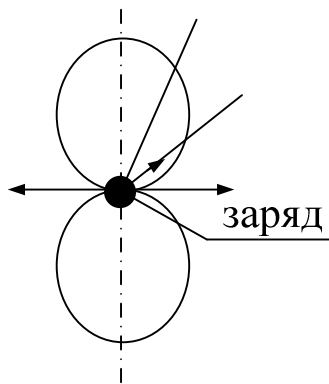


Рис. 28.8

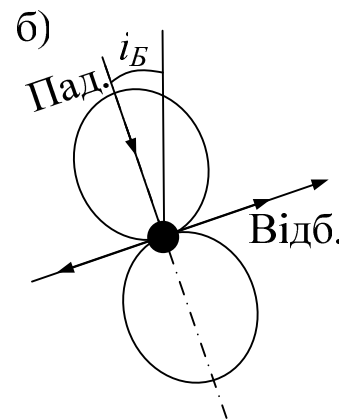
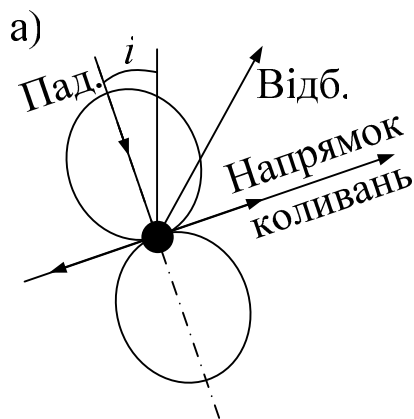


Рис. 28.9

### § 130. Поляризація при подвійному променезаломленні

При проходженні через деякі кристали світловий промінь розділяється на два промені (наприклад, через  $\text{CaCo}_3$  – ісландський шпат). Це явище називається подвійним променезаломленням. Один із заломлених променів задовольняє звичайним законам заломлення, називається звичайним і позначається буквою  $z$ , другий не задовольняє, тому називається незвичайним і позначається буквою  $n$ . Напрямок у кристалі, вздовж якого промінь не розділяється на два промені, називається оптичною віссю кристал, а переріз кристал, який містить у собі оптичну вісь – головним перерізом кристала. На рис. 28.10 зображено головний переріз кристалу. Звичайний і незвичайний промінь повністю поляризовані, і коливання світлового вектора в них відбувається в перпендикулярних площинах: у незвичайному промені – в головному перерізу кристал, у звичайному – в перпендикулярній до неї площині.

Явище подвійного променезаломлення спостерігається у усіх прозорих кристалах за винятком тих, які належать до кубічної системи.

Виникнення подвійного променезаломлення в кристалах некубічної системи пояснюється тим, що їх діелектрична проникність залежить від напрямку променя – має місце анізотропія діелектричної проникності (див. рис. 28.11).

Якщо для кожного напрямку поширення відкладати значення діелектричної проникності, то сукупність точок утворює еліпсоїд обертання з напівосями  $\epsilon_{\parallel}$  – значення проникності в напрямку, паралельному оптичній осі, і  $\epsilon_{\perp}$  – в напрямку, перпендикулярному до оптичної осі.

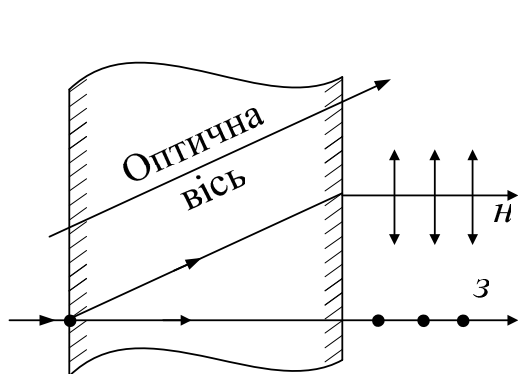


Рис. 28.10

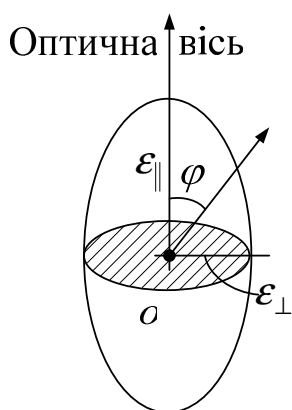


Рис. 28.11

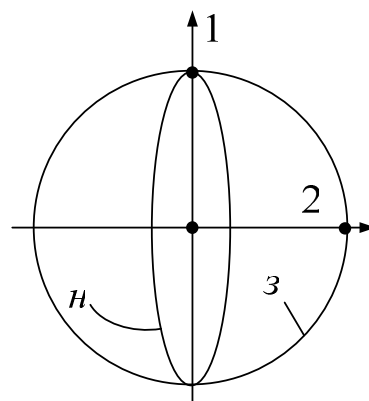


Рис. 28.12

Якщо у точку  $O$  (центр еліпсоїда обертання) помістити точкове джерело світла, то внаслідок того, що швидкість світлових хвиль залежить від напрямку коливань світлового вектора, хвильові поверхні для звичайної і незвичайної хвиль будуть різні (рис. 28.12).

Хвильова поверхня для звичайного променя являє собою сферу, а для незвичайного – еліпсоїд обертання, оскільки для коливань, перпендикулярних до головного перерізу кристала, для всіх напрямків поширення діелектрична проникність одна й та ж і дорівнює  $\epsilon_{\perp}$ , а для коливань у площині головного перерізу  $\epsilon$  залежить від напрямку поширення (рис. 28.11).

Для напрямку 1 (рис. 28.12) швидкість поширення звичайного променя

$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\parallel}}}, \text{ для напрямку 2 швидкість поширення незвичайного променя}$$

$$v_e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}}. \text{ Величини}$$

$$n_0 = \frac{c}{v_0} = \sqrt{\epsilon_{\parallel}}, \quad n_e = \frac{c}{v_e} = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$$

називаються показниками заломлення для звичайного і незвичайного променів.

Нехай пучок паралельних променів падає на межу поділу вакуум-подвійнозаломлюючий кристал (рис. 28.13). Розглянемо тільки два променя з пучка. Поки промінь йде до точки 1, промінь, який прийшов у точку 2, поширюється у кристалі і утворює хвильові фронти, які являють собою сферу для звичайного проміння, і еліпсоїд обертання для незвичайного. І так – для кожної точки межі, від 1 до 2. Проводячи огинаючі усіх хвильових фронтів (вони дотичні до всіх хвильових фронтів), ми отримуємо напрямки поширення звичайного і незвичайного променів.

Явище подвійного променезаломлення лежить у принципі роботи поляризатора, який називається призмою Ніколя або просто ніколем. Призма

Ніколя являє собою призму з ісландського шпату (див. рис. 28.14). Щоб відокремити один з променів, які виникають у результаті подвійного променезаломлення, призму розрізають по діагоналі і склеюють спеціальним прозорим клеєм (канадським бальзамом), для якого

$$n_0 > n_{\text{кл}} > n_e.$$

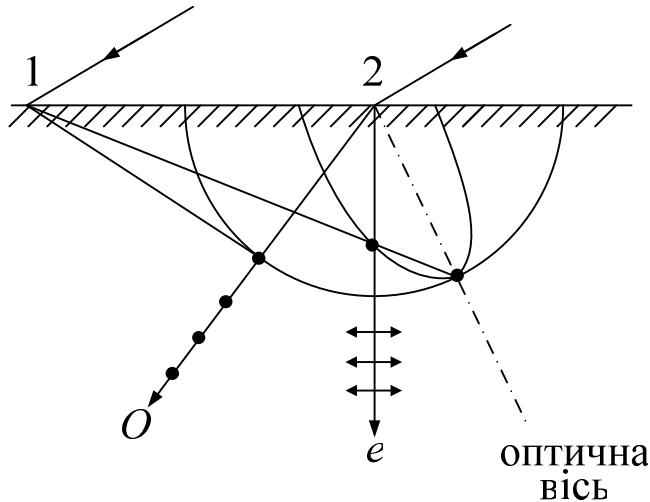


Рис. 28.13

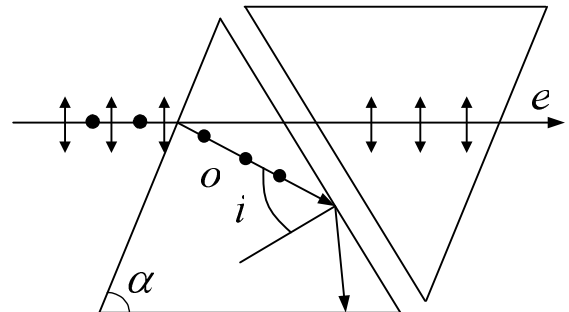


Рис. 28.14

Тоді звичайний промінь буде падати з середовища оптично більш густого в середовище оптично менш густе. Якщо кут  $\alpha$  призми підібрати так, що б кут падіння звичайного променя на плівку клею був більший за граничний кут повного внутрішнього відбиття, то звичайний промінь буде повністю відбиватися від плівки клею, і на вихід піде тільки один промінь – плоскополяризований незвичайний промінь. Таким чином, якщо на призму падає неполяризоване світло, то на виході буде поляризоване.

### § 131. Штучне подвійне променезаломлення

Штучне подвійне променезаломлення виникає в прозорих ізотропних тілах при їх деформаціях (стискання, розтягування, вигин та інші). Мірою виникаючої під дією зовнішніх впливів анізотропії є різниця показників заломлення звичайного та незвичайного променів

$$n_0 - n_e = k \sigma,$$

де  $\sigma$  – механічне напруження,  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Для спостереження штучного подвійного променезаломлення прозоре ізотропне тіло розміщується між двома перехрещеними поляризаторами  $P_1$  і  $P_2$ , площини поляризації яких обернуто відносно головного перерізу кристала на  $\pi/4$  у різні боки, а кут між площинами поляризації  $\pi/2$  (див. рис. 28.15, а).

При деформуванні тіла на виході буде світло, поляризоване по колу. У прохідному світлі спостерігається вкрита смугами інтерференційна картина

(див. рис. 28.15, б). Кожна така смуга відповідає однаково деформованим місцям взірця. За розміщенням смуг можна судити про розподіл механічних напружень у взірці. Тому штучне подвійне променезаломлення використовується для оптичного моделювання розподілу механічних напружень у різних конструкціях. Модель конструкції виготовляється з ізотропного прозорого діелектрика (наприклад, з органічного скла), ставиться між поляризаторами і механічно навантажується.

Штучне подвійне променезаломлення спостерігається і у рідинах (тут воно має назву ефекту Керра). Для цього кювета з плоским конденсатором і рідиною розміщується між перехрещеними поляризаторами (див. рис. 28.16). На конденсатор подається напруга і утворюється електричне поле між його обкладками. Під дією електричного поля рідина набуває властивості одновісного кристалу внаслідок поляризації молекул.

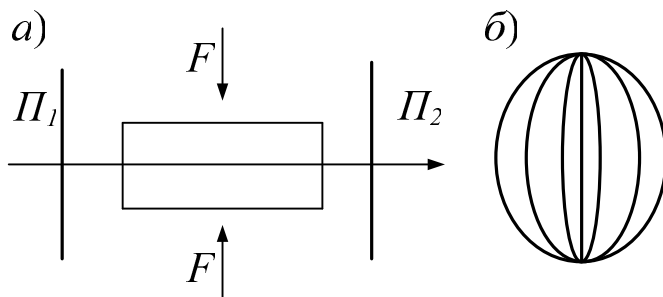


Рис. 28.15

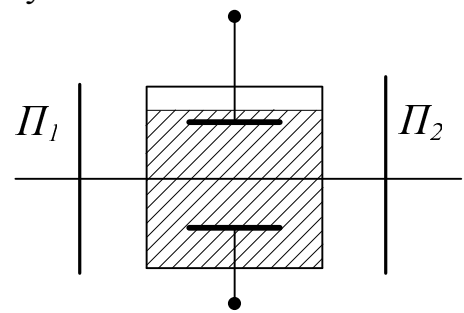


Рис. 28.16

Міра поляризації

$$n_o - n_e = k E^2,$$

де  $E$  – напруженість електричного поля.

Такий прилад є оптичним затвором. При відсутності напруги на затворі світловий затвор зачинено, а при наданні, внаслідок штучного подвійного променезаломлення, напруги він відчиняється і пропускає світло. Час спрацювання затвору –  $10^{-10}$  с. Це найбільш швидкодіючий світловий затвор.



## Розділ 8. КВАНТОВА ОПТИКА

### Тема 29. Теплове випромінювання

#### § 132. Характеристики теплового випромінювання

Випромінювання електромагнітних хвиль нагрітими тілами називається тепловим випромінюванням. Джерелом енергії для теплового випромінювання є внутрішня енергія тіла.

Для характеристики теплового випромінювання використовують наступні фізичні величини.

**1. Потік енергії  $\Phi_e$**  – це кількість енергії, яка випромінюється у одиницю часу

$$\Phi_e = \frac{dW}{dt},$$

$dW$  – кількість енергії, що випромінюється за час  $dt$ . Одиницею вимірювання потоку енергії у системі СІ є  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ .

**2. Енергетична світність тіла  $R_e$**  – потік енергії, що випромінюється одиницею поверхні у всіх напрямках

$$R_e = \frac{d\Phi_e}{dS},$$

де  $d\Phi$  потік енергії з площі  $dS$ . Одиницею вимірювання енергетичної світності у системі СІ є  $1 \text{ Вт/м}^2$ .

**3. Потік енергії.** Теплове випромінювання складається з електромагнітних хвиль різних частот  $\omega$ . Введемо  $dR_\omega$  – потік енергії з одиниці поверхні в інтервалі частот  $d\omega$ . Він пропорційний інтервалу  $d\omega$

$$dR_\omega = r_\omega d\omega,$$

де  $r_\omega$  – випромінювальна здатність тіла. Це потік енергії з одиниці площі тіла у одиничному інтервалі частот

$$r_\omega = \frac{dR_\omega}{d\omega}.$$

Тоді

$$R_e = \int dR_\omega = \int_0^\infty r_\omega d\omega.$$

**4. Поглинальна здатність.** Введемо  $d\Phi_\omega$  – падаючий на площадку  $dS$  потік енергії в інтервалі  $d\omega$ ,  $d\Phi'_\omega$  – поглинутий потік у цьому ж інтервалі частот  $d\omega$ .

Тоді величина

$$a_\omega = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega} \leq 1$$

називається поглинальною здатністю тіла.

Якщо  $a_\omega = 1$  – тіло називається чорним тілом, а якщо  $a < 1$  – сірим тілом.

Доброю моделлю чорного тіла є сажа, але найкращою моделлю є внутрішня порожнина у тілі з малим отвором. Потрапивши в нього, промінь багаторазово відбивається від стінок. Ймовірність його виходу назовні практично дорівнює нулю, промінь повністю поглинається.

### § 133. Закони теплового випромінювання

Випромінювальні і поглинальні здатності для всіх тіл різні, але відношення випромінювальної і поглинальної здатностей для всіх тіл є однією й тією ж функцією частоти і температури

$$\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = f(\omega, T).$$

Для чорного тіла  $a_{\omega,T}^* = 1$  і тому

$$f(\omega, T) = r_{\omega,T}^*,$$

тобто універсальна функція  $f(\omega, T)$  називається функцією Кірхгофа. Це – випромінювальна здатність чорного тіла.

Функція  $f(\omega, T)$  була визначена дослідно. Всі дифракційні максимуми, крім нульового, розкладаються у спектр. Найбільш інтенсивний максимум 1-го порядку.

$$d \sin \varphi_m = m \lambda,$$

( $m$  – порядок дифракційного максимуму).

Кут дифракції визначає довжину хвилі. Вимірювалась інтенсивність випромінювання під різними кутами. У результаті був одержано

$$f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2} f(\lambda, T),$$

$\lambda_m$  – довжина хвилі на яку припадає максимум функції  $f(\lambda, T)$ .

Енергетична світність

$$R_e^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega.$$

Функція  $f(\lambda, T)$  визначає розподіл енергії у спектрі випромінювання чорного тіла (її називають спектральною густиною енергетичної світності чорного тіла).

**Закон Кірхгофа.** Енергетична світність чорного тіла пропорційна  $T^4$

$$R_e^* = \sigma T^4,$$

де  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\text{К}^4)$  – стала Стефана-Больцмана.

**Закон Віна.** Добуток абсолютної температури на довжину хвилі, на яку припадає максимум функції абсолютно чорного тіла є сталою величиною

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ (м} \cdot \text{К)}$  – стала Віна.

Закон Віна дозволяє пояснити, чому при нагріванні тіла його колір змінюється від темно червоного до білого. При нагріванні тіла максимум функції  $f(\lambda, T)$  зміщується ліворуч з збільшенням температури. При

температурі  $T_1$   $\max f(\lambda, T)$  припадає на червону границю, і тіло має темно-червоний колір при  $T_2$  у  $\max f(\lambda, T)$  потрапляє весь оптичний діапазон, і тіло має білий колір.

### § 134. Формула Релея-Джинса

Релей і Джинс зробили спробу визначити функцію спектрального розподілу енергії  $f(\omega, T)$  у випромінюванні чорного тіла, виходячи з теореми класичної статистики про рівнорозподіл енергії за ступеням вільності.

Електромагнітне поле вони розглядали як безперервне середовище електромагнітних коливань і припустили, що на кожне електромагнітне коливання припадає у середньому енергія

$$\langle \varepsilon \rangle_{\text{кл}} = kT, \quad (29.1)$$

(половинка  $kT$  на електричну складову, половина на магнітну складову електромагнітного коливання). Це результат класичної теорії, тому індекс "кл".

Спектральна густина енергетичної світності

$$f(\omega, T) = \frac{c w}{4},$$

де  $w$  – густина енергії електромагнітного випромінювання

$$w = n \langle \varepsilon \rangle,$$

де  $n$  – кількість електромагнітних коливань у одиниці об'єму

$$n = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}.$$

В результаті отримуємо

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle \varepsilon \rangle,$$

Використавши класичне значення середньої енергії одного коливання (29.1) Релей і Джинс отримали формулу

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT.$$

Починаючи з ультрафіолетового діапазону дослід і теорія зовсім суперечать один одному. Розходження дослідів і теорії отримало назву ультрафіолетової катастрофи.

### § 135. Формула Планка

Розходження формули Релея-Джинса з дослідом вказувало на існування якихось закономірностей, які не сумісні з уявленням класичної статистичної фізики і електродинаміки.

У 1900 році Планк припустив, що випромінювання породжується не безперервно, а у вигляді окремих порцій (квантів) енергією

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Енергія електромагнітного коливання складається з  $n$  порцій (квантів)

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega.$$

Згідно з законом Больцмана ймовірність  $P_n$  того, що енергія електромагнітного коливання має величину  $\varepsilon_n$ , визначається формулою

$$P_n = Ae^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} = Ae^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}.$$

Середнє за часом значення енергії коливання

$$\langle \varepsilon \rangle_{\text{кв}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \varepsilon_n = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1},$$

Це є квантове значення середньої енергії коливання.

Відмітимо, що

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \varepsilon \rangle_{\text{кв}} = kT = \langle \varepsilon \rangle_{\text{кл}},$$

оскільки  $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \hbar\omega/kT$ .

Тобто коли енергія кванта прямує до нуля середнє квантове значення енергії коливання переходить у класичне. Підставляючи замість  $\langle \varepsilon \rangle_{\text{кл}}$  значення  $\langle \varepsilon \rangle_{\text{кв}}$ , Планк отримав формулу

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^2}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1},$$

яка повністю збігається з дослідом.

Для енергетичної світності чорного тіла

$$Re^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4.$$

Таким чином формула Планка дає вичерпний опис рівноважного теплового випромінювання.

### § 136. Фотони і їх властивості

**1. Зовнішній фотоефект.** Під дією світла з металів вилітають електрони. Напруга запирання впливає з формули

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = eU_z.$$

Вимірявши  $U_z$  можна визначити максимальну швидкість електронів.

**2. Закон Столетова.** Фотострум насичення пропорційний світловому потоку  $i_n \sim \Phi_n$ . Напруга запирання є функцією частоти світла і не залежить від світлового потоку. Тобто швидкість електронів є функцією частоти, а не світлового потоку, що не відповідає класичній теорії.

Ейнштейн припустив, що випромінювання не тільки породжується, але і поглинається окремими порціями (квантами) енергії.

Закон збереження енергії при поглинанні кванта

$$\hbar\omega = A_{\text{вих}} + \frac{mv^2}{2},$$

де  $A_{\text{вих}}$  – робота виходу електрона з металу.

Звідси випливає, що швидкість електронів залежить від частоти світла, а не від світлового потоку.

**3. Фотони.** Ейнштейн висунув гіпотезу, що випромінювання не тільки породжується, поглинається але і поширюється у вигляді квантів енергії, тобто у вигляді світлових частинок, які отримали назву фотонів.

Фотони мають енергію

$$E = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}.$$

Оскільки для фотонів  $\nu=c$ , то звідси випливає, що нерухомих фотонів у природі не існує. Фотон може існувати тільки рухаючись зі швидкістю світла.

**Імпульс фотона.** Для фотона

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

Отже світло повинно утворювати тиск, який і було виміряно у досліді Лебедева.

Око людини починає реагувати на світло при потраплянні на сітківку ~ 100 фотонів за 1 с.

При нормальній освітленості і довжині хвилі  $\lambda = 0,55 \mu\text{м}$  (зелене світло) на  $1\text{см}^2$  падає  $2 \cdot 10^{13}$  фотонів за 1с.

## Розділ 9. КВАНТОВА МЕХАНІКА

### Тема 30. Квантово-механічні уявлення

#### § 137. Гіпотеза де Бройля

Хвильові властивості речовини. В 1924 р. Луї де Бройль висунув гіпотезу, що двоїстість (дуалізм) не є особливістю тільки світла, але має універсальне значення. Він припустив, що частинки речовини поряд з корпускулярними властивостями мають також і хвильові і переніс на випадок частинок речовини ті ж правила переходу від корпускулярної картини до хвильової, які справедливі для світла. Ці твердження отримали назву гіпотези де Бройля. Фотон має енергію і імпульс

$$\varepsilon = h \nu, \quad p = h/\lambda.$$

Енергія і імпульс відображають його корпускулярні властивості, а частота  $\nu$  і довжина  $\lambda$  – хвильові властивості.

За ідеєю де Бройля рух будь-якої частинки пов'язаний з поширенням хвилі, довжина якої

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (30.1)$$

а частота –  $\nu = \varepsilon/h$ .

Ці хвилі називають хвилями де Бройля (а іноді – хвилями матерії). Гіпотезу де Бройля невдовзі було блискуче підтверджено експериментально у досліді з проходження електронного пучка через металеву фольгу (див. рис. 30.1, а). Це зробив в Англії Томсон Джорж Паджет. А в США докази існування хвиль де Бройля одержали Девіссон і Джермер.

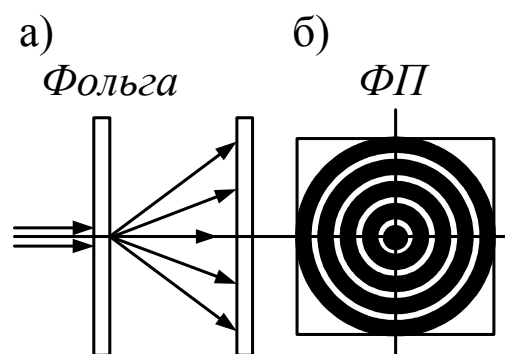


Рис. 30.1

Прискорений пучок електронів проходить крізь тонку металеву фольгу і потрапляє на фотопластинку (ФП). Електрон при співударі з фотоемульсією чинить на неї таку ж дію, як фотон, тобто засвітлює місце попадання. Пучок електронів розсіюється металевую фольгою і дає дифракційну картину, аналогічну до тієї, що має місце при падінні на фольгу рентгенівського

випромінювання (див. рис. 30.1, б). При цьому дифракційна картина відповідає довжині хвилі

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

де  $v$  – швидкість електронів, тобто збігається з довжиною хвилі де Бройля з формули (30.1).

Таким чином, матерія двоїста, тобто частинки речовини одночасно мають і корпускулярні, і хвильові властивості. Це положення називається принципом двоїстості (дуалізмом речовини).

### § 138. Квантово-механічний опис руху мікрочастинок

Виникла потреба побудувати механіку, яка б враховувала хвильові властивості частинок. Ця механіка спочатку отримала назву хвильової, а потім квантової механіки.

**Рівняння Шредінгера.** Основним рівнянням квантової механіки є рівняння Шредінгера. Для стаціонарних станів тобто станів, що не змінюються у часі, рівняння Шредінгера має вигляд

$$\Delta\phi + \frac{2m}{h^2}(E - U)\phi = 0,$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа (лапласіан);  $m$  – маса частинки;

$U$  – потенціальна енергія частинки в силовому полі, в якому вона рухається;  $E$  – повна енергія частинки;  $\psi(x, y, z)$  – хвильова функція.

У квантовій механіці стан частинки описується **хвильовою функцією**  $\phi(x, y, z)$ . Фізичний зміст хвильової функції полягає в тому, що квадрат її модуля визначає густину ймовірності знаходження частинки у відповідному місці простору. Тоді ймовірність  $dP$  того, що частинка буде знайдена у межах об'єму  $dV$ , визначається формулою

$$dP = |\phi|^2 dV.$$

**Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.** Квантова механіка має статистичний характер. Вона не дозволяє визначити місцезнаходження частинки у просторі або траєкторією, по якій рухається частинка. У застосуванні до мікрочастинок поняття певного місцеположення і траєкторії взагалі відсутні, оскільки рух по певній траєкторії не сумісний з хвильовими властивостями частинок.

Ступінь точності, з якою до частинки можна застосувати уявлення про певне положення її у просторі, дається співвідношенням невизначеностей Гейзенберга. Згідно з цим співвідношенням частинка не може одночасно мати точне значення координати і відповідне цій координаті значення імпульсу. Математичне формулювання цього принципу має вигляд

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar,$$

де  $\Delta x$  – невизначеність (абсолютна похибка) координати;  $\Delta p_x$  – невизначеність імпульсу вздовж цієї координати.

Із співвідношення невизначеностей випливає, що чим точніше визначена одна з величин (координата або імпульс уздовж цієї координати), тим більшою стає невизначеність (похибка) іншої величини.

Квантування. Відповідно до свого фізичного змісту хвильова функція  $\phi(x,y,z)$  повинна бути однозначною, кінцевою і безперервною у всій області визначення  $x,y,z$ . Рівняння Шредінгера має рішення, яке задовольняє цим умовам, але не при будь-яких значеннях енергії  $E$ , а лише при певних визначених значеннях. Отже, енергія частинки у заданому силовому полі квантована, тобто змінюється не безперервно, а дискретно квантами (порціями) енергії з певним для даного силового поля (яке описується потенціальною енергією  $U$ ) законом квантування. Крім енергії частинки, виявляються квантованими й інші її характеристики (момент імпульсу тощо).

### § 139. Атом гідрогену

В атомі гідрогену потенціальна енергія

$$U = -\frac{Ze^2}{r},$$

де  $e$  – заряд електрона,  $r$  – відстань електрона від ядра,  $Z$  – ціле число.

Якщо  $Z=1$  – це атом водню, а при  $Z \neq 1$  – воднеподібний атом, тобто атом будь-якого елемента, в якого забрали всі електрони, крім одного.

Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів гідрогеноподібного атому

$$\Delta\phi + \frac{2m}{h^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) \phi = 0$$

має розв'язок в таких випадках:

1) При будь-яких позитивних значеннях енергії електрона  $E$ . Цей випадок відповідає електрону, що пролітає поблизу ядра і йде знову на нескінченність (див. рис. 30.2).

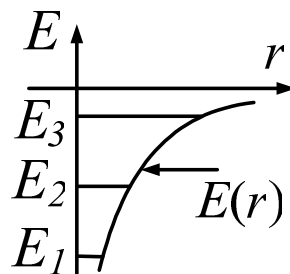


Рис. 30.2

2) При дискретних від'ємних значеннях. Цей випадок відповідає електрону, що знаходиться у межах атома. Енергія електрона при цьому визначається формулою



$$E_n = -\frac{me^4 z^2}{2\hbar^2 n^2} \quad (n=1,2,3\dots).$$

**Квантові числа.** Хвильові функції  $\phi_{n,l,m}$ , що відповідають значенням енергії  $E_n$ , містять три цілочисельні параметри:

- 1)  $n$  – головне квантове число, яке приймає цілочисельні значення  $n = 1, 2, 3\dots$ ;
- 2)  $l$  – азимутальне квантове число, яке при заданому головному числі  $n$  приймає цілочисельні значення  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  – всього  $n$  значень;
- 3)  $m$  – магнітне квантове число, яке при заданому азимутальному числі  $l$  приймає цілочисельні значення  $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$  – всього  $2l+1$  значень.

Таким чином, кожному значенню енергії  $E_n$  відповідає кілька хвильових функцій  $\phi_{n,l,m}$ , що відрізняються квантовими числами  $l$  і  $m$ . Стани з однаковою енергією називаються виродженими. Кратність виродження дорівнює

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2.$$

Азимутальне квантове число  $l$  визначає орбітальний, тобто пов'язаний з рухом по орбіті навколо ядра, момент імпульсу електрона в атомі. Закон квантування моменту імпульсу електрона  $M_e = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ .

Магнітне квантове число  $m$  визначає проекцію орбітального моменту імпульсу на вектор  $\vec{B}$  магнітної індукції. Закон квантування  $M_B = m\hbar$ .

Таким чином, орбітальний момент імпульсу електрона в атомі і його проекція на напрямок магнітного поля, як і енергія, є квантовими числами, тобто змінюються дискретно кожна відповідно до свого закону квантування.

В атомній фізиці стан електрона в атомі з різними значеннями азимутального квантового числа прийнято позначати літерами.

- $l=0$  –  $s$ -стан,
- $l=1$  –  $p$ - стан,
- $l=2$  –  $d$ - стан,
- $l=3$  –  $f$ - стан.

Потім  $g$ ,  $h$  і далі за латинською абеткою. Наприклад, якщо стан електрона  $3p$ , то це означає, що  $n = 3$ ,  $l = 1$ .

Переходи електронів за енергетичним спектром. Схему рівнів енергії (енергетичний спектр) зручно представити у вигляді, що подано на рис. 30.3.

Випромінювання і поглинання енергії атомом гідрогену відбувається при переходах електрона із стану з одним значенням енергії  $E_n$  у стан з іншим значенням енергії (коротко кажуть – при переходах електрона з одного енергетичного рівня на інший).

Можливі тільки такі переходи, для яких азимутальне квантове число  $l$  змінюється на одиницю:

$$\Delta l = \pm 1. \quad (30.2)$$

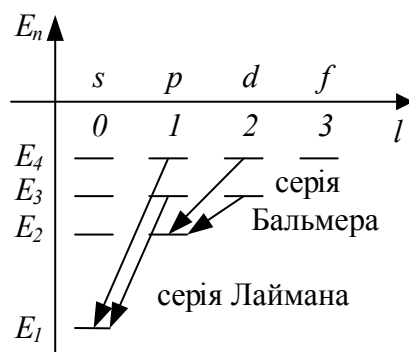


Рис. 30.3

Умова (30.2) називається правилом відбору і є наслідком закону збереження моменту імпульсу при випромінюванні і поглинанні фотона.

**Спектри випромінювання і поглинання.** Переходи  $np \rightarrow 1s$  ( $n=2,3,\dots$ ) утворюють серію ліній випромінювання, яка називається серією Лаймана. Переходи електрона  $ns \rightarrow 2p$ ,  $nd \rightarrow 2p$ ,  $np \rightarrow 2s$  ( $n=3,4,\dots$ ) утворюють серію ліній випромінювання, яка називається серією Бальмера. Стан  $1s$  – стан з мінімальною енергією – називається основним станом.

Атом поглинає (і випромінює) тільки ті фотони, енергія яких точно відповідає різниці енергії двох його рівнів. Спектр поглинання (з основного стану)  $1s \rightarrow np$  ( $n=2,3,\dots$ ).

## § 140. Багатоелектронні атоми

В атомах, що містять кілька електронів, кожний з електронів рухається в усередненому полі ядра і решти електронів. Енергетичні рівні електрона в такому центрально-симетричному полі залежать не тільки від головного квантового числа  $n$ , але і від азимутального  $l$ , а відповідні їм хвильові функції – від трьох квантових чисел

$$E = E_{nl}, \quad \phi = \phi_{nlm},$$

тобто в цьому випадку знімається виродження за азимутальним квантовим числом  $l$ .

Момент імпульсу атома в цілому складається з моментів імпульсу електронів, що входять до складу атома. Додавання моментів імпульсу здійснюється за квантовими законами

$$M_{l1} + M_{l2} = M_L,$$

де  $M_{l1} = \hbar \sqrt{l_1(l_1+1)}$ ;  $M_{l2} = \hbar \sqrt{l_2(l_2+1)}$  – моменти імпульсів, що додаються,  $l_1, l_2$  – їх азимутальні квантові числа. При цьому результуючий момент імпульсу

$$M_L = \hbar \sqrt{L(L+1)},$$

де  $L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|$  – азимутальне квантове число результуючого моменту імпульсу. Таким чином, результуючий момент імпульсу може набувати  $2l_2 + 1$  або  $2l_1 + 1$  (потрібно взяти менше з  $l_i$ ) різних значень.

Переходи в енергетичній схемі рівнів атома підкоряються такому правилу відбору: можливі лише такі переходи, при яких азимутальне квантове число атома змінюється на одиницю  $\Delta L = \pm 1$ .

### § 141. Спін електрона

Якщо атоми, що випромінюють світло, помістити у магнітне поле, то лінії випромінювання в спектрі випромінювання атома розщеплюються на кілька окремих ліній – мультиплет. Для пояснення мультиплетної структури спектрів у 1925 р. була висунута гіпотеза про те, що електрон має власний момент імпульсу  $M_s$ , не пов'язаний з рухом електрона по орбіті. Цей власний момент імпульсу електрона було названо спіном. Спін слід вважати внутрішньою властивістю, яка притаманна електрону, подібно тому, як йому притаманні заряд і маса.

Значення власного моменту імпульсу мікрочастинки визначається квантовим числом  $s$

$$M_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}.$$

Для електрона  $s = 1/2$ ;  $M_s = \hbar \sqrt{3}/2$ .

Проекція спіна на напрямок вектора індукції  $\vec{B}$  магнітного поля

$$M_{SB} = m_s \hbar,$$

де спінове квантове число електрона  $M_s = \pm s = \pm 1/2$ .

Повний момент імпульсу  $M_j$  електрона в атомі складається з орбітального  $M_e$  і спінового  $M_s$

$$M_j = M_e + M_s,$$

де  $M_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}$ .

При цьому квантове число  $j$ , що визначає повний момент імпульсу електрона при  $l \neq 0$ , приймає два значення

$$j = l + \frac{1}{2}, \left| l - \frac{1}{2} \right|,$$

а при  $l=0$  тільки одне значення  $j = s = 1/2$ .

З механічними моментами пов'язані магнітні моменти, які взаємодіють один з одним подібно до того, як взаємодіють два контури з струмом. Енергія цієї взаємодії (яка називається спін-орбітальною взаємодією) залежить від взаємної орієнтації орбітального і спінового моментів. Отже, стани з різними квантовими числами  $j$  повинні мати різні енергії, і тому лінії випромінювання розщеплюються на мультиплети.

### § 142. Енергетичні рівні в атомі

Таким чином, стан електрона в атомі характеризується чотирма квантовими числами:

1) головне  $n=1,2,3\dots$  (будь-яке ціле);

- 2) азимутальне  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  – всього  $n$  значень;
- 3) магнітне  $m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l$  – всього  $2l+1$  значень;
- 4) спінове  $m_s = \pm 1/2$  – всього два значення.

Енергія стану в основному визначається квантовими числами  $n$  і  $l$ . Крім того, має місце слабка залежність від  $m_l$  і  $m_s$ .

Заселення енергетичних рівнів, тобто розподіл електронів за станами з різними значеннями енергії, підпорядковується двом принципам.

1. Принцип Паулі. В одному і тому ж атомі не може бути двох електронів, що мають однакову сукупність чотирьох квантових чисел  $n, l, m_l, m_s$ .

2. Принцип мінімуму енергії: у незбудженому стані атома електрони повинні розташовуватися на найнижчих досяжних для них енергетичних рівнях.

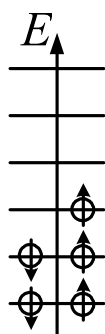


Рис. 30.4

На рис. 30.4 наведено заселеність енергетичних рівнів літію ( $Z=5$ ) у незбудженому стані (тобто з мінімумом енергії). Такий стан атома має назву основного стану. Рівні розв'язані (тобто відрізняються) за квантовими числами  $n, l, m_l$ . Тоді на кожному рівні (тобто у стані із заданою енергією) знаходиться по два електрони з протилежно орієнтованими спінами, оскільки спінове квантове число може мати тільки два значення  $m_s = \pm 1/2$ .

Сукупність електронів атома, що мають однакові квантові числа  $n$  і  $l$ , утворює оболонку. Кількість електронів у оболонці  $N_{об} = 2(2l+1)$ . Сукупність оболонок з однаковими головними квантовими числами  $n$  утворює шар. Кількість електронів у шарі  $N_{ш} = 2n^2$ .

Розподіл електронів по оболонках і шарах наведено у табл. 1. З табл. 1 видно, що елементи із зарядовим числом  $Z=2$  (He) і  $Z=10$  (Ne) мають повністю заповненні шари ( $K$ -шар для He;  $K$  і  $L$  – шари для Ne). Тому їхні хімічні властивості подібні і обидва вони відносяться до однієї групи періодичної системи (групи інертних газів). Елементи із зарядовим числом  $Z=3$  (Li) має повністю заповнений  $K$ -шар і один електрон у  $2s$  стані. Елемент з  $Z=11$  (Na) має повністю заповнені  $K$  і  $L$  шари і один електрон у  $3s$  стані. Електрон  $2s$  для Li і  $3s$  для Na пов'язані з ядром слабше за інших і є валентними. У зв'язку з цим хімічні властивості Na і Li подібні, і вони знаходяться в одній групі періодичної системи елементів.

Таблиця 1

$n$	Кількість електронів у шарі	Умовна позначка шару	Кількість електронів у оболонці				
			$s$	$p$	$d$	$f$	$g$
1	2	$K$	2	–	–	–	–
2	8	$L$	2	6	–	–	–
3	18	$M$	2	6	10	–	–
4	32	$N$	2	6	10	14	–
5	50	$O$	2	6	10	14	18

Таким чином, за допомогою табл. 1 всі хімічні елементи можна розташувати по групах періодичної системи елементів.

### § 143. Основні види міжатомного зв'язку молекул

Сили, що утримують атоми в молекулі, обумовлені взаємодією зовнішніх електронів атомів. Електрони внутрішніх оболонок при об'єднанні атомів у молекулу залишаються в попередніх станах. Розрізняють два види зв'язку атомів в молекулах.

1. Гомеополарний (або ковалентний) зв'язок. Він здійснюється в тих молекулах, в яких частина електронів рухається навколо обох ядер. Цей зв'язок утворюється парами електронів з протилежно орієнтованими спінами (див. рис. 30.5)

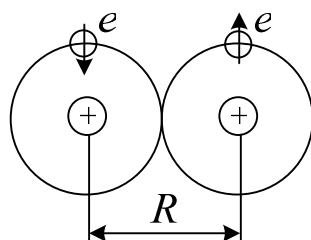


Рис. 30.5

Та обставина, що утворення молекули можливе лише при наближенні атомів з антипаралельними спінами, пояснюється тим, що електронна енергія  $E_e$ , тобто енергія електронної конфігурації залежить від відстані  $R$  між ядрами атомів у молекулі, причому у випадках паралельної і антипаралельної орієнтації спінів характер цієї залежності суттєво різний. На рис. 30.6 наведено такі залежності для молекул водню ( $H_2$ ).

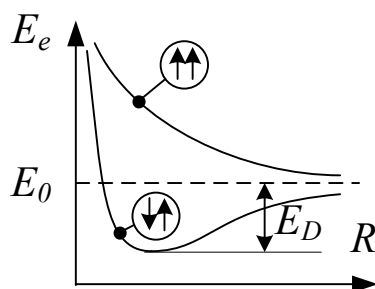


Рис. 30.6

Тільки при антипаралельній орієнтації спінів атомів у цієї залежності є мінімум і, отже, можливе утворення молекули, бо стійким станом є стан з мінімумом енергії. Граничне значення енергії  $E_0$  при  $R \rightarrow \infty$ , для обох кривих на рис. 30.6 однакове і дорівнює сумі енергії ізолюваних атомів. Величина  $E_D$  – є енергія зв'язку молекули. Вона дорівнює енергії, яку потрібно надати молекулі, щоб розділити її на атоми.

2. Гетерополярний (або іонний) зв'язок. Він має місце, коли електрони в молекулі можна розділити на дві групи, кожна з яких весь час знаходиться біля одного з ядер. Електрони розподіляються так, що навколо одного з ядер утворюється надлишок електронів, а навколо іншого – їх нестача (див. рис. 30.7).

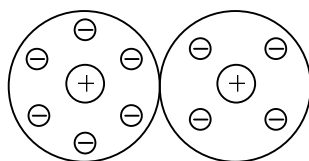


Рис. 30.7

Таким чином, молекула мовби складається з двох іонів протилежних знаків, які притягаються один до одного. Прикладами молекул з гетерополярним зв'язком є молекули NaCl, HCl та ін.

## Розділ 10. ЯДЕРНА ФІЗИКА

### Тема 31. Атомне ядро

#### § 144. Склад і характеристика атомного ядра

Ядра атомів складаються із двох видів елементарних частинок – протонів і нейтронів (їх загальна назва – нуклони)

Протон (позначається  $p$ ) має масу

$$m_p = 1836 m_e$$

і заряд  $q_p = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл (елементарний заряд).

Нейтрон (позначається  $n$ ) має масу

$$m_n = m_p + 2,5 m_e$$

і не має заряду ( $q_n = 0$ ).

Характеристики атомного ядра:

1.  $Z$  – атомний номер або зарядове число, дорівнює кількості протонів і визначає заряд ядра ( $+Ze$ );
2.  $A$  – масове число, дорівнює числу нуклонів;
3.  $N$  – число нейтронів у ядрі

$$A = Z + N.$$

Умовне позначення ядра  ${}_Z^A X$ .

Більшість хімічних елементів мають по декілька різновидів – ізоотопів, які відрізняються значенням масового числа  $A$ . Наприклад, ізоотопи водню:

${}_1^1H$  – звичайний водень, або протій  ${}_1^2H$  – дейтерій ( $D$ ),  ${}_1^3H$  – тритій ( $T$ ).

Ізоотопи кисню  ${}_8^{16}O$ ,  ${}_8^{17}O$ ,  ${}_8^{18}O$ .

Таким чином, ізоотопи – це ядра з однаковим числом протонів.

Ядра з однаковим масовим числом  $A$  – назву ізобари ( ${}_{18}^{40}Ar$ ,  ${}_{20}^{40}Ca$ ).

Ядра з однаковою кількістю нейтронів – ізотони ( ${}_6^{13}C$ ,  ${}_7^{14}N$ ).

Існують радіоактивні ядра, які відрізняються періодом напіврозпаду при однакових  $Z$  і  $A$  – ізомери.

Радіус ядра з достатньою точністю визначається за формулою

$$r = 1,2 A^{1/3} \text{ (фермі)}.$$

$1$  фермі =  $10^{-15}$  м – ядерний розмір.

Об'єм ядра пропорційний кількості нуклонів у ядрі. До теперішнього часу відомо приблизно 1500 ядер, які відрізняються числом  $Z$ , або  $A$ , або тим і іншим одночасно. Приблизно чверть цих ядер стійкі, решта – радіоактивні.

У природі зустрічаються елементи с  $Z = 1$  до  $Z = 92$  (уран), крім технеція ( $Te$ ,  $Z = 43$ ) і прометія ( $Pm$ ,  $Z = 61$ ). Решта (трансуранові елементи з  $Z > 92$ ) – було отримано тільки штучним шляхом (крім плутонія  $Pu$ ,  $Z = 94$ , який існує в природі).

## § 145. Дефект маси і енергія зв'язку ядра

Маса ядра дорівнює  $m_{\text{я}}$  завжди менша суми мас частинок, які входять до складу ядра. Це обумовлено тим, що при об'єднанні нуклонів у ядро виділяється енергія зв'язку нуклонів один з одним. Енергія зв'язку  $E_{\text{зв}}$  дорівнює тій роботі, яку потрібно виконати, щоб розділити нуклони, які утворюють ядро.

Таким чином енергія ядра менша за енергію системи невзаємодіючих нуклонів на величину енергії зв'язку. Зменшення енергії  $\Delta E$  повинно супроводжуватися еквівалентним зменшенням маси  $\Delta m = \Delta E/c^2$ .

Отже енергія зв'язку нуклонів у ядрі.

$$E_{\text{зв}} = c^2 \{ [Z m_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} \}$$

Для гелію  ${}^4_2\text{He}$

$$E_{\text{зв}} = 28,4 \text{ Мев} \quad (1 \text{ еВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}).$$

Енергія зв'язку на один нуклон  $E_{\text{зв}}/A = 7,1 \text{ Мев}$ , а енергія зв'язку валентних електронів  $\sim 10 \text{ еВ}$ , тобто у  $10^6$  разів менша.

Із зростанням масового числа  $A$  питома енергія зв'язку ( $E_{\text{зв}}/A$ ) зменшується (див. рис. 31.1). Для ядра  ${}^{240}_{92}\text{U}$  воно становить  $7,5 \text{ Мев} / \text{нуклон}$ . Сильніший за всіх зв'язок нуклонів у ядрах з масовими числами  $50-60$ ,  $E_{\text{зв}}/A = 8,7 \text{ Мев} / \text{нуклон}$ .

Така залежність питомої енергії зв'язку від масового числа робить енергетично вигідними (тобто з виділенням енергії) два процеси:

- а) поділ важких ядер на кілька більш легких,
- б) об'єднання (злиття) легких ядер в одне.

Обидва ці процеси повинні супроводжуватися виділенням великої кількості енергії.

Так, наприклад, поділ одного ядра з масовим числом  $A = 240$  (питома енергія зв'язку  $7,5 \text{ Мев}$ ) на два ядра з масовими числами  $A = 120$  (питома енергія зв'язку  $8,5 \text{ Мев}$ ) привів би до вивільнення енергії у  $240 \text{ Мев}$ , а у перерахуванні на один нуклон  $1 \text{ Мев}$ .

Злиття двох ядер важкого водню  ${}^2_1\text{H}$  у ядро атома гелію  ${}^4_2\text{He}$  привело б до вивільнення енергії у  $24 \text{ Мев}$ , а у перерахуванні на один нуклон  $6 \text{ Мев}$ . Тобто злиття легких ядер у 6 разів вигідніше за поділ важких ядер.

Для порівняння нагадаємо також, що при з'єднанні одного атома карбону з двома атомами кисню (згорання вугілля до  $\text{CO}_2$ ) виділяється енергія  $\approx 5 \text{ еВ}$ , тобто при поділі важких ядер або злитті легких ядер виділяється енергії в мільйони разів більше.



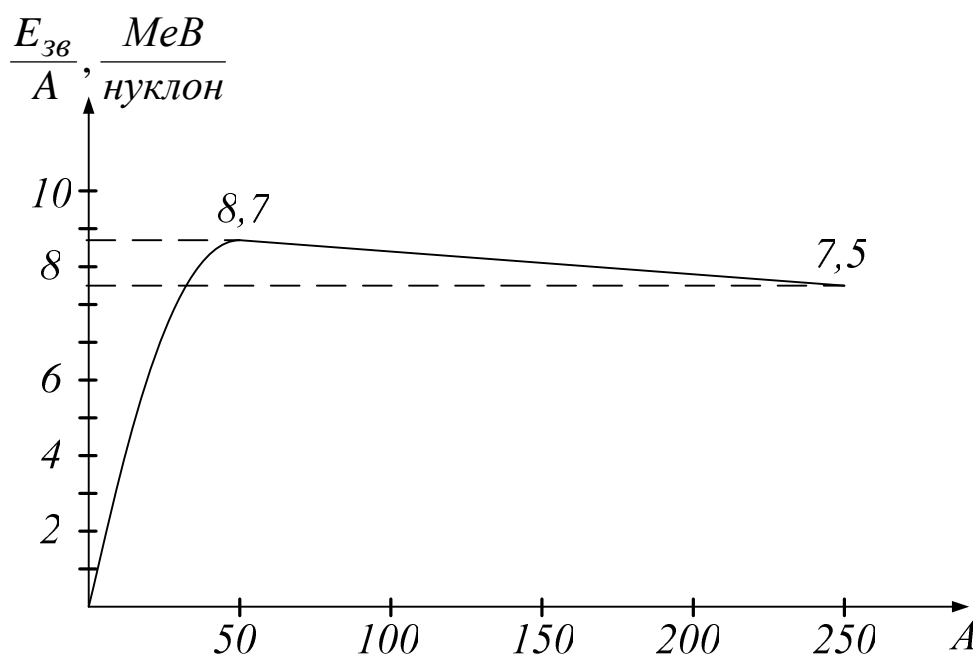


Рис. 31.1

### § 146. Природа ядерних сил

Величезна енергія зв'язку нуклонів у ядрі свідчить про те, що між нуклонами у ядрі має місце дуже інтенсивна взаємодія. Ця взаємодія носить характер притягання і утримує нуклони на відстані  $\sim 10^{-15}$  м один від одного.

Ядерна взаємодія між нуклонами отримала назву сильної взаємодії. Її можна описати за допомогою поля ядерних сил, які характеризуються наступними властивостями:

1. Ядерні сили є короткодіючими. Вони діють на відстані від  $10^{-15}$  м до  $2 \cdot 10^{-15}$  м. При відстані між нуклонами меншій, ніж  $10^{-15}$  м вони переходять у сили відштовхування.
2. Зарядова незалежність ядерних сил – сильна взаємодія не залежить від заряду нуклона.
3. Ядерні сили залежать від взаємної орієнтації спінів взаємодіючих нуклонів.
4. Ядерні сили мають властивість насичення – кожний нуклон у ядрі взаємодіє з обмеженою кількістю нуклонів.

За сучасним уявленням сильна взаємодія обумовлена тим, що нуклони в ядрі обмінюються частинками, які отримали назву віртуальних мезонів.

У квантовій механіці віртуальними називають частинки, які не можуть бути виявлені за час їх існування, і які народжуються, мов би, з порушенням закону збереження енергії. Згідно з квантовою механікою енергія стану, який існує час  $\Delta t$ , визначена лише з точністю  $\Delta E$ , яка задовольняє співвідношенню невизначеностей

$$\Delta E \cdot \Delta t > \hbar. \quad (31.1)$$

Із цього співвідношення випливає, що енергія системи може потерпати відхилення  $\Delta E$ , тривалість якого  $\Delta t$  не повинна перевищувати значення, яке визначається умовою (31.1). Таким чином, якщо віртуальний мезон, який випромінений нуклоном, буде поглинутий цим або іншим нуклоном до скінчення часу  $\Delta t = \hbar/\varepsilon$  (де  $\varepsilon$  – енергія мезона), то порушення закону збереження енергії не можна виявляти, і такі частинки мають назву віртуальних.

Носіями ядерних сил є  $\pi$ -мезони (або піони), які було відкрито у 1947 року. Існують позитивний  $\pi^+$ , негативний  $\pi^-$ , нейтральний  $\pi^0$  мезони. Назва заряджених піонів однакова, дорівнює  $273 m_e$ , маса  $\pi^0$  мезона дорівнює  $264 m_e$ . Спін, як заряджених, так і нейтрального  $\pi$ -мезонів дорівнює нулю ( $s = 0$ ).

У результаті віртуальних процесів

$$\begin{aligned} p &\overset{\rightarrow}{\leftarrow} n + \pi^+; n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + \pi^-; \\ p &\overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + \pi^0; n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} n + \pi^0 \end{aligned}$$

нуклон виявляється оточеним хмарою віртуальних  $\pi$ -мезонів, які й утворюють поле ядерних сил. Поглинення цих мезонів іншими нуклонами приводять до сильної взаємодії між нуклонами, яка проходить по одній з наступних схем:

$$1. \quad p + n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} n + \pi^+ + n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} n + p.$$

Протон випромінює віртуальний  $\pi^+$  мезон і перетворюється у нейтрон. Мезон поглинається нейтроном, який в наслідок цього перетворюється у протон. Потім такий же процес протікає і у зворотному напрямі. Кожний із взаємодіючих нуклонів частину часу проводять у зародженому стані, а частину – у нейтральному.

$$2. \quad n + p \overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + \pi^- + p \overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + n$$

– нуклони обмінюються  $\pi^-$ -мезонами.

$$3. \quad p + n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + \pi^0 + n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + n;$$

$$p + p \overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + \pi^0 + p \overset{\rightarrow}{\leftarrow} p + p;$$

$$n + n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} n + \pi^0 + n \overset{\rightarrow}{\leftarrow} n + n$$

– нуклони обмінюються  $\pi^0$  мезонами. Перший з цих процесів знаходить дослідне підтвердження у розсіянні нейтронів на протонах. При проходженні пучка нейтронів через водень у ньому з'являються протони, багато з яких мають ту ж енергію і напрям руху, що й падаючі нейтрони. Відповідна кількість нейтронів, які знаходяться у стані спокою, виявляється у мішені з воднем (див. рис. 31.2).

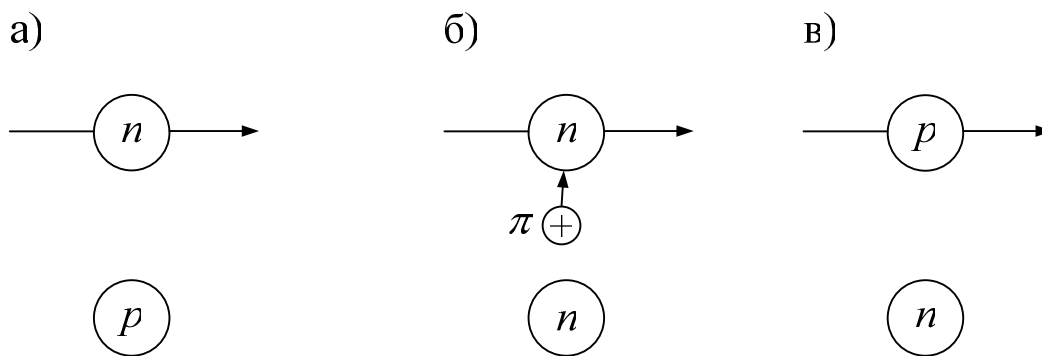


Рис. 31.2

Частина нейтронів, яка пролітає поблизу протонів, захоплює один з віртуальних  $\pi^+$  мезонів. У результаті нейтрон перетворюється у протон, а протон, який втратив свій заряд, перетворюється у нейтрон.

У сучасній фізиці використовуються так звані кваркові моделі адронів (адрони – це частинки, які сильно взаємодіють, тобто нуклони (нейтрони та протони) і мезони). Історично поняття кварків виникло у зв'язку з необхідністю систематизувати дослідні данні про реакції з адронами. Експериментальне спостереження дрібно заряджених кварків підтвердило, що кварки – це фізичні об'єкти, які динамічно пов'язані всередині адронів.

### § 147. Радіоактивність

Радіоактивність – це спонтанне перетворення нестійких ізотопів одного хімічного елемента у інший, яке супроводжується випромінюванням елементарних частинок і ядер. До числа основних таких перетворень відносяться : 1)  $\alpha$ -розпад, 2)  $\beta$ -розпад, 3) протонна радіоактивність, 4) спонтанний поділ важких ядер.

Радіоактивність, що спостерігається у ізотопів, які існують в природних умовах, називається природною. Радіоактивність ізотопів, які отримані шляхом ядерних реакцій, називається штучною. Між природною і штучною радіоактивністю немає принципової різниці. Процес радіоактивного перетворення у обох випадках підпорядковується однаковим законом.

Для кожного ядра має місце імовірність  $\lambda$  того, що ядро зазнає перетворення у одиницю часу. Отже, якщо радіоактивна речовина містить  $N$  атомів, то кількість атомів  $dN_{роз}$ , які зазнають перетворення у деякий час  $dt$ , буде дорівнювати

$$dN_{роз} = \lambda N dt.$$

Тоді аналогічно кількість ядер, які не розпалися

$$dN = -\lambda N dt. \quad (31.2)$$

Інтегруючи (31.2), отримуємо

$$\ln N = -\lambda t + const,$$

звідки впливає закон радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

де  $N_0$  – кількість ядер, які не розпалися в початковий момент часу,  $N$  – кількість ядер, які не розпалися в момент часу  $t$ ,  $\lambda$  – характерна для радіоактивної речовини константа, яка називається сталою розпаду. Таким чином, кількість радіоактивних атомів зменшується з часом за експоненціальним законом.

Кількість ядер, які розпалися за час  $t$ , визначається виразом

$$N_{\text{роз}} = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Час, за який розпадається половина початкової кількості атомів, називається періодом напіврозпаду  $T$ . Величина  $T$  визначається умовою

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T},$$

звідки

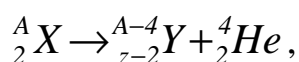
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Період напіврозпаду для відомих у наш час радіоактивних речовин коливається у межах від  $3 \cdot 10^{-7}$  с до  $5 \cdot 10^{15}$  років.

Може так трапитись, що виникаючі в результаті радіоактивного перетворення ядра у свою чергу будуть радіоактивними і будуть розпадатися. Нові продукти розпаду можуть також бути радіоактивними. В результаті виникає ціла низка радіоактивних перетворень. У природі існують радіоактивні ряди, родоначальниками яких є  $^{238}\text{U}$  (ряд урану),  $^{232}\text{Th}$  (ряд торію),  $^{235}\text{U}$  (ряд актиноурану). Кінцевий продукт у всіх трьох випадках – ізотопи свинцю. У першому випадку –  $^{206}\text{Pb}$ , у другому –  $^{208}\text{Pb}$ , у третьому –  $^{207}\text{Pb}$ .

Природну радіоактивність відкриту в 1836 р. Анрі Беккерель. Було встановлено, що радіоактивна речовина є джерелом трьох видів випромінювання:  $\alpha$ -промені – потік ядер  $\text{He}$ ,  $\beta$ -промені – потік електронів і  $\gamma$ -промені – електромагнітне випромінювання малої довжини хвилі (від  $10^{-3}$  Å до  $1$  Å).

**Альфа-розпад.** Альфа-промені являють собою потік ядер гелію. Розпад протікає за схемою

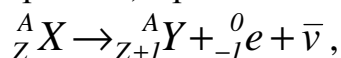


де  $X$  – материнське ядро,  $Y$  – дочірнє ядро.

Швидкості, з якими  $\alpha$ -частинки (тобто ядра  ${}^4_2\text{He}$ ) вилітають з ядра, що розпалося, дуже великі – за порядком величини  $\sim 10^7$  м/с, а кінетична енергія за порядком величини – кілька МеВ). Пролітаючи через речовину,  $\alpha$ -частинки поступово витрачають свою енергію на іонізацію молекул речовини і нарешті зупиняються. Природно, що чим більша густина речовини, тим менший пробіг  $\alpha$ -частинок до зупинки. Так, у повітрі при нормальному тиску пробіг складає декілька сантиметрів, у твердій речовині пробіг досягає всього декілька десятків мікрон (мкм).

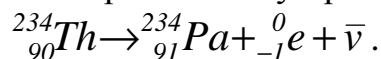
**Бета-розпад.** Існує три різновиди  $\beta$ -розпаду. В одному випадку ядро, яке зазнає перетворення, випромінює електрон, в другому – позитрон, в третьому поглинає один з електронів К-шару атома.

Перший вид розпаду ( $\beta$ -розпад) протікає за схемою



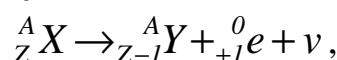
де  $\bar{\nu}$  – антинейтрино. Бета-розпад може супроводжуватися випромінюванням  $\gamma$ -променів.

**Приклад.** Перетворення торію  ${}^{234}\text{Th}$  у протактиній  ${}^{232}\text{Pa}$

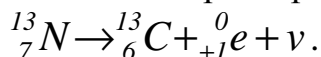


Електрони, які випромінюються при  $\beta$ -розпаді ( $\beta$  – електрони), мають різні значення енергії від 0 до  $E_{\max}$ .

Другий вид  $\beta$ -розпаду ( $\beta^+$ -розпад) протікає за схемою

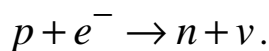


де  $\nu$  – нейтрино. Як приклад, наведемо перетворення азоту  ${}^{18}\text{N}$  у карбон  ${}^{13}\text{C}$

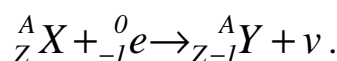


Процес супроводжується випромінюванням позитрона  $e^+$ , можливе також виникнення  $\gamma$ -променів. Позитрон є античастинкою електрона.

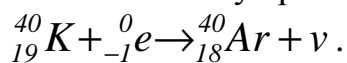
Третій вид  $\beta$ -розпаду (К-захват) полягає у тому, що ядро поглинає один з К-електронів свого атома, в результаті чого один з протонів перетворюється на нейтрон, випромінюючи при цьому нейтрон



Ядро, яке виникає, може перейти у збуджений стан. Переходячи потім у більш низькі енергетичні стани, воно випромінює  $\gamma$ -фотони. Схема процесу виглядає таким чином:



**Приклад.** Перетворення калію  ${}^{40}\text{K}$  у аргон  ${}^{40}\text{Ar}$

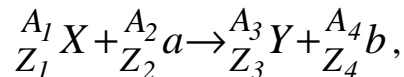


## Тема 32. Ядерні реакції

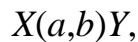
### § 148. Ядерні реакції і закони зберігання

Це процес інтенсивної взаємодії атомного ядра з елементарною частинкою, який приводить до виникнення нового ядра і нової частинки. Цей процес спостерігається при відстанях між ядром і частинкою  $\sim 10^{-15}$  м.

Найбільш розповсюджена ядерна реакція – це взаємодія легкої частинки  $a$  з ядром  $X$ , у результаті чого утворюються легка частинка  $b$  і ядро  $Y$



або в умовному вигляді



де  $X$  – материнське ядро,  $Y$  – дочірнє ядро. У ролі частинок  $a$  і  $b$  можуть бути:  $n$  – нейтрон,  $p$  – протон,  ${}^2_1H$  – дейтрон ( $d$ ),  ${}^4_2He$  –  $\alpha$ -частинка,  $\gamma$  – фотон.

При ядерних реакціях виконуються закони збереження:

- 1) електричного заряду (числа протонів)  $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$ ;
- 2) числа нуклонів (масового числа)  $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$ ;
- 3) повного імпульсу системи  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$ ;
- 4) повного моменту імпульсу  $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{M}_3 + \vec{M}_4$ .

Ядерні реакції можуть супроводжуватися як виділенням, так і поглинанням енергії. Для цього потрібно визначити дефект маси ядерної реакції

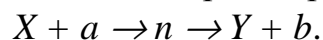
$$\Delta m = (M_x + M_a) - (M_y + M_b).$$

Якщо дефект маси  $\Delta m > 0$ , то виділяється енергія

$$E = \Delta m c^2,$$

і така реакція має назву екзотермічної (тобто з виділенням енергії). При  $\Delta m < 0$  реакція проходить з поглинанням енергії і має назву ендотермічної.

Реакції, обумовлені не дуже швидкими частинками, протікають у два етапи. На першому етапі ядро  $X$  захоплює частинку  $a$ , яка наблизилась на достатньо малу відстань, і утворюється проміжне ядро  $n$ , яке називається складеним. На другому етапі складене ядро випромінює частинку  $b$



Якщо  $a \equiv b$ , то цей процес має назву розсіяння. Якщо  $E_a = E_b$  – розсіяння пружне, при  $E_a \neq E_b$  – непружне.

Реакції, які викликаються швидкими нуклонами і дейтронами (ядрами важкого водню), протікають без утворення проміжного ядра. Такі реакції мають назву прямих ядерних взаємодій.

У ядерній фізиці ймовірність взаємодії прийнято характеризувати за допомогою так званого ефективного перерізу  $\sigma$ , який визначається за формулою

$$\sigma = \frac{\Delta N}{Nn\delta},$$

де  $N$  – густина потоку частинок, які падають на мішень,

$\Delta N$  – густина потоку частинок, які провзаємодіяли з ядрами мішені,

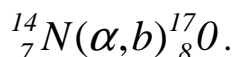
$n$  – концентрація ядер, тобто їх кількість у одиниці об'єму,

$\delta$  – товщина мішені.

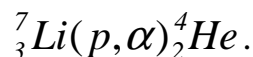
За одиницю ефективного перерізу ядерних процесів прийнято барн:

$$1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Першу ядерну реакцію було здійснено в 1919р. Резерфордом. При опромінюванні азоту  $\alpha$ -частинками, які випромінювалися радіоактивним джерелом, деякі ядра азоту перетворювалися у ядра кисню, і при цьому “випромінювався” протон



Ядерну реакцію, викликану штучно прискореними частинками, було вперше здійснено у 1932 р.



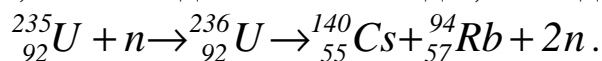
Протони прискорювалися до енергії  $\sim 0,8$  MeV за допомогою помножувача напруги.

## § 149. Ділення ядер

У 1938 р. німецькі вчені Ган і Штрассман виявили, що при опромінюванні урану нейтронами виникають елементи з середини періодичної системи – барій і лантан. Це пояснюється тим, що ядро урану, яке захопило нейтрон, ділиться на дві частини, які отримали назву уламків поділу. Поділ може проходити різними шляхами, однак більш ймовірним є поділ на уламки, маси яких відносяться як 2:3.

Енергія зв'язку, яка припадає на один нуклон, в уламків значно більша, ніж у важких ядер. Звідси випливає, що поділ важких ядер супроводжується виділенням великої кількості енергії. Але особливо важливим виявилось те, що при поділі кожного ядра звільняється декілька нейтронів. У середньому на кожний акт поділу приходить 2,5 нейтронів, що виділилися при цьому.

Один із шляхів, за яким здійснюється поділ, виглядає таким чином



Крім урану, при опромінюванні нейтронами, діляться також торій  ${}_{90}Th$  і протактиній  ${}_{91}Pa$ , а також трансурановий елемент плутоній  ${}_{94}Pu$ .

Ядра  ${}^{235}U$  і  ${}^{239}Pu$  діляться нейтронами будь-яких енергій, але особливо добре – повільними нейтронами. Для теплових (повільних) нейтронів ефективний переріз поділу  ${}^{235}U$  складає 580 барн, а  ${}^{239}Pu$  – 750 барн. Ядра  ${}^{238}U$  діляться тільки швидкими нейтронами (енергією не менше 1 MeV). При менших енергіях нейтрони поглинаються ядрами  ${}^{238}U$  без

подальшого їх поділу. Такий процес називається радіоактивним захопленням. Ефективний переріз цього процесу для теплових нейтронів складає менше 3 барн.

Виникнення при поділі ядер  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{233}\text{U}$  кількох нейтронів робить можливим здійснення ланцюгової ядерної реакції. Дійсно,  $z$  нейтронів, що були народжені при поділі одного ядра, можуть викликати поділ  $z^2$  ядер, і в результаті буде народжено  $z^2$  нових нейтронів, які викличуть поділ  $z^2$  ядер і т.д. Таким чином, кількість нейтронів, які народжуються в кожному поколінні, зростає у геометричній прогресії. Процес розмноження нейтронів у речовині, що ділиться, протікає дуже швидко. Через скінченність розмірів тіла, що ділиться, і великої проникаючої здатності нейтронів багато, які з них залишають зону реакції раніше, ніж вони будуть захоплені. Відносна частка нейтронів, що вилітають з тіла, зменшується з збільшенням маси.

Природний уран містить 99,3% ізотопу  $^{238}\text{U}$  і 0,7%  $^{235}\text{U}$ . Таким чином, на кожне ядро  $^{235}\text{U}$ , яке ділиться під дією повільних нейтронів, припадає 140 ядер  $^{238}\text{U}$ , які захоплюють не занадто швидкі нейтрони без поділу. Тому у природному стані ланцюгова реакція не виникає.

Ланцюгову ядерну реакцію в урані може бути здійснено двома способами. Перший спосіб полягає у виділенні з природного урану ізотопу  $^{235}\text{U}$ , який ділиться повільними нейтронами. Внаслідок хімічної totoжності ізотопів розділення їх являє собою дуже важку задачу.

У шматку чистого  $^{235}\text{U}$  кожний захоплений ядром нейтрон викликає поділ з народженням у середньому 2,5 нових нейтронів. Однак якщо маса такого шматка менша певного критичного значення (для  $^{235}\text{U}$   $m_{\text{кр}} \approx 1$  кг), то більшість народжених нейтронів вилітає назовні, не викликаючи поділ, так що ланцюгова реакція не виникає. При масі, яка більша критичної, нейтрони швидко розмножуються, і реакція набуває вибухового характеру. На цьому засновано дію ядерної бомби.

## § 150. Ядерні реактори

Інший спосіб здійснення ланцюгової реакції використовується в ядерних реакторах. У ролі речовини, що ділиться, в реакторах використовується природний (або трохи збагачений ізотопом  $^{235}\text{U}$ ) уран. Щоб попередити радіаційний захват нейтронів ураном  $^{238}\text{U}$ , порівняно невеликі блоки (шматки) речовини, яка ділиться, розміщують на деякій відстані один від одного, а проміжки між блоками речовини заповнюють сповільнювачем, тобто речовиною, в якій нейтрони сповільнюються до теплових швидкостей. Переріз захоплення теплових нейтронів ядром  $^{238}\text{U}$  складає всього 3 барна, в той час, як переріз поділу  $^{235}\text{U}$  тепловими нейтронами майже у 200 разів більший (580 барн). Тому, незважаючи на те, що нейтрони співударяються з ядрами  $^{238}\text{U}$  у 140 раз частіше (їх у стільки



разів більше), ніж з ядрами  $^{235}\text{U}$ , радіаційних захоплень виникає менше, ніж поділів, і при великих критичних розмірах всього пристрою коефіцієнт розмноження нейтронів може досягти значень, більших за одиницю.

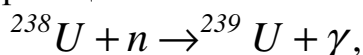
Сповільнення нейтронів здійснюється за рахунок пружного розсіяння. В цьому випадку енергія, що витрачається частинкою що сповільнюється, залежить від співвідношення тих частинок, що стикаються. Максимальна кількість енергії витрачається у випадку, якщо однакові частинки мають однакову масу. Ядра сповільнювача повинні мати малий переріз захоплення нейтронів і великий переріз пружного розсіяння. Цій умові задовольняють дейтерій  $D$ , а також ядра графіту ( $C$ ) і берилію ( $Be$ ). Для зменшення енергії нейтрона від 2 МеВ, при якій він народжується, до теплових енергій у важкій воді ( $D_2O$ ) достатньо приблизно 25 зіткнень, а в графіті ( $C$ ), або у берилію ( $Be$ ) – приблизно 100 зіткнень.

Перший уран-графітовий реактор було пущено в 1942 р. На рис. 32.1 показано схему реактора на уповільнених нейтронах. Цифрою 1 позначено сповільнювач – графіт, 2 – блоки з урану, 3 – стрижні, які містять кадмій або бор, 4 – біологічний захист. Ці стрижні служать для регулювання процесу у реакторі. Кадмій і бор інтенсивно поглинають нейтрони, тому введення стрижнів у реактор зменшує коефіцієнт розмноження нейтронів, виведення – збільшує. Спеціальний автоматичний пристрій, який керує стрижнями, дозволяє підтримувати розвинену в реакторі потужність на заданому рівні.

Перші промислові ядерні реактори призначалися для виробництва подільного матеріалу для ядерних бомб – плутонію. Застосування ядерної енергії у мирних цілях вперше здійснено в СРСР. У 1954 році в СРСР було введено до експлуатації першу атомну електростанцію, потужністю 5000 кВт. Енергія, яка виділяється в активній зоні реактора, знімається теплоносієм, який циркулює у замкненому контурі. У теплообміннику теплоносіє віддає своє тепло воді, перетворюючи її на пару, яка обертає турбіну.

Реактори зі сповільнювачем працюють на сповільнених нейтронах, використовуючи пальне, збагачене ізотопом ( $^{235}_{92}\text{U}$  або  $^{239}_{94}\text{Pu}$ ).

Були побудовані реактори на швидких нейтронах. Схема такого реактора на рис. 32.2, де 1 – активна зона з плутонієвих стрижнів; 2 – природний уран  $^{238}\text{U}$ ; 3 – біологічний захист. Ядра плутонію добре діляться швидкими нейтронами і підтримують ланцюгову реакцію, тому сповільнювач не потрібен. У природному урані нейтрони, які вилетіли з активної зони, вступають в реакцію



тобто перетворюють уран на плутоній. До того ж кількість виникаючих ядер  $\text{Pu}$  здатна перевищувати кількість ядер, які діляться і які було витрачено на підтримку роботи реактора. На діючих реакторах отримано коефіцієнт відтворення  $1,4 \div 1,7$ , тобто витрачаючи 1 кг плутонію, реактор на швидких нейтронах відтворює  $1,4 \div 1,7$  кг плутонію.

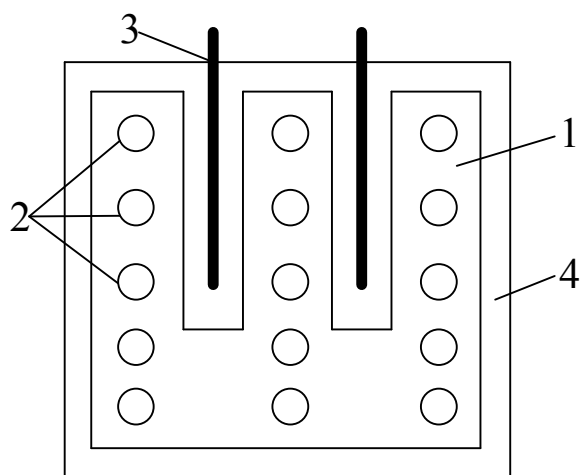


Рис. 32.1

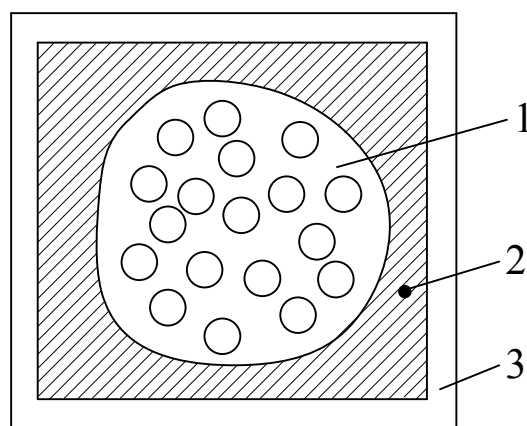


Рис. 32.2

## § 151. Термоядерні реакції

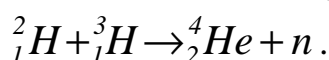
Ми вже відмічали, що ядерний синтез, тобто злиття легких ядер у важче ядро, супроводжується, як і поділ важких ядер, виділенням великих кількостей енергії. Оскільки для синтезу ядер необхідні високі температури, цей процес називається термоядерною реакцією.

Щоб подолати потенціальний бар'єр, обумовлений кулонівським відштовхуванням, ядра з порядковими номерами  $z_1$  і  $z_2$  повинні мати енергією

$$E = \frac{z_1 z_2 e^2}{r_{\text{я}}},$$

де  $r_{\text{я}}$  – радіус дії ядерних сил, який дорівнює  $\sim 2 \cdot 10^{-15}$  м. Навіть для найлегших ядер з  $z_1 = z_2 = 1$  ця енергія складає  $E = 0,7$  МеВ. На частку кожного із ядер, які співударяються, припадає половина цієї величини. Середній енергії теплового руху, яка дорівнює  $0,35$  МеВ, за формулою  $E = kT$  відповідає температура  $\sim 2 \cdot 10^9$  К. Однак, синтез легких ядер може протікати і при значно нижчих температурах. Внаслідок статистичного розподілу частинок за швидкостями є деяка кількість ядер, енергія яких значно перевищує середнє значення. Тому деякі термоядерні реакції протікають вже при температурах  $\sim 10^7$  К.

Особливо сприятливі умови для злиття ядер дейтерію  ${}^2_1\text{H}$  і тритію  ${}^3_1\text{H}$



Ця реакція супроводжується виділенням енергії у  $17,6$  МеВ, що складає  $\sim 3,5$  МеВ на нуклон. Для порівняння зазначимо, що поділ ядра урану приводить до вивільнення  $\sim 0,85$  МеВ на нуклон.

Для реалізації керованої термоядерної реакції необхідно утворити і підтримувати у деякому об'ємі температуру  $\sim 10^8$  К ( $100$  мільйонів градусів). При таких високих температурах речовина являє собою повністю іонізований

газ – плазму. На шляху здійснення керованої термоядерної реакції стоять великі труднощі. Поряд з необхідністю отримання надзвичайно високих температур, виникає проблема утримання плазми у заданому об'ємі. Доторкання плазми до стінок камери приведе до охолодження плазми. Крім того, стінка з будь-якої речовини при такій температурі негайно випариться.

Для того, щоб термоядерна реакція протікала з великим виділенням енергії, потрібно ще мати необхідну концентрацію ядер дейтерію і тритію у одиниці об'єму (інакше говорячи, потрібну густину плазми). Чим вища концентрація ядер атомів, тим менше часу необхідно, щоб утримувати плазму, і навпаки. Чисельно ця залежність враховується критерієм Лоусона: для кожної термоядерної реакції і температури плазми є мінімальне необхідне значення добутку концентрації ядер і часу утримання плазми.

Для дейтерій-тритієвої реакції ( $D+T$ -реакції) і  $T=10^8$  К критерій Лоусона дорівнює  $3 \cdot 10^{14}$ . Це означає, що при концентрації ядер атомів  $3 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup> час утримання плазми повинен бути не менше 1 с.

Радянські вчені запропонували утримувати плазму у заданому об'ємі за допомогою магнітного поля. Ця програма створення термоядерного реактора отримала назву ТОКАМАК (від початкових букв виразу “Тороїдна камера з магнітною котушкою”). Схему термоядерного реактора ТОКАМАК наведено на рис. 32.3. Камера являє собою тор (на рис. показано у перерізі його половина), 1 – плазма, 2 – бланкет (поглинач нейтронів), 3 – біологічний захист, 4 – обмотка котушки, 5 – обмотка індуктора.

Реактор працює в імпульсному режимі. Перші 5-10 с утворюється плазма і нагрівається до температури “запалювання”. Високу температуру отримують, пропускаючи через плазму дуже сильний електричний струм  $\sim 10^6$  А. Для цього утворюється розряд величезного конденсатора через обмотку індуктора. Для початку термоядерної реакції при тиску плазми 1 атм і  $T = 10^8$  К її необхідно утримати за допомогою магнітного поля котушок протягом  $\sim 1$  с.

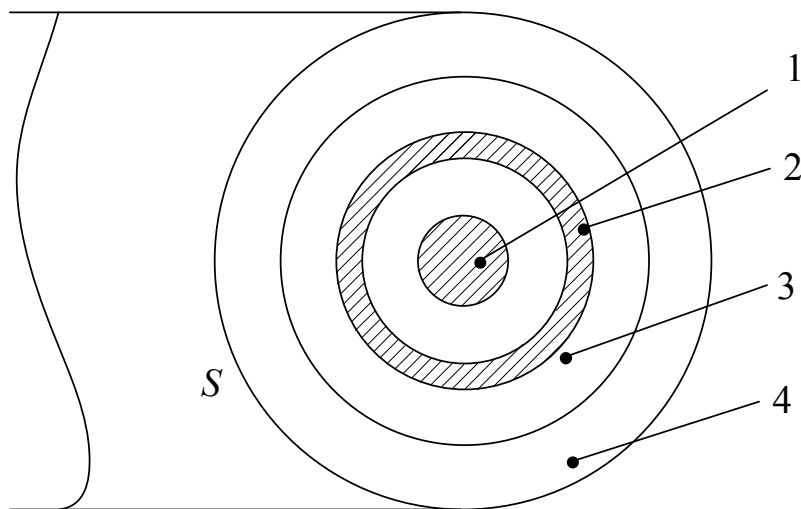


Рис. 32.3

Енергія, яка утворюється у результаті термоядерної реакції, сприймається на 80% нейтронами і на 20% ядрами атомів гелію ( $\alpha$ -частинками). Нейтрони вільно виходять із плазми і потрапляють в оболонку, яка її оточує, – бланкет, де поглинаються і віддають свою енергію. Далі за допомогою теплоносія енергія відводиться до теплообмінника.

### Список літератури

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. – Т. 1-3.
2. Зисман Г. А., Тодес О.М. Курс общей физики. – М.: Наука, 1994. – Т. 1-3.
3. Дущенко В. П., Кучерук І. М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки, молекулярної фізики і термодинаміки. – К.: Вища школа, 1993.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальна фізика. Електрика і магнетизм. К.: Вища школа, 1995.
5. Богацька І. Г., Головка Д. Б., Маляренко Д. А., Ментковський Ю. Л. Загальні основи фізики. – К.: Либідь, 1995. – Т. 1-2.

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Розділ 1. МЕХАНІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	4
Тема 1. Кінематика матеріальної точки.....	4
§ 1. Загальні положення.....	4
§ 2. Швидкість.....	4
§ 3. Розрахунки пройденого шляху.....	6
§ 4. Прискорення.....	7
§ 5. Прискорення при криволінійному русі.....	9
Тема 2. Динаміка матеріальної точки.....	10
§ 6. Класична механіка. Закони Ньютона.....	10
§ 7. Принцип відносності Галілея.....	10
§ 8. Імпульс матеріальної точки.....	11
§ 9. Центр інерції системи матеріальних точок.....	12
§ 10. Закон збереження імпульсу.....	13
Тема 3. Робота і енергія.....	15
§ 11. Механічна робота.....	15
§ 12. Потужність.....	16
§ 13. Консервативні і неконсервативні сили.....	17
§ 14. Приклади полів сил.....	17
§ 15. Енергія.....	18
§ 16. Закон збереження повної механічної енергії.....	20
§ 17. Зв'язок між потенціальною енергією і силою.....	21
Розділ 2. МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА.....	23
Тема 4. Кінематика обертального руху.....	23
§ 18. Кутова швидкість. Кутове прискорення.....	23
§ 19. Зв'язок між лінійними і кутовими величинами.....	25
Тема 5. Динаміка обертального руху.....	27
§ 20. Момент сил.....	27
§ 21. Основне рівняння динаміки обертального руху.....	28
§ 22. Момент інерції твердого тіла.....	29
§ 23. Момент імпульсу матеріальної точки.....	31
§ 24. Закон збереження моменту імпульсу.....	32
§ 25. Момент імпульсу твердого тіла.....	32

§ 26. Кінетична енергія твердого тіла.....	33
§ 27. Робота при обертанні твердого тіла.....	34
<b>Розділ 3. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА.....</b>	<b>36</b>
Тема 6. Загальні поняття молекулярної фізики і термодинаміки.....	36
§ 28. Задачі молекулярної фізики і термодинаміки.....	36
§ 29. Стани і процеси.....	36
§ 30. Внутрішня енергія системи.....	37
§ 31. Перший закон термодинаміки.....	38
§ 32. Робота системи при зміні об'єму.....	38
Тема 7. Елементарна кінетична теорія газів.....	40
§ 33. Рівняння кінетичної теорії газів для тиску.....	40
§ 34. Рівнорозподіл енергії за ступенями вільності.....	41
§ 35. Внутрішня енергія і теплоємність ідеального газу.....	42
§ 36. Рівняння адіабатичного процесу для ідеального газу.....	44
Тема 8. Розподіл молекул.....	46
§37. Розподіл молекул за швидкостями (розподіл Максвелла)	46
§ 38. Барометрична формула.....	47
§ 39. Розподіл частинок за потенціальними енергіями (розподіл Больцмана).....	48
§ 40. Середня довжина вільного пробігу молекул.....	49
Тема 9. Явища переносу.....	51
§ 41. Явище внутрішнього тертя.....	51
§ 42. Теплопровідність газів.....	52
§ 43. Дифузія в газах.....	53
Тема 10. Термодинаміка.....	55
§ 44. Оборотні процеси.....	55
§ 45. ККД теплової машини.....	55
§ 46. Другий закон термодинаміки.....	56
§ 47. Цикл Карно і його ККД.....	56
§ 48. Нерівність Клаузіуса.....	58
§ 49. Ентропія.....	59
§ 50. Властивості ентропії.....	60
§ 51. Вільна і зв'язана енергії системи.....	62

Тема 11. Твердий стан.....	63
§ 52. Відмінні риси кристалічного стану.....	63
§ 53. Фізичні типи кристалів.....	64
§ 54. Тепловий рух в кристалах.....	65
Тема 12. Рідкий стан.....	67
§ 55. Будова рідин.....	67
§ 56. Поверхневий натяг.....	67
§ 57. Тиск під викривленою поверхнею рідини.....	69
§ 58. Явища на межі рідини і твердого тіла.....	70
<b>Розділ 4. ЕЛЕКТРОСТАТИКА.....</b>	<b>72</b>
Тема 13. Електричне поле у вакуумі.....	72
§ 59. Закон Кулона.....	72
§ 60. Електричне поле. Напруженість поля.....	72
§ 61. Потенціал електричного поля.....	73
§ 62. Енергія взаємодії системи зарядів.....	75
§ 63. Зв'язок між напруженістю і потенціалом.....	76
§ 64. Еквіпотенціальні поверхні.....	77
§ 65. Потік вектора напруженості.....	78
§ 66. Теорема Гаусса-Остроградського.....	79
§ 67. Приклади використання теореми Гаусса-Остроградського.....	80
Тема 14. Електричне поле у діелектриках.....	85
§ 68. Полярні і неполярні діелектрики.....	85
§ 69. Поляризація діелектриків.....	86
§ 70. Зв'язані заряди при поляризації.....	87
§ 71. Опис поля у діелектриках.....	88
Тема 15. Провідники у зовнішньому електричному полі.....	91
§ 72. Рівновага та розподіл зарядів на провіднику.....	91
§ 73. Провідник у зовнішньому електричному полі.....	92
§ 74. Електроємність провідника.....	92
§ 75. Конденсатори.....	93
Тема 16. Енергія електричного поля.....	95
§ 76. Енергія зарядженого провідника.....	95
§ 77. Енергія зарядженого конденсатора.....	95
§ 78. Енергія електричного поля.....	96



<b>Розділ 5. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА.....</b>	<b>97</b>
<b>Тема 17. Постійний електричний струм.....</b>	<b>97</b>
§ 79. Електричний струм. Сила струму.....	97
§ 80. Електрорушійна сила.....	98
§ 81. Закон Ома.....	99
§ 82. Закон Джоуля-Ленца.....	101
§ 83. Закони послідовного і паралельного з'єднання провідників.....	102
§ 84. Розгалужені електричні кола. Правила Кірхгофа.....	103
<b>Тема 18. Магнітне поле у вакуумі.....</b>	<b>105</b>
§ 85. Взаємодія струмів. Магнітне поле.....	105
§ 86. Закон Біо-Савара-Лапласа.....	106
§ 87. Поле прямолінійного струму.....	107
§ 88. Циркуляція вектора магнітної індукції.....	108
§ 89. Поле соленоїда.....	110
<b>Тема 19. Взаємодія струмів і частинок з магнітним полем.....</b>	<b>111</b>
§ 90. Закон Ампера.....	111
§ 91. Сила Лоренца.....	111
<b>Тема 20. Магнітне поле у речовині.....</b>	<b>113</b>
§ 92. Намагнічування речовини.....	113
§ 93. Опис поля у магнетиках.....	114
§ 94. Діамагнетизм.....	116
§ 95. Парамагнетизм.....	116
§ 96. Феромагнетизм.....	117
<b>Тема 21. Електромагнітна індукція.....</b>	<b>119</b>
§ 97. Явище електромагнітної індукції.....	119
§ 98. Індуктивність.....	120
§ 99. Самоіндукція.....	120
§ 100. Енергія магнітного поля.....	122
<b>Тема. 22. Класична теорія провідності металів.....</b>	<b>123</b>
§ 101. Основні положення.....	123
§ 102. Закон Ома.....	124
§ 103. Закон Джоуля-Ленца.....	125

<b>Розділ 6. КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ.....</b>	<b>126</b>
<b>Тема 23. Гармонічні коливання.....</b>	<b>126</b>
§ 104. Коливальний рух.....	126
§ 105. Гармонічні коливання.....	126
§ 106. Вільні механічні гармонічні коливання.....	127
§ 107. Вільні електромагнітні коливання.....	127
§ 108. Згасаючі механічні коливання.....	129
§ 109. Згасаючі електричні коливання.....	130
§ 110. Вимушені коливання.....	131
<b>Тема 24. Хвилі.....</b>	<b>133</b>
§ 111. Хвилі і їх характеристики.....	133
§ 112. Рівняння плоскої хвилі.....	134
§ 113. Хвильове рівняння.....	135
§ 114. Електромагнітні хвилі.....	135
<b>Розділ 7. ОПТИКА.....</b>	<b>137</b>
<b>Тема 25. Хвильова оптика.....</b>	<b>137</b>
§ 115. Світло і його природа.....	137
§ 116. Світлова хвиля.....	137
<b>Тема 26. Інтерференція світла.....</b>	<b>139</b>
§ 117. Поняття про інтерференцію світла.....	139
§ 118. Умови інтерференційних максимумів і мінімумів.....	140
§ 119. Дослід Юнга.....	141
§ 120. Інтерференція у тонких плівках.....	143
<b>Тема 27. Дифракція світла.....</b>	<b>145</b>
§ 121. Дифракція.....	145
§ 122. Принцип Гюйгенса-Френеля.....	146
§ 123. Зони Френеля.....	147
§ 124. Дифракція Френеля на круглому отворі.....	148
§ 125. Дифракція Фраунгофера на щілині.....	150
§ 126. Дифракційна ґратка.....	151
<b>Тема 28. Поляризація світла.....</b>	<b>153</b>
§ 127. Види поляризації.....	153
§ 128. Поляризатори.....	154

§ 129. Поляризація при відбиванні і заломленні.....	155
§ 130. Поляризація при подвійному променезаломленні.....	157
§ 131. Штучне подвійне променезаломлення.....	159
<b>Розділ 8. КВАНТОВА ОПТИКА.....</b>	<b>161</b>
Тема 29. Теплове випромінювання.....	161
§ 132. Характеристики теплового випромінювання.....	161
§ 133. Закони теплового випромінювання.....	162
§ 134. Формула Релея-Джинса.....	163
§ 135. Формула Планка.....	163
§ 136. Фотони і їх властивості.....	164
<b>Розділ 9. КВАНТОВА МЕХАНІКА.....</b>	<b>166</b>
Тема 30. Квантово-механічні уявлення.....	166
§ 137. Гіпотеза де Бройля.....	166
§ 138. Квантово-механічний опис руху мікрочастинок.....	167
§ 139. Атом гідрогену.....	168
§ 140. Багатоелектронні атоми.....	170
§ 141. Спін електрона.....	171
§ 142. Енергетичні рівні в атомі.....	171
§ 143. Основні види міжатомного зв'язку молекул.....	173
<b>Розділ 10. ЯДЕРНА ФІЗИКА.....</b>	<b>175</b>
Тема 31. Атомне ядро.....	175
§ 144. Склад і характеристика атомного ядра.....	175
§ 145. Дефект маси і енергія зв'язку ядра.....	176
§ 146. Природа ядерних сил.....	177
§ 147. Радіоактивність.....	179
Тема 32. Ядерні реакції.....	182
§ 148. Ядерні реакції і закони зберігання.....	182
§ 149. Ділення ядер.....	183
§ 150. Ядерні реактори.....	184
§ 151. Термоядерні реакції.....	186
<b>Список літератури.....</b>	<b>188</b>

## Навчальне видання

**ПЕТЧЕНКО** Олександр Матвійович,

**СИСОЄВ** Анатолій Сергійович,

**НАЗАРЕНКО** Євгеній Іванович,

**БЕЗУГЛИЙ** Анатолій Васильович

Конспект лекцій з курсу **загальної фізики** (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів за 6.080101 Геодезія картографія та землеустрій, 6.170202 Охорона праці, 6.050701 Електротехніка та електротехнології, 6.070101 Транспортні технології (за видами транспорту)).

Відповідальний за випуск: *Є. І. Назаренко*

Редактор: *З. І. Зайцева*

Комп'ютерне верстання: *І. В. Волосожарова*

План 2010, поз. 220 Л

---

Підп. до друку 27.10.2010  
Друк на ризографі.  
Зам. №

Формат 60x84/1/16  
Ум. друк. арк. 8,1  
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731  
від 19.12.2001