

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА



Я.Б. Форкун, В.П. Самошкін, Г.В. Капустін, Д.В. Тугай

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять за темами

**«ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.
НЕЛІНІЙНІ КОЛА»**

з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки"

(для студентів усіх форм навчання напрямів

6.050701 - "Електротехніка та електротехнології",

6.050702 - "Електро механіка", 6.030601 - "Менеджмент")

Харків
ХНАМГ
2010

Методичні вказівки до практичних занять за темами «Перехідні процеси в лінійних електричних колах. Нелінійні кола» з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 - "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 - "Електромеханіка", 6.030601 - "Менеджмент") / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Форкун Я.Б., Капустін Г.В., Самошкін В.П., Тугай Д.В. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 39 с.

Укладачі: доц., к.т.н. Я.Б. Форкун,
доц., к.т.н. Г.В. Капустін,
доц., к.т.н. В.П. Самошкін,
к.т.н. Д.В. Тугай

Рецензент: проф., д.т.н. А.Г. Сосков

Рекомендовано кафедрою теоретичної та загальної електротехніки,
протокол № 11 від 24.06.2010 р.

ВСТУП

Електротехнікою називається широка область науки та техніки, що розглядає закони функціонування та методи розрахунку різних електричних кіл. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) - дисципліна, яка займається питаннями розрахунку і вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою усіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Видами аудиторних занять з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» (ТОЕ) є лекції, лабораторні й практичні заняття. Ці методичні вказівки призначені для проведення практичних занять з другої частини курсу ТОЕ для студентів усіх форм навчання вказаних напрямів. Практичні заняття є дуже важливими для засвоєння теоретичного матеріалу, що розглядається на лекціях. У вказівках подані загальні теоретичні відомості й приклади вирішення практичних задач, що пов'язані з розрахунком перехідних процесів у лінійних електричних колах постійного і синусоїдного струму, а також з розрахунком нелінійних електричних кіл.

Ці вказівки допоможуть студентам напрямів 6.050701 - «Електротехніка та електротехнології» і 6.050702 - «Електромеханіка» набутти навиків самостійного вирішення задач з дисципліни ТОЕ, підготуватися до лабораторних робіт і до розрахунково-графічної роботи №2 (частина 4) за темою «Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах постійного струму».

Крім того, ці методичні вказівки, що містять стислі роз'яснення деяких теоретичних положень розділів «Перехідні процеси в лінійних електричних колах постійного і синусоїдного струму», «Нелінійні електричні кола постійного і синусоїдного струму», будуть особливо корисними студентам напряму 6.030601 - «Менеджмент», яким дисципліна ТОЕ викладається протягом тільки одного семестру і містить в якості аудиторних тільки лекційні й практичні заняття.

Оволодіння методами розрахунку нелінійних кіл постійного і синусоїдного струму допоможе студентам вказаних напрямів підготовки при подальшому вивченні курсів «Промислова електроніка» і «Електроніка та мікросхемотехніка»

ТЕМА I. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ПОСТІЙНОГО І СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Загальні відомості

Перехідний процес – це процес переходу від одного до іншого режиму роботи кола, який будь-чим відрізняється від попереднього (амплітудою, фазою, частотою діючих у колі EPC , значеннями параметрів схеми). Перехідні процеси виникають в результаті різних комутацій.

Комутація – це розмикання або замикання ключів. На схемах це відображається так:



Рис. 1.1

Якщо в колі є котушки індуктивності та (або) ємності, то такий перехід не може відбутися миттєво, оскільки миттєво не може змінитися енергія електричного і магнітного полів.

Вирішити задачу з перехідного процесу – це знайти закон зміни $i(t)$, або $u(t)$ на окремих ділянках кола. Так для схем рис.1.2 та рис.1.3 другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі при замиканні ключа має вигляд відповідно:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) \cdot R = E. \quad (1.1)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E \quad (1.2)$$

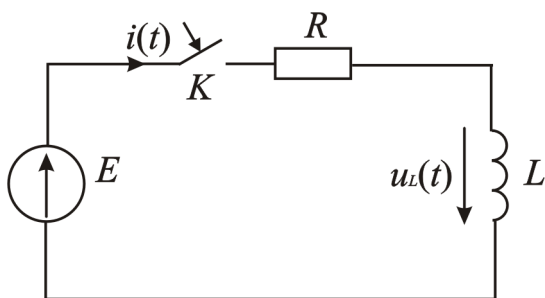


Рис. 1.2

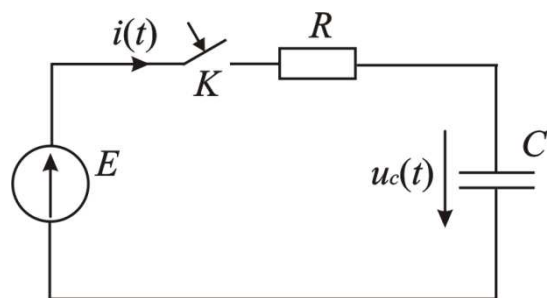


Рис. 1.3

Способи вирішення цих рівнянь, тобто знаходження таких функцій, які задовольняють рівнянням (1.1) й (1.2), є наступними:

- класичний;
- операторний;
- за допомогою інтеграла Дюамеля.

Теоретично перехідний процес вважається нескінченним; момент комутації – це момент « $t = 0$ », момент безпосередньо перед комутацією – « $t = 0-$ »; а момент безпосередньо після комутації – « $t = 0+$ ».

Перший закон комутації: в індуктивному елементі струм (і магнітний потік) безпосередньо після комутації, тобто у момент « $t = 0+$ », зберігає значення, яке він мав безпосередньо перед комутацією, тобто у момент « $t = 0-$ », а далі починає змінюватися саме з цього значення:

$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$ – струм в індуктивному елементі стрибком змінюватися не може.

Другий закон комутації: на ємнісному елементі напруга (і заряд) зберігає у момент комутації те значення, яке воно було безпосередньо перед комутацією і надалі починає змінюватися саме з цього значення:

$u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$ – напруга на ємності стрибком змінюватися не може.

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни струму $i_L(t)$ і напруги $u_C(t)$ пояснюється неможливістю стрибкоподібної зміни накопиченої енергії магнітного поля $\frac{L \cdot i^2}{2}$ в індуктивному елементі й енергії електричного

поля $\frac{C \cdot u_C^2}{2}$ в ємності.

Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Відповідно до цього методу закон зміни струму (або напруги) розглядають як суму примусового (i_{np}) і вільного (i_g) струму (або напруги), тобто

$$i(t) = i_{np} + i_g; \quad u(t) = u_{np} + u_g. \quad (1.3)$$

Примусова складова – це часткове вирішення неоднорідного диференціального рівняння, або, якщо говорити з позиції електротехніки, це значення струму або напруги в сталому режимі, тобто в припущенні, що перехідний процес повністю закінчився ($t \rightarrow \infty$) і його можна не брати до уваги.

Вільна складова – загальне вирішення однорідного рівняння (термін «вільна» означає, що ця складова є вирішенням рівняння, «вільного» від примусової сили). Її вигляд залежить від коренів характеристичного рівняння.

Повний струм – це той струм, який насправді тече у вітці при перехідному процесі, а примусова і вільна складові дають дійсну величину струму (аналогічно для напруги).

Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом

1 Довільно вибирають напрями струмів (напруг) у вітках кола.

2. Записують рішення для струмів і напруг у загальному вигляді, тобто у вигляді суми примусових і вільних складових.

Так, для схеми рис.1.3: $u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Cв}$, $i(t) = i_{Cnp} + i_{Cв} = C \frac{du_C(t)}{dt}$.

3. Визначають незалежні і залежні початкові умови.

Незалежні початкові умови (Н.П.У.) – це значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах, які відомі з режиму до комутації і стрибком змінюватися не можуть відповідно до законів комутації. Н.П.У. знаходять шляхом розрахунку схеми до комутації.

Для схеми рис.1.2 Н.П.У. - $i(0) = 0$, для схеми рис.1.3 Н.П.У. - $u_C(0) = 0$.

Значення інших струмів і напруг в момент $t = 0$ називають *залежними початковими умовами* (З.П.У.). Їх знаходять шляхом складання рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації в момент часу $t = 0$.

Для схеми рис.1.3 - $u_C(0) + i(0) \cdot R = E \Rightarrow i(0) = \frac{E - u_C(0)}{R} = \frac{E}{R}$.

4. Вважаючи, що перехідний процес повністю закінчився, для схеми після комутації визначають примусові складові струмів і напруг.

Для схеми рис.1.3 $u_{Cnp} = E$, $i_{np} = 0$.

5. Для визначення вигляду вільних складових струмів і напруг складають характеристичне рівняння і знаходять його корені.

Для схеми рис.1.3 характеристичне рівняння складене за методом вхідного опору має вигляд: $Z_{ex}(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C}$. Тоді вільна складова -

$$u_{Cв} = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$$

6. За допомогою незалежних і залежних початкових умов визначають постійні інтегрування.

Для схеми рис.1.3 $u_C = E + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$, а для $t = 0 - 0 = E + A \Rightarrow A = -E$.

7. Остаточо записують закони струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ при перехідному процесі.

$$\text{Для схеми рис.1.3 } u_C = E - E \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}; \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}.$$

Операторний метод розрахунку перехідних процесів

Операторний метод заснований на використанні поняття про зображення функцій часу. В операторному методі кожній функції часу відповідає функція нової змінної, яка позначається буквою p , і навпаки – функції змінної p відповідає певна функція часу. Функцію часу (струм, напруга, заряд, EPC) позначають $f(t)$ і називають оригіналом. Їй відповідає функція, що називається зображенням $F(p)$.

Перехід від функції часу t до функції змінної p здійснюють за допомогою перетворення (прямого) Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt, \quad (1.4)$$

де $F(p)$ – функція, що називається зображенням; $f(t)$ – оригінал (функція часу); p – комплексне число вигляду $p = a + j \cdot b$, a – дійсна частина; b – уявна частина цього комплексного числа.

Таким чином, операторний метод розрахунку перехідних процесів є методом розрахунку, заснованим на перетворенні Лапласа. Він дозволяє звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення.

Відповідність між функціями $F(p)$ і $f(t)$ записують так: $F(p) \doteq f(t)$.

Знак « \doteq » називають знаком відповідності.

Послідовність розрахунку за операторним методом

1. Складають рівняння для кола після комутації за законами Кірхгофа в інтегрально-диференційній формі.

$$\text{Для схеми рис.1.3 - } i \cdot R + u_C(t) = E, \text{ або } i \cdot R + U_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt = E,$$

2. Здійснюють заміну оригіналів відповідними зображеннями ($I(p) \doteq i(t)$).

$$\text{Для схеми рис.1.3 } I(p) \cdot R + I(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C} + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{E}{p}. \text{ З урахуванням того,}$$

$$\text{що } U_C(0) = 0 \text{ маємо } I(p) \cdot \left(R + \frac{1}{p \cdot C} \right) = \frac{E}{p}.$$

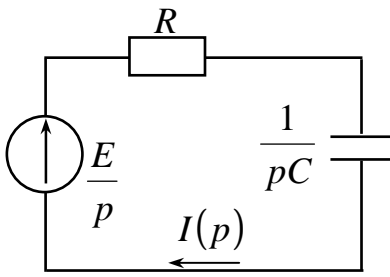


Рис. 1.4

3. Складають операторну схему заміщення – рис.1.4.

4. Використовують будь-який метод розрахунку і визначають операторні струми і напруги.

Для схеми рис.1.4 за законом Ома:

$$I(p) = \frac{E}{p \cdot \left(R + \frac{1}{p \cdot C} \right)} = \frac{E \cdot C}{R \cdot C \cdot p + 1} = \frac{E/R}{p + 1/(R \cdot C)}$$

5. Здійснюють перехід від операторних струмів і напруг до струмів і напруг функції часу (перехід від зображень до оригіналів) за допомогою формул відповідності або за допомогою формули розкладання.

Так як $e^{\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$, то в даному випадку маємо $i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$.

ЗАДАЧА 1

Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю класичним методом

В електричній схемі з джерелом постійної напруги, зображеній на рис.1.2, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри схеми: $R = 10$ Ом, $L = 100$ мГн, $E = 110$ В.

Визначити:

- струм $i(t)$ в перехідному процесі, й побудувати його криву;
- енергію магнітного поля для моменту часу $t = 0,01$ с після замикання ключа.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів;
- вміти скласти рівняння стану електричного кола після комутації;
- вміти скласти характеристичні рівняння.

Вирішення

1. Складемо рівняння електричного стану кола після замикання ключа:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + i(t) \cdot R = E.$$

2. Розв'язок рівняння знайдемо як суму примусової та вільної складових:

$$i(t) = i_{np} + i_{\epsilon}.$$

3. Н.П.У.: $i(0) = 0$ А.

4. Значення примусової складової струму визначимо при розрахунку схеми після комутації ($t \rightarrow \infty$): $i_{np} = \frac{E}{R} = \frac{110}{10} = 11 \text{ А}$.

5. Складемо характеристичне рівняння методом вхідного опору:
 $Z(p) = R + p \cdot L = 0$.

З характеристичного рівняння виразимо корінь p :

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{10}{100 \cdot 10^{-3}} = -100 \text{ с}^{-1}. \text{ Тоді характер вільного струму: } i_{\epsilon} = A \cdot e^{-100 \cdot t}.$$

6. Визначимо постійну інтегрування A :

$$i(t) = 11 + A \cdot e^{-100 \cdot t}. \text{ При } t = 0: i(0) = 0 = 11 + A \Rightarrow A = -11.$$

7. Струм в колі $i(t) = 11 - 11 \cdot e^{-100 \cdot t} = 11 \cdot (1 - e^{-100 \cdot t})$, А.

8. Напряга на індуктивності $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 110 \cdot e^{-100 \cdot t}$, В.

9. Для побудови графіка струму складемо таблицю:

$t, \text{ с}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06
$i, \text{ А}$	0	6,95	9,5	10,5	10,8	10,9

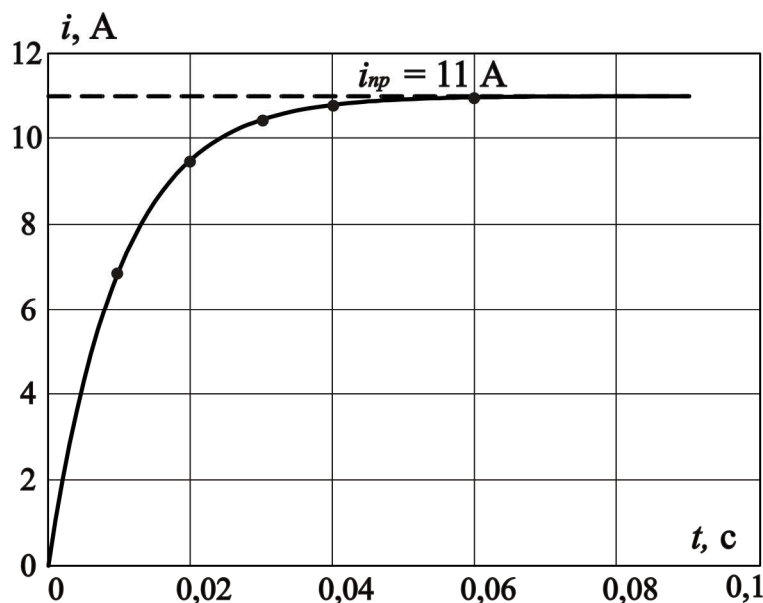


Рис. 1.5

10. Енергія магнітного поля котушки в момент часу $t = 0,01 \text{ с}$:

$$W_M(t) = \frac{L \cdot [i(t)]^2}{2} \Rightarrow W_M(0,01) = \frac{L \cdot i(0,01)^2}{2} = \frac{0,1 \cdot 6,95^2}{2} = 2,41 \text{ Дж}.$$

ЗАДАЧА 2

Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю операторним методом

В електричній схемі з джерелом постійної напруги, зображеній на рис.1.6,а при замиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри елементів кола: $E = 220$ В, $L = 0,6$ Гн, $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 12$ Ом.

Визначити операторним методом при перехідному процесі:

- струм $i(t)$;
- напругу на індуктивності $u_L(t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати порядок розрахунку перехідних процесів операторним методом в колах постійного струму;
- вміти складати операторну схему заміщення;
- вміти застосовувати формулу розкладання для знаходження оригіналів.

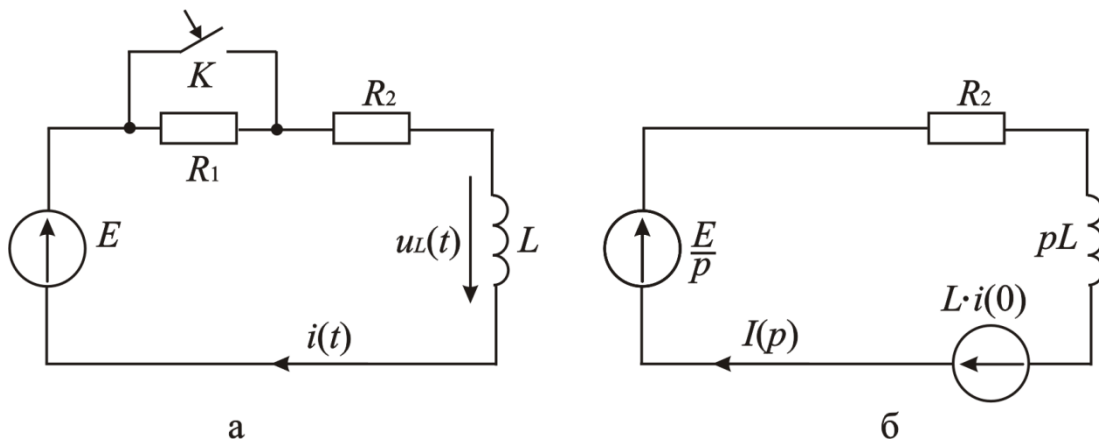


Рис. 1.6

Вирішення

1. Для схеми, що розглядається, початкові умови не є нульовими, а саме:

$$i(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{220}{8 + 12} = 11 \text{ А.}$$

Складемо операторну схему заміщення (для ненульових початкових умов) - рис.1.5, б. На схема внутрішня ЕРС – $L \cdot i(0) = 0,6 \cdot 11 = 6,6$ В.

2. За законом Ома для цієї схеми:

$$I(p) = \frac{E/p + L \cdot i(0)}{R_2 + p \cdot L} = \frac{220/p + 6,6}{12 + 0,6 \cdot p} = \frac{220 + 6,6 \cdot p}{p \cdot (12 + 0,6 \cdot p)} = \frac{N(p)}{M(p)} \Rightarrow \text{з формули}$$

розкладення:
$$i(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}.$$

3. Знайдемо корені рівняння $M(p)=0$ та підставляємо їх у вираз $N(p)=0$: $p \cdot (12 + 0,6 \cdot p) = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = -20$.

Таким чином, $N(0)=220$; $N(-20)=88$.

4. Знайдемо похідну знаменника та підставимо в отриману формулу корені рівняння $p_1 = 0, p_2 = -20$:

$$M'(p) = 2 \cdot 0,6 \cdot p + 12.$$

$$M'(0) = 12; M'(-20) = -12.$$

5. Тоді $\underline{i(t)} = \frac{220}{12} \cdot e^{0 \cdot t} - \frac{88}{12} \cdot e^{-20 \cdot t} = 18,3333 - 7,3333 \cdot e^{-20 \cdot t}$, А.

4. Визначимо операторну напругу на індуктивності:

$$U_L(p) = I(p) \cdot p \cdot L - L \cdot i(0) = \frac{220 + 6,6 \cdot p}{p \cdot (0,6 \cdot p + 12)} \cdot p \cdot L - 6,6 = \frac{132 + 3,96 \cdot p - 3,96 \cdot p - 79,2}{0,6 \cdot p + 12} =$$

$$= \frac{52,8}{0,6 \cdot p + 12} = \frac{88}{p + 20}.$$

Скористаємося формулою відповідності $\frac{1}{p+a} \div e^{-a \cdot t}$, де $a = 20 \Rightarrow$

$$\underline{u_L(t)} = 88 \cdot e^{-20 \cdot t}, \text{ В.}$$

ЗАДАЧА 3

Розрахунок перехідних процесів у нерозгалуженому електричному колі постійного струму з ємністю

У нерозгалуженому електричному колі, зображеному на рис.1.3, з параметрами $R = 10^5$ Ом, $C = 100$ мкФ, $E = 110$ В, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес.

Визначити при перехідному процесі:

- струм $i(t)$;
- напругу на конденсаторі $u_C(t)$.

Для вирішення задачі треба знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів в колах постійного струму.

Вирішення

Задачу можна вирішити двома способами: через напругу на конденсаторі $u_C(t)$ та через струм $i(t)$.

Перший спосіб

1. Запишемо загальне рівняння напруги на конденсаторі:

$$u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Cв}.$$

2. Н.П.У.: $u_C(0) = 0$ В.

3. Примусова складова напруги буде дорівнювати напрузі джерела живлення $u_{Cnp} = E = 110$ В.

4. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корінь p :

$$Z(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C} = -\frac{1}{10^5 \cdot 100 \cdot 10^6} = -0,1 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді вільна складова напруги має вигляд: $u_{Cв} = A \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.

5. Визначимо постійну інтегрування A :

$$u_C(t) = 110 + A \cdot e^{-100 \cdot t}.$$

При $t = 0$: $u_C(0) = 0 = 110 + A \Rightarrow A = -110$.

6. Напруга на конденсаторі $u_C(t) = 110 - 110 \cdot e^{-0,1 \cdot t} = \underline{110 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})}$, В.

7. Визначимо струм кола в момент комутації:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = \underline{11 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,1 \cdot t}}, \text{ А.}$$

Другий спосіб

1. Запишемо рівняння струму кола як суму примусової та вільної складових: $i(t) = i_{np} + i_{в}$.

2. Знайдемо залежну початкову умову, тобто значення $i(0)$.

Так як $u_C(0) = 0$, то за другим законом Кірхгофа -

$$i(0) = \frac{E - u_C(0)}{R} = \frac{110 - 0}{10^5} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

3. Примусова складова струму - $i_{np} = 0$.

4. Характеристичне рівняння і загальне співвідношення для вільної складової струму має такий самий вигляд, як і при першому способі, тобто $i_{в} = B \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.

5. Визначимо постійну інтегрування B :

$$i(t) = B \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Rightarrow B = i(0) = 11 \cdot 10^{-4}.$$

6. Струм кола: $i(t) = \underline{11 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,1 \cdot t}}$, А.

8. Визначимо напругу на конденсаторі в момент комутації:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt = \frac{11 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot \int_0^t e^{-0,1 \cdot t} dt = -110 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Big|_0^t = \underline{110 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})}, \text{ В.}$$

ЗАДАЧА 4

Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі синусоїдного струму з індуктивністю

В електричній схемі з джерелом синусоїдної напруги, зображеній на рис.1.7, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри елементів кола: $e(t) = 100 \cdot \sin(314 \cdot t + 91,3^\circ)$, В; $R = 30$ Ом, $L = 0,1$ Гн.

Визначити при перехідному процесі:

- струм кола $i(t)$;
- напругу на індуктивності $u_L(t)$.

Для вирішення задачі необхідно знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів у колах синусоїдного струму.

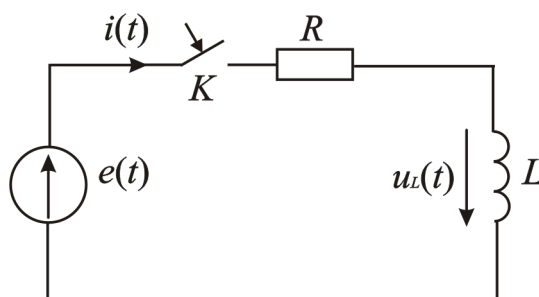


Рис. 1.7

Вирішення

1. Запишемо загальне рішення: $i(t) = i_{np} + i_{\epsilon}$.
2. Н.П.У. $i(0) = 0$.
3. Знайдемо примусову складову струму.

Спочатку розрахуємо комплексну амплітуду примусової складової стру-

$$\text{му: } \underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 91,3^\circ}}{30 + j \cdot 31,4} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 91,3^\circ}}{43,42 \cdot e^{j \cdot 46,3^\circ}} = 2,3 \cdot e^{j \cdot 45^\circ} \text{ А.}$$

Миттєве значення примусового струму – $i_{np} = 2,3 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ)$, А.

4. Складемо характеристичне рівняння і визначимо його корінь:

$$p \cdot L + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} = -\frac{30}{0,1} = -300 \text{ с}^{-1}. \text{ Таким чином вільна складова струму –}$$

$$i_{\epsilon} = A \cdot e^{-300 \cdot t}.$$

5. Визначимо постійну інтегрування A :

$$i(t) = 2,3 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ) + A \cdot e^{-300 \cdot t}.$$

При $t = 0$: $i_{np}(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2,3 \cdot \sin 45^\circ + A \Rightarrow A = -2,3 \cdot \sin 45^\circ = -1,6$ А.

6. Струм кола при перехідному процесі:

$$i(t) = 2,3 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ) - 1,6 \cdot e^{-300 \cdot t}, \text{ А.}$$

7. Визначимо напругу на індуктивності в перехідному процесі:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 72,2 \cdot \cos(314 \cdot t + 45^\circ) + 48 \cdot e^{-300 \cdot t} = \\ &= 72,2 \cdot \sin(314 \cdot t + 135^\circ) + 48 \cdot e^{-300 \cdot t}, \text{ В.} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5

Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю класичним і операторним методами

В розгалуженому електричному колі, зображеному на рис.1.8, з параметрами $R_1 = R_2 = R_3 = 4$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $E = 12$ В, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес.

Визначити:

- струми $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ класичним методом;
- струм $i(t)$ операторним методом.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи класичного і операторного методів розрахунку перехідних процесів в колах постійного струму;
- знати метод контурних струмів.

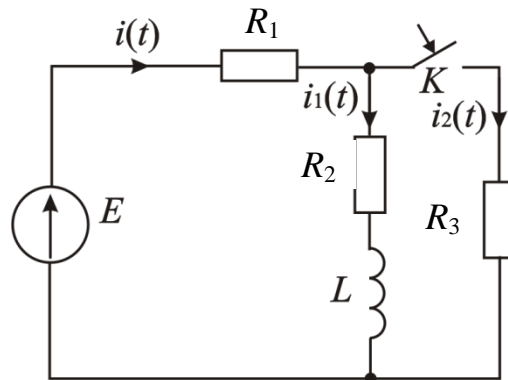


Рис. 1.8

Вирішення

1. Знаходимо струми кола класичним методом.

1.1. Запишемо загальні рішення струмів кола при перехідному процесі:

$$\begin{cases} i = i_{np} + i_{\epsilon} \\ i_1 = i_{np1} + i_{\epsilon1} \\ i_2 = i_{np2} + i_{\epsilon2} \end{cases} .$$

1.2. Визначимо початкові умови:

$$\text{Н.П.У.: } i_1(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ А.}$$

3.П.У. знаходимо з системи рівнянь за законами Кірхгофа для $t = 0$:

$$\begin{cases} i(0) = i_1(0) + i_2(0) \\ i(0) \cdot R_1 + i_2(0) \cdot R_3 = E \\ i(0) \cdot R_1 + i_1(0) \cdot R_2 + u_L(0) = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(0) = 2,25 \text{ А} \\ i_2(0) = 0,75 \text{ А} \\ u_L(0) = -3 \text{ В} \end{cases} .$$

1.3. Визначимо примусові складові струмів кола:

$$i_{np} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{12}{4 + 2} = 2 \text{ А}, \quad i_{np1} = i_{np} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1 \text{ А},$$

$$i_{np2} = i_{np} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1 \text{ А.}$$

1.4. Складемо й розв'яжемо характеристичне рівняння методом вхідного опору:

$$Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + p \cdot L) \cdot R_3}{R_2 + p \cdot L + R_3} = 0.$$

$$\text{Корінь характеристичного рівняння: } p = -\frac{\left(R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}\right)}{L} = -60 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Таким чином, вільні складові струмів: } \begin{cases} i_{\epsilon} = A \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_{\epsilon1} = A_1 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_{\epsilon2} = A_2 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases} .$$

1.5. Визначимо постійні інтегрування A , A_1 , A_2 за допомогою початкових

$$\text{умов: } \begin{cases} i(t) = 2 + A \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_1(t) = 1 + A_1 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_2(t) = 1 + A_2 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,25 = 2 + A \\ 1,5 = 1 + A_1 \\ 0,75 = 1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,25 \\ A_1 = 0,5 \\ A_2 = -0,25 \end{cases} .$$

1.6. Запишемо струми кола:

$$\begin{cases} i(t) = 2 + 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_1(t) = 1 + 0,5 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_2(t) = 1 - 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases}, \text{ А.}$$

1.7. Визначимо напругу на індуктивності при перехідному процесі:

$$\underline{u_L(t)} = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} = 0,1 \cdot 0,5 \cdot (-60) \cdot e^{-60 \cdot t} = \underline{-3 \cdot e^{-60 \cdot t}}, \text{ В.}$$

2. Знаходимо струм $i(t)$ операторним методом.

2.1. Складемо операторну схему заміщення – рис.1.9, де $L \cdot i_1(0) = 0,1 \cdot 1,5 = 0,15 \text{ В.}$

2.2. Операторні струми визначимо методом контурних струмів.

У загальному вигляді система рівнянь за методом має вигляд:

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot Z_{11}(p) + I_{22}(p) \cdot Z_{12}(p) = E_{11}(p) \\ I_{11}(p) \cdot Z_{21}(p) + I_{22}(p) \cdot Z_{22}(p) = E_{22}(p) \end{cases}'$$

де $Z_{11}(p) = R_1 + R_2 + pL$ – власний опір першого контуру;

$Z_{22}(p) = R_2 + R_3 + pL$ – власний опір другого контуру;

$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = -(R_2 + p \cdot L)$ – взаємний опір першого та другого контурів;

$E_{11}(p) = \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0)$ – власна ЕРС першого контуру;

$E_{22}(p) = -L \cdot i_1(0)$ – власна ЕРС другого контуру.

Після підстановки система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot (R_1 + R_2 + p \cdot L) - I_{22}(p) \cdot (R_2 + p \cdot L) = \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \\ -I_{11}(p) \cdot (R_2 + p \cdot L) + I_{22}(p) \cdot (R_2 + R_3 + p \cdot L) = -L \cdot i_1(0) \end{cases}.$$

Визначимо струм $I_{11}(p)$ за методом Крамера: $I_{11}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + R_2 + p \cdot L) & -(R_2 + p \cdot L) \\ -(R_2 + p \cdot L) & (R_2 + R_3 + p \cdot L) \end{vmatrix} = (R_1 + R_2 + p \cdot L) \cdot (R_2 + R_3 + p \cdot L) - (R_2 + p \cdot L)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left(\frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \right) & -(R_2 + p \cdot L) \\ -L \cdot i_1(0) & (R_2 + R_3 + p \cdot L) \end{vmatrix} = \left(\frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \right) \cdot (R_2 + R_3 + p \cdot L) - (R_2 + p \cdot L) \cdot L \cdot i_1(0).$$

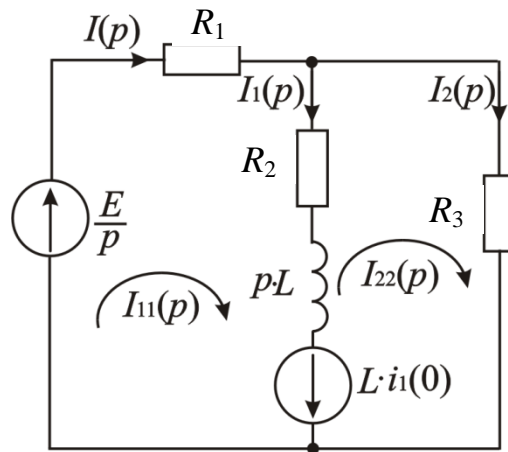


Рис. 1.9

2.3. Для заданих вихідних даних операторний струм:

$$I(p) = I_{11}(p) = \frac{1,8 \cdot p + 96}{p \cdot (0,8 \cdot p + 48)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

2.4. Для переходу від операторного струму $I(p)$ до струму функції часу $i(t)$ скористаємося формулою розкладання.

Знаходимо корені рівняння $M(p)=0$: $p \cdot (0,8 \cdot p + 48) = 0 \Rightarrow p_1 = 0$; $p_2 = -60$.

При отриманих коренях формула розкладання буде мати вигляд:

$$i(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot e^{p_2 \cdot t}.$$

Знаходимо похідну: $M'(p) = 1,6 \cdot p + 48$.

Знаходимо значення $N(p)$ і значення похідної $M'(p)$ при p_1 та p_2 :

$$N(p_1) = 96, N(p_2) = -12; M'(p_1) = 48, M'(p_2) = -48.$$

12. Отримані значення підставимо до формули розкладання:

$$\underline{i(t)} = \frac{96}{48} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{-12}{-48} \cdot e^{-60 \cdot t} = \underline{2 + 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t}}, \text{ А.}$$

ЗАДАЧА 6

Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі з джерелом постійного струму

В електричній схемі з джерелом постійного струму J , зображеній на рис.1.10, при розмиканні ключа K відбувається перехідний процес.

Визначити струм в індуктивності після ввімкнення джерела постійного струму J .

Для вирішення задачі необхідно знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів.

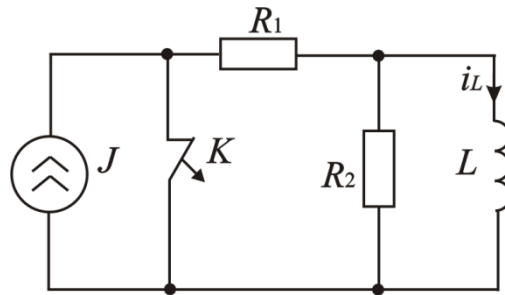


Рис. 1.10

Вирішення

1. Шуканий струм $i_L(t)$ запишемо у вигляді суми примусової та вільної складових струму: $i_L(t) = i_{L_{np}} + i_{L_e}$.

2. Знайдемо Н.П.У. $i_L(0) = 0$ А.

3. З наведеної схеми в примусовому режимі струм $i_{L_{np}} = J$.

4. Для визначення вигляду вільної складової струму складемо характеристичне рівняння методом вхідного опору відносно вітки з індуктивністю, при цьому вітка з джерелом струму має бути розімкнена (рис.1.11):

$$Z(p) = R_2 + p \cdot L = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_2}{L}.$$

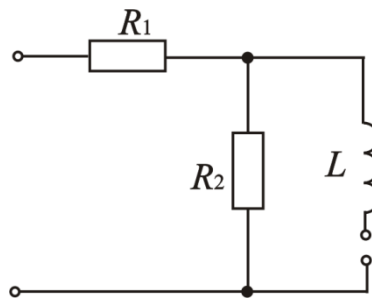


Рис. 1.11

Таким чином, вільна складова струму має вигляд $i_{L_e} = A \cdot e^{p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}$.

5. Струм індуктивності має вигляд: $i_L(t) = J + A \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}$.

6. Постійну інтегрування A знаходимо з початкової умови $i_L(0) = 0 \Rightarrow 0 = J + A \Rightarrow A = -J$.

7. Остаточного отримуємо: $i_L(t) = J - J \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t} = J \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t} \right)$, А.

ЗАДАЧА 7

Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі з джерелом постійного струму та взаємною індуктивністю

В електричній схемі з джерелом постійного струму J , зображеній на рис.1.12, при розмиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри кола: $J = 10$ мА, $R = 1000$ Ом, $L_1 = L_2 = 10$ мГн, $M = 0,5$ мГн.

Визначити:

- струм через опір $i_R(t)$ в перехідному режимі;
- струм через індуктивність L_1 в перехідному режимі $i_{L1}(t)$;
- напругу на індуктивності L_2 в перехідному режимі $u_2(t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів;
- вміти складати рівняння за законами Кірхгофа для кіл зі взаємною індуктивністю;
- вміти складати рівняння стану електричного кола після комутації.

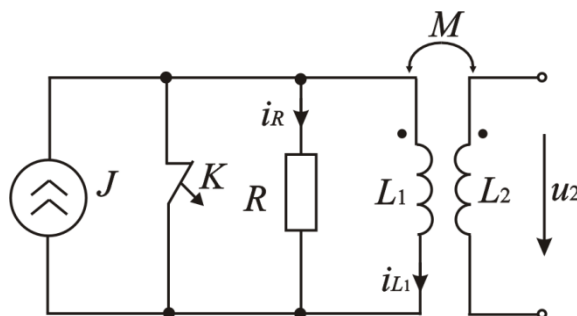


Рис. 1.12

Вирішення

1. Запишемо загальні рішення струмів кола при перехідному процесі:

$$i_R(t) = i_{R_{np}} + i_{R_{\epsilon}}; \quad i_{L1}(t) = i_{L1_{np}} + i_{L1_{\epsilon}}.$$

2. Запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації:

$$\begin{cases} i_R(t) + i_{L1}(t) = J \\ i_R(t) \cdot R - L_1 \cdot \frac{di_{L1}(t)}{dt} - M \cdot \frac{di_{L2}(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Вторинна обмотка розімкнена, тому $i_{L_2}(t) = 0 \Rightarrow M \cdot \frac{di_{L_2}(t)}{dt} = 0$.

3. Знайдемо початкові умови.

Н.П.У.: $i_{L_1}(0) = 0$ А.

3.П.У. знайдемо з системи рівнянь за законами Кірхгофа для $t = 0$:

$$\begin{cases} i_R(0) + i_{L_1}(0) = J \\ R \cdot i_R(0) - L_1 \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_R(0) = J = 10^{-2} \text{ А} \\ u_L(0) = R \cdot i_R(0) = 10 \text{ В} \end{cases}$$

4. Визначимо примусові складові струмів: $i_{R_{np}} = 0$; $i_{L_{1np}} = J = 10^{-2}$ А.

5. Складемо й вирішимо характеристичне рівняння:

$$Z(p) = R + p \cdot L_1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L_1} = -\frac{1000}{10 \cdot 10^{-3}} = -10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, вільні складові струмів мають вигляд: $i_{R_e} = A \cdot e^{-10^5 \cdot t}$;

$$i_{L_{1e}} = B \cdot e^{-10^5 \cdot t}.$$

6. Постійні інтегрування A і B знаходимо з початкових умов.

$$i_R(t) = A \cdot e^{-10^5 t}; \quad i_{L_1}(t) = 10^{-2} + B \cdot e^{-10^5 \cdot t}.$$

При $t=0$ – $i_R(0) = 10^{-2} = A \Rightarrow \underline{i_R(t) = 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t}}$, А.

При $t=0$ – $i_{L_1}(0) = 0 = 10^{-2} + B \Rightarrow B = -10^{-2} \Rightarrow \underline{i_{L_1}(t) = 10^{-2} - 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t}}$, А.

7. Визначимо напругу на індуктивності L_2 :

$$u_{L_2}(t) = M \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t} = 0,5 \cdot e^{-10^5 \cdot t} \text{ В.}$$

Таким чином, $u_{L_2}(0) = 0,5$ В. Перевіримо це.

Продиференціюємо рівняння $i_R(t) + i_{L_1}(t) = J$ та помножимо праву та ліву частину отриманого результату на M :

$$M \cdot \frac{di_R(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$u_{L_2}(0) = M \cdot \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -M \cdot \frac{di_R(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot (-10^5) = 0,5 \text{ В.}$$

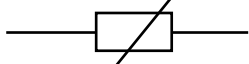
ТЕМА 2. НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО І СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Нелінійні електричні кола – це такі кола, що містять хоча б один нелінійний елемент (НЕ), який не може бути описаний за допомогою постійних коефіцієнтів. У цьому випадку залежності між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокозчепленнями) мають вигляд:

$$u = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad \psi = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad q = f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (2.1)$$

тобто в загальному випадку спостерігається залежність не тільки від змінної, але й від швидкості її зміни. Якщо ж ми розглядаємо кола постійного струму, то залежності (2.1) – це нелінійні вольт-амперна характеристика (ВАХ) – $u = f(i)$, вебер-амперна характеристика – $\psi = f(i)$ і кулон-вольтна характеристика – $q = f(u)$.

Нелінійні елементи поділяють на нелінійні опори, нелінійну індуктивності і ємності. При постійних струмах у якості нелінійних можуть розглядатися лише кола з резистивними елементами, ВАХ яких не є прямою.

Узагальнене позначення нелінійного елемента на схемах - 

Для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують:

- метод двох вузлів;
- заміну декількох паралельно з'єднаних віток однією еквівалентною;
- метод еквівалентного генератора.

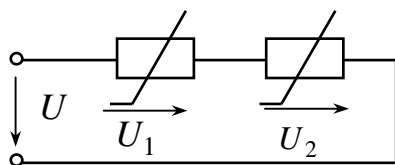


Рис. 2.1

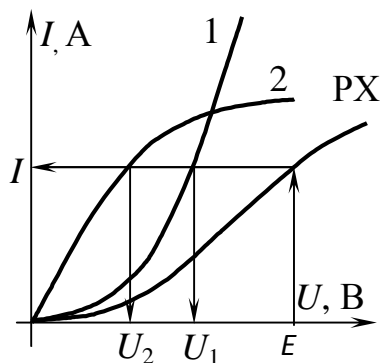


Рис. 2.2

Для проведення розрахунку, як правило, графічного, повинні бути відомі ВАХ нелінійних елементів, що входять у схему.

Графічний метод вимагає великої точності виконання побудов.

При послідовному з'єднанні розрахунок (схема на рис.2.1) базується на другому законі Кірхгофа: $U = U_1 + U_2$. Один з параметрів, а саме напруга на вході кола U або струм I , повинен бути заданим для визначення струму I (або напруги U), а також напруг на елементах U_1 і U_2 . Оскільки з'єднання послідовне, то загальним параметром є струм. Довільно задаємося різними значеннями струму і додаємо напруги на нелінійних

елементах при кожному конкретному значенні струму, тобто будемо результуючу ВАХ (РХ) – (рис. 2.2).

При паралельному з'єднанні елементів (рис.2.3) загальним параметром є напруга. Тому результуючу ВАХ будують за першим законом Кірхгофа: $I = I_1 + I_2$ (рис.2.4).

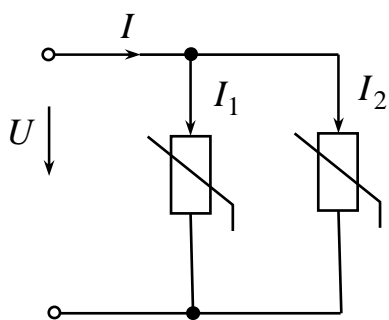


Рис. 2.3

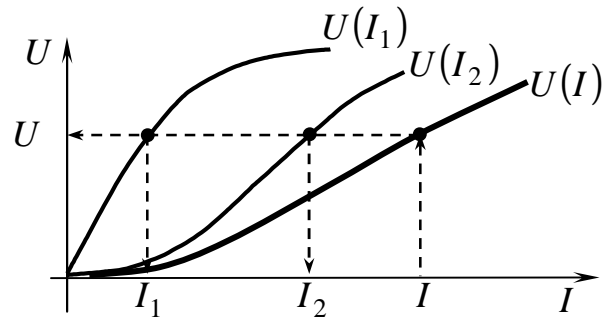


Рис. 2.4

Якщо була задана напруга U , а струми в паралельних вітках невідомі, то за напругою на вході кола U за ВАХ нелінійних елементів визначають струми I_1, I_2 , а потім за першим законом Кірхгофа – загальний струм $I = I_1 + I_2$. Якщо був заданий струм I , то необхідно будувати результуючу характеристику $U = f(I_1 + I_2)$.

Розрахунок змішаного з'єднання нелінійних елементів містить етапи розрахунку кіл з паралельним і послідовним з'єднанням елементів. Для схеми рис. 2.5 після заміни двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів «2» і «3» одним еквівалентним нелінійним опором «2-3» одержуємо послідовне з'єднання елементів «1» і «2-3» - схема на рис. 2.6. При цьому повинна бути побудована результуюча ВАХ умовного нелінійного елемента «2-3».

Подальший розрахунок схеми на рис. 2.6, якщо задана напруга U , проводять так:

- будують результуючу ВАХ послідовно з'єднаних елементів «1» і «2-3»;
- визначають струм I_1 , а також напруги на першому нелінійному елементі U_1 і

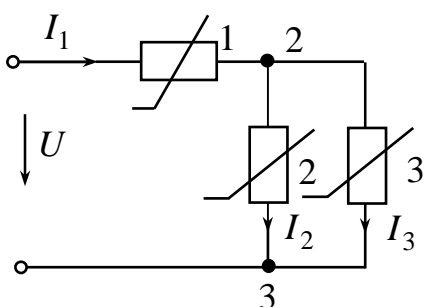


Рис. 2.5

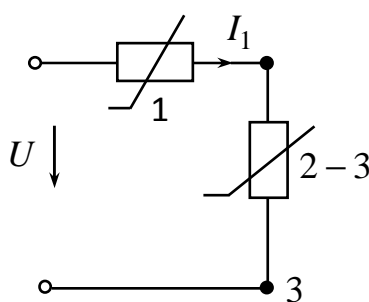


Рис. 2.6

на паралельних вітках U_{23} ;

- за напругою U_{23} і заданим вольт-амперними характеристиками елементів «2» і «3» визначають струми в паралеле-

льних вітках I_2 і I_3 .

Якщо в складному електричному колі (рис.2.7) є тільки одна вітка, що містить HE з відомою ВАХ, то визначення струму в ній зручно виконувати методом еквівалентного генератора. З цією метою вся решта частин схеми по відношенню до вітки з HE розглядається як активний двополюсник (рис.2.8, рис.2.9). Для еквівалентної схеми рис. 2.9 знаходимо так звану напругу холостого ходу:

$$U_{abxx} = E_1 - I_{xx} \cdot R_1 \quad (2.2)$$

$$\text{де } I_{xx} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} \quad (2.3)$$

струм холостого ходу, якщо в схемі рис. 2.7 розімкнути вітку з $R_{не}$.

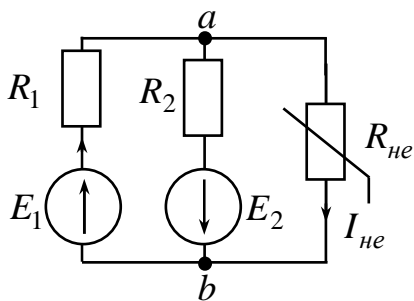


Рис. 2.7

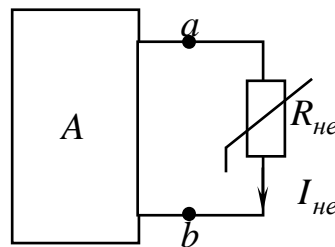


Рис. 2.8

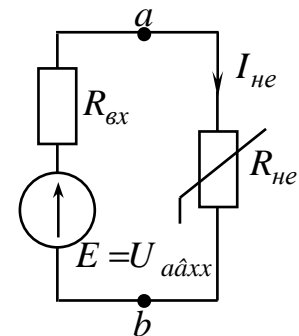


Рис. 2.9

$$R_{ex} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{— так званий вхідний опір двополюсника.}$$

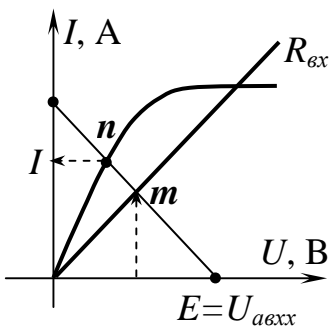


Рис. 2.10

За значенням R_{ex} будемо його лінійну характеристику опору, а струм HE визначаємо графічним способом – (рис. 2.10).

Статичний і диференційний опір

Властивості HE можуть бути описані за допомогою його ВАХ, а також статичними й диференційними опорами.

Під *статичним* опором нелінійного елемента розуміють відношення напруги на нелінійному елементі до струму в ньому в будь-якій точці ВАХ цього елемента (рис. 2.11):

$$R_{cm} = \frac{U}{I} = m_R \cdot \text{tg } \alpha, \quad (2.4)$$

$$\text{де } m_R = \frac{m_U}{m_I},$$

m_R, m_U, m_I - відповідно масштаби за опором, напругою, струмом.

Статичний опір (R_{cm}) характеризує поведінку HE в режимі постійного струму. При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина R_{cm} змінюється.

Під диференціальним опором (R_D) розуміють величину $R_D = \frac{dU}{dI}$, яка характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від даної точки нелінійної характеристики (рис. 2.11):

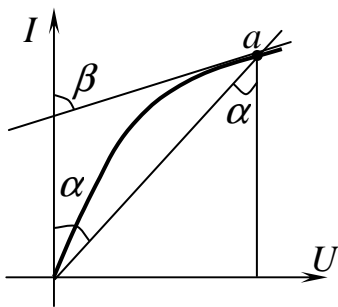


Рис. 2.11

ної характеристики (рис. 2.11):

$$R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (2.5)$$

Таким чином, величина R_D пропорційна тангенсу кута, який утворений дотичною до ВАХ в даній точці й віссю струму I .

При послідовному з'єднанні декількох HE диференціальний опір результуючої характеристики при будь-якому струмі дорівнює сумі диференціальних опорів HE при цьому ж струмі.

Властивості нелінійних елементів при змінному струмі

1. При переході від однієї ділянки ВАХ до іншої статичні й диференціальні опори не залишаються постійними і в загальному випадку не дорівнюють один одному, але можуть співпадати в окремих точках і на окремих ділянках ВАХ.

2. Нелінійний елемент може мати несиметричну ВАХ, отже, опір нелінійного елемента залежить від знака прикладеної напруги (тобто нелінійний елемент має вентильні властивості).

3. Нелінійні елементи бувають інерційними і безінерційними.

Якщо залежність між миттєвими значеннями напруги і струму лінійна, а залежність між діючими струмом і напругою нелінійна, то це *інерційний* нелінійний елемент (лампа розжарювання, баретер, напівпровідникові термоопори). Теплові процеси, як відомо, інерційні, тому залежність $i(u)$ лінійна, а нелінійність характеристик $I(U)$ деяких нелінійних опорів обумовлена зміною їх опору в результаті нагріву їх струмом (рис. 2.12).

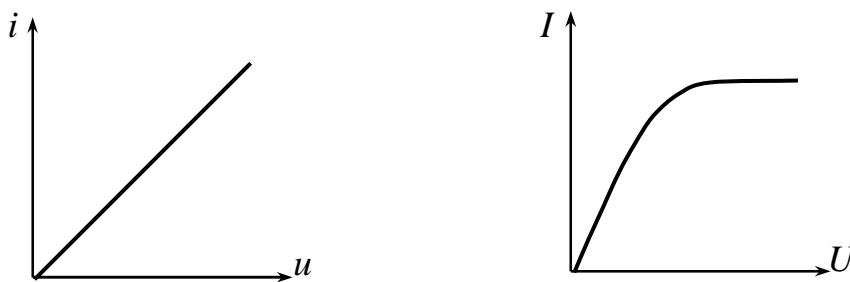


Рис.2.12

Якщо обидві залежності $i(u)$ і $I(U)$ нелінійні – то це безінерційний елемент. *Безінерційний НЕ* має здатність перетворювати спектр коливань, що впливають на нього. Тобто, якщо до *НЕ* підвести синусоїдну напругу, то струм через нього буде несинусоїдний, і навпаки - при проходженні через *НЕ* синусоїдного струму напруга на ньому буде несинусоїдною.

При розрахунку нелінійних кіл при змінному струмі (напрузі) застосовують методи апроксимації нелінійних вольт-амперних характеристик.

Апроксимація, як відомо, це заміна заданої нелінійної характеристики аналітичною функцією, яка з певною точністю виражає задану залежність. Ця процедура дозволяє досліджувати процеси у нелінійному елементі аналітично. Оскільки нелінійний елемент не є абсолютно стабільними і залежить від різних зовнішніх чинників, то на практиці не прагнуть до особливо точної апроксимації характеристик. Існують наступні види апроксимації:

- апроксимація ступеневим поліномом [4, с.80-81];
- апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат [4, с.81-82];
- кусково-лінійна апроксимація [4, с.82-83].

ЗАДАЧА 1

Розрахунок динамічного опору нелінійного елемента в колі постійного струму

Нелінійний елемент має вольт-амперну характеристику, що задана аналітично $I = 0,25 \cdot U + 0,5 \cdot U^3$.

Визначити динамічний опір елемента при $U = 0$ В.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення нелінійного елемента і динамічного опору;
- вміти знаходити динамічний опір нелінійного елемента.

Вирішення

1. Запишемо співвідношення для розрахунку динамічного опору нелінійного елемента: $R_D = \frac{dU}{dI}$.

2. Визначимо похідну $\frac{dI}{dU}$:

$$\frac{dI}{dU} = \frac{d}{dU} \cdot (0,25 \cdot U + 0,5 \cdot U^3) = 0,25 + 3 \cdot 0,5 \cdot U^2 = 0,25 + 1,5 \cdot U^2.$$

$$3. R_{\dot{A}} = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{0,25 + 1,5 \cdot U^2} \Rightarrow \text{при } U = 0 \quad R_{\dot{A}} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ Ом.}$$

ЗАДАЧА 2

Розрахунок струмів і напруг у схемі з нелінійним елементом
за допомогою аналітичного і графічного методів

Нелінійний елемент R_1 , з'єднаний послідовно з лінійним опором $R_2 = 12$ Ом (рис.2.13). На вхід кола подається постійна напруга $U = 4$ В. ВАХ нелінійного елемента задана законом $I = f(U_1): I = a \cdot U_1^2$, де $a = 0,02$ 1/Ом·В.

Визначити значення струму кола I , а також напруг на елементах U_1 , U_2 аналітично і за допомогою графічного методу.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати графічний метод розрахунку електричних кіл з нелійними елементами;
- вміти користуватися основними законами електричного кола для знаходження струму і напруг.

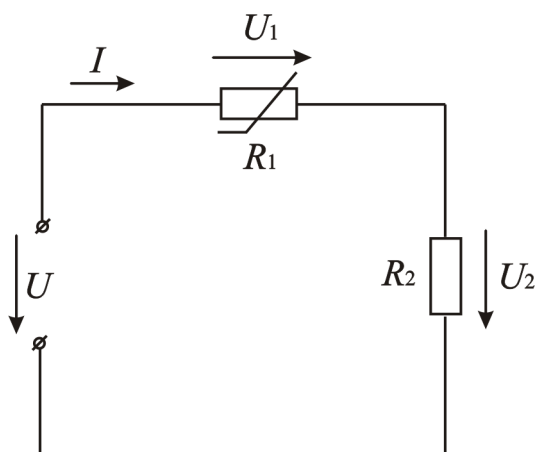


Рис.2.13

Вирішення

Аналітичний метод

1. За другим законом Кірхгофа напруга на вході схеми: $U = U_1 + U_2$, де U_1 – напруга на нелінійному елементі, U_2 – напруга на лінійному елементі кола. За законом Ома напруга на лінійному елементі $U_2 = I \cdot R_2$. При послідовному з'єднанні елементів струм через всі елементи однаковий:

$$U = U_1 + U_2 = U_1 + I \cdot R_2 = U_1 + a \cdot U_1^2 \cdot R_2.$$

2. Тобто маємо квадратне рівняння: $a \cdot R_2 \cdot U_1^2 + U_1 - U = 0$.

Підставивши відомі коефіцієнти отримаємо: $0,24 \cdot U_1^2 + U_1 - 4 = 0$.

3. Знайдемо корені квадратного рівняння:

$$U_{1(1)} = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,24 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0,24} = 2,5 \text{ В}, \quad U_{1(2)} = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,24 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0,24} = -6,67 \text{ В}.$$

Другий від'ємний корінь відкидаємо, так як він немає фізичного змісту. Таким чином $U_1 = 2,5 \text{ В}$.

4. Знайдемо струм кола і напругу на лінійному елементі:

$$I = a \cdot U_1^2 = 0,02 \cdot 2,5^2 = 0,125 \text{ А}; \quad U_2 = I \cdot R_2 = 0,125 \cdot 12 = 1,5 \text{ В}.$$

Графічний метод

1. Складемо таблицю ВАХ нелінійного елемента $I = a \cdot U_1^2 = 0,02 \cdot U_1^2$:

Таблиця 2.1 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента R_1

$U_1, \text{ В}$	0	1	2	3	4	5
$I, \text{ А}$	0	0,02	0,08	0,18	0,32	0,5

За таблицею побудуємо ВАХ нелінійного елемента, яка уявляє вітку параболі (рис.2.14).

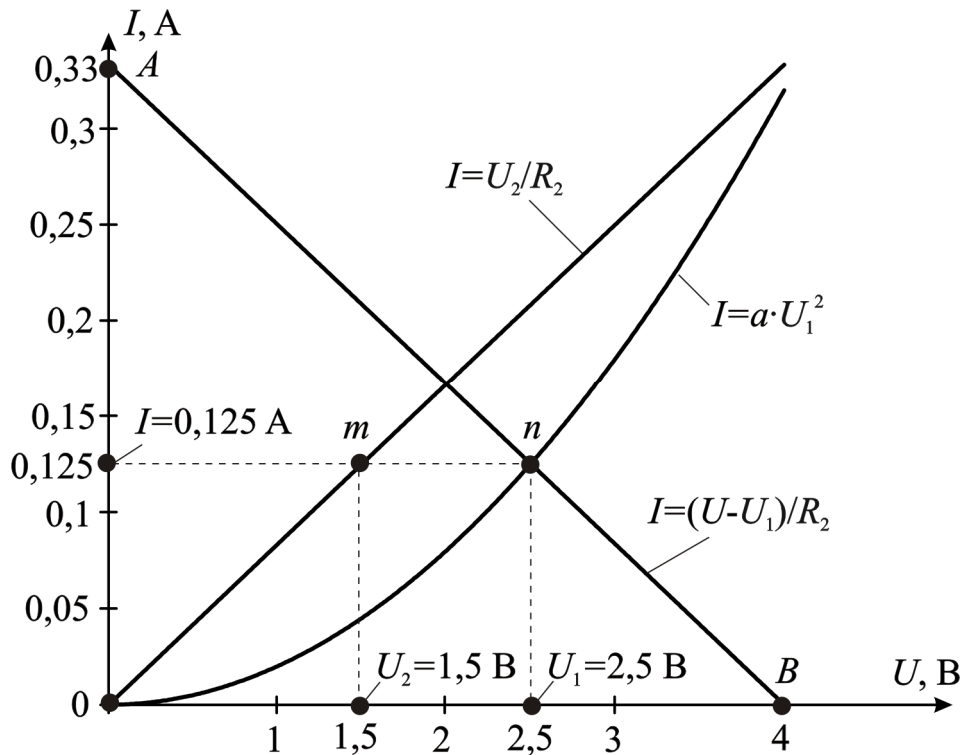


Рис.2.14

2. За двома точками $U_2 = 0, I = 0$; $U_2 = 3, I = 0,25$ побудуємо ВАХ лінійно-

го елемента $I = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1}{12} \cdot U_2$.

3. За другим законом Кірхгофа $U = U_1 + U_2 = U_1 + I \cdot R_2 \Rightarrow$.

$I = \frac{U - U_1}{R_2} = \frac{4 - U_1}{12}$. Отримане рівняння є допоміжною прямою. Побудуємо від-

різок допоміжної прямої $[AB]$ за двома точками $U_1 = 0, I = 0,333$; $U_1 = 4, I = 0$.

4. Відрізок $[AB]$ перехрестить криву $I = a \cdot U_1^2$ у точці n , коли значення на-
пруги U_1 будуть однакові.

5. Координати точки n визначають струм і напругу на нелінійному елеме-
нті $I = 0,125$ А, $U_1 = 2,5$ В.

6. У зв'язку з тим, що елементи кола з'єднані послідовно, у колі протікає
один і той же струм. Тому значенню струму $I = 0,125$ А відповідає напруга лі-
нійного елемента $U_2 = 2,5$ В (точка m на рис.2.14).

Результати аналітичного і графічного вирішення задачі співпадають.

ЗАДАЧА 3

Розрахунок електричного кола постійного струму з нелінійними елементами графічним методом

Електричне коло постійного струму, що зображене на рис.2.15а, містить
два нелінійних елемента R_1 і R_2 , вольт-амперні характеристики яких задані в
таблицях 2.2 і 2.3 відповідно. Параметри інших елементів кола: $E_1 = 7$ В,
 $E_3 = 13$ В, $R_3 = 10$ Ом (лінійний елемент).

Таблиця 2.2 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента $R_1(I_1)$

$U_1, \text{В}$	0	2	4	6	8	10	12	14
$I_1, \text{А}$	0	0,26	0,37	0,41	0,43	0,435	0,435	0,44

Таблиця 2.3 – Вольт-амперна характеристика елемента $R_2(I_2)$

$U_2, \text{В}$	0	2	4	6	8	10	12	14
$I_2, \text{А}$	0	0,21	0,26	0,3	0,34	0,37	0,4	0,43

Визначити:

- струми у вітках електричного кола;
- напругу між вузлами U_{ab} .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення нелінійного елемента і динамічного опору;

- знати, які методи використовуються для розрахунку нелінійних кіл;
- вміти розраховувати нелінійні кола графічним методом.

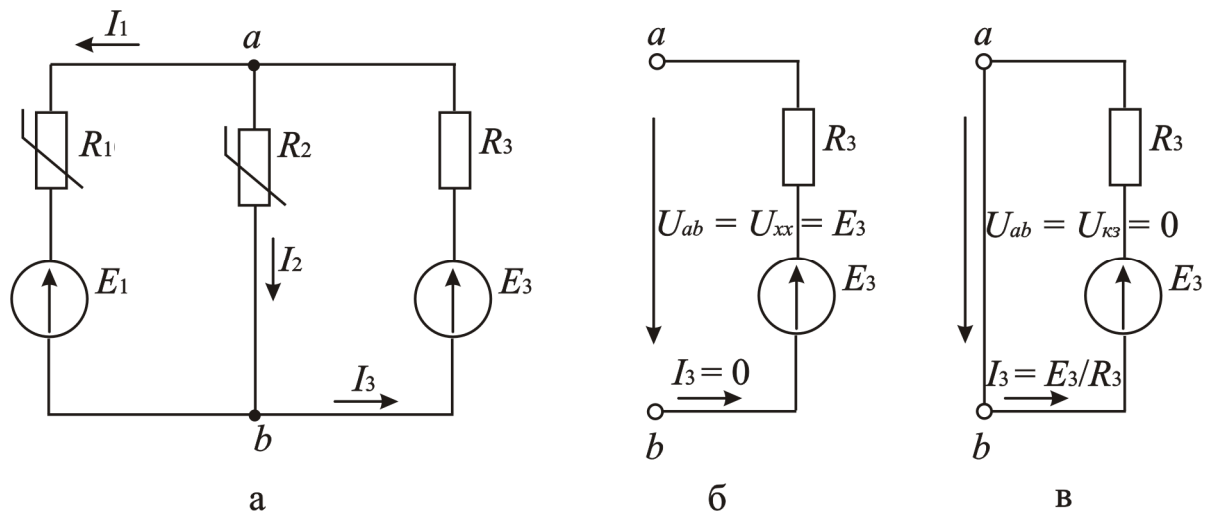


Рис.2.15

Вирішення

1. Довільно виберемо позитивний напрям струмів у вітках (див. рис.2.15).

Запишемо рівняння за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 = U_2 - U_1 = U_{ab} - U_1, \\ E_3 = U_3 + U_2 = U_3 + U_{ab} \end{cases}$$

де $U_{ab} = U_2$,

$U_3 = I_3 \cdot R_3$ - лінійна функція.

2. Виразимо струми I_1, I_2, I_3 в функції однієї змінної, а саме - напруги U_{ab} .

$$E_1 + U_1 = U_{ab} = E_1 + I_1(U_{ab}) \cdot R_1(I_1) \Rightarrow I_1(U_{ab}) = \frac{U_{ab} - E_1}{R_1(I_1)} = \frac{U_{ab} - 7}{R_1(I_1)};$$

$$U_2 = U_{ab} \Rightarrow I_2(U_{ab}) = I_2(U_2);$$

$$E_3 - U_3 = U_{ab} = E_3 - I_3(U_{ab}) \cdot R_3 \Rightarrow I_3(U_{ab}) = \frac{E_3 - U_{ab}}{R_3} = \frac{13 - U_{ab}}{10}.$$

3. Будуємо в одних осях залежності струмів I_1, I_2, I_3 відповідно від напруг U_1, U_2, U_3 (див. рис.2.16). Будуючи залежність $I_3(U_3)$ вважаємо, що напруга на опорі R_3 може змінюватись від нуля до напруги джерела $E_3 = 13$ В.

Будуємо в одних осях криві залежності струмів I_1, I_2, I_3 від напруги U_{ab} (рис.2.16) за отриманими вище співвідношеннями.

За рахунок джерела E_1 крива $I_1(U_1)$ зміщується праворуч від початку координат на 7 вольт, утворюючи криву $I_1(U_{ab}) = \frac{U_{ab} - 7}{R_1(I_1)}$. Напруга U_{ab} при цьому може змінюватись від 7 до 13 вольт, що відповідає позитивним значенням струму I_1 .

Пряму $I_3(U_{ab}) = \frac{13 - U_{ab}}{10}$ будемо за двома точками $U_{ab} = 13$ В ($I_3 = 0$); $U_{ab} = 0$ ($I_3 = 1,3$ А), що відповідає режимам холостого ходу і короткого замикання нелінійного навантаження відносно вітки з ЕРС E_3 і опором R_3 (див. рис.2.15,б і рис.2.15,в).

Будемо допоміжну залежність $I_{12}(U_{ab}) = I_1(U_{ab}) + I_2(U_{ab})$.

Точка M перехрещення кривої $I_{12}(U_{ab})$ і прямої $I_3(U_{ab})$ є робочою точкою, так як у неї виконується перший закон Кірхгофа.

Ордината точки M дає чисельне значення струму $I_3 = 0,49$ А, а абсциса точки M дає чисельне значення напруги $U_{ab} = 8,1$ В.

Для одержання чисельних значень струмів I_1 і I_2 опустимо з точки M перпендикуляр на вісь абсцис, тоді ордината точки L дає значення струму I_1 , а ордината точки K – значення струму I_2 : $I_1 = 0,15$ А; $I_2 = 0,34$ А.

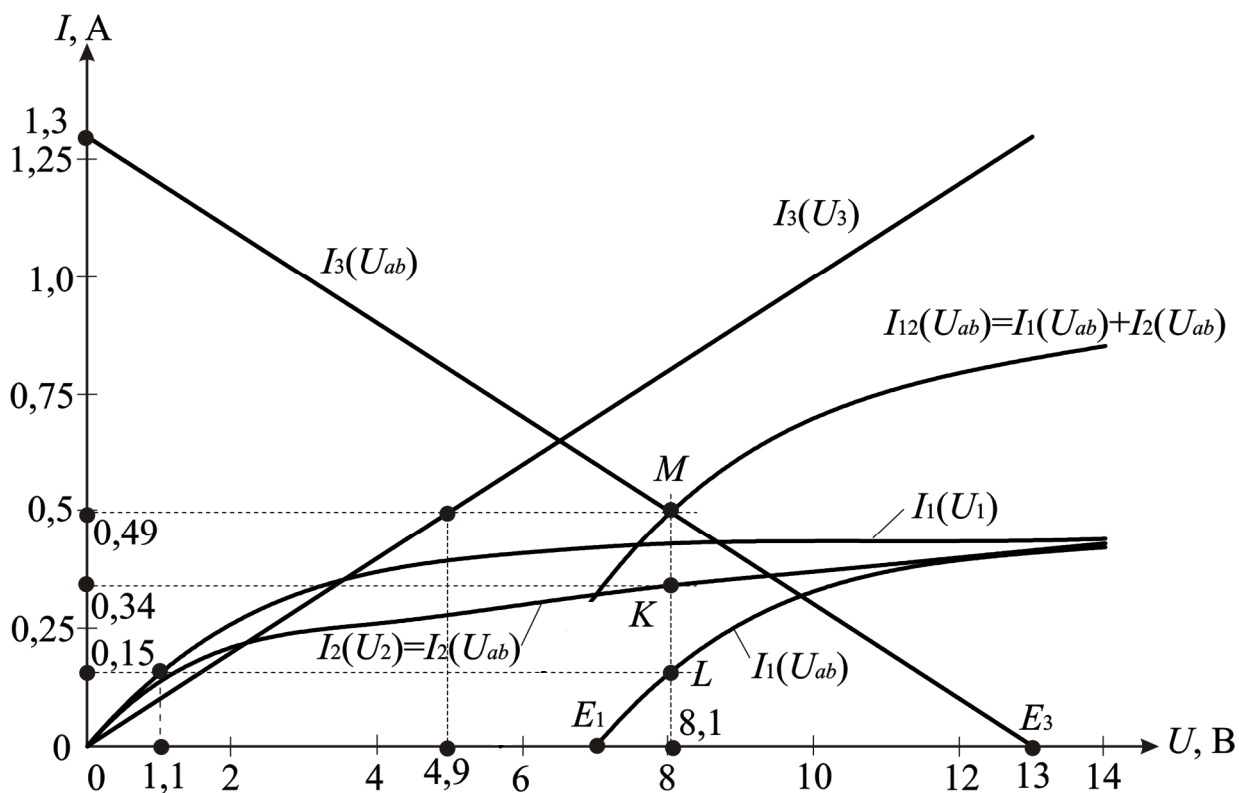


Рис.2.16

Визначимо падіння напруги на нелінійному опорі U_1 а також лінійному опорі U_3 , використовуючи вольт-амперні характеристики $I_1(U_1)$ і $I_3(U_3)$:
 $U_1 = 1,1$ В; $U_3 = 4,9$ В.

ЗАДАЧА 4

Розрахунок електричного кола постійного струму з нелінійним елементом методом еквівалентного генератора

Електричне коло з джерелом постійної напруги, що зображене на рис.2.17, містить нелінійний опір R_5 , вольт-амперна характеристика якого задана таблицею 2.4. Параметри інших елементів схеми: $E_1 = 5$ В, $R_1 = R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 15$ Ом.

Таблиця 2.4 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента R_5

$U_5, \text{В}$	0	0,5	1,0	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$I_5, \text{А}$	0	0,25	0,39	0,47	0,52	0,55	0,57	0,6	0,62	0,635

Визначити струм в нелінійному опорі R_5 .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу еквівалентного генератора;
- вміти розраховувати нелінійні кола графічним методом.

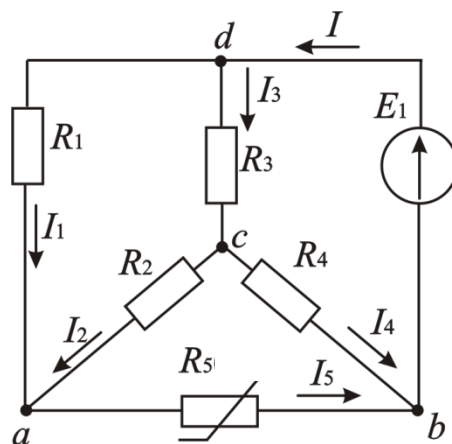


Рис.2.17

Вирішення

1. Представимо задану схему у вигляді двополюсника, що приєднаний до вітки з нелінійним опором R_5 (рис.2.18).

За методом еквівалентного генератора необхідно визначити значення входного опору активного двополюсника відносно затискачів $a-b$ і напругу U_{abxx} між точками « a » та « b » при відключеному нелінійному опорі.

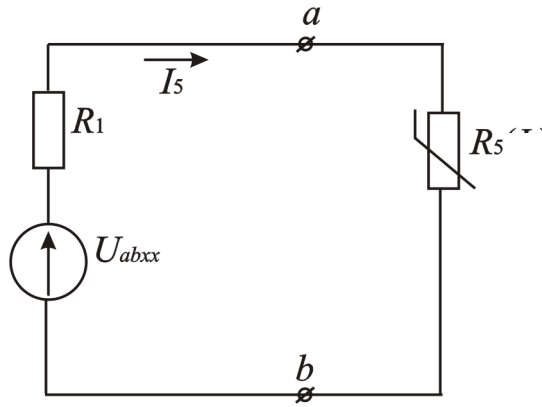


Рис.2.18

2. Визначимо вхідний опір (схема на рис.2.19).

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_1 \cdot \left(R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{5 \cdot \left(5 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} \right)}{5 + 5 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15}} = 3,43 \text{ Ом.}$$

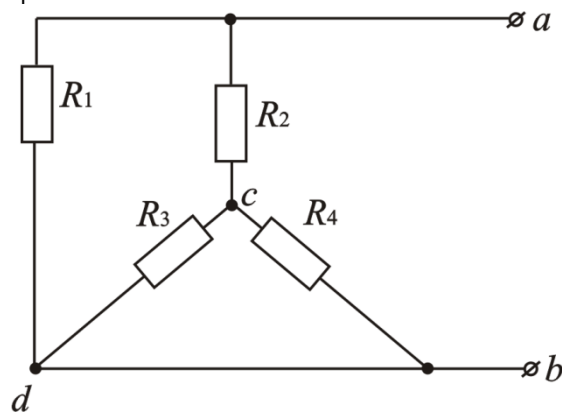


Рис.2.19

3. Розрахуємо струми при відключенні нелінійного опору (рис.2.20), для чого розрахуємо еквівалентний опір відносно затискачів «*d*», «*b*»:

$$R_{db} = R_4 + \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} = 15 + \frac{10 \cdot (5 + 5)}{10 + 5 + 5} = 20 \text{ Ом.}$$

За законом Ома: $I_4' = \frac{E}{R_{db}} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ А.}$

Струми в паралельних вітках, так як $R_1 + R_2 = R_3$,

$$I_1' = I_2' = I_4' \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,25 \cdot \frac{10}{5 + 5 + 10} = 0,125 \text{ А.}$$

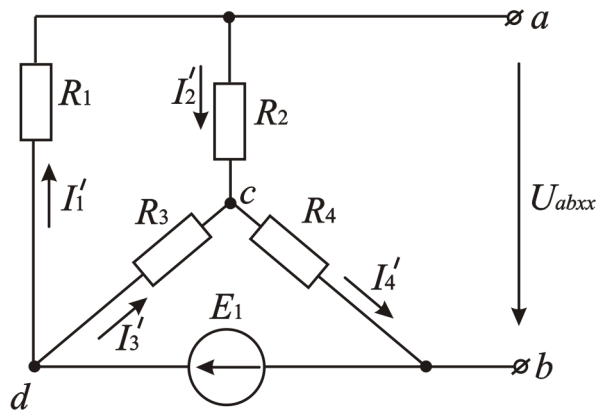


Рис.2.20

4. За другим законом Кірхгофа знаходимо напругу холостого ходу:

$$U_{abxx} = R_4 \cdot I_4' + R_2 \cdot I_2' = 15 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,125 = 4,37 \text{ В.}$$

5. Подальший розрахунок схеми здійснюємо за рівнянням $U_{abxx} = I_5 \cdot R_{6x} + U_5$, яке є нелінійним.

Наведене рівняння можна вирішити графічно двома способами: або побудувавши сумарну вольт-амперну характеристику вхідного опору та нелінійного опору R_5 , або наступним чином (рис.2.21):

- розглянемо рівняння $U_5 = U_{abxx} - I_5 \cdot R_{6x}$ в режимі короткого замикання \Rightarrow

$$U_5 = 0, \quad I_5 = \frac{U_{abxx}}{R_{6x}} = 1,27 \text{ А};$$

- розглянемо рівняння $U_5 = U_{abxx} - I_5 \cdot R_{6x}$ в режимі холостого ходу $\Rightarrow I_5 = 0$,
 $U_5 = U_{abxx} = 4,37 \text{ В};$

- відкладемо точки з координатами $(4,37; 0)$, $(0; 1,26)$ та отримуємо відрізок

$$[KN] \text{ прямої } I_5 = \frac{U_{abxx} - U_5}{R_{6x}};$$

- побудуємо вольт-амперну характеристику нелінійного опору R_5 за даними табл.2.4;

- точка M перехрещення вольт-амперної характеристики нелінійного опору R_5 з відрізком $[KN]$ дає вирішення: $I_5 = 0,55 \text{ А}$, $U_5 = 2,5 \text{ В}$.

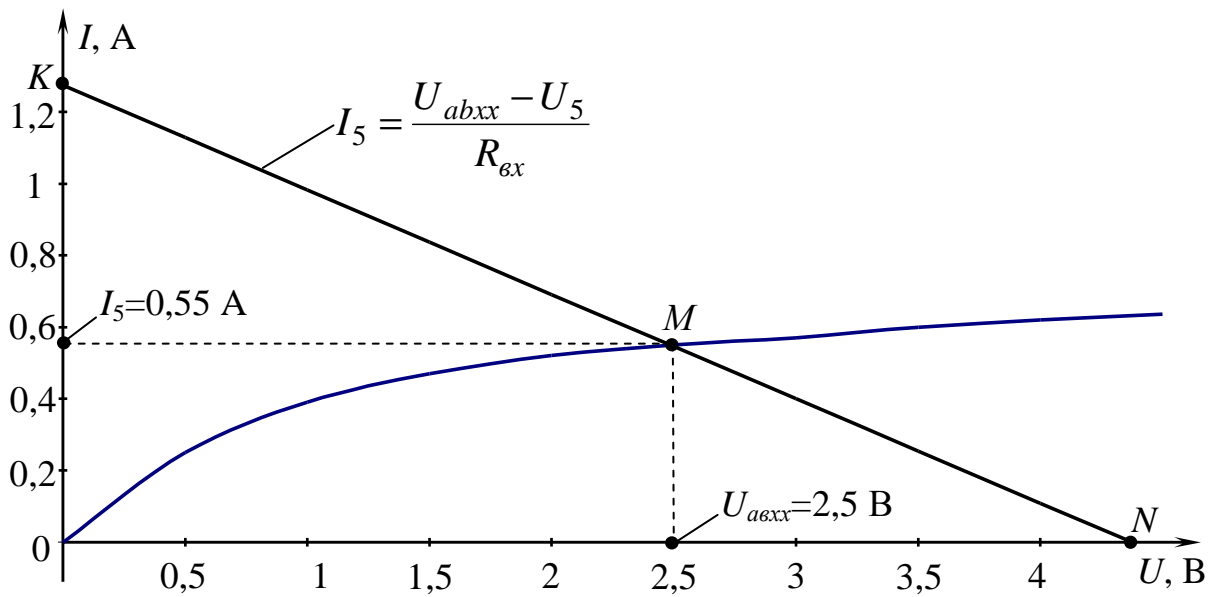


Рис.2.21

ЗАДАЧА 5

Розрахунок кола синусоїдного струму з ідеальним діодом

Напруга на вході кола, що складається з резистора $R = 1$ кОм і ідеального діода VD (рис.2.22), дорівнює $u(t) = 200 \cdot \sin(\omega t)$ В.

Визначити:

- середнє значення струму в колі I_0 ;
- діюче значення струму в колі I .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення ідеального діода;
- вміти розраховувати середнє і діюче значення струму.

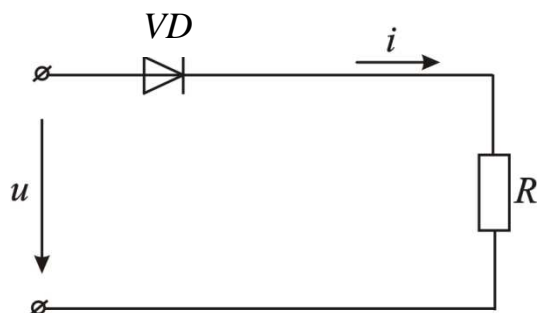


Рис.2.22

Вирішення

1. Ідеальним діодом називається діод, в якого опір у провідному стані рівняється нулю, а в закритому стані нескінченості. Тому такий діод буде пропускати лише позитивну півхвилю струму.

2. Визначимо амплітудне значення струму: $I_m = \frac{U_m}{R} = \frac{200}{1000} = 0,2 \text{ А.}$

3. Знайдемо постійну складову струму: $I_0 = \frac{I_m}{\pi} = \frac{0,2}{3,14} = 0,0638 \text{ А.}$

4. Розрахуємо діюче значення струму: $I = \frac{I_m}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ А.}$

5. Визначимо потужність втрат в резисторі: $P_H = \frac{U_m \cdot I_m}{4} = \frac{200 \cdot 0,2}{4} = 10 \text{ Вт.}$

ЗАДАЧА 6

Розрахунок електричного кола синусоїдного струму з нелінійним елементом

Резистор з опором $R = 1 \text{ кОм}$ підключений до джерела синусоїдної ЕРС $e(t) = 150 \cdot \sin(\omega t)$ через діод VD (рис.2.23,а), вольт-амперна характеристика якого показана на рис.2.23,б.

Визначити:

- середнє значення струму в колі I_0 ;
- діюче значення струму в колі I ;
- потужність джерела P ;
- потужність втрат в резисторі P_H .

Побудувати графік струму $i(t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати які методи використовують для розрахунку нелінійних кіл синусоїдного струму;
- знати визначення середнього і діючого струму;
- вміти проводити заміну діода еквівалентним нелінійним резистором.

Вирішення

1. Замінімо діод у схемі рис.2.23,а нелінійним резистором, еквівалентний опір R_E якого різний при прямому і зворотному напрямках струму (рис.2.24,а).

2. Визначимо еквівалентний опір діода з характеристики рис.2.23,б:

- в прямому напрямі $R_{E,np} = 1,2/0,3 = 4 \text{ Ом};$

- у зворотному напрямі $R_{E,зв} = 200/(0,05 \cdot 10^{-6}) = 4 \cdot 10^9 \text{ Ом}.$

Струм у колі при прямому i_1 й зворотному i_2 напрямках являє собою півхвилі синусоїди, амплітуди яких:

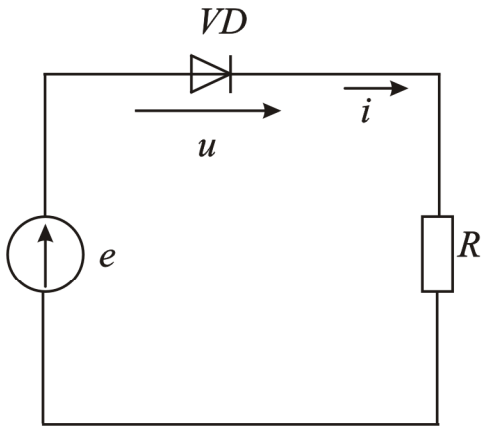
$$I_{mnp} = \frac{E_m}{R + R_{E,np}} = \frac{150}{1000 + 4} = 0,149 \text{ А},$$

$$I_{mзв} = \frac{E_m}{R + R_{E,зв}} = \frac{150}{1000 + 4 \cdot 10^9} = 0,0375 \cdot 10^{-6} \text{ А}.$$

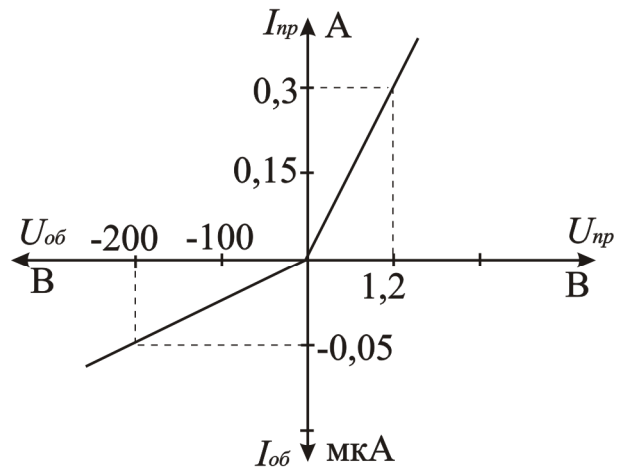
3. Побудуємо залежність $i(t)$ (рис.2.24,б).

4. Розрахуємо середнє значення постійної складової струму:

$$I_0 = I_{0np} - I_{0зв} = \frac{I_{mnp}}{\pi} - \frac{I_{mзв}}{\pi} = \frac{0,149 - 0,0375 \cdot 10^{-6}}{3,14} = 0,047 \text{ А}.$$

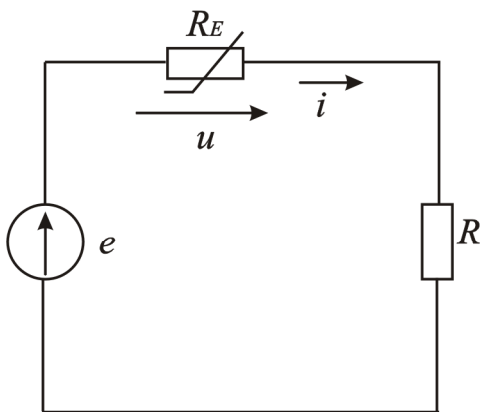


а

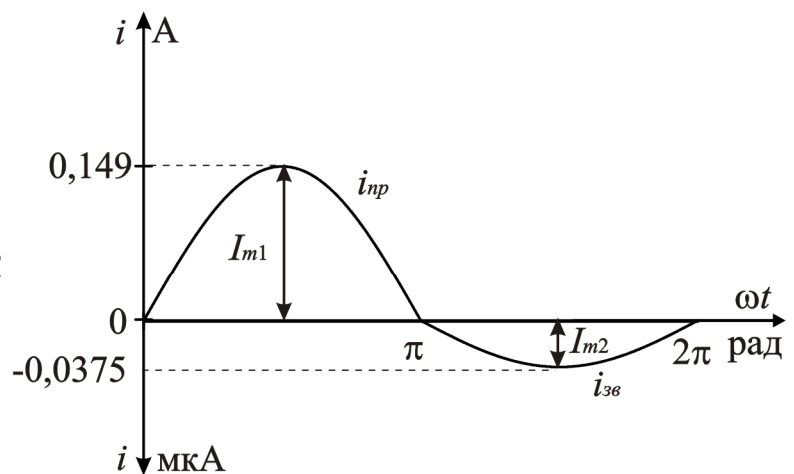


б

Рис.2.23



а



б

Рис.2.24

5. Визначимо діюче значення струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} I_{mnp}^2 \cdot (\sin \omega t)^2 d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} I_{mзв}^2 \cdot (\sin \omega t)^2 d\omega t \right)} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{I_{mnp}^2 + I_{mзв}^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,149^2 + (0,0375 \cdot 10^{-6})^2} = 0,075 \text{ А.}$$

6. Розрахуємо потужність джерела:

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e(t) \cdot i(t)) d\omega t = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} (e(t) \cdot i_{np}(t)) d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} (e(t) \cdot i_{зв}(t)) d\omega t \right) =$$
$$= \frac{E_m}{4} \cdot (I_{mзв} + I_{mnp}) = \frac{150}{4} \cdot (0,149 + 0,0375 \cdot 10^{-6}) = 5,6 \text{ Вт.}$$

7. Знайдемо потужність втрат в резисторі:

$$P_H = I^2 \cdot R = 0,075^2 \cdot 1000 = 5,6 \text{ Вт.}$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст]: учебник / - Л.А. Бессонов; М.: Гардарики, 2002. – 640 с.
2. Зевеке, Г.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов [Текст] / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, Нетушил, Страхов; М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
3. Паначевний, Б.І. Загальна електротехніка: теорія і практикум: Підручник [Текст] / Б.І. Паначевний, Ю.Ф. Свєргун; К.: Каравела, 2004. - 440 с.
4. Текст лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки", частина II (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 – "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 – "Електромеханіка") [Текст] / Я.Б. Форкун, В.П. Самошкін, Г.В. Капустін; ред. М.З. Аляб'єв; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. - Х.: ХНАМГ, 2009. – 87 с.
5. Рибалко, М.П..Теоретичні основи електротехніки: Лінійні електричні кола: Підручник [Текст] / В.О. Есауленко, В.І. Костенко; Донецьк: Новий світ, 2003. – 513 с.
6. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса [Текст] / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин; Издательство «Питер», 2004 г. (Том 1 – 462 с., Том 2 – 575 с., том 3 – 376 с.).

Навчальне видання

ФОРКУН Яна Борисівна,
КАПУСТІН Геннадій Валентинович,
САМОШКІН Володимир Петрович,
ТУГАЙ Дмитро Васильович

Методичні вказівки до практичних занять за темами «Перехідні процеси в лінійних електричних колах. Нелінійні кола» з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 - «Електротехніка та електротехнології», 6.050702 - «Електромеханіка», 6.030601 - «Менеджмент»).

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*
Редактор *М.З. Аляб'єв*

План 2010, поз. 265М

Підп. до друку 23. 06. 2010
Друк на ризографі.
Зам. №

Формат 60 x 84 1/16
Ум. друк. арк. 2,0
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювачі
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №731 від 19.12.2001