ляторных маршрутных транспортных средств – электрических, инерционных и иных – которые за время вынужденных координационных простоев плюс посадка-высадка могут поднять пантограф и подзарядиться.

В неприятной ситуации оказывается маршрутное транспортное средство, поворачивающее направо в конфликте с пешеходами. Дело в том, что справа от троллейбуса водитель очень плохо видит, а в некоторых машинах ничего не видит. В этом случае отнесение пешеходного перехода на 8-10 м несколько улучшило бы видимость.

Представленные в статье данные позволяют сделать вывод, что для обеспечения эффективного слияния движения троллейбусов с остальным транспортным потоком необходимо обеспечить соответствие оформления остановочных пунктов всем нормам и правилам, избежать простоев троллейбусов на регулируемых перекрестках за счет оборудования остановочных пунктов светофорами, согласованными с работой светофорных объектов на перекрестках.

1.СНиП 2.05.09-90. Трамвайные и троллейбусные линии.

2.О новых нормах проектирования трамвайных и троллейбусных линий // Бюл. строит. техники. – 1976. – №7. – С.24.

3.Поляков А.А. Троллейбус в системе городского транспорта // Тр. Всесоюз. пост. бюро трамв. съездов. Вып.13. – М.: Гострансиздат, 1935.

4.Римкус А. Исследование взаимодействия транспорта в зоне остановок автобусов и троллейбусов // Архитектура и градостроительство. Вып. 6. – Вильнюс: Мокслас, 1978. – С.52-63.

5.СНиП II 41-76. Электрифицированный городской транспорт // Трамвайные и троллейбусные пути. – М., 1977.

6.Томилин А.И. Организация движения трамвая и троллейбуса. – М.: Стройиздат, 1969. – 240 с.

Получено 14.02.2006

УДК 534.1, 621.81-192

В.П.ШПАЧУК, д-р техн. наук, Я.В.ПЛОТНИЦКАЯ
Харьковская национальная академия городского хозяйства

ДВУМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Приводятся исследования, посвященные особенностям применения двумерного преобразования Лапласа для анализа свободных продольных колебаний призматических стержней. Показано, что при этом начальные и граничные условия для всех типов задач учитываются в изображающих уравнениях автоматически, в отличие от классического решения по методу Фурье.

На практике большинство деталей и узлов строительных конструкций, объектов транспорта, энергетики, машиностроения, авиационной и космической техники распределены непрерывным образом. К числу таких объектов относятся, например, стержни, валы, пластины, оболочки и др. Авторами рассматриваются колебания упругих тел, материал которых однороден, изотропен и подчиняется закону Гука. Кроме того, предполагается, что перемещение тел достаточно малы. Это позволяет рассматривать их поведение при динамических возмущениях как линейно упругое.

В настоящей работе в отличие от известных классических методов решения задач упругих колебаний стержней [1, 4] используется дважды изображающее уравнение Лапласа, которое приводит не к дифференциальным уравнениям относительно неизвестных, а к алгебраическим, и, кроме того, оно содержит в себе начальные и граничные условия, учитывающиеся автоматически. Также здесь не требуется последовательного нахождения общего и частного решений дифференциального уравнения. Особенно это становится актуальным для уравнений в частных производных с ненулевой правой частью, а также для случая диссипативных систем.

В связи с изложенным настоящая работа сориентирована на применение двумерного преобразования Лапласа в задачах теории упругости. Исследования посвящены рассмотрению продольных колебаний $u(x,t)$ призматических стержней длиной l (м), сечением A (м^2), погонной массой μ (Н·с^2/м^2) и модулем упругости E (Н/м^2) на базе двумерного преобразования Лапласа, в отличие от классического метода Фурье, описанного в работах [1, 4].

При этом установлены особенности и преимущества применения двумерного преобразования Лапласа для решения рассмотренного класса уравнений теории упругости.

Рассмотрим (вариант 1) задачу свободных продольных колебаний стержня при следующих начальных и граничных условиях: $u(0, t) = u(l, t)=0$ (концы стержня заделаны), $u(x, 0) = a \sin (N\pi x/L)$, $\dot{u}(x,0)=0$.

В соответствии с [1, 4] уравнение колебаний стержня имеет вид

$$u''(x,t) - c^2{}_1\,\ddot{u}(x,t) = 0, \qquad (1)$$

где $c^2{}_1 = \mu/EA$.

В области изображений граничные и начальные условия будут [2, 3]:

$$U(s,0) = \frac{N\pi\pi}{l}\frac{1}{s^2+\frac{N\pi}{l}} = c_2 a\frac{1}{s^2+c_2^2}, \quad \dot{U}(s,0)=0,\ U(l,p)=0,$$

где $c_2 = N\pi/l$.

Применим к уравнению (1) преобразование Лапласа по параметру x:

$$s^2\,U(s,t) - c^2{}_1\,\ddot{U}(s,t) = s\,u(0,t) + u'(0,t). \qquad (2)$$

Преобразуем далее уравнение (2) по Лапласу по параметру t:

$$s^2\,U(s,p) - c^2{}_1\,p^2\,U(s,p) = U'(0,s) - c^2{}_1\,p\,U(s,0) - c^2{}_1\,\dot{U}(s,0),$$

$$s^2\,U(s,p) - c^2{}_3\,U(s,p) = -\,c_1^2 c_2 a p \frac{1}{s^2 + c_2^2} + D, \qquad (3)$$

где $c^2{}_3 = c^2{}_1\,p^2$; $D = U'(0,s)$.

Из уравнения (3) получим

$$U(s,p) = -c_1^2 c_2 a p \frac{1}{s^2 + c_2^2 s^2 - c_3^2} + D \frac{1}{s^2 - c_3^2}. \qquad (4)$$

Для нахождения коэффициента D применим к (4) обратное преобразование Лапласа по параметру s при $x = l$, т.е. при $U(l, p) = 0$:

$$U(x,p) = -c_1^2\,c_2\,a\,p\left(\frac{c_4}{c_2}\sin(c_2\,x) - \frac{c_4}{c_3}\operatorname{sh}(c_3\,x)\right) + D\frac{1}{c_3}\operatorname{sh}(c_3\,x),$$

$$U(l,p) = -c_1^2\,c_2\,a\,p\left(\frac{c_4}{c_2}\sin(c_2\,l) - \frac{c_4}{c_3}\operatorname{sh}(c_3\,l)\right) + D\frac{1}{c_3}\operatorname{sh}(c_3\,l) = 0, \qquad (5)$$

где $c_4 = -1/(c^2{}_2 + c_3{}^2)$.

После преобразования (5) получим

$$D = -\frac{c_1^2 a\,N\,\pi\,c_4\,p}{l} = -c_1^2\,c_2\,c_4\,a\,p. \qquad (6)$$

Подставим (6) в (5):

$$U(x,p) = -c_1^2\,c_2\,a\,p\left(\frac{c_4}{c_2}\sin(c_2\,x) - \frac{c_4}{c_3}\operatorname{sh}(c_3\,x)\right) - \frac{c_1^2\,c_2\,c_4\,a\,p}{c_3}\operatorname{sh}(c_3 x) =$$

$$= -\frac{c_1{}^2\,c_2\,c_4\,a\,p}{c_2}\sin(c_2\,x) = \frac{\mu\pi a p}{EA\,l\,\frac{\pi}{l}\left(c_2{}^2 + c_3{}^2\right)}\sin(c_2\,x) = \qquad (7)$$

$$= \frac{\mu a}{EA}\,\frac{p}{c_1{}^2 p^2 + c_2^2}\sin(c_2\,x) = \frac{\mu a}{EA\,c_1{}^2}\,\frac{p}{p^2 + \frac{c_2^2}{c_1{}^2}}\sin(c_2\,x) =$$

$$= \frac{\mu a}{EA\frac{\mu}{EA}}\,\frac{p}{p^2 + \frac{c_2^2}{c_1{}^2}}\sin(c_2\,x) = a\frac{p}{p^2 + \frac{c_2^2}{c_1{}^2}}\sin(c_2\,x).$$

Преобразуем (7) в область оригиналов:

$$u(x,t) = a\cos\left(\frac{c_2}{c_1}t\right)\sin\left(c_2 x\right)\cdot \tag{8}$$

Для момента времени $t=0$ получим $u(x,0) = a\sin(c_2 x) =$ $a\sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right)$, что отвечает заданным начальным условиям.

В соответствии с (8) каждой точке оси стержня с координатой x соответствует гармоническое колебание, осуществляемое по закону $\cos\left(\frac{N\pi}{l}\sqrt{\frac{EA}{\mu}}\,t\right)$ с амплитудой $a\sin\left(\frac{N\pi}{l}x\right)$.

Второй тип (вариант 2) рассматриваемой задачи соответствует следующим начальным и граничным условиям: $u(x,0)=0$, $\dot u(x,0)=v$, $u(0,t) = 0$, $u'(l,t)= 0$, $\dot u(s,0) = v/s$, $U(0,p) = 0$, $U'(l,p) = 0$. При этом в области изображений для параметров t и s получим соответственно

$$U''(x,p) - c^2{}_3 U(x,p) = - c^2{}_1 p u(x,0) - c^2{}_1 \dot u(x,0),$$

$$s^2 U(s,p) - c^2{}_3 U(s,p) = - c^2{}_1 V/s + D, \tag{9}$$

где $D = U'(0,p)$.

Из уравнения (9)

$$U(s,p) = - c^2{}_1 v/ s(s^2 - c^2{}_3) + D / (s^2 - s^2{}_3). \tag{10}$$

Применим к (10) обратное преобразование Лапласа по параметру s:

$$U(x,p) = - c^2{}_1 v\ \mathrm{ch}\, c_3 x/ c^2{}_3 + c^2{}_1 v/ c^2{}_3 + D\ \mathrm{sh}\, c_3 x/c_3. \tag{11}$$

Запишем формулу (11) для граничного условия $U'(l, p) = 0$:

$$U'(l,p) = - c^2{}_1 v\ \mathrm{sh}\, c_3 l/ c_3 + D\ \mathrm{ch}\, c_3 l,$$

откуда найдем $D = c^2{}_1 v\ \mathrm{sh}\, c_3 l / c_3\ \mathrm{ch}\, c_3 l$.

Тогда выражение (10) примет вид

$$U(x,p)= -c^2{}_1 v\ \mathrm{ch}\, c_3 x/ c^2{}_3 + c^2{}_1 v/ c^2{}_3 + c^2{}_1 v \cdot \mathrm{sh}\, c_3 x\ \mathrm{sh}\, c_3 l/ c_3^2\ \mathrm{ch}\, c_3 l =$$

$$= c^2{}_1 v/ c^2{}_3 - (c^2{}_1 v/ c^2{}_3)\,((\mathrm{ch}\, c_3 x\ \mathrm{ch} c_3 l - \mathrm{sh}\, c_3 x\ \mathrm{sh}\, c_3 l)/ \mathrm{ch}\, c_3 l) =$$

$$= v\ (1/p^2) - v\ (1/p^2)\ (\mathrm{ch}\, c_1 (l-x)\, p) / \mathrm{ch} c_1 l p.$$

В области оригиналов получим

$$u(x,t) = vt - vt -$$

$$- \frac{2c_1 l v}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi(l-x)}{l}\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{c_1 l}t\right) =$$

$$= \frac{8c_1 l v}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin\left((2n-1)\frac{\pi x}{2l}\right) \sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{c_1 l} t\right).$$

Если $t = 0$, то для начальной скорости получим

$$\dot{u}(x,0) = \frac{8c_1 l v}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin\left((2n-1)\frac{\pi x}{2l}\right) \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{c_1 l} =$$

$$= v\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left((2n-1)\frac{\pi x}{2l}\right) = v\frac{4}{\pi}\frac{\pi}{4} = v,$$

что не противоречит заданным начальным условиям и результатам работ [1, 4].

Рассмотрим далее задачу продольных свободных колебаний однородного стержня (вариант 3) при следующих начальных и граничных условиях: $u(x,0) = Fx/EA = \varepsilon_0 \cdot x$; $\dot{u}(x,0) = 0$ (стержень растянут приложенной в конце его продольной силой F, которая внезапно убирается при $t = +0$); $u(0,t) = 0$ (один из концов стержня жёстко закреплен), $u'(l,t) = 0$.

Свободные колебаний стержня описываются уравнением (1). Преобразуем его с учетом начальных условий задачи к виду

$$U''(x,p) - c^2{}_3\, U(x,p) = -\, c^2{}_1\, \varepsilon_0\, p\, x. \qquad (12)$$

Далее применим к (12) преобразование Лапласа по параметру x:

$$s^2\, U(s,p) - c^2{}_3\, U(s,p) = -\, c^2{}_1\, \varepsilon_0\, p(1/ s^2) + s\, U(0,p) + U'(0,p)\, . \qquad (13)$$

Учтем в (13) граничное условие при $U(0,p) = 0$:

$$s^2\, U(s,p) - c^2{}_3\, U(s,) = -\, c^2{}_1\, \varepsilon_0\, p(1/ s^2) + D\,(p), \qquad (14)$$

где $D(p) = U'(0,p)$ – неизвестное граничное условие при $t = 0$.

Из (14) получим

$$U(s,p) = -c_1{}^2\, \varepsilon_o\, p \frac{1}{s^2\left(s^2 - c_3{}^2\right)} + D(p)\frac{1}{\left(s^2 - c_3{}^2\right)}. \qquad (15)$$

Преобразуем (15) в область оригиналов по x:

$$U(x,p) = -\frac{c_1{}^2\, \varepsilon_o\, p}{c_3{}^2}\left(\frac{1}{c_3}\operatorname{sh} c_3 x - x\right) + \frac{D(p)}{c_3}\operatorname{sh} c_3 x. \qquad (16)$$

Для нахождения $D(p)$ применим к (16) граничное условие $U'(l,p) = 0$:

$$D(p) = \frac{c^2{}_1\, \varepsilon_o\, p}{c_3{}^2} - \frac{c^2{}_1\, \varepsilon_o\, p}{c_3{}^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} c_3 l}. \qquad (17)$$

Подставив (17) в (16) получим

$$U(x,p)=\frac{c_1^2\,\varepsilon_o\,p\,x}{c_3^2}-\frac{c_1^2\,\varepsilon_o\,p}{c_3^3}\,\frac{\mathrm{sh}c_3x}{\mathrm{ch}c_3l}=\frac{\varepsilon_o\,x}{p}-\frac{\varepsilon_o}{c_1}\,\frac{\mathrm{sh}c_1xp}{p^2\,\mathrm{ch}c_1lp}. \qquad (18)$$

Применим далее к (18) обратное преобразование Лапласа по параметру p:

$$U(x,t)=\varepsilon_o\,x-\frac{\varepsilon_o}{c_1}\,\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\beta}^{\alpha+j\beta}\frac{\mathrm{sh}c_1xp}{p^2\cdot\mathrm{ch}c_1lp}\,e^{pt}\,dp=$$

$$=\varepsilon_o\,x-\frac{\varepsilon_o}{c_1}\left(x\,c_1-\frac{8\,c_1\,l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\,\pi x}{2l}\cos\frac{(2k-1)\,\pi}{2\,c_1\,l}\,t\right)=$$

$$=\frac{8\varepsilon_o l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\,\frac{\pi}{l}\,x\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\,\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EA}{\mu}}\,t\right). \qquad (19)$$

Следует отметить, что в настоящей работе вычисления комплексного интеграла в (19) выполнено с использованием теории вычетов [2]. При этом было установлено, что в известном табулированном решении данного интеграла (п.24.89 [3]) содержится опечатка: здесь в первом слагаемом вместо переменной t следует принять переменную x.

Полученное решение (19) не противоречит формуле для $u(x,t)$, полученной в работах [1, 4].

Проведенные исследования показали возможность и целесообразность применения двумерного преобразования Лапласа для анализа свободных продольных колебаний призматических стержней с учетом граничных и начальных условий. При этом оказывается возможным интерполяриативный анализ влияния начальных и граничных условий на параметры колебания стержней.

1.Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560 с.

2.Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования.. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

3.Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965. – 468 с.

4.Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

Получено 19.06.2006