ВИЩА
МАТЕМАТИКА
для електротехніків
у трьох модулях

С.О. Станішевський
А.В. Якунін
А.О. Володченко

МОДУЛЬ 2

Інтегральне числення функцій однієї змінної

Диференціальні рівняння

Операційне числення
Елементи варіаційного числення

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для електротехніків

у трьох модулях

Модуль 2

**С.О. Станішевський, А.В. Якунін,
А.О. Володченко**

Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення

Навчальний посібник

***Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України***

Харків ХНАМГ 2010

УДК [517.3+517.4+517.9](075)
ББК 22.11я7
В55

***Рецензенти*:**

В.Д. Гордевський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);
О.М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);
Ю.В. Куліш, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики (Українська державна академія залізничного транспорту);
В.Г. Моторіна, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики (Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей
вищих навчальних закладів
(*лист № 1/ІІ-2758 від 02.04.2010 р*.)

Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях:
В55 навч. посіб. / С.О. Станішевський, А.В. Якунін, В.С. Ситникова та ін.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. –
ISBN 978-966-695-165-9
Модуль 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С.О. Станішевський, А.В. Якунін, А.О. Володченко. – 2010. – 350 с.
ISBN 978-966-695-166-6

За модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають другому семестру за діючою програмою для електротехнічних спеціальностей. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.
Модуль 1 вийшов з друку в 2009 р.

УДК [517.3+517.4+517.9](075)
ББК 22.11я7

ISBN 978-966-695-165-9
ISBN 978-966-695-166-6 (Модуль 2)

Передмова

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають другому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до електротехнічних задач. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Основою даного посібника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті електропостачання і освітлення міст та на факультеті інженерної екології міст Харківської національної академії міського господарства.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей, а також може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Автори щиро вдячні своєму колезі Бізюку В.В. за сприяння у підготовці посібника.

Змістовий модуль 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1. Невизначений інтеграл

1.1.1. Первісна функція та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Основна задача диференціального числення – знаходження похідної $f'(x)$ відомої функції $f(x)$. Механічне тлумачення: за відомим законом руху матеріальної точки $s(x)$ диференціюванням знайти її швидкість $v(x)=s'(x)$.

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною $F'(x)=f(x)$. У механічній інтерпретації: якщо відома швидкість $v(x)=s'(x)$ матеріальної точки, то інтегруванням можна знайти закон її руху $s(x)$.

Нехай X – деякий проміжок на множині дійсних чисел R. Тобто X – це множина вигляду $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$ або $(a;b)$, причому цей проміжок може бути скінченним чи нескінченним.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на X, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$\boxed{F'(x)=f(x)}$ або, що те саме, $\boxed{dF(x)=f(x)dx}$.

Іншими словами, *функція* $f(x)$ *– похідна своєї первісної* $F(x)$.

Приклад 1. Знайти первісну для даної функції:

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=\cos 3x$; в) $f(x)=1/x$.

□ а) Оскільки $(x^4)'=4x^3$, то з означення первісної випливає, що функція $F(x)=x^4/4$ є первісна для $f(x)=x^3$: $(x^4/4)'=x^3$. Первісною є також $F(x)=x^4/4+C$, де C – довільна стала, оскільки додавання константи не змінює значення похідної. При цьому $X=(-\infty;+\infty)$.

б) Оскільки $(\sin 3x)'=3\cos 3x$, то для $f(x)=\cos 3x$ первісною є функція $F(x)=(1/3)\sin 3x+C$, $X=(-\infty;+\infty)$.

в) Оскільки $(\ln x)'=1/x$, то первісною для функції $f(x)=1/x$ служить функція $F(x)=\ln x+C$, $X=(0;+\infty)$, а також $F(x)=\ln|x|+C$. $X=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. ■

Теорема (про загальний вигляд усіх первісних). *Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на проміжку X. Тоді функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також буде первісною функції $f(x)$. І навпаки, будь-яка первісна функції $f(x)$ на проміжку X може бути подана у вигляді $F(x)+C$.*

□ Доведення першої частини теореми випливає з властивостей похідної та означення первісної:

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Для доведення другої частини припустимо, що $\Phi(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$. Знайдемо похідну різниці $\Phi(x)-F(x)=\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0, \quad x\in X.$$

З одержаної тотожності випливає, що $\varphi(x)$ є сталою, $\varphi(x)=C$. Тоді $\Phi(x)-F(x)=C$, звідки $\Phi(x)=F(x)+C$. ■

Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)\,dx$.

При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)\,dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C}, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Інтегрування – це обернена операція до диференціювання.

Зауваження. При інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом.

Геометричний зміст. Первісна функції $f(x)$ є лінією $y = F(x)$, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює відповідному значенню функції $f(x)$. Невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ – це сім’я таких “паралельних” ліній, що задається рівнянням $y = F(x) + C$ (рис. 1).

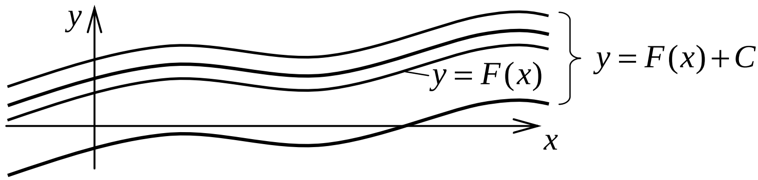

Рис. 1

1.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Невизначений інтеграл має наступні властивості:

1. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції*:

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)}.$$

2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу*:

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}.$$

3. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала*:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}.$$

Ці три властивості випливають з означення невизначеного інтеграла. Наступні дві співпадають з відповідними властивостями похідної.

4. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо*:

$$\boxed{\int\big(f(x)+g(x)-h(x)\big)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx}.$$

5. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла*:

$$\boxed{\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx,\quad a=const\neq 0}.$$

6. *Якщо* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ – *будь-яка неперервно диференційовна функція, то*

$$\boxed{\int f(u)\,du=F(u)+C}.$$

Тобто, *змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційовна функція іншої змінної.*

□ Доведемо цю властивість. Розглянемо $\int f(u)\,du$, в якому $u=\varphi(x)$. Тоді $du=\varphi'(x)\,dx$. Нехай для підінтегральної функції первісною є $F(u)=F\big(\varphi(x)\big)$. Знайдемо її похідну:

$$F'\big(\varphi(x)\big)=F'(u)\,\varphi'(x)=f(u)\,\varphi'(x)=f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

Тоді за третьою властивістю

$$\int dF\big(\varphi(x)\big)=\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx=F\big(\varphi(x)\big)+C$$

або $\int f(u)\,du=F(u)+C$. ■

Зауваження 1. Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням.*

Зауваження 2. Властивості 4 і 5 виражають лінійність операції інтегрування.

Зауваження 3. Властивість 6 виражає інваріантність формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовну функцію*.

На основі таблиці похідних (диференціалів) елементарних функцій можна скласти таблицю невизначених інтегралів:

Таблиця 1

Основні невизначені інтеграли			
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\ ctg\ u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b}\right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0\,;\ \ a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\ arctg\dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ \ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$ $(a > 0)$

Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\| tg\frac{u}{2} \right\| + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\| tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\| + C$
3	$\int tg\, u\, du = -\ln\left\| \cos u \right\| + C$	4	$\int ctg\, u\, du = \ln\left\| \sin u \right\| + C$
5	$\int sh u\, du = ch u + C$	6	$\int ch u\, du = sh u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{1}{2} a^2 \ln\left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C$ $(a \neq 0)$	10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \frac{1}{2} a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
11	$\int e^{au} \sin bu\, du = \left(-b e^{au} \cos bu +\right.$ $\left.+ a e^{au} \sin bu\right) / \left(a^2 + b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	12	$\int e^{au} \cos bu\, du = \left(a e^{au} \cos bu +\right.$ $\left.+ b e^{au} \sin bu\right) / \left(a^2 + b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності з використанням *тотожних перетворень* підінтегральної функції та *підведення під знак диференціала*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int (2x^3 - 3e^x + 1)\, dx$; б) $\int tg^2 x\, dx$; в) $\int 2^{\sin x} \cos x\, dx$.

□ а) Використавши властивості 4 та 5, запишемо даний інтеграл у вигляді лінійної комбінації табличних інтегралів

$$\int (2x^3 - 3e^x + 1)\, dx = 2\int x^3 dx - 3\int e^x dx + \int dx$$

і з огляду на наведену вище таблицю отримаємо

$$2x^{3+1}/(3+1)-3e^x+x^{0+1}/(0+1)+C=x^4/2-3e^x+x+C.$$

б) Використавши властивості тригонометричних функцій та інтегралів, зробивши деякі елементарні перетворення, отримаємо

$$\int\left(\sin^2 x\big/\cos^2 x\right)dx=\int\left((1-\cos^2 x)\big/\cos^2 x\right)dx=$$

$$=\int\left(1/\cos^2 x-1\right)dx=\int dx/\cos^2 x-\int dx=tgx-x+C.$$

в) Використавши підведення під знак диференціала, отримаємо

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx=\int 2^{\sin x}\,d(\sin x)=2^{\sin x}\big/\ln 2+C.\quad\blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграли і результат перевірити диференціюванням:

$$\text{а)}\int\left(3x^3-1/x\right)^2dx;\qquad\text{б)}\int 3^{2x+1}5^x\,dx.$$

$$\square\ \text{а)}\ \int(3x^3-1/x)^2\,dx=\int(9x^6-6x^2+1/x^2)\,dx=9\int x^6\,dx-$$

$$-6\int x^2\,dx+\int(1/x^2)\,dx=9x^7\big/7-2x^3-1/x+C;$$

$$((9/7)x^7-2x^3-1/x+C)'=(9/7)\cdot 7x^6-2\cdot 3x^2+$$

$$+1/x^2+0=(3x^3-1/x)^2;$$

$$\text{б)}\ \int 3^{2x+1}5^x\,dx=3\int(3^2\cdot 5)^x\,dx=3\int 45^x\,dx=3\cdot 45^x\big/\ln 45+C;$$

$$((3/\ln 45)\cdot 45^x+C)'=(3/\ln 45)\cdot 45^x\ln 45+0=3^{2x+1}5^x.\quad\blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл $\int\frac{3\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\,dx$. Виділити первісну $y=F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$, де $x_0=1$ і $y_0=-10$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1=64$.

$$\int\frac{3\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\,dx=\int\left(3x^{1/2}-\frac{1}{\sqrt{x}}-4x^{-1/3}+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$= 3\int x^{1/2}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int x^{-1/3}dx + \int \frac{dx}{x} = 3 \cdot x^{3/2} \Big/ (3/2) - 2\sqrt{x} -$$

$$- 4 \cdot x^{2/3} \Big/ (2/3) + \ln|x| + C = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| + C .$$

З умови $F(x_0) = y_0$ знайдемо відповідне значення довільної сталої та шукану первісну:

$$F(1) = -10: \;\; 2 \cdot 1^{3/2} - 2\sqrt{1} - 6 \cdot 1^{2/3} + \ln|1| + C = -10 ;$$

$$C = -4 ; \;\; F(x) = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| - 4$$

Обчислимо значення первісної в указаній точці $x_1 = 64$:

$$F(64) = 2 \cdot 64^{3/2} - 2\sqrt{64} - 6 \cdot 64^{2/3} + \ln|64| - 4 = 908 + \ln 64 . \;\blacksquare$$

1.1.3. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

1. ***Метод заміни змінної*** (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt =$$

$$= G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C .$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x .

Зауваження 1. Функція $\varphi(t)$ обирається таким чином, щоб отриманий інтеграл $\int g(t)\,dt$ був простішим, зокрема, мав табличний вигляд або його можна було звести до такого вигляду за допомогою елементарних перетворень. Далі будуть наведені стандартні підстановки $x = \varphi(t)$ для деяких класів інтегралів.

Зауваження 2. Заміна змінної може застосовуватися повторно.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

□ Зробимо підстановку $x = 3\sin t$ з метою позбутись ірраціональності. Тоді $dx = 3\cos t\,dt$ і

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \int (3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt =$$

$$= \int 9\sin^2 t\cdot 3|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt = 81\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= (81/4)\int \sin^2 2t\,dt = (81/8)\int (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= (81/8)\cdot\left(\int dt - \int \cos 4t\,dt\right) = (81/8)\cdot t - (81/8)\cdot\int \cos 4t\,dt$$

при умові $\cos t \ge 0$. Нехай $t = u/4$. Тоді $dt = (1/4)\,du$ і

$$\int \cos 4t\,dt = (1/4)\int \cos u\,du = (1/4)\sin u + C.$$

Отже

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = (81/8)\cdot t - (81/8)\cdot(1/4)\sin u + C.$$

Повернемось до початкової змінної x:

$$t = \arcsin(x/3);\quad u = 4t = 4\arcsin(x/3).$$

Тоді

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \frac{81}{8}\arcsin(x/3) - \frac{81}{32}\sin(4\arcsin(x/3)) + C.$$

Звичайно, отриманий результат можна спростити, використовуючи тригонометричні тотожності. ■

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u = \varphi(x)$, перейдемо в інтегралі

$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du\ .$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, поклавши $u = \varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + C = G(\varphi(x)) + C\ .$$

Зауваження 3. При другому способі за нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \sin(x^3+2)x^2dx; \qquad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}dx\ .$$

□ а) Зробимо підстановку $u = x^3 + 2$. Тоді $du = 3x^2dx$, $x^2dx = (1/3)\,du$ і, отже,

$$\int \sin(x^3+2)\,x^2dx = (1/3)\int \sin u\,du = (-1/3)\cos u + C =$$

$$= (-1/3)\cos(x^3+2) + C\ .$$

б) Зробимо підстановку $u = arctg\,x$. Тоді $dt = du/(1+x^2)$ і, отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}dx = \int \sqrt[3]{u}\,du = \int u^{1/3}du = (3/4)u^{4/3} + C =$$

$$= (3/4)arctg^{4/3}x + C\ . \quad ■$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int f(ax+b)\,dx$, $a \neq 0$, якщо відомо, що $\int f(x)dx = F(x)$.

□ Використаємо лінійну підстановку $u = ax + b$. Для цієї підстановки $du = a\,dx$.

$$\int f(ax+b)dx = (1/a)\int f(ax+b)adx = (1/a)\int f(u)du =$$

$$= (1/a)F(u) + C\ .$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx=(1/a)F(ax+b)+C}.\blacksquare$$

Висновок 1. Оскільки у наведеному прикладі розглядалася довільна функція $f(x)$, отриманий результат можна застосовувати як одну з властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 4. Знайти інтеграл

$$\int\left(1/\cos^2 6x+(2-9x)^{10}+\sin(x-6)\right)dx.$$

$$\square\ \int\left(1/\cos^2 6x+(2-9x)^{10}+\sin(x-6)\right)dx=$$

$$=\int dx/\cos^2 6x+\int(2-9x)^{10}dx+\int\sin(x-6)\,dx=$$

$$=(1/6)tg\,6x-(1/99)(2-9x)^{11}-\cos(x-6)+C.\quad\blacksquare$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

$$\square\ \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left|\begin{array}{c}u=f(x)\\ du=f'(x)\,dx\end{array}\right|=\int\frac{du}{u}=$$

$$=\ln|u|+C=\ln|f(x)|+C.\quad\blacksquare$$

Висновок 2. *Інтеграл дробу, в якому чисельник є похідною знаменника, дорівнює сумі натурального логарифма модуля знаменника і довільної сталої*: $\boxed{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C}$

2. ***Метод інтегрування частинами***, що ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій, відіграє допоміжну роль і має специфічні сфери застосування.

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій

$$d(uv)=v\,du+u\,dv,$$

а тепер проінтегруємо

$$\int d(uv)=\int v\,du+\int u\,dv,\ \text{але}\ \int d(uv)=uv+C.$$

Маємо ***формулу інтегрування частинами*** $\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$.

Зауваження 4. Застосовувати цей метод доречно, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або йому подібний. Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні. Функцію v знаходять у явному вигляді як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, поклавши $C=0$).

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx$, $P_n(x)\sin bx$, $P_n(x)\,e^{ax}$, $P_n(x)\,ch bx$, $P_n(x)\,sh bx$, то за u слід взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin bx$, $P_n(x)\arccos bx$, $P_n(x)\,arctg\,bx$, $P_n(x)\,arcctg\,bx$, $P_n(x)\,arsh\,bx$, $P_n(x)\,arch\,bx$, $P_n(x)\,arth\,bx$, $P_n(x)\,arcth\,bx$, то за u слід взяти відповідно логарифмічну $\ln x$, обернену тригонометричну $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $arctg\,bx$, $arcctg\,bx$ чи обернену гіперболічну $arsh\,bx$, $arch\,bx$, $arth\,bx$, $arcth\,bx$ функцію;

в) $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $\int \cos\ln x\,dx$, $\int \sin\ln x\,dx$, то за u в перших двох інтегралах можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну, а в останніх – відповідну тригонометричну функцію. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв'язок цього рівняння.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x\,dx$; б) $\int \left(x^2+4\right)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

□ а) Нехай $x=u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v=\int 5^x dx = 5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x\,dx = x5^x/\ln 5 - (1/\ln 5)\int 5^x\,dx = x5^x/\ln 5 + 5^x/\ln^2 5 + C.$$

б) Припустимо, що $u=x^2+4$; $dv=\cos x\,dx$. Тоді

$du = 2x\,dx$, $v = \sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x - 2\int x\sin x\,dx .$$

Застосувавши до інтеграла, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u = x$, $dv = \sin x\;dx$, $du = dx$, $v = -\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C .$$

в) Приймемо, що $u = \ln(x+3)$, $dv = dx$. Тоді $du = dx/(x+3)$, $v = x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3) - \int x\,dx/(x+3) = x\ln(x+3) -$$

$$-\int\frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3) - \int dx + 3\int\frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3) -$$

$$-x + 3\ln(x+3) + C .$$

г) Покладемо $u = \sin 7x$, $dv = e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du = 7\cos 7x\,dx$ та $v = e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I = \int e^x \sin 7x\,dx = e^x \sin 7x - \int e^x 7\cos 7x dx =$$

$$= e^x \sin 7x - 7\int e^x \cos 7x\,dx \;.$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u = \cos 7x$, $dv = e^x dx$; $du = -7\sin 7x\,dx$, $v = e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x(-7\sin 7x)\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\,dx .$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I. Розв’язавши це рівняння, маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I\;;\; 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x ;$$

$$I=\int e^x \sin 7x\,dx=(1/50)\left(e^x \sin 7x-7e^x \cos 7x\right)+C\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження 5. Наведені методи вичерпують відомі загальні способи інтегрування. Вони можуть застосовуватися разом у різній послідовності й багаторазово. Далі будуть розглянуті особливості їх використання для інтегрування основних класів функцій. Треба творчо підходити до конкретної задачі, враховуючи її специфіку і допускаючи застосування нетипових способів інтегрування.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \cos^2 \sqrt{x}\,dx$.

□ Застосуємо заміну змінної, елементарні перетворення, а потім інтегрування частинами:

$$\int \cos^2 \sqrt{x}\,dx=\left|x=t^2;\ dx=2t\,dt\right|=2\int t\cos^2 t\,dt=2\int t\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-\int t\cos 2t\,dt=\left|u=t;\ du=dt;\ dv=\cos 2t\,dt;\ v=\frac{\sin 2t}{2}\right|=$$

$$=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}+\frac{1}{2}\int \sin 2t\,dt=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}-\frac{1}{4}\cos 2t+C=\left|t=\sqrt{x}\right|=$$

$$=(1/4)\cdot\left(2x-2\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}-\cos 2\sqrt{x}\right)+C\,. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int dx\big/(x^2+9)^2$.

□ Застосуємо елементарні перетворення, інтегрування частинами і заміну змінної:

$$\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)^2}dx=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+9}-\frac{1}{9}\int\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\,arctg\,\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\int\frac{x\cdot x\,dx}{(x^2+9)^2}=\left|u=x;\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+9)^2}\ ;\right.$$

$$\left.du=dx;\ \ v=\int\frac{x\,dx}{(x^2+9)^2}=\right|t=x^2+9;\ \ dt=2x\,dx\Big|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2t}+C=-\frac{1}{2(x^2+9)}+C;\ C=0\Bigg|=\frac{1}{27}\,arctg\,\frac{x}{3}-$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\left(x\cdot\left(-\frac{1}{2(x^2+9)}\right)-\int\left(-\frac{1}{2(x^2+9)}\right)dx\right)=\frac{1}{27}\,arctg\frac{x}{3}+$$

$$+\frac{x}{18(x^2+9)}-\frac{1}{18}\cdot\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{27}\,arctg\frac{x}{3}+\frac{x}{18(x^2+9)}-$$

$$-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\,arctg\frac{x}{3}+C=\frac{1}{54}\,arctg\frac{x}{3}+\frac{x}{18(x^2+9)}+C. \quad ■$$

1.1.4. Інтегрування раціональних дробів

1. Розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники.

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n;\;\; a_i\in R;\; i=\overline{0,n}\;.$$

На множині комплексних чисел C будь-який многочлен $P_n(x)$ n-го степеня за основною теоремою алгебри має точно n коренів, а тому єдиним способом (з точністю до порядку співмножників) розкладається у добуток

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_m)^{k_m}\,,$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $x_1, x_2, ..., x_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, ..., k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1+k_2+...+k_m=n$.

При інтегруванні дійсних виразів бажано не виходити за межі множини дійсних чисел R. Розглянемо особливості розкладання на множники при цьому обмеженні.

Якщо комплексне число $a=\alpha+\beta i$ є коренем многочлена $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то й комплексно спряжене з ним $\overline{a}=\alpha+\beta i$ також буде коренем даного многочлена. Добуток $(x-a)(x-\overline{a})$, що відповідає парі комплексно спряжених коренів, породжує ***простий*** (***незвідний*** у множині дійсних чисел) квадратний тричлен $x^2 + px + q$ з дійсними коефіцієнтами $p, q \in R$ і від'ємним дискримінантом $D = p^2 - 4q < 0$.

Таким чином, *будь-який многочлен* $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s} \times$$
$$\times(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t},$$

де лінійні двочлени $x - a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1, x_2, \dots, x_s$; квадратні тричлени $x^2 + px + q$ з від'ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1, k_2, \dots, k_s$ і $l_1, l_2, \dots, l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1 + \dots + k_s + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.

<u>Приклад 1</u>. Розкласти многочлен $P(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$ на різні прості дійсні множники.

□ За теоремою Вієта добуток коренів многочлена такого типу дорівнює вільному члену. Тобто, $x_1x_2x_3x_4x_5 = -6$. Перевіримо числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, , \pm 6$, що служать дільниками вільного члена -6. Нехай $x = -1$. Тоді

$$P(-1) = (-1)^5 - (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) - 6 =$$
$$= -1 - 1 + 3 - 5 + 10 - 6 = 0. \text{ Отже, } x = -1 \text{ – корінь.}$$

Знизимо степінь, розділивши многочлен "кутом" на двочлен $x - (-1) = x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 & x + 1 \\
\underline{x^5 + x^4} \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6} \\
-\;-2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 & \\
\underline{-2x^4 - 2x^3} \qquad\qquad\quad &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
-\begin{array}{l} -x^3-5x^2-10x-6 \\ \underline{-x^3-x^2} \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} -4x^2-10x-6 \\ \underline{-4x^2-4x} \end{array}
\end{array}
\qquad
-\begin{array}{r} -6x-6 \\ \underline{-6x-6} \\ 0 \end{array}
$$

Отримаємо

$$P(x)=(x+1)S(x), \text{ де } S(x)=x^4-2x^3-x^2-4x-6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена четвертого степеня. Нехай $x=-1$. Тоді

$$S(-1)=1+2-1+4-6=0. \text{ Отже, } x=-1 \text{ – корінь.}$$

Знизимо степінь, розділивши многочлен "кутом" на двочлен $x-(-1)=x+1$. (Виконайте ділення самостійно). Одержимо

$$S(x)=(x+1)T(x), \quad \text{де } T(x)=x^3-3x^2+2x-6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена третього степеня. Нехай $x=3$. Тоді

$$T(3)=3^3-3\cdot 3^2+2\cdot 3-6=0. \text{ Отже, } x=3 \text{ – корінь.}$$

Знизимо степінь, розділивши многочлен "кутом" на двочлен $x-3$. (Виконайте ділення самостійно). Отримаємо

$$T(x)=(x-3)(x^2+2),$$

де неповний квадратний тричлен x^2+2 є простим, оскільки дійсних коренів не має.

Отже, $\quad P(x)=(x+1)^2(x-3)(x^2+2)$. ■

2. Раціональні дроби.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m;$$

$$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n.$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу*

$$\boxed{P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x)},$$

причому цей розклад єдиний.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Множочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення “кутом” $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 2. Вилучити цілу частину неправильного дробу $P(x)/Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 4)/((x+4)(x-2))$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення “кутом” многочлена на многочлен, спочатку виконавши множення в знаменнику і записавши результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x) = (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$;

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & \underline{x^2 + 2x - 8} \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2} \qquad & x^2 - 2x + 9 \\
-\,-2x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 + 16x} \qquad & \\
-\,9x^2 - 11x + 4 & \\
\underline{9x^2 + 18x - 72} & \\
-29x + 76 &
\end{array}$$

Таким чином,

$$P(x)/Q(x) = x^2 - 2x + 9 + (-29x + 76)/((x+4)(x-2)). \quad \blacksquare$$

Зауваження 1. Вилучення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Приклад 3. Вилучити цілу частину неправильного дробу $x^4/(x^2+1)$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Скористаємося алгебраїчними перетвореннями:

$$x^4/(x^2+1)=(x^4-1+1)/(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)/(x^2+1)+$$
$$+1/(x^2+1)=x^2-1+1/(x^2+1)\,. \quad \blacksquare$$

3. Найпростіші раціональні дроби. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\boxed{\dfrac{A}{x-a}}$; 2) $\boxed{\dfrac{A}{(x-a)^k}}$, $k\ge 2$; 3) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}}$, $D=p^2-4q<0$;

4) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}}$, $k\ge 2,\ D=p^2-4q<0$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***). Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k\in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен x^2+px+q має тільки комплексні корені.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.*

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0=0$), розкладений на прості дійсні множники

$$Q_n(x)=(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}\,,$$

де $k_1+\dots+k_s+2(l_1+\dots+l_t)=n$.

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{s1}}{(x-x_s)^{k_s}}+$$

$$+\frac{A_{s2}}{(x-x_s)^{k_s-1}}+\ldots+\frac{A_{sk_s}}{x-x_s}+\ldots+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+$$

$$+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}+\ldots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{t1}x+C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}+\frac{B_{t2}x+C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t-1}}+\ldots+\frac{B_{tl_t}x+C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

Коефіцієнти A_{ij} $(i=\overline{1,s}\,;\ j=\overline{1,k_i})$ і B_{ij}, C_{ij} $(i=\overline{1,t}\,;\ j=\overline{1,l_t})$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x, *приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів* (два многочлена тотожно рівні, коли рівні коефіцієнти при подібних членах – однакових степенях x);

– ***метод окремих значень*** (***метод підстановки***): *надаючи змінній* x *в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів* (тотожні вирази приймають однакові значення при довільному допустимому значенні аргументу x).

Зауваження 2. Використовуючи метод окремих значень, не треба розкривати дужки в многочленах, а підставляти зручно різні дійсні корені знаменника $Q_n(x)$, що приводить до простих рівнянь. Отримана система повинна мати розмірність, що дорівнює числу шуканих коефіцієнтів.

Зауваження 3. Метод підстановки рекомендується вживати, коли всі корені знаменника дійсні й серед них немає кратних. У протилежному випадку краще поєднати цей метод з методом невизначених коефіцієнтів. Але треба вибирати незалежні рівняння, щоб система мала єдиний розв’язок.

Зауваження 4. Існують інші, менш поширені, методи знаходження невідомих коефіцієнтів. Допитливі можуть з ними познайомитися, звернувшись до спеціалізованої літератури.

Приклад 3. Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ розкласти на суму найпростіших дробів, де

а) $P(x)=-2x^4-x^3-6x^2+18x+13$

і $Q(x)=x^5-x^4-3x^3-5x^2-10x-6$;

б) $P(x)=7x-x^2-4$ і $Q(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$;

в) $P(x)=x^3-8$ і $Q(x)=x(x+4)(x^2+2x+2)$.

□ а) Многочлен $Q(x)$ було розкладено на множники вище (див. Прикл.1): $Q(x)=(x+1)^2(x-3)(x^2+2)$.

Шукане розкладання дробу матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+2},$$

де числа A,B,C,D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо (відкидаючи однакові знаменники) тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2)+B(x-3)(x^2+2)+C(x-3)(x+1)(x^2+2)+$$
$$+(Dx+E)(x-3)(x+1)^2=P(x).$$

Знайдемо невідомі A,B,C,D,E методом невизначених коефіцієнтів. Розкривши дужки і звівши подібні, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Дістанемо і розв’яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом Гаусса) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+C+D=-2, \\ x^3 & 2A+B-2C-D+E=-1\ , \\ x^2 & 3A-3B-C-5D-E=-6\ , \\ x^1 & 4A+2B-4C-3D-5E=18\ , \\ x^0 & 2A-6B-6C-3E=13\ ; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1\\1\\1\\1\\1 \end{array}}\right\} \begin{array}{l|} A=-1; \\ B=1; \\ C=-2; \\ D=1; \\ E=-3. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2+2}\,.$$

б) Даний дріб розкладається на елементарні наступним чином: $P(x)/Q(x)=A/(x+1)+B/(x-2)+C/(x-3)$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)=P(x)\,.$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти A, B і C, скористаємося методом окремих значень. Для отримання простої системи візьмемо ті значення x, що є коренями знаменника $Q(x)$, тобто $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. Тоді

$$\begin{array}{r|r} x=-1 & 12A=-12, \\ x=\ \ 2 & -3B=6, \\ x=\ \ 3 & 4C=8; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1\\1\\1 \end{array}}\right\} \quad \begin{array}{l} A=-1; \\ B=-2; \\ C=2. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$P(x)/Q(x)=-1/(x+1)-2/(x-2)+2/(x-3)\,.$$

в) Многочлен $Q(x)$ уже розкладений на різні прості дійсні множники (переконайтеся самостійно, що квадратний тричлен x^2+2x+2 має від’ємний дискримінант). Шукане розкладання дробу на суму найпростіших матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,,$$

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x+4)(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2)+$$
$$+(Cx+D)\,x(x+4)=P(x)\,.$$

Оскільки знаменник $Q(x)$ має лише два різних дійсних кореня $x=0$ і $x=-4$, то для складання системи рівнянь відносно невідомих A,B,C і D використаємо комбінацію методів окремих значень і невизначених коефіцієнтів. Дістанемо і розв'яжемо систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{array}{c|c}
x=0 & 8A=-8, \\
x=-4 & -40B=-72, \\
x^3 & A+B+C=1, \\
x & 10A+2B+4D=0;
\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}\quad
\begin{array}{c}
A=-1; \\
B=9/5 \\
C=1-A-B=1/5; \\
D=-(5A+B)/2=8/5.
\end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x+8}{x^2+2x+2}\,. \quad \blacksquare$$

4. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t=x-a$ (проробіть це самостійно):

1) $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

2) $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}\,dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$, $k\ge 2$.

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$.

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат

$$x^2+px+q=x^2+2x\cdot(p/2)+(p/2)^2+q-(p/2)^2=$$

$$= (x + p/2)^2 + a^2;\ \ a = \sqrt{q - p^2/4} > 0.$$

Зробимо заміну $t = x + p/2$. Тоді $x = t - p/2$, $dx = dt$. Одержимо

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{A\big(t - p/2\big) + B}{t^2 + a^2} dt = A\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} +$$

$$+ (B - Ap/2)\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = A\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} + (B - Ap/2)\cdot \frac{1}{a} arctg\, \frac{t}{a}.$$

Далі використовуємо заміну $u = t^2 + a^2$. Тоді $du = 2tdt$, $tdt = (1/2)\,du$. Отримаємо

$$\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} = (1/2)\int \frac{du}{u} = (1/2)\ln|u| + C.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x + p/2;\quad a = \sqrt{q - p^2/4};$$

$$u = t^2 + a^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 = x^2 + px + q,$$

після спрощення остаточно маємо

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = (A/2)\ln|x^2 + px + q| +$$

$$+ \Big((2B - Ap)\big/(4q - p^2)\Big)\, arctg\Big((2x + p)\Big/\sqrt{4q - p^2}\Big) + C.$$

Зауваження 5. Якщо в квадратному тричлені $x^2 + px + q$ дискримінант додатний $D > 0$, то дріб $(Ax + B)/(x^2 + px + q)$ за означенням неелементарний і зводиться до двох дробів першого типу. Однак його можна інтегрувати й наведеним вище способом, де замість арктангенса з'явиться логарифм.

Зауваження 6. Одержані формули запам'ятовувати не потрібно. Краще безпосередньо застосовувати розглянуті підходи для інтегрування кожного конкретного елементарного дробу.

Зауваження 7. Інтегрування найпростішого дробу четвертого типу розглядати не будемо. Бажаючим вивчити це питання треба звернутися до більш ґрунтовних підручників.

5. Розгляд основних випадків інтегрування раціональних дробів.

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу $\int P(x)dx / Q(x)$. Якщо дріб неправильний, то його подаємо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів.

<u>Приклад 4</u>. Знайти інтеграл $I = \int \frac{2x^3 - 15x - 45}{x^2 - 6x + 13} dx$.

□ Оскільки дріб неправильний, то діленням "кутом" виділимо в ньому цілу частину (проробіть це самостійно), а потім проінтегруємо, використовуючи заміни:

$$I = \int (2x-3)\, dx + \int (-44x - 6)\, dx \big/ (x^2 - 6x + 13) =$$

$$= \left| x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4;\ t = x - 3;\ x = t + 3;\ dx = dt \right| = x^2 -$$

$$-3x + \int \frac{-44(t+3) - 6}{t^2 + 4} dt = x^2 - 3x - 44 \int \frac{t\, dt}{t^2 + 4} - 6 \int \frac{dt}{t^2 + 4} =$$

$$= \left| u = t^2 + 4;\ du = 2t\, dt;\ t\, dt = (1/2)\, du \right| = x^2 - 3x - 44 \times$$

$$\times \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - 6 \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} = x^2 - 3x - 22 \ln |u| - 3 arctg \frac{t}{2} + C =$$

$$= \left| t = x - 3;\ u = t^2 + 4 = (x-3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 13 \right| =$$

$$= x^2 - 3x - 22 \ln(x^2 - 6x + 13) - 3\, arctg \frac{x-3}{2} + C$$

$$= 3 arctg\, (x+1) - \ln |x - 2| + C\,. \blacksquare$$

З попереднього відомо, що структура розвинення на елементарні дроби визначається коренями знаменника $Q(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) <u>Корені знаменника дійсні й прості</u>, тобто

$$Q(x) = (x-a)(x-b) \cdot \ldots \cdot (x-d)\,.$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дроби тільки першого типу

$$P(x)/Q(x) = A/(x-a) + B/(x-b) + ... + D/(x-d)\,.$$

Тоді

$$\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)} = \int \frac{A\,dx}{x-a} + \int \frac{B\,dx}{x-b} + ... + \int \frac{D\,dx}{x-d} =$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + ... + D\ln|x-d| + C\,.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int \frac{4x^2-13x+7}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx$.

□ $I = \int \frac{4x^2-13x+7}{(x-2)(x-3)(x+1)}dx = \int \frac{A\,dx}{x-2} + \int \frac{B\,dx}{x-3} + \int \frac{C\,dx}{x+1}$.

Тут $4x^2-13x+7 = A(x-3)(x+1) + B(x-2)(x+1) +$

$$+C(x-2)(x-3)\,.$$

Використавши метод підстановки (пробробіть це самостійно), маємо: $A=1;\ B=1; C=2$.

$$I = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2dx}{x+1} =$$

$$= \ln|x-2| + \ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C\,. \quad \blacksquare$$

б) Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} ... (x-d)^{\gamma}\,.$$

У цьому разі дріб розкладається на найпростіші дроби першого і другого типів.

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx$.

□ $I = \int \frac{A\,dx}{(x+2)^3} + \int \frac{B\,dx}{(x+2)^2} + \int \frac{C\,dx}{x+2} + \int \frac{D\,dx}{x-1}$.

Маємо тотожність $x^3+4x^2+5x+8 = A(x-1)+$

$$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3 .$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (пробобіть це самостійно), отримаємо: $A=-2, B=-1,\ C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C. \quad ■$$

в) Корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені:

$$Q(x)=(x^2+px+q)...(x^2+rx+s)(x-a)^{\alpha}...(x-c)^{\gamma} .$$

У цьому разі дріб $P(x)/Q(x)$ розкладається на найпростіші дроби першого, другого і третього типів.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

□ $I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}$.

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$; $A=-1-C=0$. Отже,

$$I=\int\frac{3\,dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C . \ ■$$

Зауваження 8. Залишився випадок, коли у знаменнику є кратні комплексні корені. Його розглядати не будемо. Бажаючих поглибити свою математичну підготовку відсилаємо до більш ґрунтовних підручників.

Справедливе твердження: *інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді.*

1.1.5. Інтегрування лінійних ірраціональностей

Не від усякої ірраціональної функції інтеграл можна виразити через елементарні функції у скінченній формі. Розглянемо інтеграли від ірраціональних функцій, що за допомогою підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій і, отже, інтегруються.

Домовимося, що запис $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означає раціональну функцію вказаних аргументів.

1. Інтеграл вигляду $\boxed{\int R(x, x^{m/n}, ..., x^{r/s})dx}$. Нехай k – спільний знаменник дробів $m/n, ..., r/s$. Зробимо підстановку $\boxed{x = t^k}$, $dx = kt^{k-1}dt$. Тоді кожний дробовий степінь x виразиться через цілу степінь t і, отже, підінтегральна функція перетвориться у раціональну від t. Після інтегрування за змінною t повертаємося до старої змінної x: $t = x^{1/k} = \sqrt[k]{x}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти інтеграл $I = \int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\, dx}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x}}$.

□ $I = \int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\, dx}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x}} = \int \frac{(x^{1/3} - 1)\, dx}{x^{2/3} + 3x^{1/2}}$.

Спільний знаменник дробів $1/3$, $2/3$ і $1/2$ є 6. Зробимо підстановку $x = t^6$; $dx = 6t^5 dt$. Тоді $t = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

$$I = \int \frac{(x^{1/3} - 1)\, dx}{x^{2/3} + 3x^{1/2}} = 6\int \frac{(t^2 - 1)t^5 dt}{t^4 + 3t^3} = 6\int \frac{(t^2 - 1)t^5 dt}{t^3(t+3)} =$$

$$= 6\int \frac{(t^4 - t^2)\, dt}{t+3} = 6\int \left(t^3 - 3t^2 + 8t - 24 + \frac{72}{t+3} \right) dt =$$

$$= 6(t^4/4 - t^3 + 4t^2 - 24t + 72\ln|t+3|) + C =$$

$$=3\sqrt[3]{x^2}/2-6\sqrt{x}+24\sqrt[3]{x}-144\sqrt[6]{x}+432\ln|\sqrt[6]{x}+3|+C\,. \blacksquare$$

2. Інтеграл вигляду

$$\boxed{\int R\left(x,(ax+b)^{m/n},\ldots,(ax+b)^{r/s}\right)dx,\quad a\neq 0}.$$

Він зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\boxed{ax+b=t^k}$, де k – спільний знаменник дробів $m/n,\ldots,r/s$. Тоді $x=(t^k-b)/a$; $dx=(k/a)t^{k-1}dt$. Після інтегрування за змінною t повертаємося до початкової змінної x: $t=(ax+b)^{1/k}=\sqrt[k]{ax+b}$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграл $I=\int\frac{(\sqrt{x-1}+2x)\,dx}{x-2\sqrt{x-1}}$.

□ Робимо заміну: $x-1=t^2$; $x=t^2+1$; $dx=2tdt$. Тоді

$$I=\int\frac{(t+2t^2+2)2t\,dt}{t^2+1-2t}=\int\frac{(4t^3+t^2+4t)\,dt}{t^2-2t+1}=\int(4t+10)\,dt+$$

$$=\int\left(4t+10+(20t-10)/(t-1)^2\right)dt=2t^2+10t+$$

$$+\int\frac{\left(20(t-1)+10\right)dt}{(t-1)^2}=2t^2+10t+\int\left(\frac{20}{t-1}+\frac{10}{(t-1)^2}\right)dt=$$

$$=2t^2+10t+20\ln|t-1|-10/(t-1)+C=\left|t=\sqrt{x-1}\right|=2(x-1)+$$

$$+10\sqrt{x-1}+20\ln|\sqrt{x-1}-1|-10/\left(\sqrt{x-1}-1\right)+C\,.\ \blacksquare$$

1.1.6. Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути безліч. Більшість з них взагалі не обчислюються аналітично. Тому розглянемо деякі найголовніші типи таких функцій, що завжди інтегруються.

1. Інтеграли вигляду:

$$\boxed{\int\cos ax\,\cos bx\,dx,\ \int\sin ax\,\cos bx\,dx,\ \int\sin ax\,\sin bx\,dx}$$

знаходяться за допомогою тригонометричних формул перетворення добутків у суму відповідно:

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos ax \cos bx = \big(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2\,; \\ &\sin ax \cos bx = \big(\sin(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2\,; \\ &\sin ax \sin bx = \big(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\big)/2\,. \end{aligned}}$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти інтеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x\, dx$.

□ $I = (1/2)\int (\sin 10x + \sin 6x)\, dx =$

$$= (-1/20)\cos 10x - (1/12)\cos 6x + C\,.\ ■$$

2. Інтеграл вигляду $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\, dx}$. Покажемо, що *цей інтеграл за допомогою* ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\boxed{tg\,(x/2) = t}$ *завжди зводиться до інтеграла від раціональної функції*. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\sin x = \frac{2tg\,(x/2)}{1 + tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}\,;\quad \cos x = \frac{1 - tg^2(x/2)}{1 + tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,;$$

$$x = 2arctg\, t\,;\quad dx = 2dt/(1+t^2)\,.$$

Отже, $\sin x$, $\cos x$ і dx мають раціональні вирази відносно t. Оскільки раціональна функція від раціональних функцій знову раціональна, маємо:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int \frac{R\big(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2)\big)2\,dt}{1+t^2}\,.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

□ $I = \int \dfrac{2\,dt}{(1+t^2)\big(6t/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2)\big)} = \int \dfrac{2\,dt}{6t + 1 - t^2} =$

$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{t - 3 - \sqrt{10}}{t - 3 + \sqrt{10}}\right| + C =$$

$$=\left(-1/\sqrt{10}\right)\ln\left|\left(tg(x/2)-3-\sqrt{10}\right)/\left(tg(x/2)-3+\sqrt{10}\right)\right|+C\,. \blacksquare$$

Поряд з універсальною також є інші підстановки, що у ряді випадків дають значно простіші раціональні вирази і тим самим швидше ведуть до мети:

а) $\boxed{\int R(\sin x)\cos x\,dx}$. Підстановка $\boxed{\sin x=t}$, $\cos x\,dx=dt$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\,dt$;

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x-2}$.

$$\square\quad I=\int\frac{\cos^2 x\,\cos x\,dx}{\sin x-2}=\left|\cos^2 x=1-\sin^2 x\right|=$$

$$=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin x-2}=\left|\begin{array}{c}\sin x=t;\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{(1-t^2)\,dt}{t-2}=$$

$$=\int\left(-t-2-3/(t-2)\right)dt=(-1/2)t^2-2t-3\ln|t-2|+C=$$

$$=(-1/2)\sin^2 x-2\sin x-3\ln|\sin x-2|+C\,.\quad\blacksquare$$

б) $\boxed{\int R(\cos x)\sin x dx}$. Підстановка $\boxed{\cos x=t}$, $-\sin x\,dx=dt$ зводить цей інтеграл до $-\int R(t)\,dt$;

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x-16}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $\cos x=t$).

в) $\boxed{\int R(tg\,x)\,dx}$. Підстановка $\boxed{tg\,x=t}$, $x=arctg\,t$, $dx=dt/(1+t^2)$, зводить цей інтеграл до $\int R(t)dt/(1+t^2)$;

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\frac{tg\,x\,(1+tg^2x)}{tg^2x+2tg\,x+5}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\,x=t$).

г) $\boxed{\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx}$. Підстановка $\boxed{tg\,x=t}$,

$x = arctg\, t$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\,dt$ тому що

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin x \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

<u>Приклад 6</u>. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x}$.

$$\square \quad I = \left| \begin{array}{l} t = tg\, x; \\ x = arctg\, t; \end{array} \; dx = \frac{dt}{1+t^2}; \; \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \right.$$

$$\left. \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right| = \int \frac{dt/(1+t^2)}{\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)^2 + 6\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)\left(1/\sqrt{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t(t+6)} = \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t+6} = \left| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A(t+6) + Bt = 1} \\ t = 0 & \left.\begin{array}{r} 6A = 1 \\ -6B = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1/6 \\ B = -1/6 \end{array} \\ t = -6 & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+6} = \frac{1}{6}\ln|t| - \frac{1}{6}\ln|t+6| + C =$$

$$= \left| t = tg\, x \right| = (1/6)\ln|tg\, x| - (1/6)\ln|tg\, x + 6| + C. \quad \blacksquare$$

д) $\boxed{\int \sin^m x \cos^n x\, dx}$, де m і n – цілі числа. Тут можливі такі особливості:

• Якщо хоча б одне з чисел m чи n – непарне, то відокремлюємо від непарного степеня одну функцію, що в добутку з dx дає диференціал “кофункції” (без врахування знака). Цю “кофункцію” приймаємо за нову змінну t.

Наприклад, нехай $n = 2p+1$, тоді

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x\, dx.$$

Зробимо заміну: $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$. Отже,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1-t^2)^p \, dt$$

– інтеграл від раціональної функції.

Зауваження 1. Якщо можливо, то треба вибирати непарний додатний (краще менший за модулем) показник степеня. При цьому показник степеня іншої функції може бути довільним.

Зауваження 2. Якщо обидва числа m і n – непарні від'ємні, то краще застосувати підстановку $\boxed{tg\, x = t}$.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int \sqrt[6]{\cos x} \sin^5 x \, dx$

□ $I = \int \sqrt[6]{\cos x} \sin^4 x \sin x \, dx = \int \sqrt[6]{\cos x} (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx =$

$$= \left| \cos x = t; \ -\sin x \, dx = dt \right| =$$

$$= -\int t^{1/6} (1-t^2)^2 \, dt = -\int (t^{1/6} - 2t^{13/6} + t^{25/6}) \, dt = (-6/7) t^{7/6} +$$

$$+ (12/19) t^{19/6} - (6/31) t^{31/6} = -(6/7)(\cos x)^{7/6} +$$

$$+ (12/19)(\cos x)^{19/6} - (6/31)(\cos x)^{31/6} + C. \ ■$$

• Якщо m і n – парні невід'ємні числа, то використовуємо формули зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\boxed{\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2; \quad \cos^2 x = (1+\cos 2x)/2}.$$

Отже,

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = 2^{-p-q} \int (1-\cos 2x)^p (1+\cos 2x)^q \, dx$$

де $m = 2p$ і $n = 2q$.

Після піднесення до степенів p, q і множення матимемо $\cos 2x$ як у парних, так і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються, як показано вище. Члени з парними степенями знову перетворюємо за формулами зниження степеня. Продовжуючи цей процес, дійдемо до інтегралів від сталих величин і функцій $\cos kx$, які легко інтегруються.

Зауваження 3. Для зниження степеня можна додатково використати формулу $\boxed{\sin x \cos x = (\sin 2x)/2}$.

Приклад 8. Знайти інтеграл $I=\int\sin^2 3x\cos^2 3x\,dx$.

□ $I=\left|\sin^2 3x\cos^2 3x=(\sin 3x\cos 3x)^2=\left((1/2)\sin 6x\right)^2=\right.$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 6x\,\Bigg|=\frac{1}{4}\int\sin^2 6x\,dx=\Bigg|\sin^2 6x=\frac{1-\cos 12x}{2}\Bigg|=$$

$$=(1/8)\int(1-\cos 12x)\,dx=(1/8)\,x-(1/96)\sin 12x+C\,.\ \blacksquare$$

• Якщо m і n – парні числа, з яких хоча б одне від'ємне, то робимо заміну $tg\;x=t$, або $ctg\;x=t$;

Приклад 9. Знайти інтеграл $I=\int dx\big/\cos^4 x$

$$\square\quad I=\left|\,tg\;x=t;\ x=arctg\,t;\ dx=dt/(1+t^2)\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{(1+t^2)\cdot 1/(1+t^2)^2}=\int\frac{dt}{1/(1+t^2)}=\int(1+t^2)\,dt=$$

$$=t+(1/3)t^3+C=tg\;x+(1/3)\,tg^3x+C\,.\ \blacksquare$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $I=\int\left(\cos^2 x\big/\sin^6 x\right)dx$.
(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\;x=t$).

1.1.7. Інтегрування виразів, що містять квадратний корінь із суми чи різниці квадратів

Виокремлюють три типи таких інтегралів:

1) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx}$; 2) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx}$;

3) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx}$.

Тут $a>0$. Для знаходження кожного з цих інтегралів використовується відповідна тригонометрична підстановка, що дозволяє позбутись ірраціональності.

• В інтегралі першого типу вводиться заміна $\boxed{x=a\sin t}$, $dx=a\cos t\,dt$ (або $x=a\cos t$, $dx=-a\sin t\;dt$).

• В інтегралі другого типу – $\boxed{x = a\,tg\,t}$, $dx = a\,dt/\cos^2 t$ (або $x = a\,ctg\,t$, $dx = -a\,dt/\sin^2 t$).

• В інтегралі третього типу – $\boxed{x = a/\cos t}$, $dx = a\sin t dt/\cos^2 t$ (або $x = a/\sin t$, $dx = -a\cos t dt/\sin^2 t$).

Приклад 1. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{9-x^2}\,dx}{x^2}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}\,dx}{x^6}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{(x^2-16)^{3/2}}.$$

□ а) $$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = 3\sin t;\ dx = 3\cos t\,dt; \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = 3\cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3\cos t}{(3\sin t)^2}\cdot 3\cos t\,dt = \int \frac{(1-\sin^2 t)\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} + \int dt =$$

$$= -ctg\,t - t + C = \left|\sin t = x/3;\ t = \arcsin(x/3)\right| =$$

$$= -ctg\left(\arcsin(x/3)\right) - \arcsin(x/3) + C.$$

б) $$\int \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{x^6}dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\,tg\,t;\ dx = 2\ dt\big/\cos^2 t; \\ \sqrt{(x^2+4)^3} = \sqrt{(4\,tg^2 t+4)^3} = 8\big/\cos^3 t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{8\big/\cos^3 t}{(2\,tg\,t)^6}\cdot 2\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t\ dt}{\sin^6 t} = \left| \begin{array}{c} u = \sin t \\ du = \cos t\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^6} =$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{-6}du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-5}}{-5} + C = \left|t = arctg(x/2);\ u = \sin t\right| =$$

$$= -(1/20)\ \sin^{-5}\left(arctg(x/2)\right) + C.$$

в) $$\int \frac{dx}{(x^2-16)^{3/2}} = \left| x = 4/\cos t;\ dx = 4\sin t\,dt\big/\cos^2 t; \right.$$

$$\left. (x^2-16)^{3/2} = \left((4/\cos t)^2 - 16\right)^{3/2} = 64\sin^3 t\big/\cos^3 t \right| =$$

$$=\int\frac{4\sin t\,dt\big/\cos^2 t}{64\sin^3 t\big/\cos^3 t}=\frac{1}{16}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\left|\begin{matrix}u=\sin t\\ du=\cos t\,dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{16}\int\frac{du}{u^2}=$$

$$=(1/16)\cdot(-1/u)+C=\left|t=\arccos(4/x);\ u=\sin t\right|=$$

$$=-(1/16)\sin^{-1}\big(\arccos(4/x)\big)+C\,.\quad\blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Для інтегралів указаних типів можна застосувати інші підстановки. Зокрема, інколи корисною є підстановка $\boxed{x=a/t}$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dt}{x\sqrt{x^2-3}}$.

$$\square\quad\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}=\left|x=\sqrt{3}\big/t;\quad dx=-\sqrt{3}dt\big/t^2\right|=$$

$$=\int\frac{-\sqrt{3}dt\big/t^2}{\left(\sqrt{3}\big/t\right)\sqrt{\left(\sqrt{3}\big/t\right)^2-3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\left(1\big/\sqrt{3}\right)\arcsin t+C=-\left(1\big/\sqrt{3}\right)\arcsin\left(\sqrt{3}\big/x\right)+C\,.\quad\blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Якщо під знаком квадратного кореня стоїть квадратний тричлен ax^2+bx+c, $a\neq 0$, то виділивши повний квадрат двочлена $ax^2+bx+c=a\big(x+b/(2a)\big)^2+\big(c-b^2/(4a)\big)$ і застосувавши заміну $t=\sqrt{|a|}\big(x+b/(2a)\big)$; $dx=dt\big/\sqrt{|a|}$, переходимо до одного з розглянутих випадків суми чи різниці квадратів.

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл $\int x\sqrt{6x-x^2-5}\,dx$.

$$\square\quad\int x\sqrt{6x-x^2-5}\,dx=\Big|6x-x^2-5=-(x^2-6x+9-9+5)=$$

$$=-(x-3)^2+4\Big|=\int x\sqrt{4-(x-3)^2}\,dx=\Big|t=x-3;\ \ x=t+3;$$

$$dx=dt\Big|=\int(t+3)\sqrt{4-t^2}\,dx=\Big|t=2\sin u;\ \ dt=2\cos u\,du;$$

$$\sqrt{4-t^2}=\sqrt{4-(2\sin u)^2}=2\cos u\ \Big|=\int(2\sin u+3)\cdot 2\cos u\times$$

$$\times 2\cos u\,du=8\int\cos^2 u\ \sin u\ du+12\int\cos^2 u\,du=\big|z=\cos u;$$

$$dz=-\sin u\,du\,\big|=-8\int z^2dz+12\cdot(1/2)\int(1+\cos 2u)\,du=$$

$$=-8\cdot z^3/3+6\int du+6\int\cos 2u\,du=-(8/3)\cos^3 u+6u+$$

$$+6\cdot(1/2)\sin 2u+C=\big|u=\arcsin(t/2)=\arcsin\big((x-3)/2\big)\big|=$$

$$=-(8/3)\cos^3\arcsin\big((x-3)/2\big)+6\arcsin\big((x-3)/2\big)+$$

$$+3\sin\big(2\arcsin\big((x-3)/2\big)\big)+C.\ \blacksquare$$

1.1.8. Інтеграли, що “не беруться”

Диференціювання ґрунтується на формулах для похідної кожної з операцій, за допомогою яких формуються елементарні функції. Тому *похідна довільної елементарної функції також є елементарною*.

При інтегруванні не існує відповідних формул для добутку, частки і суперпозиції функцій. Тому *не кожну первісну, навіть коли вона існує, можна подати через елементарні функції у скінченному вигляді*.

Говорять, що інтеграл $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ “***не береться***”, якщо первісна $F(x)$ – неелементарна функція.

Такого типу первісні, що часто застосовуються в математиці та інших дисциплінах, називаються ***спеціальними функціями***. Для них складені відповідні таблиці, побудовані графіки і створені комп’ютерні програми.

Наведемо деякі інтеграли, що “не беруться”, і відповідні спеціальні функції:

а) $\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-x^2/2}dx=\Phi(x)+C$, де первісна $\Phi(x)$, що задовольняє додатковій умові $\Phi(0)=0$, називається ***функцією Лапласа*** (***інтегралом ймовірностей***);

б) $\int\dfrac{\sin x}{x}dx=\mathrm{Si}\,(x)+C$, де первісна $\mathrm{Si}\,(x)$, що задовольняє додатковій умові $\mathrm{Si}\,(x)=0$, називається ***інтегральним синусом***;

в) $\int \sin\left(\pi x^2/2\right)dx = \mathrm{S}\,(x)+C$ і $\int \cos\left(\pi x^2/2\right)dx = \mathrm{C}\,(x)+C$, де первісні $\mathrm{S}\,(x)$ і $\mathrm{C}\,(x)$, що задовольняють додатковій умові відповідно $\mathrm{S}\,(x)=0$ і $\mathrm{C}\,(x)=0$, називаються ***інтегралами Френеля***.

1.2. Визначений інтеграл

1.2.1. Інтегральна сума. Її геометричний і фізичний зміст

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об’єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n <u>довільних</u> (не обов’язково рівних) елементарних частин точками поділу x_i, $i=\overline{0,n}$ такими, що $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};x_i]$ візьмемо по одній <u>довільній</u> (не обов’язково середній) точці c_i, $i=\overline{1,n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо суму отриманих добутків

$$S_n(f)=f(c_1)\Delta x_1+\ldots+f(c_i)\Delta x_i+\ldots+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,.$$

Цей вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

<u>Зауваження</u>. Інтегральна сума $S_n(f)$, як це випливає з її побудови, не є функцією змінної n і не є функцією змінної x. Інтегральна сума залежить як від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу x_i, $i=\overline{0,n}$, так і від вибору точок c_i, $i=\overline{1,n}$ по одній на кожному частинному відрізку.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$, знизу віссю Ox і вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$ (рис.2), називається ***криволінійною трапецією***. Знайдемо її площу S

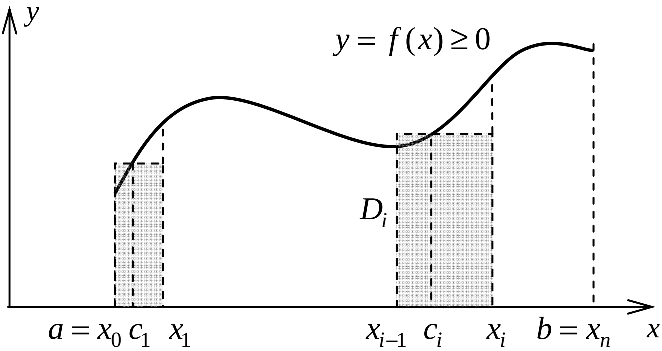

Рис. 2

Добуток $f(c_i)\Delta x_i$ чисельно дорівнює площі прямокутника D_i з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. *Інтегральна сума* $S_n(f)$ чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких прямокутників, і *служить наближеним значенням площі криволінійної трапеції*: $S \approx S_n(f)$.

Фізичний зміст. Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої кривої l з лінійною швидкістю $v=v(t)$. Треба знайти довжину пройденого шляху S за проміжок часу від $t=\alpha$ до $t=\beta$.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha;\beta]$ на n довільних частин точками $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots<t_n=\beta$. Розглянемо будь-який частинний проміжок $[t_{i-1};t_i]$. Припустимо, що цей відрізок $[t_{i-1};t_i]$ настільки малий, що швидкість на ньому $v=v(t)$ змінюється мало, а тому її можна наближено вважати сталою: $v=v(c_i)$,

$c_i \in [t_{i-1};t_i]$. Тоді довжина шляху ΔS_i, який пройдено точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ наближено дорівнює добутку $v(c_i)\Delta t_i$: $\Delta S_i \approx v(c_i)\Delta t_i$. *Інтегральна сума* $S_n(v) = \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$ *є наближеним значенням пройденого шляху за весь проміжок часу* $[\alpha;\beta]$: $S \approx S_n(v)$.

1.2.2. Поняття визначеного інтеграла й умови його існування

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a;b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1};x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i},$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$ – ***відрізок інтегрування***.

Підкреслимо, що границя розглядається при будь-яких розбиттях відрізка $[a;b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок c_i на елементарних відрізках $[x_{i-1};x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

<u>Зауваження 1</u>. Не зважаючи на близькість позначень, невизначений і визначений інтеграли різні за суттю, оскільки невизначений інтеграл – це сім’я <u>функцій</u> (первісних), а визначений інтеграл – це <u>число</u> (значення границі).

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

Фізичний зміст. Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої кривої l з лінійною швидкістю $v=v(t)$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ *чисельно дорівнює пройденому шляху* S *за проміжок часу* $[\alpha;\beta]$: $S=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$.

Теорема 1 (***необхідна умова інтегровності***). *Якщо функція інтегровна на деякому відрізку, то вона обмежена на ньому.*

□ Припустимо супротивне. Нехай функція $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необмежена. Тоді для довільного розбиття існує хоча б один елементарний відрізок $[x_{i-1};x_i]$, де функція необмежена. Вибираючи на ньому відповідним чином точку c_i, можна зробити значення функції $f(c_i)$, а з нею інтегральну суму $S_n(f)$ як завгодно великою. Тому скінченна границя для $S_n(f)$ не існує. ■

Зауваження 2. Умова обмеженості функції є необхідною, але не є достатньою для інтегровності функції. Наприклад, функція Діріхле $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in I,\end{cases}$ де Q та I – відповідно множини раціональних та ірраціональних чисел, є обмеженою, але вона неінтегровна на будь-якому відрізку.

Теорема 2 (***достатня умова інтегровності***). *Функція, неперервна на відрізку, інтегровна на ньому.*

Ця теорема є наслідком більш загальної теореми, наведеної в п. 2.1.6.

Зауваження 3. Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

1.2.3. Формула Ньютона – Лейбниця

Визначений інтеграл фактично відкрито понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосередньо знаходити границі інтегральних сум важко навіть у найпростіших випадках. Невизначений інтеграл відкрито значно пізніше (у XXVII столітті) і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. Тоді ж був встановлений зв'язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Теорема (***Ньютона – Лейбниця***). *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$$ – ***формула Ньютона – Лейбниця***.

Тут символом $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ позначено приріст первісної (читається: "$F(x)$ з підстановкою від a до b").

□ Розглянемо приріст $F(b) - F(a)$. Перепишемо його, додаючи та віднімаючи значення функції в кожній внутрішній точці розбиття $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, враховуючи, що $x_0 = a, x_n = b$, та використовуючи на кожному елементарному відрізку формулу Лагранжа, а потім зробимо граничний перехід:

$$F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + ... +$$

$$+ (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \Big| F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\,\Delta x_i\,,$$

$$c_i \in [x_{i-1}; x_{i-1}] \Big| = F'(c_1)\Delta x_1 + F'(c_2)\Delta x_2 + ... + F'(c_n)\Delta x_n =$$

$$= \Big| F'(c_i) = f(c_i) \Big| = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... +$$

$$+ f(c_n)\Delta x_n = S_n(f); \quad \lim_{\Delta x_i \to 0}(F(b) - F(a)) = \lim_{\Delta x_i \to 0} S_n(f).$$

Таким чином $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, одержимо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Формула Ньютона – Лейбниця залишається справедливою для будь-якої інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, що має неперервну первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком хіба що скінченного числа точок.

1.2.4. Властивості визначеного інтеграла

Спираючись на означення та формулу Ньютона – Лейбниця, що зв’язує визначений інтеграл з невизначеним, можна встановити основні властивості визначеного інтеграла.

Найпростіші властивості:

1. *Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування* (змінна інтегрування є “німою”):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt}.$$

2. *Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю*:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\, dx = 0}.$$

3. *Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx}.$$

Властивість адитивності за проміжком:

4. *Для будь-яких трьох чисел* a , b *і* c *справедлива рівність*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx},$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують.

Доведення спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини, що відповідають частинам всього відрізка інтегрування.

Властивості лінійності:

5. *Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx}, \text{ де } A = const.$$

$$\square \ \int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n A\, f(c_i)\Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

6. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*. Так, у разі трьох функцій:

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx}.$$

Доведення спирається на відповідну властивість границі суми.

Властивості монотонності:

7. *Якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку* $[a;b]$, $f(x) \ge 0, x \in [a;b]$, *а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній* $b \ge a$, *то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \ge 0}.$$

8. *Якщо на відрізку* $[a;b]$, *де* $a < b$, *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *задовольняють нерівності*

$$\boxed{f(x) \le \varphi(x), \text{ то } \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx}.$$

Іншими словами, *нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої*.

□ Розглянемо різницю

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\varphi(c_i) - f(c_i))\Delta x_i \,.$$

Тут кожна різниця $\varphi(c_i) - f(c_i) \ge 0$, $\Delta x_i > 0$. Отже, кожен член суми додатний, додатна вся сума і невід'ємна її границя, тобто $\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx \ge 0$. Звідси

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \quad \text{або} \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

9. *Абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню* $b \ge a$:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx}.$$

□ За властивістю модуля $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Враховуючи властивість 8, з цього випливає

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\text{або} \quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \ \blacksquare$$

1.2.5. Оцінка визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення

Теорема 1 (***оцінка визначеного інтеграла***). *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a;b]$, *а* m *і* M *– відповідно її найменше і найбільше значення на цьому відрізку* $[a;b]$ *і* $a \le b$, *то справедлива оцінка*

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}.$$

□ За умовою $m \le f(x) \le M$. Згідно властивості 8 визначеного інтеграла маємо

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx .$$

Але $\int_a^b m\,dx = m(b-a),\ \ \int_a^b M\,dx = M(b-a)$.

Після підстановки цих рівностей у попередню нерівність маємо шукану оцінку інтеграла. ■

Геометричний зміст. Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ площа відповідної криволінійної трапеції обмежена знизу і зверху площами двох прямокутників з тією ж основою $b-a$ і висотою відповідно m і M (рис. 3).

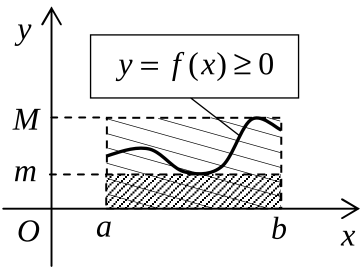

Рис. 3

Приклад 1. Оцінити інтеграл $I = \int_0^2 \sqrt{9+x^4}\,dx$.

□ Знайдемо найменше і найбільше значення підінтегральної функції $y = f(x) = \sqrt{9+x^4}$ на відрізку інтегрування $[0;2]$:

$$y' = 2x^3 \big/ \sqrt{9+x^4} = 0;\ \ x = 0;$$

$$f(0) = \sqrt{9+0^4} = 3;$$

$$f(2) = \sqrt{9+2^4} = 5;\ m = \min_{x\in[0;2]} f(x) = 3;\ \ M = \max_{x\in[0;2]} f(x) = 5 .$$

Тоді $3\cdot(2-0) \le I \le 5\cdot(2-0);\ \ 6 \le I \le 10$. ■

Для функції $f(x)$, інтегровної на відрізку $[a;b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю

$$\boxed{\mu = \big(1/(b-a)\big)\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Теорема 2 (***про середнє значення***). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *існує хоча б одна точка* c *така, що середнє інтегральне* μ *функції* $f(x)$ *на відрізку*

$[a;b]$ *дорівнює значенню функції* $f(c)$ *в цій точці:*

$$f(c)=\mu=(1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx.$$

□ Нехай $a<b$. Якщо m і M найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то на підставі теореми 1 маємо:

$$m\le(1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx\le M\ .$$

Вираз, який розташований всередині цієї нерівності, дорівнює μ. Тобто, $m\le\mu\le M$. Тоді за теоремою про проміжне значення неперервної на відрізку функції при деякому значенні c $(a<c<b)$ будемо мати $\mu=f(c)$. ■

<u>Геометричний зміст</u>. Для неперервної невід’ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка c така, що площа відповідної криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і висотою $\mu=f(c)$ (рис. 4).

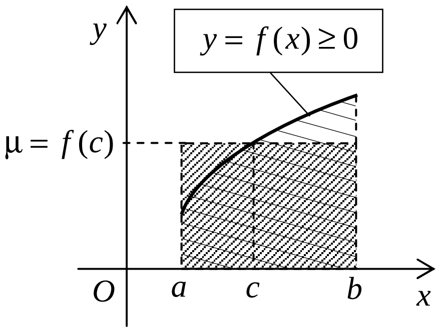

Рис. 4

<u>Приклад 2</u>. Сила змінного струму $i=i_0\sin(2\pi t/T)$, де i_0 – амплітуда; T – період; t – час. Знайти ефективну силу струму i_e – квадратний корінь із середнього за період значення $\overline{i^2}$ квадрата сили струму.

□

$$\overline{i^2}=\mu=(1/(T-0))\int_0^T i^2dt=(1/T)\int_0^T(i_0\sin(2\pi t/T))^2dt=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot i_0^2\cdot\int_0^T\frac{1-\cos(4\pi t/T)}{2}dt=\frac{i_0^2}{2T}\left(t-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right)\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}.$$

Тоді ефективна сила струму $i_e = \sqrt{\overline{i^2}} = \sqrt{i_0^2/2} = i_0/\sqrt{2}$. ■

<u>Приклад 3</u>. Знайти середнє значення інтеграла

$I = \int_{-1}^{1} (5x^4 + 4x^3 - 2)\, dx$. (Розв'яжіть самостійно).

1.2.6. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

Окрім інтегралів, що мають фіксовані верхню та нижню межі інтегрування, розглядаються також інтеграли зі змінними межами. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і x – довільна точка цього відрізка, $x \in [a;b]$, то існує визначений інтеграл $\int_a^x f(t)\, dt$. (Для зручності змінну інтегрування позначено іншою буквою t, ніж верхню x межу інтегрування). Цей інтеграл є деякою <u>функцією змінної</u> x:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

яку називають і***нтегралом зі змінною верхньою межею***.

<u>Теорема</u>. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то похідна по x визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею $\int_a^x f(t)\, dt$ дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі x:*

$$\boxed{\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)}.$$

□ За формулою Ньютона – Лейбниця маємо:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = \frac{d}{dx} F(t)\Big|_a^x = \frac{d}{dx}\big(F(x) - F(a)\big) =$$

$$= F'(x) = f(x). \quad ■$$

<u>Зауваження</u>. $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$. Таким чином, *інтеграл зі змінною верхньою межею* $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ *є первісною для піді-*

нтегральної функції $f(x)$, *при цьому* $\Phi(a)=0$.

Приклад. Знайти інтеграл зі змінною верхньою межею $\int_4^x t^{-3/2}dt$. Показати, що похідна від нього дорівнює значенню підінтегральної функції для верхньої межі.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, дістанемо:

$$\int_4^x t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2}\Big|_4^x = -2x^{-1/2} + 2\cdot 4^{-1/2} = -2x^{-1/2} + 1.$$

Знайдемо похідну від цього виразу за змінною x. Тоді

$$(-2x^{-1/2}+1)' = x^{-3/2} = f(x). \ ■$$

1.2.7. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функція* $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x=\varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x'=\varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha)=a$ *і* $\varphi(\beta)=b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| x=\varphi(t);\ dx=\varphi'(t)\,dt;\ t=\varphi^{-1}(x); \right.$$

$$\left. \alpha=\varphi^{-1}(a);\ \beta=\varphi^{-1}(b) \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

де $t=\varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

□ Якщо $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$, то можемо записати

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C; \quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C.$$

Справедливість останньої рівності перевіряється диференціюванням обох частин по t. З цих рівностей відповідно маємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a); \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Праві частини одержаних виразів рівні, отже, ліві частини теж рівні: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. ■

<u>Зауваження 1</u>. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x = \varphi(t)$ ці умови задовольняє.

<u>Зауваження 2</u>. Аналогічно випадку невизначеного інтеграла, формула заміни змінної може використовуватись як в прямому, так і в зворотному напрямку.

<u>Зауваження 3</u>. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної: якщо обчислено один з визначених інтегралів формули заміни, то маємо деяке число; цьому числу дорівнює також інший інтеграл.

<u>Приклад 1</u>. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

$$\square\ I = \left| \begin{array}{c} x+1 = t^2;\ \ x = t^2 - 1;\ dx = 2t\,dt; \\ t = \sqrt{x+1};\ \ t_1 = \sqrt{3+1} = 2;\ t_2 = \sqrt{8+1} = 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_2^3 \frac{t^2 - 1 - 3}{t} 2tdt = 2\int\limits_2^3 (t^2 - 4)\,dt = 2\int\limits_2^3 t^2 dt - 8\int\limits_2^3 dt =$$

$$= (2/3)t^3\Big|_2^3 - 8t\Big|_2^3 = (2/3)\cdot(3^3 - 2^3) - 8\cdot(3-2) = 14/3.\ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 6}\,dx$.

$$\square\ I = \Big| t = x^4 + 5x^2 + 6;\ \ dt = (4x^3 + 5\cdot 2x)\,dx = 2\,(2x^3 + 5x)\,dx;$$

$$(2x^3 + 5x)\,dx = (1/2)\,dt;\ t_1 = (-2)^4 + 5\cdot(-2)^2 + 6 = 42;$$

$$t_2=(-1)^4+5\cdot(-1)^2+6=12\,\Big|=\int\limits_{42}^{12}\frac{dt}{2t}=(1/2)\ln|t|\Big|_{42}^{12}=$$

$$=(1/2)\cdot(\ln|12|-\ln|42|)=(1/2)\ln(2/7)\,.\quad\blacksquare$$

Приклад 3. Обчислити: а) $\int\limits_2^7\frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$; б) $\int\limits_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи відповідно підстановки: а) $3x-5=t^4$; б) $x=2/\cos t$).

Зауваження 4. При обчисленні визначеного інтеграла заміну змінної можна проводити у відповідному невизначеному інтегралі. Тоді треба повернутись до початкової змінної і скористатися формулою Ньютона – Лейбниця. Звичайно цим користуються у простих випадках, коли заміну здійснюють усно.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}$, виконуючи заміну змінної у відповідному невизначеному інтегралі.

$$\square\ I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}=\left|\int\frac{dx}{4+5\cos x}=\right|t=tg\,\frac{x}{2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\,arctg\,t;\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\,\Bigg|=\int\frac{2\,dt\big/(1+t^2)}{4+5\cdot(1-t^2)\big/(1+t^2)}=$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2-9}=-2\cdot\frac{1}{2\cdot3}\cdot\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|+C\,\Bigg|=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{tg\,(\pi/4)-3}{tg\,(\pi/4)+3}\right|-\ln\left|\frac{tg\,0-3}{tg\,0+3}\right|\right)=\frac{1}{3}\ln 2\,.\quad\blacksquare$$

1.2.8. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовні функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b (u\,v)'\,dx=\int_a^b u'\,v\,dx+\int_a^b u\,v'\,dx.$$

Оскільки $\int (u\,v)'\,dx=u\,v+C$, тому $\int_a^b (u\,v)'\,dx=u\,v\Big|_a^b$.

Отже $u\,v\Big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=u\,v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du},$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

<u>Приклад 1</u>. Обчислити інтеграл $I=\int_1^2 xe^x dx$.

□ Нехай $u=x\,, dv=e^x dx$. Тоді $du=dx\,,\ v=e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, маємо:

$$I=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=2e^2-e-e^x\Big|_1^2=2e^2-e-e^2+e=e^2.\ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити інтеграл

$$I=\int_{-2}^0 (4x^2-12x-8)\cos 2x\,dx.$$

$$\square\quad I=\left|\begin{matrix} u=4x^2-12x-8;\ dv=\cos 2x\,dx; \\ du=(8x-12)\,dx;\ v=(1/2)\sin 2x \end{matrix}\right|=$$

$$=(4x^2-12x-8)(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^0-\int_{-2}^0 (1/2)\sin 2x\cdot(8x-12)\,dx=$$

$$=32\sin 4-2\int_{-2}^0 (2x-3)\sin 2x\,dx=\Big|u=2x-3;\ du=2dx;$$

$$dv=\sin 2x\,dx;\ v=-(1/2)\cos 2x\Big|=32\sin 4-$$

$$-2\left((2x-3)\cdot(-1/2)\cos 2x\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}(-1/2)\cos 2x\cdot 2dx\right)=$$

$$=32\sin 4-3+7\cos 4-2\int_{-2}^{0}\cos 2x\,dx=32\sin 4-3+$$

$$+7\cos 4-2\cdot(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0}=31\sin 4+7\cos 4-3.\ \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити інтеграл $I=\int_{0}^{\pi/2}e^{4x}\cos 5x\,dx$.

$$\square\quad I=\Big|u=\cos 5x;\ dv=e^{4x}dx;\ du=-5\sin 5x\,dx;$$

$$v=(1/4)e^{4x}\Big|=\left(\cos 5x\cdot(1/4)e^{4x}\right)\Big|_{0}^{\pi/2}-\int_{0}^{\pi/2}(1/4)e^{4x}\times$$

$$\times(-5\sin 5x)\,dx=-1/4+(5/4)\int_{0}^{\pi/2}e^{4x}\sin 5x\,dx=$$

$$=\Big|u=\sin 5x;\ dv=e^{4x}dx;\ du=5\cos 5x\,dx;\ v=(1/4)\,e^{4x}\Big|=$$

$$=-1/4+(5/4)\left(\left(\sin 5x\cdot(1/4)e^{4x}\right)\Big|_{0}^{\pi/2}-\int_{0}^{\pi/2}(1/4)e^{4x}\times\right.$$

$$\left.\times 5\cos 5x\,dx\right)=-1/4+(5/16)e^{2\pi}-(25/16)\int_{0}^{\pi/2}e^{4x}\cos 5x\,dx;$$

$$I=-1/4+(5/16)\,e^{2\pi}-(25/16)\,I;\quad I=(5e^{2\pi}-4)/41.\ \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Розглянемо визначений інтеграл $\int_{a}^{b}z(t)\,dt$, де $z(t)=x(t)+i\,y(t)$ – комплекснозначна функція дійсного аргументу t; i – уявна одиниця, $i^2=-1$. Аналогічно операції диференціювання, за означенням окремо інтегруються дійсна $x(t)$ й уявна $y(t)$ частини:

$$\boxed{\int_{a}^{b}z(t)\,dt=\int_{a}^{b}x(t)\,dt+i\int_{a}^{b}y(t)\,dt}.$$

Таким чином, дійсна частина інтеграла $\operatorname{Re}\int_{a}^{b}z(t)\,dt=\int_{a}^{b}x(t)\,dt$, уявна частина $\operatorname{Im}\int_{a}^{b}z(t)\,dt=\int_{a}^{b}y(t)\,dt$. Ця властивість може бути корисною для знаходження деяких дійсних інтегралів.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx$ з попереднього прикладу 3, використовуючи комплексні функції дійсного аргументу.

□ Розглянемо допоміжний інтеграл $\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}\,dx$. За формулою Ейлера $e^{5xi}=\cos 5x+i\sin 5x$. Тоді $e^{4x}e^{5xi}=$ $=e^{4x}\cos 5x+ie^{4x}\sin 5x$ і $\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}dx=\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx+$ $+i\int_0^{\pi/2} e^{4x}\sin 5x\,dx$. Отже, шуканий інтеграл є дійсною частиною введеного допоміжного інтеграла

$$I=\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx=\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}\,dx=\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{(4+5i)x}\,dx.$$

Знайдемо інтеграл

$$\int_0^{\pi/2} e^{(4+5i)x}dx=\big(1/(4+5i)\big)e^{(4+5i)x}\Big|_0^{\pi/2}=\big(1/(4+5i)\big)e^{(4+5i)\pi/2}-$$

$$-\frac{e^0}{4+5i}=\frac{e^{2\pi}e^{5\pi i/2}-1}{4+5i}=\frac{e^{2\pi}\big(\cos(5\pi/2)+i\sin(5\pi/2)\big)-1}{4+5i}=$$

$$=\frac{ie^{2\pi}-1}{4+5i}=\frac{(ie^{2\pi}-1)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{4e^{2\pi}i-5e^{2\pi}i^2-4+5i}{16-25i^2}=$$

$$=\frac{5e^{2\pi}-4+i(4e^{2\pi}+5)}{16+25}=\frac{5e^{2\pi}-4}{41}+i\,\frac{4e^{2\pi}+5}{41}.$$

Таким чином, $I=\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}dx=(5e^{2\pi}-4)/41$. ■

1.3. Невласні інтеграли

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов: а) скінченність проміжку інтегрування; б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Так у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

1.3.1. Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду)

Інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають невласним інтегралом першого роду.

Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ й інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегровною*** на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***.

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***, а функція $f(x)$ – ***неінтегровною*** на $[a;+\infty)$.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно (на вліво нескінченному проміжку $(-\infty;b]$):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx}\,,$$

де c – довільне фіксоване дійсне число. *Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч*. Можна довести, що інтеграл, визначений цією рівністю, не залежить від вибору числа c.

З наведених означень випливає, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів. Тому при розгляді невласного інтеграла перш за все виникає питання про його збіжність, яке вирішується або його безпосереднім обчисленням, або за допомогою спеціальних ***ознак збіжності***.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді природно вважати, що він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рис. 5 позначена похилими та перехресними штрихами. Починаючи з деякого значення b, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, яка позначена на рис. 5 перехресними штрихами. Тобто, при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ прямує до нуля настільки швидко, що площа відповідної нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

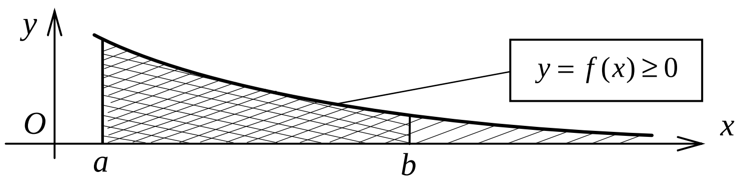

Рис. 5

Приклад 1. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}; \quad \text{б) } \int_3^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64}.$$

□ а) $I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim\limits_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{2}^{b} = \frac{1}{2}\times$

$\times \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\right) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3$.

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = (1/2)\ln 3$.

$$б)\ I = \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x^2+3x-10; \quad dt = 2x+3; \\ t_1 = 3^2+3\cdot3-10 = 8;\ t_2 = b^2+3b-10 \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{8}^{b^2+3b-10} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \ln|t| \Big\|_{8}^{b^2+3b-10} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|b^2+3b-10| - \ln|8|\right) = +\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається.

$$в)\ I = \int\limits_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64} = \left| \begin{matrix} t = x^3; \quad dt = 3x^2dx; \\ t_1 = a^3;\ t_2 = 2^3 = 8 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a^3}^{8} \frac{dt}{t^2+8^2} = \frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{8} arctg\,\frac{t}{8}\Bigg|_{a^3}^{8} = \frac{1}{24} \lim_{a\to-\infty} \Big(arctg\,1 -$$

$$- arctg\,(a^3/8)\Big) = (1/24)\ (\pi/4 + \pi/2) = \pi/32 .$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = \pi/32$. ■

<u>Приклад 2</u>. Встановити, при яких значеннях α інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається і при яких розбігається.

□ 1) Нехай $\alpha \neq 1$. Тоді $\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Bigg|_{1}^{b} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right)$;

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} 1/(\alpha-1), \textit{якщо}\ \ \alpha > 1; \\ +\infty, \textit{якщо}\ \ \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Нехай $\alpha = 1$. Тоді $\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b$; $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = +\infty$.

Отже, *інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ *збігається при* $\alpha > 1$ *і розбігається при* $\alpha \le 1$. ■

<u>Зауваження 1</u>. Якщо симетричний невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то все ж може збігатись так зване ***головне значення*** цього інтеграла:

$$p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx .$$

<u>Приклад 3</u>. Перевірити, що даний симетричний невласний інтеграл розбігається, а його головне значення збігається:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x+4}{x^2+1}\,dx .$$

□ Спочатку знайдемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{x^3+x+4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^3+x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{x^2+1}\,dx = \int x\,dx + 4\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= x^2/2 + 4arctg\, x + C .$$

Тоді $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x+4}{x^2+1}\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} (x^2/2 + 4arctg\, x)\Big|_a^0 +$

$$+ \lim_{b\to+\infty} (x^2/2 + 4arctg\, x)\Big|_0^b = \left| \underbrace{-\infty}_{при\ a\to-\infty} + 2\pi \quad \underbrace{+\infty}_{при\ b\to+\infty} + 2\pi \right| .$$

Границя не існує. Отже, інтеграл розбігається.

$$p.v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x+4}{x^2+1}\,dx = \lim_{a\to+\infty} (x^2/2 + 4arctg\, x)\Big|_{-a}^{a} =$$

$$= 8 \lim_{a\to+\infty} arctg\, a = 8\cdot(\pi/2) = 4\pi .$$

Головне значення інтеграла збігається і дорівнює 4π. ■

Зауваження 2. При обчисленні невласних інтегралів для скорочення іноді застосовують запис, аналогічний формулі Ньютона – Лейбниця. Наприклад,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \text{ де } F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = u\,v\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du\,.$$

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл $I = \int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx$ або встановити його розбіжність.

$$\square\quad I = \int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx = \left| u = x;\ dv = e^{x/4}dx; du = dx;\ v = 4e^{x/4} \right| =$$

$$= \left(x \cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 4\,e^{x/4}dx = -4e^{-\infty} - 4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^{0} = \left| e^{-\infty} = 0 \right| =$$

$= 0 - 16\ (e^0 - e^{-\infty}) = -16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16. ■

Зауваження 3. Застосування заміни змінної може звести невласний інтеграл до звичайного визначеного інтеграла.

Приклад 5. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{5/2}}$ або встановити його розбіжність.

$$\square\quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{5/2}} = \left| x = \operatorname{tg}\,t;\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t};\ (x^2+1)^{5/2} = \right.$$

$$= (tg^2 t + 1)^{5/2} = 1/\cos^5 t;\ t = arctg\,x;\ t_1 = arctg 0 = 0;$$

$$\left. t_2 = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{tg^2 t}{1/\cos^5 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\,dt =$$

$$= \left| u = \sin t;\ du = \cos t\,dt;\ u_1 = \sin 0 = 0;\ u_2 = \sin(\pi/2) = 1 \right| =$$

$= (u^3/3)\Big|_0^1 = 1/3$. Інтеграл збігається і дорівнює $1/3$. ■

1.3.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (другого роду)

Інтеграл по скінченному проміжку від необмеженої функції також називають невласним інтегралом другого роду.

Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1} dx/x^2$. За формулою Ньютона – Лейбниця маємо $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -(1/x)\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2$. Отримали хибний результат – від'ємне значення інтеграла від додатної функції. Це пояснюється неправомірним застосуванням формули до розривної функції.

Використаємо наступний підхід: 1) ізолюємо точку розриву разом з невеликим околом; 2) обчислимо інтеграл по частинах відрізка, що залишились; 3) зробимо граничний перехід при стягуванні околу ізоляції в точку розриву. Якщо існує скінченна границя, то візьмемо її за значення інтеграла.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком скінченного числа точок, у яких функція необмежена. Точка $c \in [a;b]$ називається ***особливою точкою*** функції $f(x)$, якщо функція необмежена в ній, тобто $f(x) \to \infty$ при $x \to c$.

Зауваження 1. В особливій точці c функція $f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = c$. Такою може бути внутрішня точка області визначення, в якій функція має розрив другого роду, або кінцева точка інтервалу області визначення.

Нехай $x = b$ – єдина особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, тобто $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b)$ і $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (рис. 6).

Тоді функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$. Невласним інтегралом від необмеженої функції називається границя

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтег-***

ровною на відрізку $[a;b]$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***. Якщо ж ця границя нескінченна або взагалі не існує, то інтеграл називають ***розбіжним***.

Геометричний зміст. *Невласний інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, якщо він збігається, у випадку невід'ємної функції $f(x)$ *визначає площу необмеженої області – відповідної трапеції з нескінченною висотою*. Починаючи з деякого значення $\varepsilon > 0$, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, що заштрихована на рис. 6.

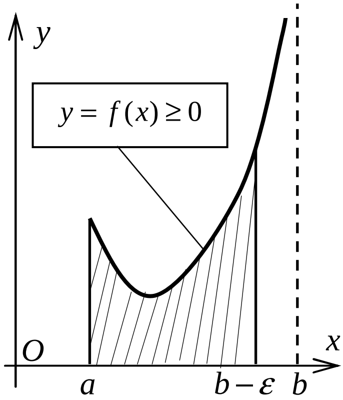

Рис. 6

Аналогічно, якщо $x = a$ – єдина особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь однієї внутрішньої точки $c\in(a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_c^b f(x)\,dx$ за означенням покладають:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}\,.$$

Нарешті, якщо a та b – особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^d f(x)\,dx$ і $\int_d^b f(x)\,dx$ за означенням покладають

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx}\,,$$

де d – довільна фіксована точка інтервалу $(a;b)$.

Зауваження 2. Невласний інтеграл другого роду за своїм записом нічим не відрізняється від звичайного визначеного інтеграла. Тому треба перевіряти, чи не містить проміжок інтегрування особливих точок.

Приклад. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$; б) $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$; д) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2-4x}$.

□ а) $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x\,dx = \left|u=\ln x;\ dv=dx;\ du=dx/x;\right.$

$$\left. v=x\right| = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(x\ln x\,|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\cdot dx/x\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln 1-\varepsilon\ln\varepsilon - x\,|_\varepsilon^1\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon-1 = |0\cdot\infty| =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon}-1 = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{(1/\varepsilon)'}-1 = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1/\varepsilon}{-(1/\varepsilon)^2}-1 =$$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon-1=-1$. Інтеграл збігається і дорівнює -1.

б) $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \left|\sqrt[3]{(x-1)^4}=0;\ x=1\in[0;9]\right| =$

$$= \int_0^1 (x-1)^{-4/3}dx + \int_1^9 (x-1)^{-4/3}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-4/3}dx +$$

$$+ \lim_{\delta\to+0}\int_{1+\delta}^9 (x-1)^{-4/3}dx = \left|\int (x-1)^{-4/3}dx = -3(x-1)^{-1/3}+C = \right.$$

$$\left. = -3\big/\sqrt[3]{x-1}+C\right| = -3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1\big/\sqrt[3]{x-1}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} - 3\lim_{\delta\to+0}\left(1\big/\sqrt[3]{x-1}\right)\Big|_{1+\delta}^9 =$$

$$= -3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1\big/\sqrt[3]{-\varepsilon}-1\big/\sqrt[3]{-1}\right) - 3\lim_{\delta\to+0}\left(1\big/\sqrt[3]{8}-1\big/\sqrt[3]{\delta}\right) = +\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається.

в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} = \left|\begin{array}{l} \sqrt{(1-x^2)\arcsin x}=0; \\ 1-x^2=0 \ \ \textit{або} \ \ \arcsin x = 0; \end{array}\right.$

$$x_1=-1\notin[0;1];\ x_2=1\in[0;1];\ x_3=0\in[0;1]\Big| =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} + \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} + \lim_{\delta\to+0} \int_{1/2}^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} =$$

$$= \left| t = \arcsin x;\ dt = dx \Big/ \sqrt{1-x^2}\ ;\ t_{11} = \arcsin\varepsilon; \right.$$

$$\left. t_{12} = t_{21} = \arcsin(1/2) = \pi/6;\ t_{22} = \arcsin(1-\delta) \right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\arcsin\varepsilon}^{\pi/6} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \lim_{\delta\to+0} \int_{\pi/6}^{\arcsin(1-\delta)} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{t}\Big|_{\arcsin\varepsilon}^{\pi/6} +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0} 2\sqrt{t}\Big|_{\pi/6}^{\arcsin(1-\delta)} = 2\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\sqrt{\pi/6} - \sqrt{\arcsin\varepsilon}\right) + 2\times$$

$$\times \lim_{\delta\to+0} \left(\sqrt{\arcsin(1-\delta)} - \sqrt{\pi/6}\right) = 2\sqrt{\pi/6} + 2\sqrt{\pi/2} - 2\sqrt{\pi/6} =$$

$= \sqrt{2\pi}$. Невласний інтеграл збігається і дорівнює $\sqrt{2\pi}$.

д) $$\int_2^4 \frac{dx}{x^2-4x} = \left| \begin{array}{l} x^2-4x=0;\quad x(x-4)=0; \\ x_1 = 0 \notin [2;4];\ x_2 = 4 \in [2;4] \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-4x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_2^{4-\varepsilon} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4}\right) dx = \left| \begin{array}{l} A(x-4)+Bx=1 \\ \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right| \begin{cases} -4A=1 \\ 4B=1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} A=-1/4 \\ B=1/4 \end{array} \right| = -\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{x} - \int_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{x-4} \right) = -\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to+0} \Big(\ln|x|\Big|_2^{4-\varepsilon} -$$

$$- \ln|x-4|\Big|_2^{4-\varepsilon} \Big) = -(1/4) \lim_{\varepsilon\to+0} \big(\ln|4-\varepsilon| - \ln|2| - \ln|-\varepsilon| +$$

$$+ \ln|-2|\big) = -(1/4) \lim_{\varepsilon\to+0} \big(\ln|4-\varepsilon| - \ln|\varepsilon|\big) = -\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається. ■

1.3.3. Ознаки збіжності невласних інтегралів

У багатьох задачах немає потреби обчислювати невласний інтеграл, а досить знати, збіжний він чи ні. Для з'ясування цього питання без обчислення самого інтеграла використовуються ***ознаки збіжності***. Наведемо деякі з них для випадку невласних інтегралів першого роду з нескінченною верхньою межею. Для інших типів невласних інтегралів ознаки аналогічні.

Зауваження 1. Збіжність невласного інтеграла з нескінченною верхньою межею залежить лише від поведінки функції на нескінченності (при $x \to +\infty$), тобто невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ і $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$, де $a \neq b$, збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 1 (**основна ознака порівняння**). *Якщо на проміжку* $[a;+\infty)$ *функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні і задовольняють умові* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, *то*

1) *зі збіжності більшого інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *випливає збіжність меншого інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;

2) *з розбіжності меншого інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *випливає розбіжність більшого інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Наведена ознака має простий геометричний зміст: якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченною величиною, то площа меншої області також є скінченною величиною; якщо площа меншої області є нескінченно великою, то площа більшої області також є нескінченно великою.

Зауваження 2. Для порівняння використовуються ***еталонні*** (***стандартні***) ***інтеграли***, умови збіжності яких відомі. Щоб підібрати еталонний інтеграл, треба грубо оцінити поведінку підінтегральної функції на нескінченності (при $x \to +\infty$).

Приклад 1. Дослідити на збіжність дані інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}; \qquad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

□ а) Очевидно, що для всіх $x \in [1;+\infty)$ виконуються нерівності $0 < f(x) = 1/(x^2(1+e^x)) < 1/x^2 = g(x)$. Тому за еталонний інтеграл порівняння вибираємо $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} dx/x^2$. Так як цей інтеграл збігається (згідно прикладу 2 із пункту 1.3.1, оскільки показник степеня $\alpha = 2 > 1$), то за основною ознакою порівняння інтеграл, що досліджується, також збігається.

б) Оскільки для всіх $x \in [1;+\infty)$ виконується нерівність $0 < 1/\sqrt[3]{x} < e^x/\sqrt[3]{x}$, то цей інтеграл розбігається за основною ознакою порівняння, бо еталонний інтеграл $\int_1^{\infty} dx/x^{1/3}$ є розбіжним (показник степеня $\alpha = 1/3 \le 1$). ■

<u>Теорема 2</u> (***гранична ознака порівняння***). *Нехай для неперервних і додатних на проміжку* $[a;+\infty)$ *функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$ *існує відмінна від нуля скінченна границя*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)/g(x)\right) = k,\ 0 < k < +\infty,\ \left(f(x) > 0, g(x) > 0\right).$$

Тоді інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *і* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.*

На практиці гранична ознака зручніша, бо не потребує перевірки нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$.

<u>Приклад 2</u>. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^2\,dx}{x^3 + \ln x}$.

□ Оцінимо поведінку підінтегральної функції $f(x) = x^2/(x^3 + \ln x)$ при $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + \ln x} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} = g(x), \quad \text{бо} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0.$$

Тому за еталонний приймаємо інтеграл $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} dx/x$. Розглянемо границю:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^3+\ln x}:\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+\ln x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(x^3+\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3x^2+1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{3+1/x^3}=1.$$

Оскільки еталонний інтеграл розбігається (показник степеня $\alpha=1\le 1$), то згідно з граничною ознакою порівняння заданий інтеграл теж розбігається. ■

Наведені ознаки збіжності передбачають, що підінтегральні функції невід’ємні.

У випадку знакозмінної підінтегральної функції має місце наступна ознака збіжності.

Теорема 3 (***достатня ознака збіжності***). *Якщо інтеграл від модуля* $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *збігається, то збігається також інтеграл від самої функції* $\int_a^{+\infty}f(x)dx$.

В цьому випадку останній інтеграл називається ***абсолютно збіжним***. Ця ознака є лише достатньою. Якщо інтеграл від модуля $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ розбігається, а інтеграл від самої функції $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається, то останній інтеграл називається ***умовно збіжним***.

Геометричний зміст: якщо інтеграл збігається абсолютно, то площа необмеженої області, що відповідає кривій $y=|f(x)|$ при $a\le x<+\infty$, є скінченною величиною. Тоді буде скінченною також алгебраїчна сума площ областей, обмежених кривою $y=f(x)$ при $a\le x<+\infty$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$.

□ Оскільки для всіх $x\in[1;+\infty)$ справедлива нерівність $\left|\cos x/x^2\right|\le 1/x^2$ а інтеграл $\int_1^{+\infty}dx/x^2$ збігається ($\alpha=2>1$), то за основною ознакою порівняння збігається інтеграл від модуля $\int_1^{+\infty}\left|\cos x/x^2\right|dx$. Отже, сам інтеграл $\int_1^{+\infty}\left(\cos x/x^2\right)dx$ також збігається, причому абсолютно. ■

1.4. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Інтегральне числення служить могутнім засобом досліджень у математиці, фізиці, механіці, електротехніці та інших дисциплінах. Обчислення площ областей, обмежених кривими, довжин дуг, об'ємів просторових тіл, роботи, швидкості, довжини пройденого шляху, моментів інерції та ін. зводиться до знаходження визначеного інтеграла.

Різноманітні застосування визначеного інтеграла реалізуються за однією з двох схем:

1) Для шуканої величини, в припущенні адитивності (можливість підсумовування по елементам розбиття) і лінійності в малому (лінійна залежність між головними частинами нескінченно малих приростів, що фігурують в задачі), складається інтегральна сума, що наближено її визначає, а потім здійснюється граничний перехід при необмеженому здрібненні розбиття і одержується точне значення у вигляді визначеного інтеграла.

2) Складають співвідношення для диференціала (або похідної) шуканої функції, а потім саму функцію знаходять інтегруванням.

Розглянемо задачі обчислення основних кількісних характеристик геометричних об'єктів: довжини, площі, об'єму. Для спрощення розрахунків будемо враховувати симетрію та інші особливості конкретних фігур.

1.4.1. Площа плоскої фігури

1. <u>Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями в явному вигляді у прямокутних координатах</u>.

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)\ge 0$, то за геометричним тлумаченням визначеного інтеграла площа S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, обчислюється за формулою

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо $f(x)\le 0$ на $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ теж від'ємний. Площа S відповідної криволінійної трапеції задається рівністю

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо $f(x)$ скінченне число разів змінює знак на відрізку $[a;b]$, то для знаходження площі S відповідної криволінійної фігури треба знайти суму абсолютних значень інтегралів по проміжкам знакосталості. Тоді

$$\boxed{S=\int_a^b |\,f(x)|\,dx}\,.$$

Приклад 1. Обчислити площу S фігури, обмеженої лінією $y=\ln x$ і віссю Ox, коли $1\le x\le e$.

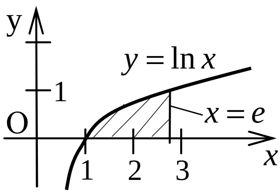

Рис. 7

□ Фігура, площу якої необхідно обчислити, зображена на рис. 7.

$$S=\int_1^e \ln x\,dx=\left|u=\ln x;\ dv=dx;\right.$$

$$\left.du=dx/x;v=x\right|=x\ln x\,|_1^e-$$

$$-\int_1^e x\,dx/x=e\ln e-\ln 1-x\,|_1^e=$$

$$=e\ln e-e+1=1 \text{ (кв.од.).} \ ■$$

Приклад 2. Обчислити площу S фігури, обмеженої лінією $y=x^3-3x^2-\ -4x+12$ і віссю Ox, коли $-2\le x\le 3$.

□ Побудуємо (по точкам) графік заданої кривої (рис. 8). Очевидно, що $y(x)\ge 0$, коли $-2\le x\le 2$ і $y(x)\le 0$, коли $2\le x\le 3$.

Тоді $S=\int_a^b |\,f(x)|\,dx=\int_{-2}^2 (x^3-3x^2-4x+12)\,dx-$

$$-\int_2^3 (x^3-3x^2-4x+12)\,dx=\left((1/4)x^4-x^3-2x^2+12x\right)\Big|_{-2}^{2}-$$

$$-\left((1/4)x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x\right)\Big|_2^3 = 2^4/4 - 2^3 - 2\cdot 2^2 + 12\cdot 2 -$$

$$-\left((-2)^4/4 - (-2)^3 - 2(-2)^2 + 12(-2)\right) - (3^4/4 - 3^3 - 2\cdot 3^2 +$$

$$+12\cdot 3) + 2^4/4 - 2^3 - 2\cdot 2^2 + 12\cdot 2 = 4 - 8 - 8 + 24 - 4 - 8 + 8 +$$

$$+24 - 81/4 + 27 + 18 - 36 + 4 - 8 - 8 + 24 = 32{,}75 \text{ (кв. од.).} \ \blacksquare$$

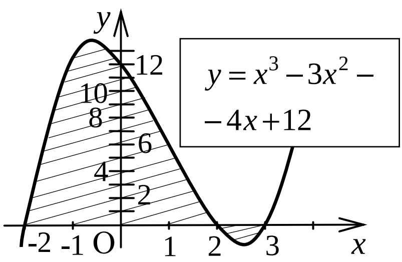

Рис. 8

При розгляді питання про обчислення площі плоскої фігури основним є поняття правильної області.

Непорожня множина D точок координатної площини Oxy називається ***областю*** (***відкритою областю***), якщо виконуються такі умови: 1) вона ***відкрита***, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки; 2) вона ***зв'язна***, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Точка M_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області.

Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Зауваження 1. Надалі розглядаються області, межа яких Γ складається зі скінченного числа кусково-неперервних кривих та ізольованих точок.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається ліворуч, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***.

Об'єднання області D з її межею Γ, називається ***замкненою областю***.

Зауваження 2. Домовимось ділянку межі Γ зображати суцільною лінією, якщо вона входить в область D, і пунктирною лінією, якщо вона не входить в область D.

Область D називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число C, що відстань будь-якої точки області D до початку координат не перевищує числа C. У противному випадку область D називається ***необмеженою***.

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 9), відрізок $[a;b]$ - її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови: 1) вона обмежена знизу "горизонтальною" ***лінією входу*** $y = y_1(x)$, зверху – "горизонтальною" ***лінією виходу*** $y = y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x = a$ і $x = b$ ($a < b$); 2) довільна пробна пряма $x = c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії входу та в одній точці на дальній лінії виходу; 2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y = y_1(x)$ (аналогічно $y = y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

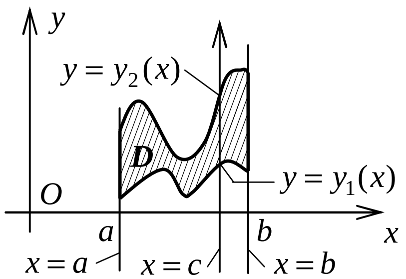

Рис. 9

Правильна в напрямку осі Oy плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} a \le x \le b; \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}$$

де $D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox$.

Площу такої області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних трапецій, одна з основ кожної з яких лежить на осі Ox. Тоді площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx}.$$

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напря-***

мку осі Ox плоска область D (рис. 10). При цьому змінні x і y міняються ролями. (Сформулюйте означення самостійно).

Правильна в напрямку осі Ox плоска область D може бути задана системою нерівностей

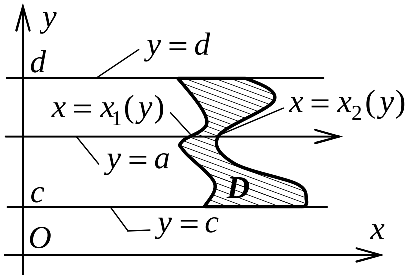

Рис. 10

$$\begin{cases} c \le y \le d; \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}$$

де $D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy$.

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy}.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, область, обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, є правильною. Область D: $x^2 \le y \le 2 - x^2$; $x \in [-1;1]$, обмежена двома вертикальними параболами, що перетинаються, – правильна в напрямку осі Oy, але неправильна в напрямку осі Ox. Кругове кільце $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ – неправильне в обох напрямках Ox і Oy.

<u>Зауваження 3</u>. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

<u>Приклад 3</u>. Знайти площу області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв’язати двома способами: а) використовуючи інтегрування за змінною x; б) використовуючи інтегрування за змінною y. Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4-\sqrt{y}; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3; \; A(3;1); \quad \begin{cases} x-y+2=0; \\ y=1; \end{cases} \quad x=-1; \; B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4-\sqrt{y}; \\ x-y+2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=(4-x)^2, \; x \le 4; \\ x-(4-x)^2+2=0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2; \\ x_2 = 7 > 4; \end{matrix}$$

$$y_1 = (4-2)^2 = 4; \quad C(2;4).$$

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x-y+2=0$, $y=1$ і лівої половини $x=4-\sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 11) і проаналізуємо її форму.

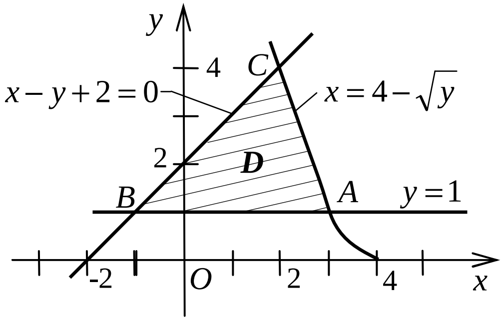

Рис. 11

а) Щоб скористатися формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$, необхідно подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рис. 11 видно, що область D – неправильна, оскільки її верхня межа утворена двома різними лініями, що з'єднуються в кутовій точці C. Тому розбиваємо область D на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 12). Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області

$S = S_1 + S_2$. Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2}((x+2)-1)\,dx + \int_{2}^{3}\left((x-4)^2 - 1\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)\,dx + \int_{2}^{3}(x^2 - 8x + 15)dx = \left((1/2)x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+ \left((1/3)x^3 - 4x^2 + 15x\right)\Big|_{2}^{3} = 2 + 2 - 1/2 + 1 + 9 - 36 + 45 -$$

$$-8/3 + 16 - 30 = 35/6 \text{ (кв. од.)}.$$

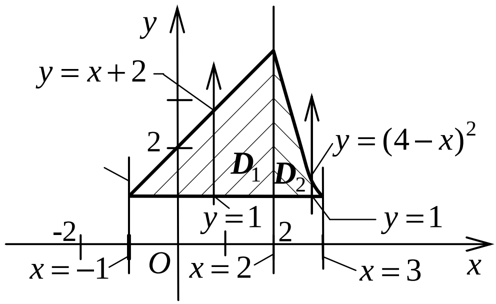

Рис. 12

б) Щоб скористатися формулою $S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy$, необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рис. 11 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рис. 13. Проведемо обчислення:

$$S = \int_1^4 \left(\left(4 - \sqrt{y}\right) - (y-2)\right)dy = \int_1^4 \left(6 - \sqrt{y} - y\right)dy =$$

$$= \left(6y - (2/3)\,y^{3/2} - (1/2)\,y^2\right)\Big|_1^4 = 24 - 16/3 - 8 - 6 + 2/3 +$$

$$+1/2 = 35/6 \text{ (кв. од.)}. \quad \blacksquare$$

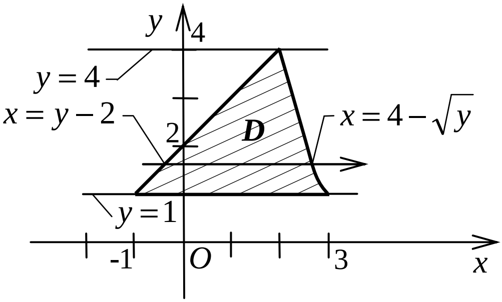

Рис. 13

Зауваження 4. Звичайно, при обчисленні площі конкретної фігури треба використовувати особливості її форми і вибирати той спосіб її подання як правильної області, що приводить до більш простих розрахунків.

Приклад 4. Обчислити площу фігури D, обмеженої параболами $y = 2x - x^2 + 3$ і $y = x^2 - 4x + 3$.

□ Знайдемо точки перетину парабол:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3; \\ y = x^2 - 4x + 3; \end{cases} \quad 2x - x^2 + 3 = x^2 - 4x + 3\,; \; 2x(x-3) = 0\,;$$

$$x_1 = 0; \; y_1 = 3; \; x_2 = 3; \; y_2 = 0; \; x = 3\,; \; A(0;3)\,; \; B(3;0)\,.$$

Характерними точками також є вершини парабол. Для знаходження вершин і зручності побудови парабол виділимо в їх рівняннях повні квадрати двочлена:

$$y = 2x - x^2 + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 3 = 4 - (x-1)^2\,; \; C(1;4)\,;$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1\,; \; E(2;-1)\,.$$

Вказану фігуру D зображено на рис. 14. З нього видно, що область D – правильна в напрямку осі Oy. Крім того, задані рівняння кривих, що обмежують область, мають явний вигляд відносно змінної y. Відповідне зображення подано на рис. 15.

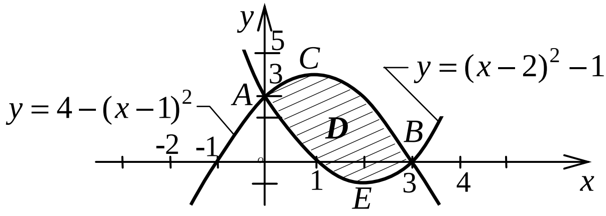

Рис. 14

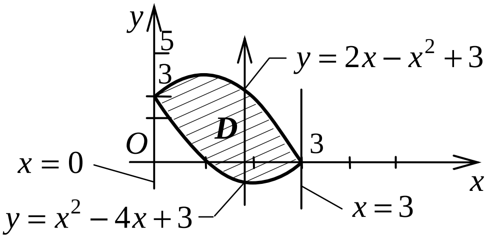

Рис. 15

За формулою $S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx$ маємо:

$$S=\int_0^2\Big((2x-x^2+3)-(x^2-4x+3)\Big)dx=\int_0^2(6x-2x^2)\,dx=$$

$$=\Big(3x^2-(2/3)x^3\Big)\Big|_0^3=27-18=9 \text{ (кв. од.).} \quad ■$$

<u>Приклад 5</u>. Знайти площу області D, обмеженої лініями $y=x$, $y=4x$, $xy=4$.

□ Область D зображено на рис. 16. Як видно з рис. 16, дана область складається з двох симетричних частин, оскільки всі лінії, що її обмежують, є непарними. Тоді шукана площа $S=2S_1$, де S_1 – площа частини D_1, що розташована в першій чверті. Область D_1 – неправильна. Знайшовши її кутові точки $(0;0)$, $(1;4)$ і $(2;2)$ (обчислення проведіть самостійно), область D_1 можна розбити на дві правильні в напрямку осі Oy частини D_{11} і D_{12} (рис. 17).

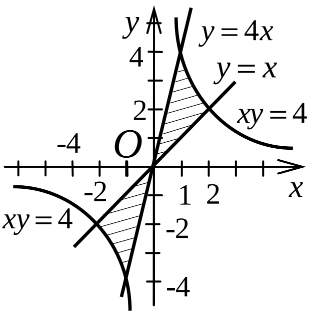

Рис. 16

Маємо:

$$S_1 = S_{11} + S_{12} = \int_0^1 (4x - x)\,dx +$$

$$+ \int_1^2 (4/x - x)\,dx = (3/2)x^2\Big|_0^1 +$$

$$+ \left(4\ln|x| - (1/2)x^2\right)\Big|_1^2 = 3/2 +$$

$$+ 4\ln 2 - 2 - 4\ln 1 + 1/2 = 4\ln 2;$$

$S = 2S_1 = 8\ln 2$ (кв. од.). ■

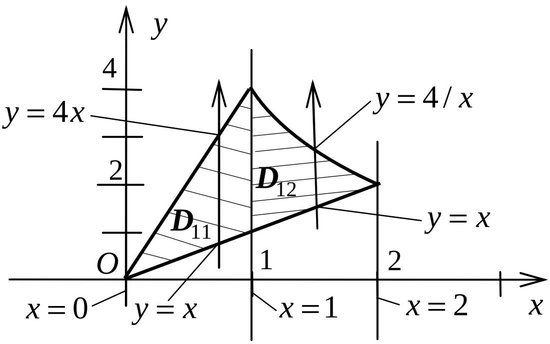

Рис. 17

2. <u>Випадок криволінійної трапеції, обмеженої зверху лінією, що задана параметричними рівняннями у прямокутних координатах</u>.

Нехай параметричні рівняння $x = x(t)$, $y = y(t) \geq 0$, де функція $x = x(t)$ диференційовна і монотонна при $\alpha \leq t \leq \beta$, визначають дугу неперервної невід'ємної кривої $y = y(x) \geq 0$ на відрізку $[a; b]$, причому $x(\alpha) = a$ і $x(\beta) = b$. Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою $S = \int_a^b y(x)\,dx$, де треба зробити заміну змінної. Тоді

$$S=\int_a^b y(x)\,dx=\Big|\; y=y(t);\;\; x=x(t);\;\; dx=x'(t)\,dt;$$

$$a\to\alpha;\; b\to\beta\Big|=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt;\;\; \boxed{S=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt}.$$

Приклад 6. Обчислити площу фігури D, обмеженої віссю Ox і першою аркою циклоїди: $x=2(t-\sin t),\; y=3(1-\cos t)$.

□ Фігура D площу якої необхідно знайти, виділена на рис. 18 штриховою. Першій арці циклоїди відповідають значення параметра $0\le t\le 2\pi$. Проведемо обчислення:

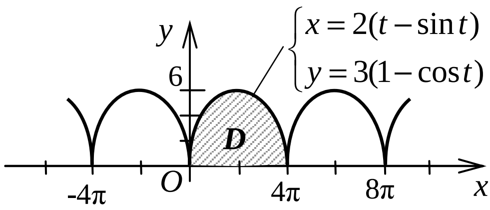

Рис. 18

$$x'=2(t-\sin t)'=2(1-\cos t);\qquad S=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}3(1-\cos t)\cdot 2(1-\cos t)\,dt=6\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=6t\,\big|_0^{2\pi}-12\sin t\,\big|_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=12\pi-0-12\sin 2\pi+$$

$$+12\sin 0+3t\,\big|_0^{2\pi}+(3/2)\sin 2t\,\big|_0^{2\pi}=12\pi+6\pi-0+$$

$$+(3/2)\sin 4\pi-(3/2)\sin 0=18\pi \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

Приклад 7. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом:

$$x=a\cos t,\;\; y=b\sin t.$$

□ Фігуру D, площу якої необхідно знайти, зображено на рис. 19. Координатні осі розбивають еліпс на 4 рівні частини. Для того, щоб знайти площу S всього еліпса, достатньо знайти площу S_1 його частини D_1, розташованої у першій чверті (на рис. 19 вона показана подвійною штриховою). Тоді $S=4S_1$.

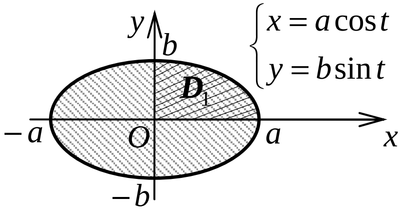

Рис. 19

Проведемо обчислення:

$a\cos t = 0 \Rightarrow t_1 = \pi/2$;

$a\cos t = a \Rightarrow t_2 = 0$;

$dx = -a\sin t\, dt$;

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt = 4\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a)\sin t\, dt =$$

$$= -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\, dt = -2ab\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)\, dt = -2ab\big(t-(1/2)\times$$

$$\times\sin 2t\big)\Big|_{\pi/2}^{0} = -2ab\,(0-\pi/2) + ab(\sin 0 - \sin\pi) = \pi ab \text{ (кв.од.). } \blacksquare$$

3. <u>Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями у полярних координатах</u>.

<u>Криволінійний сектор</u>. Нехай у полярній системі координат маємо криву, яка визначена рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна функція, коли $\alpha \le \varphi \le \beta$. Знайдемо площу S криволінійного сектора OAB. обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і координатними променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$.

Розіб'ємо сектор OAB на n частин довільними координатними променями $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, …, $\varphi = \varphi_n$, де $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots$ $\ldots < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$. Позначимо через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ кут між сусідніми променями, $i = \overline{1,n}$ (рис. 20).

На кожному елементарному проміжку $[\varphi_{i-1};\varphi_i]$ довільним способом виберемо по одному значенню полярного кута $\overline{\varphi}_i$. Позначимо через $\overline{\rho}_i$ довжину відповідного радіус-вектора $\overline{\rho}_i = \rho(\overline{\varphi}_i)$.

Розглянемо елементарний криволінійний сектор, що відповідає приросту $\Delta\varphi_i$ полярного кута. Його площа ΔS_i наближено дорівнює площі сектора круга з радіусом $\overline{\rho}_i$ і центральним кутом $\Delta\varphi_i$: $\Delta S_i \approx (1/2)\,\overline{\rho}_i^{\,2}\cdot\Delta\varphi_i$.

Сума $S_n = 1/2\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i$ дає площу сектора зі "ступінчатою" межею, що наближено визначає шукану площу S криволінійного сектора OAB.

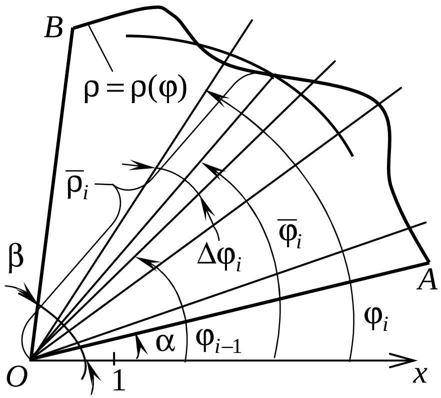

Рис. 20

Ця сума є інтегральною для функції $(1/2)\rho^2(\varphi)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$. Здійснюючи граничний перехід при $\max\Delta\varphi_i \to 0$, отримуємо точне значення площі сектора OAB у вигляді визначеного інтеграла:

$$\boxed{S = (1/2)\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi}\,.$$

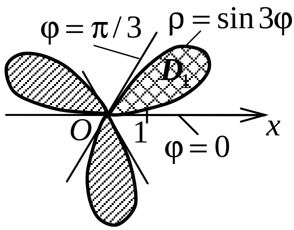

Рис. 21

<u>Приклад 8</u>. Обчислити площу фігури, обмеженої трипелюстковою трояндою $\rho = \sin 3\varphi$.

□ Фігура D, площу якої необхідно знайти, зображена на рис. 21.

Як бачимо, фігура D складається з трьох однакових „пелюсток”. Щоб знайти її площу S, достатньо знайти площу S_1 однієї з її „пелюсток”, наприклад, тієї D_1, що на рис. 21 позначена подвійною штриховою. Тоді $S = 3S_1$. Проведемо обчислення:

$$S = 3S_1 = 3\cdot(1/2)\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi = (3/2)\int_{0}^{\pi/3}\sin^2 3\varphi\,d\varphi =$$

$$= (3/4)\int_{0}^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi == (3/4)\cdot(\varphi-(1/6)\sin 6\varphi)\,\Big|_{0}^{\pi/3} =$$

$$= (3/4)\cdot(\pi/3-(1/6)\sin 2\pi - 0 + (1/6)\sin 0) = \pi/4 \text{ (кв.од.)}.\ \blacksquare$$

Правильна область у полярних координатах. Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 22), розміщена між крайніми координатними променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, причому полюс O не лежить у ній. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку координатних променів*** $\varphi=C$ ($C=const$), якщо виконуються наступні умови:

1) довільний пробний координатний промінь $\varphi=C$, що лежить між крайніми променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$, перетинає межу області D тільки в двох точках: в одній точці на ближній ***лінії входу*** $\rho=\rho_1(\varphi)$ і в одній точці на дальній ***лінії виходу*** $\rho=\rho_2(\varphi)$;

2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $\rho=\rho_1(\varphi)$ (аналогічно $\rho=\rho_2(\varphi)$), розв'язаним відносно ρ.

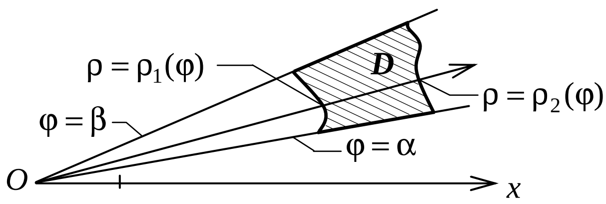

Рис. 22

Правильна в напрямку координатних променів плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} \alpha\le\varphi\le\beta; \\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi). \end{cases}$$

Зауваження 5. Крайні координатні промені $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ утворюють центральний кут $\Delta\varphi=\beta-\alpha$, величина якого лежить в межах $0\le\Delta\varphi\le2\pi$. Зокрема, для області D вигляду криволінійного кільця з полюсом у "дірці" маємо $\Delta\varphi=2\pi$. При цьому звичайно покладають $\alpha=0$ і $\beta=2\pi$.

Зауваження 6. При виконанні вказаних вище двох умов поняття правильної області поширюється на випадки, коли полюс O

лежить на межі області D (рис. 23) чи всередині області D (рис. 24). При цьому лінія входу вироджується в точку – полюс O: $\rho_1(\varphi)=0$.

Площу правильної області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних секторів, що лежать в одному центральному куті $\Delta\varphi=\beta-\alpha$. Тоді площу правильної в напрямку координатних променів області D можна обчислити за формулою

$$\boxed{S=(1/2)\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi)-\rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi}.$$

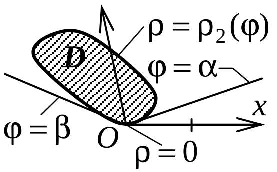

Рис. 23

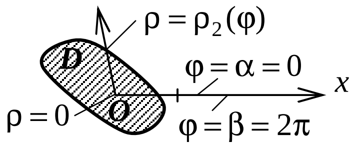

Рис. 24

<u>Приклад 9</u>. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\rho=3/(4\cos\varphi)$ (пряма, що перпендикулярна до полярної осі Ox) та $\rho=\cos\varphi$ (коло).

□ Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру:

$$\begin{cases}\rho=3/(4\cos\varphi); & 3/(4\cos\varphi)=\cos\varphi;\\ \rho=\cos\varphi; & \cos\varphi=\pm\sqrt{3}\big/2;\end{cases};\quad \cos\varphi=\pm\sqrt{3}\big/2;$$

$$\varphi_1=-\pi/6;\ \ \varphi_2=\pi/6.$$

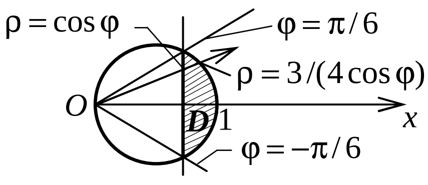

Рис. 25

Область D, площу якої необхідно обчислити, зображено на рис. 25. З цього рисунка видно, що область D – правильна в напрямку координатних променів. Тоді її площа:

$$S=(1/2)\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(\cos^2\varphi-(3/(4\cos\varphi))^2\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi-\frac{9}{32}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{1}{4}\left(\varphi+(1/2)\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}-$$

$$-(9/32)\,tg\,\varphi\,\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}=(1/4)\left(\pi/6+(1/2)\sin(\pi/3)+\pi/6-\right.$$

$$\left.-(1/2)\sin(-\pi/3)\right)-(9/32)\left(tg(\pi/6)-tg(-\pi/6)\right)=$$

$$=(1/4)\cdot(\pi/3+\sqrt{3}/2)-(9/32)\cdot(2\sqrt{3}/3)=\pi/12+\sqrt{3}/8-$$

$$-3\sqrt{3}/16=\pi/12-\sqrt{3}/16 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

1.4.2. Довжина дуги кривої

1. Випадок дуги плоскої лінії, що задана явно рівнянням у прямокутних координатах.

Нехай на координатній площині Oxy задана деяка лінія рівнянням у явній формі $y=y(x)$. Потрібно обчислити довжину L її дуги L_{AB}. (рис. 26).

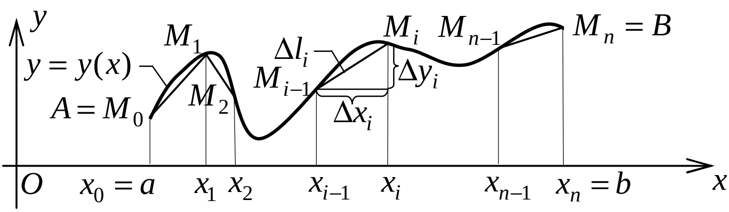

Рис. 26

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i=\overline{1,n}$ точками $A=M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n=B$ з абсцисами $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b$ і проведемо хорди $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{i-1}M_i, \ldots, M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_i, \ldots, \Delta l_n$. Тоді маємо ламану $M_0M_1 \ldots M_i \ldots M_{n-1}M_n$, вписану в дугу L_{AB}. Довжина ламаної L_n

дорівнює сумі довжин її ланок $L_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$.

Довжиною L ***дуги*** L_{AB} називають границю довжини L_n вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому число n цих ланок прямує до нескінченності):

$$L=\lim_{\max \Delta l_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i .$$

Теорема 1. *Якщо функція* $y=y(x)$, *визначена на відрізку* $[a;b]$, *неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина* L *дуги* L_{AB}, *що служить її графіком на відрізку* $[a;b]$, *обчислюється за формулою*

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx} .$$

□ Позначимо $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$; $\Delta y_i=y(x_i)-y(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+(\Delta y_i/\Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$\Delta y_i/\Delta x_i=(y(x_i)-y(x_{i-1}))/(x_i-x_{i-1})=y'(c_i)$, де $x_{i-1}<c_i<x_i$.

Отже, $\Delta l_i=\sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i$, оскільки $\Delta x_i>0$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i .$$

За умовою похідна $y'(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1+(y'(x))^2}$ теж неперервна. Тоді вираз для довжини ламаної L_n є інтегральною сумою для неперервної функції. Отже, існує визначений інтеграл – границя L_n при необмеженому здрібненні розбиття, що дає довжину L дуги L_{AB}:

$$L=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx . \ ■$$

Приклад 1. Знайти довжину вказаної дуги

$$y=\ln x,\ x\in[\sqrt{3};\sqrt{8}].$$

□ Похідна $y'=1/x$. Тоді:

$$L=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(1/x)^2}\,dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=$$

$$=\left|x^2+1=t^2;\ \sqrt{1+x^2}=t;\ x=\sqrt{t^2-1};\ dx=t\,dt\big/\sqrt{t^2-1}\ ;\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}t_1=\sqrt{1+3}=2;\\ t_1=\sqrt{1+8}=3\end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{t\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}}=\int\limits_2^3\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3 dt+$$

$$+\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2-1}=t\,\Big|_2^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=3-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=$$

$$=1+(1/2)\ln(3/2)\ \text{(од.)}.\ ■$$

Приклад 2. Знайти довжину кола $x^2+y^2=R^2$.

□ Довжина L_1 дуги кола, що розташована у першому квадранті, складає четверту частину довжини L всього кола. Рівняння цієї дуги має вигляд $y=\sqrt{R^2-x^2}$, звідки $y'=-x\big/(R^2-x^2)^{1/2}$. Тоді довжину L кола можна обчислити так:

$$L=4L_1=4\int\limits_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R\int\limits_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^R=$$

$$=4R(\arcsin 1-\arcsin 0)=2\pi R\ \text{(од.)}.\ ■$$

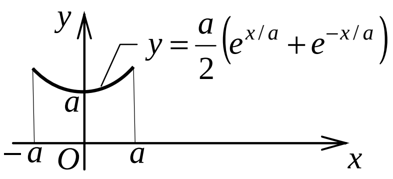

Рис. 27

Приклад 3. Електричній дріт, кінці якого закріплені на двох опорах, під дією сили тяжіння набуває форми ланцюгової лінії. Знайти довжину заданої дуги ланцюгової лінії (рис. 27):

$$y=(a/2)(e^{x/a}+e^{-x/a}) \quad (a>0); \quad x\in[-a;a].$$

□ Знайдемо похідну:

$$y'=(a/2)(e^{x/a}\cdot(1/a)+e^{-x/a}\cdot(-1/a))=(1/2)(e^{x/a}-e^{-x/a}).$$

Використовуючи симетрію дуги відносно осі Oy, обчислимо шукану довжину:

$$L=2\int_0^a\sqrt{1+\left((1/2)(e^{x/a}-e^{-x/a})\right)^2}\,dx=\int_0^a(e^{x/a}+e^{-x/a})dx=$$

$$=\int_0^a e^{x/a}dx+\int_0^a e^{-x/a}dx=ae^{x/a}\Big|_0^a-ae^{-x/a}\Big|_0^a=a(e-e^{-1}) \text{ (од.).} \ ■$$

2. <u>Випадок дуги лінії, що задана параметричними рівняннями у прямокутних координатах</u>.

Розглянемо дугу L_{AB} гладкої плоскої лінії, що задана параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, де функції $x=x(t)$ і $y=y(t)$ – неперервні разом зі своїми похідними, причому функція $x=x(t)$ – монотонно зростаюча, $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$. За наведеною вище формулою довжина цієї дуги

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx.$$

З урахуванням рівнянь лінії та властивостей похідної параметрично заданої функції маємо:

$$dx=x'(t)\,dt, \ y'(x)=y'(t)/x'(t);$$

$$\alpha=x^{-1}(a); \quad \beta=x^{-1}(b); \quad x'(t)>0; \ \beta\ge\alpha.$$

Зробимо заміну змінної в інтегралі для довжини дуги:

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(y'(t)/x'(t)\right)^2}\,x'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Таким чином, довжина дуги плоскої кривої, що задана параметрично, визначається за формулою

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt}, \quad \text{де } \beta\ge\alpha.$$

Наведена формула залишається справедливою у випадку монотонно спадної функції $x = x(t)$ при умові, що $\beta \geq \alpha$.

Приклад 4. Знайти довжину астроїди:

$$x = 2\cos^3 t\,,\quad y = 2\sin^3 t\,.$$

□ Обчислимо довжину астроїди – замкненої кривої, що задана параметричними рівняннями (рис. 28). Для цього спочатку знайдемо

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(-6\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2 + \left(6\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2 =$$

$$= 36\sin^2 t\cos^2 t = 9\sin^2 2t\,;\quad \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 3\sin 2t\,.$$

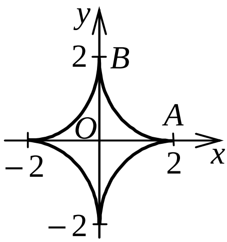

Рис. 28

Чверть L_{AB} астроїди розміщена в першому квадранті від точки $A(2;0)$ до точки $B(0,2)$ (рис. 28). Знайдемо значення параметра t, що відповідають кінцям цієї дуги:

$$2\cos^3 t = 2\,;\quad \cos t = 1\,;\quad \alpha = 0\,;$$

$$2\cos^3 t = 0\,;\quad \cos t = 0\,;\quad \beta = \pi/2\,.$$

Тоді довжина всієї астроїди:

$$L = 4\cdot 3\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = -12\cdot(1/2)\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -6(-1-1) = 12\ \text{(од.)}.\quad ■$$

Зауваження. Довжина дуги гладкої просторової кривої, заданої параметричними рівняннями

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\quad t\in[\alpha;\beta],$$

обчислюється за аналогічною формулою:

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt}\,,\quad \text{де } \beta \geq \alpha\,.$$

Приклад 5. Знайти довжину заданої дуги гвинтової лінії:

$$x = 6\cos t\,;\quad y = 6\sin t\,;\quad z = 8t\,,\quad t\in[0;2\pi]\,.$$

$$□\quad x' = -6\sin t\,;\quad y' = 6\cos t\,;\quad z' = 8\,;$$

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2=(-6\sin t)^2+(6\cos t)^2+8^2=$$

$$=36(\sin^2 t+\cos^2 t)+64=100;$$

$$L=100\int_0^{2\pi}dt=100t\Big|_0^{2\pi}=200\pi \text{ (од.).} \quad \blacksquare$$

3. <u>Випадок дуги плоскої лінії, що задана рівнянням у полярних координатах</u>.

<u>Теорема 2</u>. *Нехай дуга* L_{AB} *задана в полярних координатах рівнянням* $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, *де функція* $\rho(\varphi)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $\rho'(\varphi)$ *на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому точкам* A *і* B *відповідають значення* α *і* β. *Тоді довжина дуги* L_{AB} *обчислюється за формулою:*

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi}\,.$$

□ Використовуючи формули переходу від полярної до прямокутної системи координат $x=\rho\cos\varphi$ і $y=\rho\sin\varphi$, перейдемо до параметричного задання дуги L_{AB}:

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi;\quad y=\rho(\varphi)\sin\varphi,$$

де роль параметра відіграє полярний кут φ.

Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2+\left(y'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$, що відповідає параметричному випадку. Спочатку знайдемо похідні від x і y за параметром:

$$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi;$$

$$y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi.$$

Тоді

$$(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2=\left(\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi\right)^2+$$

$$+\left(\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi\right)^2=(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2,$$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \quad \blacksquare$$

Приклад 6. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 6(1+\sin\varphi)$.

□ Кардіоїда – замкнена лінія, що зображена на рис. 29. Вона симетрична відносно осі Oy. Тому її довжину L можна знайти, подвоївши довжину L_1 її правої частини L_{OA}, що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Проведемо обчислення:

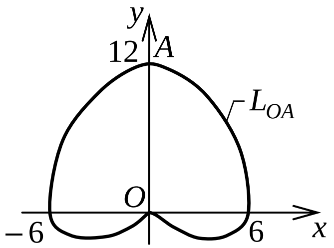

Рис. 29

$$\rho' = 6(1+\sin\varphi)' = 6\cos\varphi;$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = (6(1+\sin\varphi))^2 + + (6\cos\varphi)^2 = 36(1+2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 36\cdot 2(1+\sin\varphi) = = 72(1+\cos(\pi/2-\varphi)) = 72\times \times 2\cos^2\big((\pi/2-\varphi)/2\big) =$$

$$= 144\cos^2(\pi/4-\varphi/2); \quad \sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2} = 12\left|\cos(\pi/4-\varphi/2)\right| =$$

$$= 12\cos(\pi/4-\varphi/2); \quad L = 2L_1 = 2\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi =$$

$$= 2\cdot 12\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 24\cdot(-2)\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= -48(\sin 0 - \sin(\pi/2)) = 48 \text{ (од.).} \ ■$$

Приклад 7. Знайти довжину кривої $\rho = 4\sin^3(\varphi/3)$, де $0 \le \varphi \le 3\pi$.

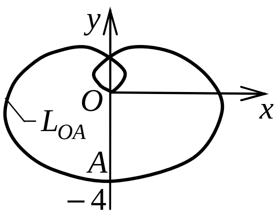

Рис. 30

□ Задана крива зображена на рис. 30. Вона замкнена і утворює петлю. Виходячи з симетрії цієї кривої відносно осі Oy, можна її довжину L знайти, подвоївши довжину L_1 її лівої половини L_{OA}, що розташована в першій, другій та третій чвертях і при цьому $0 \le \varphi \le 3\pi/2$.

Проведемо обчислення:

$$L = 2L_1 = 2\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi = \Big| L_{OA}:\ \rho = 4\sin^3(\varphi/3);$$

$$\alpha = 0;\ \ \beta = 3\pi/2;\ \rho' = 4\cdot 3\sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3)\cdot(1/3) =$$

$$= 4\sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3);\ \rho^2 + (\rho')^2 = (4\sin^3(\varphi/3))^2 +$$

$$+(4\sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3))^2 = 36\sin^4(\varphi/3)\cdot(\sin^2(\varphi/3)+$$

$$+\cos^2(\varphi/3)) = 36\sin^4(\varphi/3);\ \sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2} = 6\sin^2(\varphi/3)\,\Big| =$$

$$= 6\int_0^{3\pi/2}\sin^2(\varphi/3)\,d\varphi = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2}\big(1-\cos(2\varphi/3)\big)\,d\varphi =$$

$$= 3\cdot\big(\varphi-(3/2)\sin(2\varphi/3)\big)\Big|_0^{3\pi/2} = 9\pi/2\ \ \text{(од.)}. \ \blacksquare$$

1.4.3. Диференціал довжини дуги і кривина лінії

1. Диференціал довжини дуги. Нехай дуга L_{AB} гладкої плоскої лінії задається функцією $y = y(x)$, що неперервна разом зі своєю похідною на відрізку $[a;b]$. Для довільної точки $M(x;y(x))$, $x\in[a;b]$, довжина дуги L_{AM} є функцією x і визначається формулою $L(x) = \int_a^x\sqrt{1+(y'(t))^2}\,dt$.

Це інтеграл зі змінною верхньою межею. Тоді виконується умова $L'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$. Звідси диференціал довжини дуги дорівнює:

$$dL = L'(x)\,dx = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\,.$$

Отже, $\boxed{(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2}$.

Для явно заданої плоскої лінії: $\boxed{dL = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}$.

Для параметрично заданої плоскої лінії:

$$\boxed{dL=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt}\,.$$

Для параметрично заданої просторової лінії:

$$\boxed{dL=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt}\,.$$

Для лінії в полярних координатах:

$$\boxed{dL=\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi}\,.$$

2. Кривина лінії. Різні лінії можуть відрізнятися степенем викривлення. Розглянемо це питання детальніше.

Модуль відношення $|\Delta\alpha/\Delta L|$, де ΔL − довжина дуги L_{MM_1} (рис. 31), $\Delta\alpha$ − величина кута в радіанах, на який повертається дотична, коли точка дотику переміщується з точки M в точку M_1, називається ***середньою кривиною дуги*** L_{MM_1}.

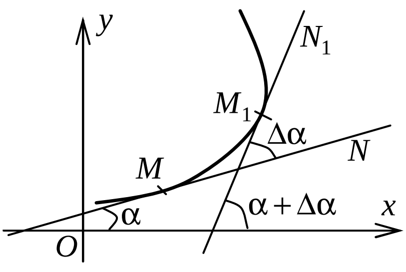

Рис. 31

Границя (якщо вона існує) середньої кривини дуги L_{MM_1}, коли точка M_1 наближається вздовж кривої до точки M, називається ***кривиною*** K ***лінії в точці*** M:

$$\boxed{K=\lim_{M_1\to M}|\Delta\alpha/\Delta L|=|d\alpha/dL|}\,.$$

Якщо крива задана в явній формі рівнянням $y=y(x)$, то

$$tg\,\alpha=y';\ \alpha=arctg\,y';\ \alpha'=\frac{y''}{1+(y')^2};\ d\alpha=\frac{y''dx}{1+(y')^2};;$$

$$dL=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx;\quad \boxed{K=|y''|\Big/\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}.$$

Величина R, обернена до кривини K, називається ***радіусом кривини***: $\boxed{R=1/K}$.

Приклад 1. Знайти кривину і радіус кривини даних ліній в довільній точці x: а) пряма $y = kx + b$, б) коло $x^2 + y^2 = r^2$, в) косинусоїда $y = \cos x$.

□ а) Знайдемо похідні $y' = k$, $y'' = 0$. Тоді $K = 0$ і $R = +\infty$. Тобто, у прямої кривина відсутня.

б) Знайдемо першу та другу похідні функції, заданої неявно:

$$2x + 2y \cdot y' = 0; \quad y' = -x / y; \quad y'' = -(y - xy') / y^2 =$$

$$= -(y + x(x / y)) \big/ y^2 = -(x^2 + y^2) \big/ y^3 = -r^2 \big/ y^3;$$

$$K = \frac{|-r^2 / y^3|}{\left(1 + (-x / y)^2\right)^{3/2}} = \frac{|-r^2 / y^3|}{(x^2 + y^2)^{3/2} \big/ y^3} = \frac{1}{r}; \quad R = 1 / K = r.$$

Тобто, коло має сталу кривину, радіус якої дорівнює радіусу кола.

в) $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$. Тоді:

$$K = |-\cos x| \big/ (1 + (-\sin x)^2)^{3/2} = |\cos x| \big/ (1 + \sin^2 x)^{3/2};$$

$$R = (1 + \sin^2 x)^{3/2} \big/ |\cos x|. \quad ■$$

Коло, радіус якого дорівнює радіусу кривини в даній точці та яке дотикається в цій точці до кривої, називається ***колом кривини***. Центр цього кола називається ***центром кривини***.

Множина всіх центрів кривини даної лінії називається ***еволютою*** цієї лінії, а сама лінія відносно своєї еволюти називається ***евольвентою*** (***розгорткою***).

Очевидно, що сама лінія та її коло кривини у відповідній точці мають спільну дотичну. Центр кривини розміщений на нормалі з боку вгнутості даної лінії.

Вершиною кривої називається точка $M_0(x_0; y_0)$, в якій кривина максимальна. Крива може мати будь-яку кількість вершин.

Приклад 2. Знайти вершини заданої кривої (точки максимуму кривини): а) $y = x^2$; б) $y = \ln x$; в) $y = (e^x + e^{-x}) / 2$.

□ а) Область визначення кривої $x \in (-\infty; +\infty)$. Знайдемо похідні: $y' = 2x$, $y'' = 2$. Тоді $K = 2 / (1 + 4x^2)^{3/2}$. Дослідимо на екстремум цю функцію $K = K(x)$:

$$K' = -12x/(1+4x^2)^{5/2}; \ -12x/(1+4x^2)^{5/2} = 0 \text{ при } x = 0.$$

Оскільки при $x < 0$ маємо $K' > 0$, а при $x > 0$ – $K' < 0$, тобто в точці $x = 0$ похідна K' з додатної стає від'ємною, то в цій стаціонарній точці функція $K = K(x)$ має максимум:

$$K_{\max} = 2 \text{ при } x_{\max} = 0, \ y_{\max} = 0; \ M_0(0;0) \text{ – вершина.}$$

б) Область визначення кривої $x > 0$. Похідні $y' = 1/x$,

$$y'' = -1/x^2. \text{ Тоді } \quad K = \frac{|-1/x^2|}{(1+(1/x)^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Дослідимо отриману функцію $K = K(x)$ на екстремум:

$$K' = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}; \ K' = 0; \ \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = 0 \text{ при } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

З урахуванням області визначення вибираємо $x = \sqrt{2}/2$. Оскільки в цій стаціонарній точці похідна K' з додатної стає від'ємною, то маємо точку максимуму функції $K = K(x)$. Отже,

$$x_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ y_{\max} = -\frac{\ln 2}{2}; \ K_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}; \ M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\ln 2}{2}\right) \text{ –}$$

вершина.

в) Область визначення кривої $x \in (-\infty; +\infty)$.

Знайдемо похідні та кривину:

$$y' = (e^x - e^{-x})/2; \ y'' = (e^x + e^{-x})/2; \ K = 4(e^x + e^{-x})^{-2}.$$

Дослідимо на екстремум одержану функцію $K = K(x)$:

$$K' = -8(e^x + e^{-x})^{-3}(e^x - e^{-x}) = 0; \ e^x - e^{-x} = 0; \ x = 0.$$

Оскільки в цій стаціонарній точці $x = 0$ похідна K' з додатної стає від'ємною, то маємо точку максимуму функції $K = K(x)$.

Отже,

$$x_{\max} = 0, \ y_{\max} = 1; \ K_{\max} = 1; \ M_0(0;1) \text{ – вершина. } \blacksquare$$

1.4.4. Об’єм тіла

1. Об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло T. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox (рис. 32). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від x: $S = S(x)$. Знайдемо об'єм V тіла T.

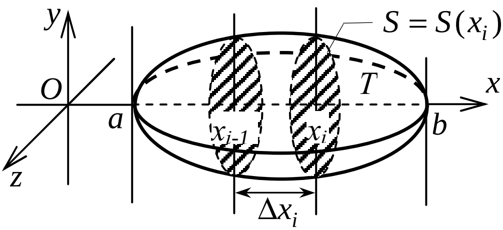

Рис. 32

Припустимо, що функція $S(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, що служить проекцією тіла T на вісь Ox. Проведемо довільно площини $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_i$, ..., $x = x_n$, де $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$. Тим самим тіло розбивається на елементарні шари між сусідніми площинами $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$. На кожному частинному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$ візьмемо довільну точку c_i і для кожного i-го шару побудуємо елементарний циліндр, твірна якого паралельна осі Ox і має довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а напрямною служить контур перерізу тіла T площиною $x = c_i$. Тоді об'єм шару ΔV_i наближено дорівнює об'єму такого циліндра з площею основи $S(c_i)$ і висотою Δx_i: $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Об'єм V тіла T наближено дорівнює сумі V_n об'ємів усіх частинних циліндрів: $V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$. Точність цього наближення підвищується зі зменшенням кроків Δx_i розбиття.

Границя цієї суми (якщо вона існує) при необмеженому здрібненні розбиття (коли $\max \Delta x_i \to 0$ і при цьому, очевидно, $n \to \infty$) визначає об'єм V даного тіла T:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i \,.$$

Таким чином, об'єм V є границею інтегральної суми V_n для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $[a;b]$, тому вказана границя існує і дорівнює визначеному інтегралу:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx} \,.$$

Приклад 1. Знайти об’єм еліпсоїда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

□ У перерізі еліпсоїда (рис. 33) площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\begin{cases} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2; \\ x = const \end{cases}$$

або $\quad y^2 \Big/ \left(b^2(1 - x^2/a^2)\right) + z^2 \Big/ \left(c^2(1 - x^2/a^2)\right) = 1$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $\quad c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

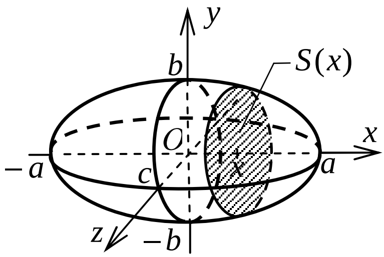

Рис. 33

Площа такого еліпса (див. прикл.7 із п.1.4.1)

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right).$$

Обчислимо об’єм еліпсоїда, враховуючи його симетрію відносно площини Oyz:

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} (1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc \int_0^a (1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\left(x - x^3/(3a^2)\right)\Big|_0^a = (4/3)\pi abc \text{ (куб.од.)}. \ ■$$

2. <u>Об'єм тіла обертання</u>.

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x) \ge 0$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ та $x = b$, де $a \le b$. Якщо обертати цю фігуру навколо осі Ox, то утвориться тіло обертання T (рис. 34). Переріз цього тіла площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, – круг з площею $S(x) = \pi R^2 = \pi(y(x))^2$. Тоді об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

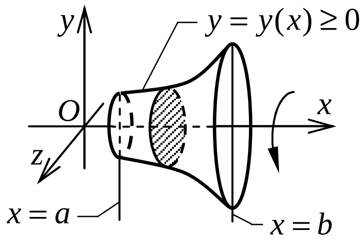

Рис. 34

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$, навколо осі Ox.

□ Тіло, об'єм якого треба знайти, зображене на рис. 35. Фігура (криволінійна трапеція), що обертається, показана штриховою.

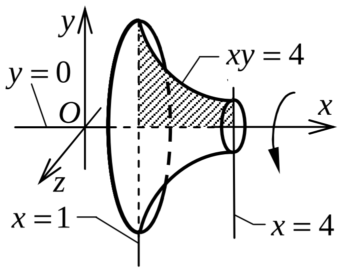

Рис. 35

Проведемо обчислення:

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx =$$

$$= \pi\int_1^4 (4/x)^2\,dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 16\pi(-1/x)\Big|_1^4 = -16\pi\cdot(1/4 - 1) = 12\pi \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Фігура, обмежена кривими $y = \sqrt[3]{4p^2x}$, $y = 2\sqrt{p(x-p)}$ і віссю Ox, обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла обертання.

□ Фігура, обертанням якої утворюється тіло, зображена на рис. 36. Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо характерні точки фігури – точки перетину заданих ліній:

$$\begin{cases} y=\sqrt[3]{4p^2x}; \\ y=0; \end{cases} \quad O(0;0); \quad \begin{cases} y=2\sqrt{p(x-p)}; \\ y=0; \end{cases} \quad A(p;0);$$

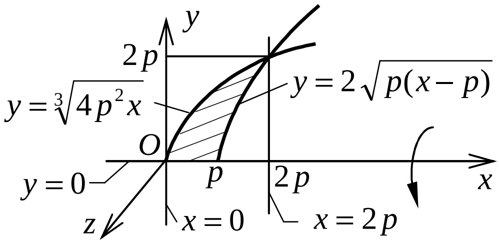

Рис. 36

$$\begin{cases} y=\sqrt[3]{4p^2x}; \\ y=2\sqrt{p(x-p)}; \end{cases}$$

$$B(2p;2p).$$

Шуканий об'єм $V=V_2-V_1$, де V_1 – об'єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y=2\sqrt{p(x-p)}$ і прямими $x=2p$ та $y=0$; V_2 – об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кубічною параболою $y=\sqrt[3]{4p^2x}$ і прямими $x=2p$ та $y=0$.

Тоді

$$V=\pi\int_0^{2p} y_2^2(x)\,dx-\pi\int_p^{2p} y_1^2(x)\,dx=\pi\int_0^{2p}\left(4p^2x\right)^{2/3}dx-$$

$$-\pi\cdot 4p\int_p^{2p}(x-p)\,dx=2\pi p\sqrt[3]{2p}\cdot(3/5)x^{5/3}\Big|_0^{2p}-(4\pi p)\cdot(1/2)\times$$

$$\times(x-p)^2\Big|_p^{2p}=(24/5)\pi p^3-2\pi p^3=(14/5)\pi p^3 \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осу Oy криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x=x(y)\ge 0$, $x=0$, $y=c$, $y=d$, де $c\le d$, $x=x(y)$ − неперервна невід'ємна на $[c;d]$ функція, обчислюється аналогічно

$$\boxed{V=\pi\int_c^d x^2(y)\,dy}\,.$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти об'єм частини параболоїда, утвореної обертанням дуги параболи $y=x^2$, $x\in[0;2]$ навколо осі Oy.

□ З рівняння параболи $x = x(y) = \sqrt{y}$, $y \in [0;4]$. Тоді

$$V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi(y^2/2)\Big|_0^4 = 8\pi \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Коли криві, що обмежують плоску область D, обертанням якої утворюється тіло T, задані параметрично або в полярних координатах, то треба перейти до прямокутних координат і в інтегралі застосувати заміну змінної.

<u>Приклад 5</u>. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, обмеженої дугою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0;\pi/2]$, прямою $x = a(\pi/2-1)$ і віссю Ox, навколо осі Ox.

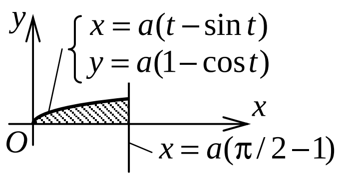

Рис. 37

□ Фігура, обертанням якої утворюється тіло, зображена на рис. 37. Проведемо обчислення:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \left| x = x(t);\ y = y(t);\ dx = x'(t)\,dt \right| = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$= \left| x = a(t-\sin t);\ dx = a(1-\cos t)\,dt;\ y = a(1-\cos t);\ t_1 = 0;\ t_2 = \pi/2 \right| = \pi\int_0^{\pi/2} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-3\cos t+3\cos^2 t -$$

$$-\cos^3 t)\,dt = \pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-3\cos t+(3/2)(1+\cos 2t) -$$

$$-(1-\sin^2 t)\cos t\,)\,dt = \pi a^3\Big[\big(t-3\sin t+(3/2)t+(3/4)\sin 2t -$$

$$-\sin t+(1/3)\sin^3 t\big)\Big|_0^{\pi/2}\Big] = (15\pi-44)\pi a^3/12 \ \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

<u>Приклад 6</u>. Кардіоїда $\rho = a(1-\cos\varphi)$ обертається навколо полярної осі. Знайти об'єм тіла обертання.

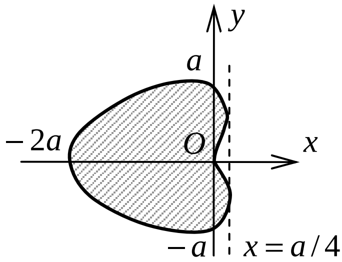

Рис. 38

□ Задана кардіоїда зображена на рис. 38. Скористаємося формулами зв'язку між прямокутними і полярними координатами і зробимо заміну змінної:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\Big|\, x=x(\varphi)=$$

$$=\rho(\varphi)\cos\varphi;\; y=y(\varphi)=\rho(\varphi)\times$$

$$\times\sin\varphi;\; dx=x'(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=(\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi)\,d\varphi\Big|=\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}y^2(\varphi)\,x'(\varphi)\,d\varphi.$$

Проведемо обчислення:

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi=a(1-\cos\varphi)\cos\varphi=a(\cos\varphi-\cos^2\varphi)\,;$$

$$y=\rho(\varphi)\sin\varphi=a(1-\cos\varphi)\sin\varphi\,;\quad x'=a(-\sin\varphi+$$

$$+2\cos\varphi\sin\varphi)=a(2\cos\varphi-1)\sin\varphi\,;$$

$$V=\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}y^2(\varphi)\,x'(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\pi\int_{\pi}^{0}(a(1-\cos\varphi)\sin\varphi)^2a(2\cos\varphi-1)\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\pi a^3\int_{\pi}^{0}\sin^2\varphi(1-\cos\varphi)(2\cos\varphi-1)\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\Big|u=\cos\varphi;\quad du=-\sin\varphi\,d\varphi;\; u_1=\cos\pi=-1;\; u_2=\cos 0=1;$$

$$\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-u^2\Big|=-\pi a^3\int_{-1}^{1}(1-u^2)\,(1-u)(2u-1)\,du=$$

$$=-\pi a^3\int_{-1}^{1}(2u^5+5u^4-2u^3-4u^2+4u-1)\,du=-\pi a^3(u^6/3+u^5-$$

$$-u^4/2-4u^3/3+2u^2-u)\,\Big|_{-1}^{1}=-\pi a^3(1/3+1-1/2-4/3+2-1-$$

$$-1/3+1+1/2-4/3-2-1)=8\pi a^3/3\quad \text{(куб.од.)}.\ ■$$

1.4.5. Площа поверхні обертання

Нехай плоска гладка дуга L_{AB} є графіком невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $y = y(x) \geq 0$, що неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку. Треба знайти площу S поверхні, утвореної обертанням дуги L_{AB} навколо осі Ox (рис. 39).

Перетнемо поверхню обертання двома площинами, що проходять через досить близькі точки x та $x+dx$, паралельно координатній площині Oyz. Наближено замінимо утворену між перерізами елементарну фігуру зрізаним конусом, твірна якого $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$, а радіуси основ $y(x)$ та $y(x+dx)$. Якщо висота конуса dx нескінченно мала, то площа dS бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса, тобто маємо диференціал площі

$$dS = 2\pi\, y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

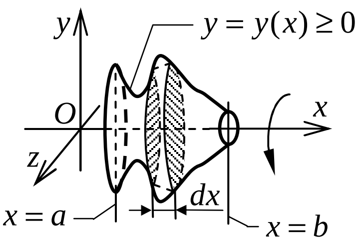

Рис. 39

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$\boxed{S = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}\,.$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги параболи $y^2 = 2px$ $(0 \leq x \leq 2p$; $p>0)$ навколо осі Ox.

□ Спочатку рівняння дуги параболи запишемо у явному вигляді, виразивши y через x: $y = \sqrt{2px}$. Потім знайдемо похідну: $y' = \sqrt{p/(2x)}$. Далі обчислимо площу:

$$S = 2\pi\int_0^{2p}\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\left(\sqrt{p/(2x)}\right)^2}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\times$$

$$\times\int_0^{2p}\sqrt{2x+p}\,dx = \pi\sqrt{p}\cdot(2/3)(2x+p)^{3/2}\Big|_0^{2p} =$$

$$= (2\pi/3)\left[5p^2\sqrt{5} - p^2\right] = (2\pi/3)\left[5\sqrt{5} - 1\right] p^2 \text{ (кв. од.).} \ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти площу поверхні тора, утвореного обертанням кола $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ $(0 < r \le R)$ навколо осі Ox. (Форму тора має, наприклад, бублик).

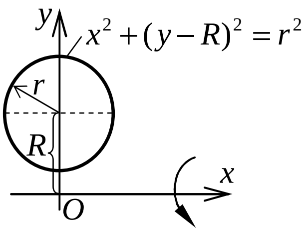

Рис. 40

□ Задане коло зображене на рис. 40. Шукану площу S поверхні тора можна знайти як суму $S = S_1 + S_2$ площ двох поверхонь, утворених обертанням відповідно нижнього $y = y_1(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ і верхнього $y = y_2(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ півкіл $(-r \le x \le r)$. Проведемо обчислення:

$$y_1'(x) = -x\big/\sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad y_2'(x) = x\big/\sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad S = S_1 + S_2 =$$

$$= 2\pi\int_{-r}^{r}\left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \left(-x\big/\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2}\,dx + 2\pi\int_{-r}^{r}\left(R + \right.$$

$$\left. + \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \left(x\big/\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2}\,dx = 4\pi Rr\int_{-r}^{r} dx\big/\sqrt{r^2 - x^2} =$$

$$= 4\pi Rr \cdot \arcsin(x/r)\Big|_{-r}^{r} = 4\pi^2 Rr \text{ (кв. од.).} \ \blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Коли крива, обертанням якої утворюється дана поверхня, задана параметрично або в полярних координатах, то треба радіус елементарного зрізаного конуса $y(x)$ і його твірну – диференціал довжини дуги dl – виразити у відповідній формі, а в інтегралі застосувати заміну змінної.

Якщо крива задана у параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t) \ge 0$, $\alpha \le t \le \beta$, тоді твірна зрізаного конуса дорівнює $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$, елемент площі dS визначається за формулою $dS = 2\pi\, y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ і площа поверхні обертання навколо осі Ox знаходиться наступним чином:

$$\boxed{S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}\,.$$

Аналогічно, площа поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі Ox кривої, що задана в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, обчислюється за формулою

$$\boxed{S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi}\,.$$

Приклад 3. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ навколо осі Ox.

□ Астроїда (див. рис. 28 із п. 1.4.2) симетрична відносно обох координатних осей. Шукана площа S дорівнює подвоєній площі S_1 поверхні, описаної дугою астроїди, що лежить у першій чверті $\left(0 \le t \le \pi/2\right)$. Проведемо обчислення:

$$S = 2S_1 = 2\cdot 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \Big| x = a\cos^3 t;$$

$$y = a\sin^3 t;\; x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t;\; y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t;$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)} =$$

$$= 3a\sin t\cos t;\; t_1 = 0;\; t_2 = \pi/2\Big| = 4\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t \times =$$

$$\times\cos t\,dt = 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cdot\cos t\,dt = 12\pi a^2(1/5)\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = .$$

$$= (12/5)\pi a^2 \text{ (кв. од.).} \;■$$

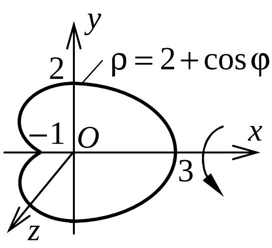

Рис. 41

Приклад 4. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням равлика Паскаля $\rho = 2 + \cos\varphi$ навколо полярної осі Ox.

□ Равлик Паскаля зображений на рис. 41. Він симетричний відносно полярної осі Ox. Поверхня обертання утворюється рухом верхньої половини равлика Паскаля, де $\varphi \in [0;\pi]$. Проведемо обчислення:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y(\varphi)\,dl=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\sin\varphi\times$$

$$\times\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi=$$

$$=\left|\rho=2+\cos\varphi;\ \rho'=-\sin\varphi;\quad \rho^2+(\rho')^2=(2+\cos\varphi)^2+\right.$$

$$\left.+\sin^2\varphi=5+4\cos\varphi;\ \alpha=0;\ \beta=\pi\right|=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(2+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi=\left|t=\cos\varphi;\right.$$

$$\left.dt=-\sin\varphi\,d\varphi;\ t_1=\cos 0=1;\ t_2=\cos\pi=-1\right|=$$

$$=-2\pi\int_1^{-1}(2+t)\sqrt{5+4t}\,dt=\left|5+4t=u^2;\ t=(u^2-5)/4;\right.$$

$$\left.dt=(1/2)u\,du;\ u=\sqrt{5+4t};\ u_1=\sqrt{5+4}=3;\ u_2=\sqrt{5-4}=1\right|=$$

$$=-2\pi\int_3^1(2+(u^2-5)/4)u\,(1/2)u\,du=-(\pi/4)\int_3^1(3+u^2)u^2\,du=$$

$$=-(\pi/4)\int_3^1(3u^2+u^4)\,du=-(\pi/4)\left(u^3+(1/5)u^5\right)\Big|_3^1=$$

$$=-(\pi/4)\left(1+1/5-27-243/5\right)=93\pi/5\ \text{(кв. од.)}.\ \blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Якщо поверхня утворюється обертанням кривої навколо осі Oy, то формули для обчислення площі аналогічні, тільки в них змінні x та y міняються ролями.

<u>Приклад 5</u>. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги параболи $y^2=2px$ $(0\le x\le p/6;\ \ p>0)$ навколо осі Oy.

□ Спочатку рівняння дуги параболи запишемо у явному вигляді, виразивши x через y: $x=y^2/(2p)$; $x_1=0\Rightarrow y_1=0$; $x_2=p/6\Rightarrow y_2=p/\sqrt{3}$. Потім знайдемо похідну: $x'=y/p$. Далі обчислимо площу:

$$S=2\pi\int_{y_1}^{y_2}x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy=2\pi\int_0^{p/\sqrt{3}}\left(y^2/(2p)\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+(y/p)^2}\,dy=\left(\pi/p^2\right)\int_0^{p/\sqrt{3}}y^2\sqrt{p^2+y^2}\;dy=\Big|\,y=p\,ctg\,t\,;$$

$$dy=\left(-1/\sin^2 t\right)dt;\;\;\sqrt{p^2+y^2}=\sqrt{p^2+p^2ctg^2t}=p/\sin t;$$

$$t=arcctg\,\frac{y}{p};\;t_1=arcctg\,0=\frac{\pi}{2};\;t_2=arcctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}\Bigg|=\frac{\pi}{p^2}\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{\pi/3}(p\,ctg\,t)^2(p/\sin t)\left(-1/\sin^2 t\right)dt=-\pi\int_{\pi/2}^{\pi/3}\left(\cos^2 t/\sin^5 t\right)dt=$$

$$=\Big|\;tg\,(t/2)=u;\;\;t=2arctg\,u;\;\;dt=(2\,du)/(1+u^2);$$

$$\sin t=\frac{2u}{1+u^2};\;\;\cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2};\;\;u_1=tg\,\frac{\pi}{4}=1;\;\;u_2=tg\,\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\;\Bigg|=$$

$$=-\pi\int_1^{\sqrt{3}/3}\frac{\left((1-u^2)/(1+u^2)\right)^2}{\left((2u)/(1+u^2)\right)^5}\cdot\frac{2\,du}{1+u^2}=-\frac{\pi}{16}\int_1^{\sqrt{3}/3}(1-u^2)^2\times$$

$$\times\left((1+u^2)^2/u^5\right)du=-(\pi/16)\int_1^{\sqrt{3}/3}\left((1-2u^4+u^8)/u^5\right)du=$$

$$=-(\pi/16)\int_1^{\sqrt{3}/3}\left(u^{-5}-2/u+u^3\right)du=-(\pi/16)\Big(-(1/4)u^{-4}-$$

$$-2\ln|u|+(1/4)u^4\Big)\Big|_1^{\sqrt{3}/3}=-(\pi/16)(-9/4-2\ln\sqrt{3}/3+1/36+$$

$$+1/4+2\ln 1-1/4)=\pi(20-9\ln 3)/144\;\;\text{(кв. од.).}\;\;\blacksquare$$

<u>Приклад 6</u>. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лемніскати Бернуллі $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ ($a>0$) навколо осі Oy.

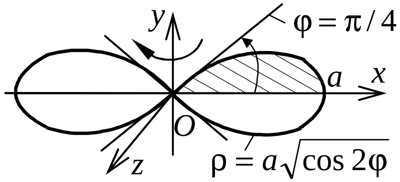

Рис. 42

□ Лемніската Бернуллі зображена на рис. 42. Вона симетрична відносно обох координатних осей Ox і Oy. Шукана площа S дорівнює подвоєній площі S_1 поверхні, описаної дугою лемніскати, що лежить у першій чверті $(0 \le \varphi \le \pi/4)$. Проведемо обчислення:

$$S = 2S_1 = 2 \cdot 2\pi \int_\alpha^\beta x(\varphi)\, dl = 2 \cdot 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cos\varphi \times$$

$$\times \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi = \Big| \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi};\ \rho' = -a\sin 2\varphi :$$

$$: \sqrt{\cos 2\varphi};\ \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + a^2\sin^2 2\varphi / \cos 2\varphi} =$$

$$= \sqrt{a^2(\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi)} : \sqrt{\cos 2\varphi} = a \Big/ \sqrt{\cos 2\varphi};\ \alpha = 0;$$

$$\beta = \pi/4 \Big| = 4\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi \cdot \left(a \Big/ \sqrt{\cos 2\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \cos\varphi\, d\varphi = 4\pi a^2 \sin\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2\sqrt{2}\pi a^2 \quad \text{(кв. од.).} \ ■$$

1.5. Фізичні застосування визначеного інтеграла

За допомогою інтегрального числення можна знаходити масу матеріальної дуги і пластинки, їх центр мас; роботу сили; сумарний електричний заряд; концентрацію електронів; напруженість електричного поля і т.п.

Розглянемо застосування визначеного інтеграла для розв'язування деяких типових задач.

1.5.1. Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги

Нехай задана матеріальна неоднорідна дуга гладкої плоскої кривої $y = y(x)$, $x \in [a;\, b]$ з лінійною густиною $\rho = \rho(x)$ (рис. 43). Знайдемо її масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно координатних осей Ox і Oy та координати центра мас $C(x_c\, , y_c)$.

Поділимо відрізок $[a;b]$ на n елементарних частин довільно вибраними точками: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$. Позначимо i-ий крок розбиття $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Припустимо, що Δx_i

настільки мале, що масу Δm_i i-ої елементарної дуги $L_{M_{i-1}M_i}$ можна вважати зосередженою в одній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i;\bar{y}_i)$, де $\bar{y}_i = y(\bar{x}_i)$. Тоді

$$\Delta m_i \approx \rho(\bar{x}_i)\Delta L_i \approx \rho(\bar{x}_i)\sqrt{1+(y'(\bar{x}_i))^2}\,\Delta x_i .$$

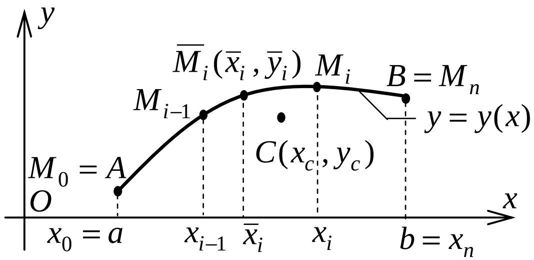

Рис. 43

Розглядаючи розбиття дуги як систему матеріальних точок $\overline{M}_i(\bar{x}_i;\bar{y}_i)$, $i = \overline{1,n}$, наближено знаходимо масу m дуги:

$$m = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\bar{x}_i)\sqrt{1+(y'(\bar{x}_i))^2}\,\Delta x_i .$$

При необмеженому здрібненні розбиття, коли $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$, дістаємо точне значення маси m дуги у вигляді визначеного інтеграла:

$$\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\,dl},$$

де $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ – диференціал довжини дуги.

Статичний момент ΔM_l *матеріальної точки відносно осі* Ol *дорівнює добутку її маси* Δm *на відхилення* r *від осі*: $\Delta M_l = \Delta m \cdot r$.

Момент інерції ΔI_l *матеріальної точки відносно осі* Ol *дорівнює добутку її маси* Δm *на квадрат відхилення* r *від осі*: $\Delta I_l = \Delta m \cdot r^2$.

Момент системи матеріальних точок дорівнює сумі відповідних моментів всіх її складових.

Центром мас $C(x_c; y_c)$ *системи матеріальних точок називається матеріальна точка з їх сумарною масою* $m = \sum \Delta m_i$ *, що має ті самі сумарні статичні моменти* $M_x = \sum \Delta M_{xi}$ *і* $M_y = \sum \Delta M_{yi}$. Координати центра мас $C(x_c; y_c)$ обчислюються за формулами:

$$x_c = M_y / m; \quad y_c = M_x / m.$$

Розглядаючи розбиття дуги як систему матеріальних точок $\overline{M_i}(\overline{x}_i; \overline{y}_i)$, $i = \overline{1, n}$, отримуємо наближені значення статичних моментів M_x, M_y і моментів інерції I_x, I_y дуги:

а) відносно осі Ox:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{y}_i \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i ;$$

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{y}_i^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i^2 \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i ;$$

б) відносно осі Oy:

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{x}_i \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i ;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{x}_i^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i^2 \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i .$$

Застосовуючи граничний перехід при $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, для вказаних величин одержуємо точні розрахункові формули:

$$\boxed{M_x = \int_a^b y \, \rho(x) \, dl}; \quad \boxed{I_x = \int_a^b y^2 \rho(x) \, dl};$$

$$\boxed{M_y = \int_a^b x \, \rho(x) \, dl}; \quad \boxed{I_y = \int_a^b x^2 \rho(x) \, dl},$$

де $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx$ – диференціал довжини дуги.

Аналогічно для координат центра мас $C(x_c; y_c)$ дуги дістаємо формули:

$$\boxed{x_c = M_y / m}; \quad \boxed{y_c = M_x / m}.$$

Приклад 1. Для дуги кола $y=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[0;3]$, розташованої у першій координатній чверті, знайти масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно осей Ox та Oy, а також координати центра мас $C(x_c;y_c)$. Лінійна густина $\rho(x)=\rho_0=const$.

□ Знайдемо диференціал довжини дуги:

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}};\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx=\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Обчислимо масу дуги:

$$m=\int_a^b \rho(x)\,dl=\int_0^3 \rho_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\rho_0\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\rho_0\times$$

$$\times\arcsin(x/3)\Big|_0^3=3\rho_0(\arcsin 1-\arcsin 0)=3\rho_0\,\pi/2.$$

Знайдемо статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас:

$$M_x=\int_a^b y\rho(x)\,dl=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\rho_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\rho_0\int_0^3 dx=$$

$$=3\rho_0\,x\Big|_0^3=9\rho_0;\quad M_y=\int_a^b x\rho(x)\,dl=\int_0^3\frac{3x\rho_0}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=9-x^2;\ du=-2xdx; \\ u_1=9;\qquad u_2=0 \end{matrix}\right|=-\frac{3}{2}\rho_0\int_9^0\frac{du}{\sqrt{u}}=$$

$$=-3\rho_0\sqrt{u}\Big|_9^0=9\rho_0;\quad I_x=\int_a^b y^2\rho(x)\,dl=\int_0^3(9-x^2)\rho_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=3\rho_0\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\Big|\ x=3\sin u;\ dx=3\cos u\,du;$$

$$\sqrt{9-x^2}=3\cos u;\ u=\arcsin(x/3);\ u_1=\arcsin 0=0;$$

$$u_2 = \arcsin 1 = \pi/2 \Big| = 3\rho_0 \int_0^{\pi/2} 3\cos u \cdot 3\cos u\, du =$$

$$= 27\rho_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = (27/2)\,\rho_0 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2u)\, du =$$

$$= (27/2)\,\rho_0 (u + (1/2)\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2} = 27\pi\rho_0 / 2\ ;$$

$$I_y = \int_a^b x^2\, \rho(x)\, dl = \int_0^3 x^2 \rho_0 \frac{3\,dx}{\sqrt{9 - x^2}} = 3\rho_0 \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}} =$$

$$= \Big|\ x = 3\sin u;\ \ dx = 3\cos u\, du;\ \sqrt{9 - x^2} = 3\cos u;$$

$$u = \arcsin(x/3);\ \ u_1 = \arcsin 0 = 0;\ u_2 = \arcsin 1 = \pi/2 \Big| =$$

$$= 3\rho_0 \int_0^{\pi/2} \frac{(3\sin u)^2 \cdot 3\cos u\, du}{3\cos u} = 27\rho_0 \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\, du = (27/2)\,\rho_0 \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2u)\, du = (27/2)\,\rho_0 (u - (1/2)\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{27\pi\rho_0}{2};\ \ x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{9\rho_0}{3\pi\rho_0 / 2} = 6\pi;\ \ y_c = \frac{M_x}{m} = 6\pi.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти координати центра мас $C(x_c; y_c)$ однорідної дуги астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ ($a > 0$), що розташована у першій координатній чверті та має лінійну густину $\rho = \rho(x) = \rho_0 (x/a)^{1/3}$, де $\rho_0 = const > 0$.

□ Подамо лінійну густину через параметр t:

$$\rho = \rho_0 \left(a\cos^3 t / a\right)^{1/3} = \rho_0 \cos t\,.$$

Указаній частині астроїди відповідають значення параметра $0 \le t \le \pi/2$. Знайдемо диференціал довжини дуги, що задана параметрично:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt;\quad x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t\,;$$

$$y' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t\,;\ \ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t +$$

$$+9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t=9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)=$$

$$=9a^2\sin^2 t\cos^2 t\,;\quad dl=3a\sin t\cos t\,dt\,.$$

Обчислимо масу, переходячи в інтегралі до параметра t:

$$m=\int_{t_1}^{t_2}\rho\,dl=\int_0^{\pi/2}\rho_0\cos t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt=$$

$$=3a\rho_0\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt=-a\rho_0\cdot\cos^3 t\Big|_0^{\pi/2}=a\rho_0\,.$$

Формули для статичних моментів у випадку параметрично заданої кривої приймають вигляд:

$$M_x=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\rho\,dl\,;\quad M_y=\int_{t_1}^{t_2}x(t)\rho\,dl\,.$$

Тоді

$$M_x=\int_0^{\pi/2}a\sin^3 t\cdot\rho_0\cos t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt=3a^2\rho_0\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}(\sin t\cos t)^2\sin^2 t\,dt=3a^2\rho_0\int_0^{\pi/2}((1/2)\sin 2t)^2\cdot(1/2)\times$$

$$\times(1-\cos 2t)\,dt=(3/8)a^2\rho_0\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos 2t\,dt\right)=(3/8)a^2\rho_0\left((1/2)\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt-\right.$$

$$\left.-(1/6)\sin^3 2t\Big|_0^{\pi/2}\right)=(3/16)a^2\rho_0\left((t-(1/4)\sin 4t)\Big|_0^{\pi/2}-0\right)=$$

$$=3\pi a^2\rho_0/32\,;\quad M_y=\int_0^{\pi/2}a\cos^3 t\cdot\rho_0\cos t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt=$$

$$=3a^2\rho_0\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\sin t\,dt=3a^2\rho_0\cdot(-1/6)\cos^6 t\Big|_0^{\pi/2}=a^2\rho_0/2\,.$$

Координати центра мас:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{a^2\rho_0/2}{a\rho_0}=\frac{a}{2}\,;\quad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{3\pi a^2\rho_0/32}{a\rho_0}=\frac{3\pi a}{32}\,.\ \blacksquare$$

1.5.2. Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої області

Нехай задана матеріальна неоднорідна плоска фігура D, що має вигляд криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x) \geq 0$, знизу віссю Ox, а з боків вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, де $a < b$, причому поверхнева густина $\rho = \rho(x)$ залежить тільки від x (рис. 44). Знайдемо її масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно координатних осей Ox і Oy та координати центра мас $C(x_c; y_c)$.

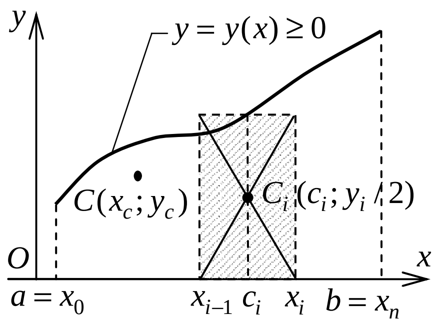

Рис. 44

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$. Через кожну точку поділу x_i, $i = \overline{1,n}$ проведемо пряму, паралельну осі Oy, і розіб'ємо криволінійну трапецію на елементарні смужки – частинні криволінійні трапеції. Смужку, що міститься між прямими $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$, наближено можна вважати однорідним прямокутником з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $y_i = y(c_i)$, де c_i – середина частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$. Площа такого прямокутника $\Delta S_i = y_i \Delta x_i$, а його маса $\Delta m_i \approx \rho(c_i)\Delta S_i = \rho(c_i) y(c_i) \Delta x_i$.

З механіки відомо, що центр мас прямокутника зі сталою поверхневою густиною $\rho = const$ знаходиться в точці перетину його діагоналей $C_i\,(c_i; y_i/2)$. Якщо припустити, що вся маса кожного частинного прямокутника зосереджена в його центрі мас C_i, то дістанемо систему матеріальних точок Δm_i, $i = \overline{1,n}$. Тоді маса m криволінійної трапеції D, її статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно осей Ox і Oy наближено визначаються співвідношеннями для такої системи:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, y_i\, \Delta x_i\ ; \quad M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot (y_i / 2) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} (y_i / 2) \rho(c_i) y_i\, \Delta x_i = (1/2) \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) y_i^2 \Delta x_i\ ;$$

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot c_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, x_i\, y_i\, \Delta x_i\ ;$$

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot (y_i / 2)^2 \approx (1/4) \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) y_i^3 \Delta x_i\ ;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \bar{x}_i^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, x_i^2\, y_i\, \Delta x_i\ .$$

Застосовуючи граничний перехід при $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, для вказаних величин одержуємо точні розрахункові формули:

$$\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\, dS = \int_a^b \rho(x) y(x)\, dx}\ ;$$

$$\boxed{M_x = (1/2) \int_a^b \rho(x) y(x)\, dS = (1/2) \int_a^b \rho(x) y^2(x)\, dx}\ ;$$

$$\boxed{M_y = \int_a^b \rho(x)\, x\, dS = \int_a^b \rho(x)\, x\, y(x)\, dx}\ ;$$

$$\boxed{I_x = (1/4) \int_a^b \rho(x) y^2(x)\, dS = (1/4) \int_a^b \rho(x) y^3(x)\, dx}\ ;$$

$$\boxed{I_y = \int_a^b \rho(x)\, x^2\, dS = \int_a^b \rho(x)\, x^2\, y(x)\, dx}\ ,$$

де $dS = y(x)\, dx$ – диференціал площі криволінійної трапеції.

Аналогічно для координат центра мас $C(x_c; y_c)$ криволінійної трапеції дістаємо формули:

$$\boxed{x_c = M_y / m}\ ; \quad \boxed{y_c = M_x / m}\ .$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо плоска область D – правильна у напрямку осі Oy (рис. 9 із п. 1.4.1. 1), тобто може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} a \le x \le b; \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases} \quad \text{де} \quad D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox,$$

а поверхнева густина $\rho = \rho(x)$ залежить тільки від x, тоді її маса m, статичні моменти M_x, M_y, моменти інерції I_x, I_y і координати центра мас $C(x_c; y_c)$ обчислюються за формулами:

$$\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx};$$

$$\boxed{M_x = (1/2)\int_a^b \rho(x)\,(y_2^2(x) - y_1^2(x))\,dx};$$

$$\boxed{M_y = \int_a^b \rho(x)\,x\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx};$$

$$\boxed{I_x = (1/4)\int_a^b \rho(x)(y_2^3(x) - y_1^3(x))\,dx};$$

$$\boxed{I_y = \int_a^b \rho(x)\,x^2\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx};$$

$$\boxed{x_c = M_y/m}; \quad \boxed{y_c = M_x/m}.$$

<u>Зауваження 2</u>. Якщо плоска область D – правильна у напрямку осі Ox (рис. 10 із п. 1.4.1 а), , тобто може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} c \le y \le d; \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases} \quad \text{де} \quad D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy,$$

а поверхнева густина $\rho = \rho(y)$ є функцією тільки змінної y, то вказані характеристики $m, M_x, M_y, I_x, I_y, x_c$, y_c обчислюються за аналогічними співвідношеннями, де змінні x та y міняються ролями. (Напишіть ці формули самостійно).

Приклад 1. Для параболічного сегмента D, який відсікає від параболи $y^2 = 6x$ пряма $x = 6$, знайти масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно осей Ox та Oy, а також координати центра мас $C(x_c, y_c)$. Поверхнева густина $\rho = \rho_0 = const$ (фігура однорідна).

□ Дана область D є правильною (в обох напрямках Ox та Oy) і однорідною. Тому задачу можна розв'язати двома способами:

а) розглядаючи область D як правильну в напрямку Oy;

б) розглядаючи область D як правильну в напрямку Ox.

Розв'яжемо задачу способом а). Відповідне подання фігури D – на рис. 45.

Обчислимо масу області D:

$$m = \int_a^b \rho(x)(y_2(x) - y_1(x))\,dx = \int_0^6 \rho_0\left(\sqrt{6x} + \sqrt{6x}\right)dx =$$

$$= 2\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{1/2}dx = 2\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/3)x^{3/2}\Big|_0^6 = 48\rho_0.$$

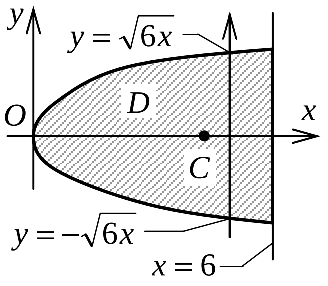

Рис. 45

Знайдемо статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас пластинки D.

По-перше, в силу однорідності й симетрії відносно осі Ox, маємо: $M_x = 0$; $y_c = 0$. Далі обчислюємо:

$$M_y = \int_a^b \rho(x)\,x(y_2(x) - y_1(x))\,dx =$$

$$= \int_0^6 \rho_0 x\left(\sqrt{6x} + \sqrt{6x}\right)dx =$$

$$= 2\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{3/2}\,dx = 2\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/5)x^{5/2}\Big|_0^6 = 864\rho_0/5;$$

$$I_x = (1/4)\int_a^b \rho(x)(y_2^3(x) - y_1^3(x))\,dx = (1/4)\int_0^6 \rho_0\left((6x)^{3/2} +\right.$$

$$\left.+(6x)^{3/2}\right)dx = 3\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{3/2}dx = 3\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/5)\,x^{5/2}\Big|_0^6 =$$

$$=1296\rho_0/5; \qquad I_y=\int_a^b \rho(x)\,x^2(y_2(x)-y_1(x))\,dx=$$

$$=\int_0^6 \rho_0 x^2\left(\sqrt{6x}+\sqrt{6x}\right)dx=2\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{5/2}dx=2\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/7)\times$$

$$\times x^{7/2}\Big|_0^6=5184\rho_0/7; \quad x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{864\rho_0/5}{48\rho_0}=\frac{18}{5}=3{,}6.$$

Способом б) розв’яжіть задачу самостійно. ■

Приклад 2. Для фігури D, розташованої у першій чверті та обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ ($a>0$, $b>0$), і осями координат, знайти масу m, статичні моменти M_x, M_y і координати центра мас $C(x_c;y_c)$. Поверхнева густина $\rho=\rho(x)=\rho_0\cdot(x/a)^{1/3}\sqrt{1-(x/a)^{2/3}}$, де $\rho_0=const>0$ (пластинка неоднорідна).

□ Область D, про яку йдеться в задачі, зображена на рис. 46 і має вигляд криволінійної трапеції, утвореної параметрично заданою дугою: $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$, $t\in[0;\pi/2]$.

Обчислимо указані характеристики, переходячи у відповідних інтегралах до параметра t.

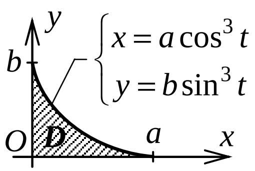

Рис. 46

Знайдемо диференціал функції $x=x(t)=a\cos^3 t$:

$$dx=x'(t)\,dt=a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\,dt=$$

$$=-3a\cos^2 t\sin t\,dt.$$

Виразимо поверхневу густину через параметр t:

$$\rho=\rho_0\cdot(a\cos^3 t:a)^{1/3}\sqrt{1-(a\cos^3 t:a)^{2/3}}=\rho_0\sin t\cos t.$$

Обчислимо масу пластинки D:

$$m=\int_a^b \rho(x)y(x)\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\rho(x(t))y(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=\int_{\pi/2}^{0}\rho_0\sin t\cos t\cdot b\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt=-3ab\rho_0\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{0}\sin^5 t\cos^2 t\cos t\,dt = \Big|\, u=\sin t;\ \ du=\cos t\,dt;\ \ \cos^2 t =$$

$$=1-\sin^2 t = 1-u^2;\ u_1=\sin(\pi/2)=1;\ \ u_2=\sin 0 = 0\,\Big| =$$

$$=-3ab\rho_0\int_1^0 u^5(1-u^2)\,du = -3ab\rho_0\int_1^0 (u^5-u^7)\,du =$$

$$=-3ab\rho_0(u^6/6-u^8/8)\Big|_1^0 = ab\rho_0/8\,.$$

Знайдемо статичні моменти і координати центра мас:

$$M_x=(1/2)\int_a^b\rho(x)y^2(x)\,dx=(1/2)\int_{t_1}^{t_2}\rho(x(t))y^2(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=(1/2)\int_{\pi/2}^{0}\rho_0\sin t\cos t\cdot(b\sin^3 t)^2\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt=$$

$$=-(3/2)\,ab^2\rho_0\int_{\pi/2}^{0}\sin^8 t\cos^2 t\cos t\,dt = \Big|\, u=\sin t;\ du=\cos t\,dt;$$

$$\cos^2 t = 1-\sin^2 t = 1-u^2;\ u_1=\sin(\pi/2)=1;\ u_2=\sin 0=0\,\Big| =$$

$$=-(3/2)\,ab^2\rho_0\int_1^0 u^8(1-u^2)\,du=-(3/2)ab^2\rho_0\times$$

$$\times\int_1^0(u^8-u^{10})\,du=-(3/2)ab^2\rho_0(u^9/9-u^{11}/11)\Big|_1^0=ab^2\rho_0/33\,;$$

$$M_y=\int_a^b\rho(x)\,x\,y(x)\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\rho(x(t))\,x(t)\,y(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=\int_{\pi/2}^{0}\rho_0\sin t\cos t\cdot(a\cos^3 t)\cdot(b\sin^3 t)\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt=$$

$$=-3a^2b\rho_0\int_{\pi/2}^{0}\sin^4 t\cos^6 t\sin t\,dt=\Big|\, u=\cos t;\ du=-\sin t\,dt;$$

$$\sin^4 t=(1-\cos^2 t)^2=(1-u^2)^2;\ u_1=\cos(\pi/2)=0;$$

$$u_2=\cos 0=1\,\Big| = 3a^2b\rho_0\int_0^1(1-u^2)^2u^6\,du=3a^2b\rho_0\times$$

$$\times\int_0^1(u^6-2u^8+u^{10})\,du=3a^2b\rho_0(u^7/7-2u^9/9+u^{11}/11)\Big|_0^1=$$

$$=8a^2b\rho_0/231;\ \ x_c=M_y\big/m=(8a^2b\rho_0/231):(ab\rho_0/8)=$$

$$= 64a/231; \quad y_c = M_x / m = (ab^2\rho_0/33):(ab\rho_0/8) = 8b/33. \ \blacksquare$$

Зауваження 3. Аналогічно за допомогою визначеного інтеграла можна знаходити інші неперервно розподілені адитивні величини, наприклад, сумарний електричний заряд.

Приклад 3. Знайти сумарний електричний заряд q, неперервно розподілений в області D, що обмежена півеліпсом $y = 3\sqrt{1-x^2/16}$, $x \in [-4;4]$ і віссю Ox. Поверхнева густина розподілу заряду $\rho = \rho(x) = \rho_0(1-x^2/16)$, де $\rho_0 = const > 0$.

□ Дана область D має вигляд криволінійної трапеції. Сумарний електричний заряд q можна знайти за формулою

$$q = \int_a^b \rho(x)\,dS = \int_a^b \rho(x)\,y(x)\,dx.$$

Проведемо обчислення:

$$q = \int_{-4}^{4} \rho_0(1-x^2/16)\cdot 3\sqrt{1-x^2/16}\,dx =$$

$$= 3\rho_0\int_{-4}^{4}(1-x^2/16)^{3/2}dx = \Big|\, x = 4\sin u;\ dx = \cos u\,du;$$

$$(1-x^2/16)^{3/2} = (1-\sin^2 u)^{3/2} = \cos^3 u;\ \ u = \arcsin(x/4);$$

$$u_1 = \arcsin(-4/4) = -\pi/2;\ \ u_2 = \arcsin(4/4) = \pi/2 \,\Big| =$$

$$= 3\rho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 u\cdot\cos u\,du = 3\rho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 u\,du = 3\rho_0\,(1/4)\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2u)^2\,du = (3/4)\rho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2\cos 2u+$$

$$+\cos^2 2u)\,du = (3/4)\rho_0\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2u\,du + (1/2)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 4u)\,du\right) = (3/4)\rho_0\left(u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \sin 2u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} +\right.$$

$$\left.+(1/2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du + (1/2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 4u\,du\right) = (3/4)\rho_0\left(\pi + 0 +\right.$$

$$\left.+(1/2)\cdot u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + (1/8)\cdot\sin 4u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = 9\pi\rho_0/2. \ \blacksquare$$

1.5.3. Робота змінної сили

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж осі Ox. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота A, виконана цією силою при переміщенні точки на відрізку $[a;b]$, обчислюється за формулою

$$\boxed{A = \int_a^b F(x)\,dx}\,.$$

<u>Приклад 1</u>. Котел, який має форму параболоїда обертання $z = x^2/9 + y^2/9$ висотою $H = 4$, до країв заповнений рідиною з густиною $\rho_0 = const$ (рис. 47). Знайти роботу A, яку необхідно виконати, щоб викачати рідину з котла.

□ Задача зводиться до обчислення роботи, яку треба виконати, щоб послідовно підняти всі частинки рідини на рівень країв котла, бо далі вона вже під дією сили тяжіння сама витікає з нього. При цьому можна вважати, що кожна частинка описує шлях, який дорівнює глибині її занурення в котлі.

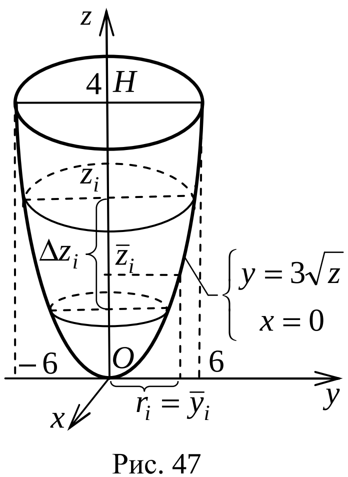

Рис. 47

Розіб’ємо загальний об’єм рідини в котлі на частини паралельними площинами $z = z_0 = 0$, $z = z_1$, …, $z = z_i$, ..., $z = z_n = H$. Позначимо i-ий крок розбиття $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. Робота ΔA_i, яку треба виконати, щоб підняти частину (шар) рідини, що знаходиться на глибині від z_{i-1} до $z_i = z_{i-1} + \Delta z_i$, наближено дорівнює

$$\Delta A_i \approx \Delta m_i\, g\,(H - \bar{z}_i)\,,$$

де g − прискорення вільного падіння; $\Delta m_i = \rho_0 \Delta V_i$ − маса частини рідини; $\Delta V_i \approx \pi \bar{r}_i^2\, \Delta z_i$ − об’єм елементарного шару рідини; $\bar{r}_i = \bar{y}_i = 3\sqrt{\bar{z}_i}$; $\bar{z}_i$ − довільна точка відрізка $[z_{i-1}; z_i]$.

Тоді загальна робота A, яку необхідно виконати, наближено визначається рівністю

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho_0\pi 9\bar{z}_i g\,(H-\bar{z}_i)\Delta z_i = 9\pi\rho_0 g\sum_{i=1}^{n}\bar{z}_i(H-\bar{z}_i)\Delta z_i \;.$$

При необмеженому здрібненні розбиття, коли $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta z_i \to 0$, дістаємо точне значення роботи A у вигляді визначеного інтеграла:

$$A=9\pi\rho_0 g\int_0^H z(H-z)\,dz = 9\pi\rho_0 g\int_0^4 z(4-z)\,dz =$$

$$=9\pi\rho_0 g(2z^2-z^3/3)\big|_0^4 = 96\pi\rho_0 g\;. \;\blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Сила F, з якою електричний заряд q_1 відштовхує однойменний заряд q_2, що знаходиться на відстані r від нього, визначається за законом Кулона $F=k\,q_1q_2/r^2$, де k − сталий коефіцієнт пропорційності. Обчислити роботу A електричної сили по переміщенню заряду q_2 від $r_1=a$ до $r_2=b$, тоді як заряд q_1 залишається нерухомим.

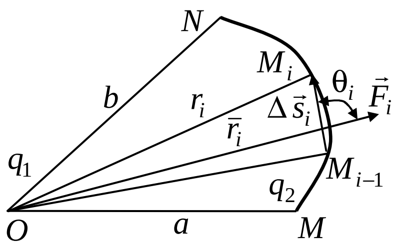

Рис. 48

□ Точку O, в якій знаходиться нерухомий заряд q_1, візьмемо за початок відліку. Нехай заряд q_2 переміщується з точки M у точку N (рис. 48). Позначимо через s пройдений зарядом q_2 на даний момент шлях – довжину пройденої частини траєкторії L_{MN}. Розіб’ємо всю траєкторію L_{MN} на n елементарних дуг $L_{M_{i-1}M_i}$, $i=\overline{1,n}$ довільно вибраними точками $M=M_0, M_1$, $M_2,\ldots,M_n=N$ при умові, що довжина пройденого шляху до них від точки M дорівнює відповідно $s_0=0$, $s_i=s_{i-1}+\Delta s_i$, $\Delta s_i>0$, $i=\overline{1,n}$. Кожна частинна дуга $L_{M_{i-1}M_i}$ має довжину Δs_i. Їй відповідає вектор переміщення $\Delta\vec{s}_i$. При переміщенні $\Delta\vec{s}_i$ від точки M_{i-1} до точки M_i відстань r між зарядами q_1 та q_2 змінюється на Δr_i: $r_i = r_{i-1} + \Delta r_i$.

На кожній елементарній дузі Δs_i силу $\vec{F}$, що діє з боку заряду q_1 на заряд q_2, можна наближено вважати сталою, рівною значенню $\vec{F}_i$ в довільній проміжній точці $\overline{M}_i$, що знаходиться на відстані $\bar{r}_i$ від заряду q_1. Тоді робота ΔA_i по переміщенню заряду q_2 на ділянці $L_{M_{i-1}M_i}$ визначається наближеною рівністю

$$\Delta A_i \approx \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i, \text{ або } \Delta A_i \approx F_i \cos\theta_i \, \Delta s_i,$$

де θ_i – кут між векторами $\vec{F}_i$ та $\Delta\vec{s}_i$.

Оскільки $\cos\theta_i \approx \Delta r_i / \Delta s_i; \quad F_i = kq_1q_2 \big/ \bar{r}_i^2$, то

$$\Delta A_k \approx (kq_1q_2 / \bar{r}_i^2) \cdot (\Delta r_i / \Delta s_i) \cdot \Delta s_i = k\, q_1q_2\, \Delta r_i / \bar{r}_i^2 .$$

Тоді вся робота A електричної сили по переміщенню заряду q_2 з точки M у точку N наближено дорівнює

$$A = \sum\nolimits_{i=1}^{n} k\, q_1q_2 \Delta r_k / \bar{r}_k^2 .$$

Переходячи до границі при $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta z_i \to 0$, отримаємо точне значення роботи A:

$$A = \lim_{\max \Delta z_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} kq_1q_2 \Delta r_k / \bar{r}_k^2 = kq_1q_2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{kq_1q_2}{r}\Bigg|_a^b =$$

$$= k\, q_1q_2 (1/a - 1/b). \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Електричний струм $I = I_0 \cos\omega t$ (I_0 – амплітуда; ω – кругова частота; t – час), який протікає в провіднику з активним опором R, здійснює роботу, що переходить у тепло. Знайти кількість тепла Q, що виділяється у цьому провіднику за період $T = 2\pi / \omega$.

□ Розіб'ємо весь період T на досить дрібні елементарні проміжки часу так, що на кожному з них силу струму I можна наближено вважати сталою, рівною її значенню в довільній проміжній точці. Для постійного струму кількість тепла ΔQ, що виділяється за елементарний проміжок часу Δt, обчислюється за законом Джоуля – Ленца: $\Delta Q = k\,I^2 R\,\Delta t$, де k − сталий коефіцієнт пропорційності. Відповідно диференціал (елемент) dQ кількості тепла, що виділяється за термін dt, визначається формулою: $dQ = k\,I^2 R\,dt$. Інтегруючи обидві частини цієї рівності, дістанемо шукану загальну кількість тепла Q:

$$Q = kR\int_0^T I^2 dt = kRI_0^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2\omega t\,dt = kRI_0^2(1/2)\int_0^{2\pi/\omega}(1+$$

$$+\cos 2\omega t)\,dt = (kRI_0^2/2)\cdot(t+(1/(2\omega))\sin 2\omega t)\Big|_0^{2\pi/\omega} = \pi kRI_0^2/\omega.$$

■

1.6. Чисельне інтегрування

При математичному моделюванні різноманітних процесів часто виникає потреба в наближених обчисленнях визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, якщо: а) підінтегральна функція $f(x)$ задана графічно, таблично чи іншим неаналітичним способом; б) первісна $F(x)$ не є елементарною функцією; в) первісна $F(x)$ хоч і є елементарною функцією, але обчислення її значень досить громіздке.

В основі ***чисельних наближених методів*** лежить подання визначеного інтеграла як границі інтегральної суми

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i,$$

звідки випливає на ближена рівність $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i}$.

Методи ***чисельного інтегрування*** різняться способами розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, вибором точок $c_i \in [x_{i-1};x_i]$

та наближень для відповідних значень $f(c_i)$ $(i=\overline{1,n})$.

Далі розглянемо найбільш прості методи, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції $f(x)\geq 0$ мають ясний геометричний зміст – наближене обчислення площі $S=\int_a^b f(x)\,dx$ відповідної криволінійної трапеції при рівномірному розбитті відрізка $[a;b]$, $a<b$ зі сталим ***кроком*** $\Delta x_i = h=(b-a)/n$, $i=\overline{1,n}$.

Формули прямокутників.

Нехай треба наближено обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, де функція $f(x)$ невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$ (рис. 49).

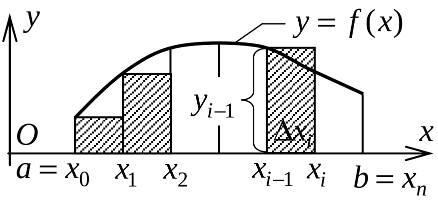

Рис. 49

Будемо спиратися на геометричний зміст інтеграла: $\int_a^b f(x)\,dx = S$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин з кроком $h=(b-a)/n$ точками $x_0=a$, $x_i=x_{i-1}+h$, $i=\overline{1,n}$.

Кожну i-ту частинну криволінійну трапецію наближено замінимо прямокутником з основою $\Delta x_i = h$ і висотою $y_{i-1}=f(x_{i-1})$, що є значенням функції $y=f(x)$ у крайній лівій точці елементарного відрізка $[x_{i-1};x_i]$. Площа цього прямокутника $\Delta S_i = y_{i-1}h$. Тоді площа S всієї криволінійної трапеції:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}h=h\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\,.$$

Маємо ***формулу лівих прямокутників*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=((b-a)/n)(y_0+y_1+...+y_{n-1})+R_n}\,,$$

де R_n – похибка.

Якщо за висоти частинних прямокутників узяти значення функції $y = f(x)$ у крайніх правих точках елементарних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$, то дістанемо ***формулу правих прямокутників***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_1 + y_2 + ... + y_n) + R_n},$$

де R_n – похибка.

Коли функція $f(x)$ монотонно зростає на відрізку $[a;b]$, то формули лівих і правих прямокутників дають наближене значення інтеграла відповідно з недостачею і з надлишком.

<u>Зауваження 1</u>. Формули прямокутників ґрунтуються на наближенні функції $f(x)$ кусково-сталою.

Якщо похідна $f'(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_0 = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_0 = |R_n| \le \Delta = ((b-a)^2/(2n))M_1},$$

де $M_1 = \max\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)|$. Тобто, похибка формул прямокутників має порядок $1/n$.

<u>Формула трапецій</u>.

Як і в попередньому пункті а), розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин. Сполучимо відрізком кінці кожної частинної дуги даної лінії $y = f(x)$, як показано на рис. 50.

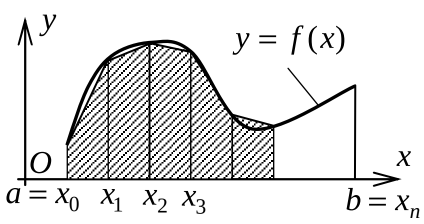

Рис. 50

Кожну i-ту частинну криволінійну трапецію наближено замінимо звичайною трапецією з висотою $\Delta x_i = h$ і основами $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ та $y_i = f(x_i)$, що має площу $\Delta S_i = (y_{i-1} + y_i)h/2$. Тоді площа S всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) h / 2 = h \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) / 2 .$$

Дістаємо ***формулу трапецій*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n) \cdot (y_0/2 + y_1 + ... + y_{n-1} + y_n/2) + R_n} ,$$

де R_n – похибка.

Зауваження 2. Формула трапецій базується на наближенні функції $f(x)$ кусково-лінійною – вписаною ламаною.

Якщо друга похідна $f''(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_0 = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_0 = |R_n| \le \Delta = ((b-a)^3/(12n^2))M_2} ,$$

де $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)|$. Тобто, похибка формули трапецій має порядок $1/n^2$.

Формула парабол (формула Симпсона).

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на парне число $n = 2m$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n$ точками $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ... , $x_{2i-1} = x_{2i-2} + h$, $x_{2i} = x_{2i-1} + h$, ... , $x_n = b$, $i = \overline{1,m}$.

Як це показано на рис. 51, дві сусідні елементарні криволінійні трапеції, що спираються на спарені відрізки $[x_{2i-2}; x_{2i-1}]$ і $[x_{2i-1}; x_{2i}]$, наближено замінимо однією криволінійною трапецією, обмеженою зверху дугою вертикальної параболи $y = A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i$. Ця парабола проходить через три верхні вершини даних частинних трапецій, що породжує лінійну алгебраїчну систему, з якої однозначно знаходяться невідомі коефіцієнти A_i, B_i, C_i:

$$A_i = (y_{2i-2} - 2y_{2i-1} + y_{2i})\big/(2h^2)\,; \quad B_i = (y_{2i} - y_{2i-2})\big/(2h)\,;$$

$$C_i = y_{2i-1}\,.$$

Тоді площа ΔS_{pi} елементарної параболічної трапеції:

$$\Delta S_{pi} = \int_{-h}^{h}\Big(A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i\Big)dx = (h/3)\times$$

$$\times(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})\,.$$

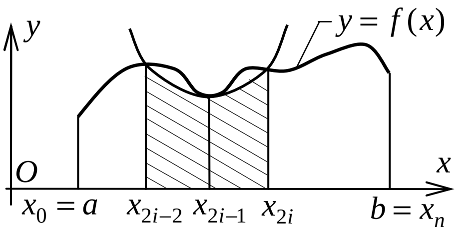

Рис. 51

Підсумовуючи ΔS_{pi} за всіма $i = \overline{1,m}$, дістаємо наближений вираз для площі S всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^{m} \Delta S_{pi} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (h/3)(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})\,.$$

Маємо ***формулу Симпсона*** (***формулу парабол***) для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/(3n))\cdot(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})) + R_n\,,\end{aligned}}$$

де R_n – похибка.

Зауваження 3. В основі формули Симпсона лежить неперервне кусково-параболічне наближення підінтегральної функції $f(x)$ вписаною лінією.

Якщо на відрізку $[a;b]$ існує обмежена четверта похідна $f^{IV}(x)$, то істинна абсолютна похибка $\Delta_0 = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою Δ так:

$$\boxed{\Delta_0 = |R_n| \le \Delta = ((b-a)^5/(180n^4))M_4},$$

де $M_4 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f^{IV}(x)|$. Тобто, похибка формули Симпсона має порядок $1/n^4$.

Зауваження 4. Усі розглянуті формули тим точніші, чим густіше розбиття: $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. При одному й тому ж значенні n формула Симпсона – найбільш точна з них.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 (x+2)^{-2} dx$, застосовуючи при $n = 4$ формули: а) лівих прямокутників, б) трапецій, в) Симпсона, . Оцінити допущені абсолютні похибки. Обчислення проводити з округленням до п’ятого десяткового знака після коми. Одержані результати порівняти з точним значенням інтеграла, обчисленим за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$I_0 = \int_0^1 (x+2)^{-2} dx = -1/(x+2)\Big|_0^1 = -1/3 + 1/2 \approx 0{,}16667.$$

□ Розіб’ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 4$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}25$, ..., $x_4 = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_4 підінтегральної функції $y = 1/(x+2)^2$, що відповідають указаним точкам, і запишемо результат у таблицю:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	0,25	0,19753	0,16	0,13223	0,11111

а) Знайдемо значення інтеграла за допомогою формули лівих прямокутників:

$$I \approx ((b-a)/4)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = ((1-0)/4)\times$$

$$\times(0{,}25 + 0{,}19753 + 0{,}16 + 0{,}13223) = 0{,}73976/4 \approx 0{,}18494.$$

Знайдемо і порівняємо граничну Δ та істинну $\Delta_0 = |I - I_0|$ абсолютні похибки.

Щоб обчислити граничну абсолютну похибку Δ, знайдемо похідну підінтегральної функції: $y' = -2/(x+2)^3$. Найбільше за модулем значення цієї похідної на відрізку $[0;1]$ дорівнює $M_1 = |y'(0)| = 0{,}25$. Тоді $\Delta = ((1-0)^2/(2\cdot 4))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}03125$.

Істинна абсолютна похибка $\Delta_0 = |0{,}18494 - 0{,}16667| \approx$ $\approx 0{,}01827$. Можемо переконатися, що істинна похибка не перевищує граничної: $\Delta_0 = 0{,}01827 < 0{,}03125 = \Delta$.

б) Обчислимо наближене значення інтеграла за формулою трапецій:

$$I \approx ((b-a)/4)\cdot(y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) = ((1-0)/4)\times$$
$$\times(0{,}25/2 + 0{,}19753 + 0{,}16 + 0{,}13223 + 0{,}11111/2) \approx 0{,}16758.$$

Знайдемо граничну Δ та істинну Δ_0 абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y''(x) = 6/(x+2)^4; \quad M_2 = |y''(0)| = 0{,}375;$$
$$\Delta = ((1-0)^3/(12\cdot 4^2))\cdot 0{,}375 \approx 0{,}00195;$$
$$\Delta_0 = |0{,}16758 - 0{,}16667| \approx 0{,}00091; \quad \Delta_0 < \Delta.$$

в) Обчислимо наближене значення визначеного інтеграла за формулою Симпсона:

$$I \approx ((b-a)/(3\cdot 4))\cdot(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) =$$
$$= ((1-0)/(3\cdot 4))\cdot(0{,}25 + 0{,}11111 + 4\cdot(0{,}19753 +$$
$$+ 0{,}13223) + 2\cdot 0{,}16) = 2{,}00015/12 \approx 0{,}16668$$

Знайдемо граничну Δ та істинну Δ_0 абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y^{IV} = 120/(x+2)^6; \quad M_4 = |y^{IV}(0)| = 1{,}875;$$
$$\Delta = ((1-0)^5/(180\cdot 4^4))\cdot 1{,}875 \approx 0{,}00004;$$

$$\Delta_0 = |\,0{,}16668 - 0{,}16667\,| \approx 0{,}00001;\quad \Delta_0 < \Delta.$$

Порівнюючи результати обчислень, можна зробити висновок, що найближче до точного значення інтеграла, як очікувалося, дає формула парабол. ■

Приклад 2. Застосовуючи формулу Симпсона, обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

□ За умовою треба знайти значення інтеграла до третього десяткового знака після коми (з точністю $\alpha = 0{,}001$). Тому обчислення будемо проводити з округленням до четвертого (запасного) знака після коми.

Продиференціюємо підінтегральну функцію $y = x^2 e^{x^2}$:

$$y' = 2e^{x^2}(x^3 + x);\quad y'' = 2e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1);$$

$$y''' = 4e^{x^2}(2x^5 + 9x^3 + 6x);\quad y^{IV} = 4e^{x^2}(4x^6 + 28x^4 + 39x^2 + 6).$$

Оскільки четверта похідна $y^{IV} > 0$ і на відрізку інтегрування $[0;1]$ її похідна (п'ята) $y^{(5)} = 8e^{x^2} x(4x^6 + 40x^4 + 105x^2 + 45) \ge 0$, то $|\,y^{IV}\,| = y^{IV}$ монотонно зростає і набуває найбільшого значення при $x = 1$:

$$M_4 = \max_{x\in[0;1]} |\,y^{IV}(x)\,| = y^{IV}(1) = 308e \approx 837{,}2308.$$

Отже, гранична абсолютна похибка:

$$\Delta = ((1-0)^5/(180n^4))M_4 \approx 4{,}6513/n^4.$$

Нерівність $\Delta \le \alpha$ розв'язуємо підбором:

$$4{,}6513/n^4 \le 0{,}001;\quad n = 10:\ 4{,}6513/10^4 < 0{,}0005 < 0{,}001;$$

$$n = 8:\ 4{,}6513/8^4 > 0{,}0011 > 0{,}001.$$

Таким чином, розіб'ємо відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 10$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, ...,

$x_{10} = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_{10} підінтегральної функції $y = x^2 e^{x^2}$ у відповідних точках і занесемо результат у таблицю:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	0	0,0101	0,0416	0,0985	0,1878	0,3210

6	7	8	9	10
0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,5160	0,7998	1,2138	1,8208	2,7183

Далі за формулою парабол знайдемо наближене значення інтеграла:

$$I \approx ((b-a)/(3\cdot 10))\cdot(y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) +$$
$$+ 2\cdot(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) = ((1-0)/30)\cdot(0 + 2{,}7183 + 4\times$$
$$\times(0{,}0101 + 0{,}0985 + 0{,}3210 + 0{,}7998 + 1{,}8208) + 2\cdot(0{,}0416 +$$
$$+ 0{,}1878 + 0{,}5160 + 1{,}2138)) = 0{,}6279 \approx 0{,}628. \;\blacksquare$$

1.7. Контрольні запитання

1. Яка функція служить первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
5. У чому полягає спосіб безпосереднього інтегрування?
6. У яких двох формах реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?
7. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Коли доречно застосовувати цей метод?
8. Наведіть типові випадки застосування інтегрування частинами і дайте відповідні рекомендації щодо вибору u.

9. Наведіть стандартний вигляд многочлена $P_n(x)$ n-го степеня.
10. Як розкладається многочлен з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники?
11. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
12. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
13. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
14. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
15. Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів і методу окремих значень? Дайте рекомендації щодо їх застосування.
16. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
17. Як інтегруються правильні раціональні дроби у наступних випадках: а) корені знаменника дійсні й прості; б) корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?
18. Як за допомогою підстановок інтеграли з лінійними ірраціональностями зводяться до інтегралів від раціональних функцій?
19. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \cos ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$?
20. У чому полягає універсальна тригонометрична підстановка?
21. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int R(\sin x)\cos x \, dx$, $\int R(\cos x)\sin x \, dx$, $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\, dx$, $\int R(tg\, x)\, dx$, $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, де R – знак раціональної функції?
22. Як за допомогою тригонометричних підстановок інтегруються вирази, що містять квадратний корінь із суми чи різниці квадратів?
23. Наведіть приклади інтегралів, що “не беруться”.
24. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний і фізичний зміст?

25. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?
26. Сформулюйте необхідну умову інтегровності функції.
27. У чому полягає достатня умова інтегровності?
28. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
29. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
30. Якою подвійною нерівністю задається оцінка визначеного інтеграла?
31. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку? Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
32. Що таке визначений інтеграл зі змінною верхньою межею?
33. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
34. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
35. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
36. Що таке невласний інтеграл від необмеженої функції? У чому полягає його геометричний зміст?
37. Сформулюйте ознаки збіжності невласних інтегралів з нескінченною верхньою межею.
38. Наведіть дві основні схеми застосування визначеного інтеграла.
39. Що таке область? Замкнена область? Обмежена область?
40. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy? Осі Ox? Просто правильною?
41. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy області? Правильної в напрямку осі Ox області?
42. Як знаходиться площа криволінійного сектора в полярних координатах?
43. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку координатних променів полярної системи координат? Як знаходиться площа такої області?
44. Як знаходиться довжина дуги плоскої лінії у випадку, коли: а) лінія задана явно в прямокутних координатах; б) лінія задана параметрично в прямокутних координатах; в) лінія задана в полярних координатах?
45. Що таке кривина плоскої лінії? Як вона обчислюється?

46. Що таке коло, центр і радіус кривини?
47. Що називається вершиною плоскої кривої?
48. Як знаходиться об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів?
49. Як знаходиться об'єм тіла обертання?
50. Як знаходиться площа поверхні обертання?
51. Як знаходяться маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги?
52. Як знаходяться маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої області?
53. Як обчислюється робота змінної сили?
54. Коли виникає потреба в чисельному інтегруванні? Наведіть формули лівих і правих прямокутників, трапецій, Симпсона наближеного обчислення визначеного інтеграла.

1.8. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли і одержані результати перевірити диференціюванням:

№ в-та	Завдання 1)	Завдання 2)
1	$\int \frac{(2x+7)dx}{x(x^2-6x+5)}$	$\int x^3 \ln^2 x dx$
2	$\int \frac{(2x^2+5)dx}{x(x^2+2x-8)}$	$\int x^2 \cos 4x\, dx$
3	$\int \frac{(3x^2-7)dx}{(x^2-5x+6)x}$	$\int x^2 \, arctg\, 3x\, dx$
4	$\int \frac{(2x^2+3)\, dx}{(x-1)(x^2-5x+4)}$	$\int (x-1)\ln^2 x dx$
5	$\int \frac{(3x^2-2)dx}{x(x^2+4x-12)}$	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

6	$\int\frac{(3x^2+5x)dx}{(x+1)(x^2-4x+8)}$	$\int x^2\cdot 5^{2x}dx$
7	$\int\frac{(4x^2-5)dx}{(x+4)(x^2+x-12)}$	$\int x^2\sin 6x\,dx$
8	$\int\frac{(5x+4)dx}{(x-2)(x^2+x-6)}$	$\int(x^2+2)e^{-x/2}dx$
9	$\int\frac{(3x^2-2)dx}{(x-2)(x^2-2x+10)}$	$\int x\,arctg\frac{x}{4}dx$
10	$\int\frac{(6x+5)dx}{(x+1)(x^2-2x-3)}$	$\int x^2\cdot 10^{3x}dx$
11	$\int\frac{(3x^2+7)dx}{(x-2)(x^2-4x+5)}$	$\int x^2\cdot\cos\frac{x}{3}dx$
12	$\int\frac{(4x^2+3x)dx}{(x+2)(x^2-6x+8)}$	$\int\frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}dx$
13	$\int\frac{(2x^2-9x)dx}{(x-3)(x^2-6x+10)}$	$\int x\,arctg\frac{x}{2}dx$
14	$\int\frac{(3x^2-7)dx}{(x+1)(x^2-4x+8)}$	$\int\arcsin\frac{x}{2}dx$
15	$\int\frac{(4x^2+7x)dx}{(x-1)(x^2+10x+26)}$	$\int x^5\ln^2 xdx$
16	$\int\frac{(2x^2-5)dx}{(x+2)(x^2+2x+10)}$	$\int(x^2-6x)e^{-3x}dx$
17	$\int\frac{(2x^2-3x)dx}{(x-3)(x^2+3x-4)}$	$\int\cos 4x\cdot\cos 8x\,dx$
18	$\int\frac{(3x^2-4)dx}{(x+2)(x^2+8x+17)}$	$\int x^{-4}\ln^2 xdx$

19	$\int \frac{(4x^2+x)dx}{(x+3)(x^2-2x+5)}$	$\int x \arcsin 4x\, dx$
20	$\int \frac{(4x^2-5)dx}{(x+2)(x^2+5x+4)}$	$\int (x^2-3)e^{-x} dx$
21	$\int \frac{(3x^2+4)dx}{x(x^2+5x-6)}$	$\int \sqrt{x^3} \ln^2 x dx$
22	$\int \frac{(4x^2-1)dx}{(x\_1)(x^2+2x+26)}$	$\int (x+1)\ arctg\ x\ dx$
23	$\int \frac{(5x+2)dx}{x(x^2-7x+6)}$	$\int (2x^2-1)e^{-2x} dx$
24	$\int \frac{(3x^2-x)dx}{(x+1)(x^2-8x+20)}$	$\int arctg \frac{x}{3}\ dx$
25	$\int \frac{(x^2+5x)dx}{(x-2)(x^2-6x+5)}$	$\int x^2 \cdot \sin \frac{x}{2}\ dx$
26	$\int \frac{(2x^2-7x)dx}{(x+2)(x^2-3x-10)}$	$\int (x^2-4x)e^{-3x} dx$
27	$\int \frac{(3x^2+7x)dx}{(x-1)(x^2-4x+3)}$	$\int \sin 2x \cdot \cos 8x\, dx$
28	$\int \frac{(4x^2-3)dx}{(x-3)(x^2-6x+25)}$	$\int x^2 e^{-3x} dx$
29	$\int \frac{(4x^2-7x)dx}{(x+2)(x^2+4x+13)}$	$\int (x^2-5)\cos \frac{x}{2} dx$
30	$\int \frac{(2x^2+7x)\ dx}{(x+2)(x^2+8x+25)}$	$\int \sin 2x \cdot \sin 6x\, dx$

Завдання 2. Обчислити визначені інтеграли:

№ в-та	Завдання 1)	Завдання 2)
1	$\int_3^4 x\ln(x-2)\,dx$	$\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$
2	$\int_0^2 x^2 e^{-2x}dx$	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$
3	$\int_1^e x^3 \ln^2 x\ dx$	$\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x\,dx$
4	$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\ dx$	$\int_0^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$
5	$\int_0^1 x^3\, arctg\, x\, dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$
6	$\int_{3/2}^2 arctg(2x-3)\,dx$	$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$
7	$\int_1^2 (x-1)\ln^2 x\,dx$	$\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$
8	$\int_{1/4}^1 x\arcsin\sqrt{x}\,dx$	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$
9	$\int_1^3 \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{3+2\sin x}\,dx$
10	$\int_0^1 (4x^2+1)e^{-2x}dx$	$\int_3^{10} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$
11	$\int_1^2 \ln\frac{x-1}{x}dx$	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$

12	$\int_{1/4}^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$	$\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$
13	$\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$	$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$
14	$\int_{0}^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$	$\int_{0}^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$
15	$\int_{0}^{1} (x^2+6x)e^{-4x}dx$	$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$
16	$\int_{0}^{\pi} (x^2+\pi)\cos\frac{x}{2}\,dx$	$\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$
17	$\int_{-1/2}^{1/2} x\arccos 2x\,dx$	$\int_{0}^{\pi/4} \sin^5 x\,dx$
18	$\int_{1}^{4} \ln(x+2)\,dx$	$\int_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{3+\cos x}$
19	$\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^{2x}dx$	$\int_{0}^{\pi/4} \sin^4\frac{x}{2}\,dx$
20	$\int_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)\,dx$	$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$
21	$\int_{0}^{\pi/8} x^2\sin 4x\,dx$	$\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$
22	$\int_{0}^{1} (x^2-8x)e^{3x}dx$	$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^4dx}{(4-x^2)^{3/2}}$
23	$\int_{1}^{3} arctg\sqrt{x}\,dx$	$\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

24	$\int_1^e (x-e)\ln^2 x\,dx$	$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^4 x\,dx$
25	$\int_1^3 x\, arctg\sqrt{x}\,dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$
26	$\int_0^1 (2x^2-1)e^{x/2}dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{5+4\sin x}$
27	$\int_1^2 x\ln\frac{x-1}{x}dx$	$\int_0^{2arctg(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$
28	$\int_0^1 \frac{arctg\,x}{(1+x)^2}\,dx$	$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$
29	$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$	$\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}dx$
30	$\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx$	$\int_0^{\pi/8} \cos^4 x\,dx$

Завдання 3. Користуючись визначеним інтегралом, знайти довжину заданої дуги L плоскої лінії:

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\rho = 6\cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/3)$	16	$\rho = 4(1-\sin\varphi)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$
2	$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$	17	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$
3	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$	18	$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\,arctg\,t \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$

4	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$	19	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$
5	$y = 2 - e^x$ $(\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8})$	20	$\rho = 6\cos^3(\varphi/3)$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$
6	$y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$ $(1/4 \le x \le 1)$	21	$y = \ln x$ $(\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15})$
7	$y = \ln(x + (x^2 - 1)^{1/2})$ $(5/4 \le x \le 5/3)$	22	$y = -\ln\cos x$ $(0 \le x \le \pi/6)$
8	$y = (x^2 - 2\ln x)/4$ $(1 \le x \le 2)$	23	$\rho = 2\sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le 2\pi/3)$
9	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/3)$	24	$y = \ln(x^2 - 1)$ $(2 \le x \le 3)$
10	$\rho = 4e^{3\varphi/4}$ $(\pi/4 \le \varphi \le \pi/2)$	25	$y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ $(1 \le x \le 2)$
11	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ $(0 \le x \le 7/9)$	26	$y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ $(-2 \le x \le 2)$
12	$y = (2/3)(x - 1)^{3/2}$, $1 \le x \le 9$	27	$y = 2\ln(x^2/4 - 1)$ $(3 \le x \le 4)$
13	$\rho = 4e^{4\varphi/3}$ $(\pi/4 \le \varphi \le \pi/2)$	28	$\rho = 4\sin^3(\varphi/3)$ $(0 \le \varphi \le 3\pi/2)$
14	$y = 4 + \ln\cos x$ $(0 \le x \le \pi/3)$	29	$\rho = 6e^{5\varphi/12}$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$
15	$y = \ln\sin x$ $(\pi/6 \le x \le \pi/2)$	30	$\rho = 4(1 - \cos\varphi)$ $(\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2)$

Завдання 4. Плоска область D задана рівняннями ліній, що її обмежують. Необхідно:

1) Зобразити область D у декартовій прямокутній системі координат Oxy.

2) Подати область D як правильну в напрямку осі Oy, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити площу плоскої області D, застосовуючи визначений інтеграл по x.

3) Подати область D як правильну в напрямку осі Ox, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити площу плоскої області D, застосовуючи визначений інтеграл по y.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y = x^2 - 4x + 3;$ $y = -x + 1$	16	$y = (2/3)\,x^2;$ $y = 2x^2 - 4x$
2	$y = (x-2)^2;$ $y = 4x - 8$	17	$x + y = 2;$ $y = \sqrt{x};$ $y = 0$
3	$xy = 4;$ $x - y = 0;$ $y = 4$	18	$y = (x+1)^2;$ $y^2 = x + 1$
4	$y = \sqrt{1 - x^2};$ $x = y + 1;$ $y = 1$	19	$y = -x^2 - 6x + 7;$ $y = -x - 1$
5	$y = x^2 - 3x + 1;$ $y = x - 2$	20	$y = 2x - x^2 + 3;$ $y = x^2 - 4x + 3$
6	$x = (y-2)^2;$ $x = 4y - 8$	21	$x = 4 - y^2;$ $x = y^2 - y$
7	$y^2 = 4 - x;$ $x + 3y = 0$	22	$y = 4 - x;$ $y = 0;$ $x = \sqrt{2y}$
8	$x = 4 - y^2;$ $y = x - 2$	23	$y = 4 - x^2;$ $y = x^2 - 2x$

9	$y=(x-1)^2$; $y^2=x-1$	24	$y=x^2$; $y=2-x$
10	$y^2=2x+1$; $x-y-1=0$	25	$x=4-(y-1)^2$; $x=y^2-4x+3$
11	$x=y^2-4$; $y=-x-2$	26	$y=x^2+4x$; $y=3x+6$
12	$y=(2/3)\,x^2$; $y=-2x^2+8x$	27	$xy=6;\ x=6$; $y=x-1$
13	$xy=4;\ y=5-x$	28	$y=4-x^2;\ \ y=x+2$
14	$x+y=2$; $y=x^3;\ y=0$	29	$y=-x^2+2x+2$; $y=-x-2$
15	$y=x^2+4x$; $y=x+4$	30	$y=x^2/2$; $xy=4;\ x=4$

Завдання 5. Користуючись визначеним інтегралом, знайти об'єм тіла V, отриманого обертанням навколо координатної осі Ox заданої плоскої області D, що обмежена указаними лініями.

Зробити рисунок плоскої області D у декартовій прямокутній системі координат Oxy на площині та рисунок тіла обертання V у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ у просторі.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y=-x^2+5x-6;\ \ y=0$	16	$y=2x-x^2,\ \ y=-x+2$
2	$x^2+(y-2)^2=4$	17	$y=x^2;\ \ y^2-x=0$
3	$y=\sin^2 x;\ \ y=0$; $0\le x\le \pi/2$	18	$y=4-x^2$; $y=\sqrt{4-x^2}$
4	$y=2x-x^2$; $y=4x-2x^2$	19	$y=x^3$; $y=\sqrt{x}$

5	$y=\cos^2 x$; $y=0$; $0\le x\le \pi/2$	20	$y=\sin^{3/2} x$; $y=0$; $0\le x\le \pi$
6	$y=2x-x^2$; $y=1$; $y=\sqrt{-x}$	21	$y=1-x^2$; $y=1$; $x=1$
7	$y=e^x$; $y=xe^x$; $x=0$	22	$y^2=(4-x)^3$; $x=0$
8	$xy=4$, $y=x$, $x=4$	23	$y=2-x^2$, $y=x^2$
9	$x=\sqrt{4-3y^2}$; $y=x^2$; $y=0$	24	$y=x^2+1$; $x=1$; $y=\sqrt{1-x^2}$
10	$y=\sqrt{x-1}$; $y=1$; $x=1$	25	$y=\ln x$; $y=0$; $x=e^2$
11	$y=(x-1)^2$; $y=1$	26	$y=x^2$; $y=\sqrt{2-x^2}$
12	$y=x^3$; $y=2-x$; $x=0$	27	$y=(x-1)^2$; $x=2$; $y=0$
13	$y=9-2x$; $x=\sqrt{3y}$; $y=0$	28	$y=4+x^2$; $x=0$; $y=x^3$
14	$y=2-x^2$; $x=0$; $y=x^{3/2}$	29	$y=x^3$; $y=\sqrt{2-x}$; $x=0$
15	$y=1-x^2$; $x=1$; $y=1+x^2$	30	$y=\sqrt{2-x^2}$; $y=x^3$; $x=0$

Завдання 6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням заданої дуги навколо осі Ox:

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y=3(e^{x/6}+e^{-x/6})$; $0\le x\le 6$	16	$y=2\sqrt{x-1}$; $4\le x\le 9$
2	$y=3\sqrt{x}$; $4\le x\le 18$	17	$y=(e^{2x}+e^{-2x})/4$; $0\le x\le 1/2$

3	$y=\sqrt{4-x^2}$; $0\le x\le 2$	18	$y=(1/9)(x-27)\sqrt{x}$; $3\le x\le 6$
4	$y=\sqrt{3x}$; $1/4\le x\le 3/2$	19	$y=\sqrt{8x-x^2}$; $0\le x\le 4$
5	$y=\sqrt{4-2x^2}$; $0\le x\le 1$	20	$y=\sqrt{16-3x^2}$; $0\le x\le 2$
6	$y=(1/2)\sqrt{4-x^2}$; $1\le x\le 2$	21	$y=2\sqrt{1-x^2}$; $0\le x\le 1$
7	$y=x^3/12$; $0\le x\le \sqrt{3}$	22	$y=\sqrt{x(6-x)}$; $0\le x\le 3$
8	$y=\sqrt{x(12-x)}$; $0\le x\le 6$	23	$y=e^{x/2}+e^{-x/2}$; $0\le x\le 2$
9	$y=\sqrt{x(x-1/3)}$; $1/3\le x\le 1$	24	$y=2\sqrt{12-x^2}$; $0\le x\le 2$
10	$y=(1/2)\sqrt{12-3x^2}$; $0\le x\le 2$	25	$y=2\sqrt{9-x^2}$; $-3\le x\le 0$
11	$y=(1/2)\sqrt{3-x^2}$; $0\le x\le 1$	26	$y=(1/3)(x-3)\sqrt{x}$; $1\le x\le 3$
12	$y=4x^3/3$; $0\le x\le 1/\sqrt{3}$	27	$y=2\sqrt{9-x^2/3}$; $0\le x\le 3\sqrt{3}$
13	$y=2(e^{x/4}+e^{-x/4})$; $0\le x\le 4$	28	$y=x^3/9$; $0\le x\le 2$
14	$y=\sqrt{2x}$; $4\le x\le 18$	29	$y=(1/6)(12-x)\sqrt{x}$; $3\le x\le 6$
15	$y=2\sqrt{4+x}$; $4\le x\le 11$	30	$y=x^3/3$; $0\le x\le 1$

Завдання 7. Користуючись означенням, обчислити невласний інтеграл чи встановити його розбіжність:

№ в-та	Завдання 1)	Завдання 2)
1	$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^2}$	$\int\limits_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$
2	$\int\limits_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8}$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{x^5-1}}$
3	$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	$\int\limits_{3}^{6} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-9}}$
4	$\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{(1+9x^2)\sqrt{arctg 3x}}$	$\int\limits_{0}^{1/5} \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$
5	$\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$	$\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x\,dx}{1-2\cos x}$
7	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$	$\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$
8	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	$\int\limits_{0}^{\pi/16} \frac{dx}{\sin^2 4x}$
9	$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{(2x-e)\ln(2x-e)}$	$\int\limits_{0}^{3} \frac{x\,dx}{9-x^2}$
10	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$	$\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\,(\ln x)^{4/3}}$
11	$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x}$	$\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt{\cos 3x}}$

12	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$	$\int_{0}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{27-x^3}}$
13	$\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}$	$\int_{0}^{\pi/8} \frac{\cos 4x\,dx}{\sqrt{\sin 4x}}$
14	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$	$\int_{-1}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{8-x^3}}$
15	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+25)^{3/2}}$	$\int_{2}^{\sqrt{5}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-16}}$
16	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$	$\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
17	$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x\,dx$	$\int_{-2}^{0} \frac{x^2dx}{(x^3+8)^2}$
18	$\int_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$	$\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$
19	$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^x}$	$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$
20	$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x-1)}$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
21	$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$	$\int_{0}^{2} x^{-2}e^{-2/x}dx$
22	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$	$\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$
23	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$	$\int_{1}^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
24	$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x}$

25	$\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$	$\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}}$
26	$\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$	$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x\,dx}{2\sin x-1}$
27	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$	$\int\limits_{0}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}}$
28	$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}\cos x\,dx$	$\int\limits_{0}^{\pi/6}ctg\,3x\,dx$
29	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+3e^2}}$	$\int\limits_{0}^{1}\frac{\arcsin^3 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
30	$\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{\ln^2 x\;dx}{x}$	$\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x(\ln x)^{3/4}}$

Завдання 8. Знайти наближено заданий визначений інтеграл $I=\int_a^b f(x)\,dx$ указаними способами, розбиваючи відрізок інтегрування $[a;b]$ на $n=10$ рівних частин. Для кожного методу знайти істинну абсолютну похибку $\Delta_0=|I-I_0|$, де I_0 – точне значення інтеграла, обчислене за формулою Ньютона – Лейбниця. Усі обчислення проводити з округленням до четвертого десяткового знака після коми.

У варіантах №1, 4, 7, ..., 28 використати формули лівих прямокутників і трапецій. У варіантах №2, 5, 8, ..., 29 – формули правих прямокутників і парабол. У варіантах №3, 6, 9, ..., 30 – формули трапецій і парабол.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3\,dx}{(x^4+9)^{1/2}}$	16	$\int\limits_{0}^{10}\frac{15x^2\,dx}{(x^3+225)^{3/2}}$
2	$\int\limits_{0}^{2}\frac{3x^2\,dx}{(x^3+1)^{3/2}}$	17	$\int\limits_{2}^{3}\frac{2x\,dx}{x^4-1}$

3	$\int_{-1}^{2} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$	18	$\int_{-3}^{0} x^2\sqrt{x^3+36}\,dx$
4	$\int_{0}^{2} (2x^2-8)^{1/3}x\,dx$	19	$\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx$
5	$\int_{1}^{3} \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^3+3x}}$	20	$\int_{1}^{8} \frac{(3x^2+8)\,dx}{\sqrt{x^3+8x}}$
6	$\int_{1}^{5} \frac{(2x+15)\,dx}{x^2+15x}$	21	$\int_{0}^{1} \frac{6x^2\,dx}{x^6+1}$
7	$\int_{0}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$	22	$\int_{0}^{2} \frac{x^4dx}{\sqrt{x^5+4}}$
8	$\int_{-3}^{0} (x^3+27)^{1/3}x^2\,dx$	23	$\int_{-2}^{3} x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$
9	$\int_{0}^{1} \frac{6x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$	24	$\int_{0}^{2} \frac{3x^2\,dx}{(3x^3+1)^{3/2}}$
10	$\int_{1}^{2} (x^3-9)^{1/3}x^2\,dx$	25	$\int_{0}^{3} x\sqrt{x^2+16}\,dx$
11	$\int_{0}^{2} x^3\sqrt{x^4+9}\,dx$	26	$\int_{-2}^{0} (x^3+8)^{1/3}x^2\,dx$
12	$\int_{1}^{2} \frac{(9x^2-2)\,dx}{(3x^3-2x+7)^{1/3}}$	27	$\int_{1}^{2} \frac{(3x^2+2)\,dx}{x^3+2x-2}$
13	$\int_{0}^{2} \frac{3x^2\,dx}{(9+2x^3)^{1/2}}$	28	$\int_{2}^{4} \frac{(x-1)\,dx}{(x^2-2x+8)^{1/3}}$
14	$\int_{0}^{1} \frac{6x^2dx}{\sqrt{4-x^6}}$	29	$\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+8}}$
15	$\int_{0}^{3} (x^2-1)^{1/3}x\,dx$	30	$\int_{0}^{1} 4x^3(x^8+1)^{-1}\,dx$

Змістовий модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2.1. Загальні поняття про диференціальні рівняння

2.1.1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

При вивченні різноманітних явищ в науці, техніці та інших сферах часто не вдається безпосередньо встановити функціональну залежність між значеннями шуканих і відомих величин, проте можливо виявити зв'язки між нескінченно малими приростами (диференціалами) змінних, що фігурують у задачі. Диференціальні зв'язки завдяки лінеаризації, як правило, суттєво простіші скінченних. Крім того, результати спостережень чи експериментів часто подаються в диференціальній формі. Тому для моделювання неперервних динамічних процесів широко використовуються диференціальні та інші споріднені з ними рівняння. Наведемо декілька прикладів подібних задач.

<u>Задача 1</u>. Тіло масою m падає з деякої висоти. Потрібно встановити закон $v = v(t)$ зміни швидкості v з бігом часу t, якщо на тіло діють сила тяжіння $F_1 = mg$ (g − прискорення вільного падіння) і гальмуюча сила опору повітря $F_2 = -kv$, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $k > 0$). За другим законом Ньютона $ma = F$, де $a = dv/dt$ − прискорення рухомого тіла, а $F = F_1 + F_2 = mg - kv$ − рівнодійна сил, діючих на тіло. Отже, $dv/dt = mg - kv$. Одержано диференціальне рівняння відносно невідомої функції $v = v(t)$.

<u>Задача 2</u>. Розглянемо явище радіоактивного розпаду. Відомо, що швидкість (інтенсивність) розпаду m' прямо пропорційна масі m наявної радіоактивної речовини. Таку закономірність описує диференціальне рівняння $m' = -km$ або $dm/dt = -km$, де k − додатна стала розпаду; t − час. Знак мінус перед k вказує на зменшення маси радіоактивної речовини. Розв'язок рівняння $m(t) = m_0 e^{-kt}$ дає зміну маси m з часом t. Тут m_0 − початкова маса речовини.

Аналогічне диференціальне рівняння моделює процес затухання сили струму в контурі, що складається з послідовно сполучених активного опору та індуктивності, при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою і закороченні.

Задача 3. Нехай ведеться виборча компанія. У початковий момент часу $t_0 = 0$ агітаційну інформацію про кандидата A мають x_0 громадян, загальна кількість яких дорівнює X. Далі ця інформація поширюється через спілкування людей між собою. Припустимо, що швидкість цього процесу dx/dt (зростання числа громадян $x = x(t)$, ознайомлених з даною інформацією за час t) прямо пропорційна як числу x вже проінформованих на даний момент t людей, так і числу $X - x$ громадян, ще не охоплених агітацією. Тоді приходимо до диференціального рівняння $dx/dt = kx(X - x)$, де k − додатний сталий коефіцієнт пропорційності. Розв'язком цього рівняння служить *логістична крива* $x = X\Big/\left(1 + (X/x_0 - 1)\,e^{-Xkt}\right)$.

Подібне диференціальне рівняння моделює поширення технічних нововведень, зростання популяції певного виду тварин та інші процеси.

2.1.2. Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної x, то диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

Диференціальне рівняння n***–го порядку*** зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', \ldots, \; y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали).

Диференціальне рівняння n–го порядку можна подати в ***за-***

гальному вигляді

$$\boxed{F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0},$$

де $y = y(x)$ – шукана функція. Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну x, саму шукану функцію y та її похідні нижчих порядків $y', y'', ..., y^{(n-1)}$, але до нього обов'язково повинна входити n-а похідна $y^{(n)}$.

Це неявна форма запису ДР. Розв'язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо ***канонічний*** (***нормальний***) ***вигляд*** ДР

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)}.$$

Наприклад, $y'''+5(y')^4 - \sqrt{y} - 2e^x = 0$ – ДР третього порядку, подане у загальній (неявній) формі; $y^{(6)} = y''' - 4x(y')^8$ – ДР шостого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної $y = F(x)$ для даної функції $f(x)$ породжує найпростіше диференціальне рівняння $y' = f(x)$, розв'язування якого зводиться до інтегрування.

Розв'язком диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв'язку ДР називається ***інтегральною кривою***.

Зауваження 1. Розв'язок ДР n–го порядку є n разів диференційовною функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою лінією.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його ***інтегруванням***.

Зауваження 2. Розв'язок ДР, записаний ***у неявній формі***, часто називають ***інтегралом*** диференціального рівняння.

Зауваження 3. Розв'язок ДР також може подаватися ***в параметричній формі***.

Зауваження 4. Диференціальне рівняння вважається ***розв'язаним***, якщо множина його розв'язків задається співвідношеннями без диференціювання, що можуть включати операції інтегрування відомих функцій. Серед вказаних інтегралів допускаються й ті, що не виражаються через елементарні функції у скінченному вигляді. Як правило, будемо намагатися знаходити розв'язок ДР у найбільш простій явній формі та обчислювати всі наявні інтеграли.

Приклад 1. Перевірити, чи служить явно задана функція $y = C_1 + C_2 e^{10x} - x^3/30 - x^2/100 - x/500$, де C_1, C_2 − довільні сталі, розв'язком диференціального рівняння $y'' - 10y' = x^2$.

□ Диференціюючи вказану функцію, знайдемо

$$y' = 10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - 1/500;$$

$$y'' = 100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50.$$

Підставимо функцію та її похідні у рівняння:

$$100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50 - 10\left(10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - \right.$$

$$\left. - 1/500\right) = x^2;\ \ 100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50 -$$

$$-100C_2 e^{10x} + x^2 + x/5 + 1/50 = x^2;\ \ x^2 = x^2.$$

Оскільки тотожність вірна, то вказана функція є розв'язком заданого ДР. ■

Приклад 2. Перевірити, що функція $y = y(x, C)$, яка задана в неявному вигляді співвідношенням $-x^2/(2y^2) = \ln|Cy|$, де C − довільна стала, служить розв'язком диференціального рівняння $dy/dx = xy/(x^2 - y^2)$.

□ Знайдемо похідну неявно заданої функції:

$$\left(-x^2/(2y^2)\right)' = \left(\ln|Cy|\right)';\ \ -\frac{1}{2}\cdot\frac{2xy^2 - 2x^2 y y'}{y^4} = \frac{Cy'}{Cy};$$

$$\frac{-xy + x^2 y'}{y^3} = \frac{y'}{y};\quad -xy + x^2 y' = y^2 y';\ y' = xy/(x^2 - y^2).$$

Підстановка отриманого виразу в ДР дає вірну тотожність

$$xy/(x^2 - y^2) = xy/(x^2 - y^2).$$

Отже, вказана функція є розв'язком заданого ДР. ■

Приклад 3. Перевірити, що функція $y = y(x, C)$, яка задана параметрично співвідношеннями $x = C\cos t$ і $y = C^3\sin^3 t$, де C − довільна стала, служить розв'язком диференціального рівняння $(y')^3 + 27x^3 y = 0$.

□ Знайдемо похідну параметрично заданої функції:

$$x_t' = -C\sin t; \quad y_t' = 3C^3\sin^2 t\cos t;$$

$$y_x' = y_t'/x_t' = -3C^2\sin t\cos t.$$

Підставимо функцію та її похідну в рівняння:

$$(-3C^2\sin t\cos t)^3 + 27(C\cos t)^3 C^3\sin^3 t = 0; \quad 0 = 0.$$

Отже, вказана функція є розв'язком заданого ДР. ■

Щоб знайти шукану функцію з ДР n-го порядку, треба в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку є функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. При цьому через кожну внутрішню точку області визначення сім'ї проходить єдина інтегральна крива.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: частинному розв'язку відповідає конкретний екземпляр з сім'ї інтегральних ліній.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2$. Вказати три його частинні розв'язки.

□ $dy/dx = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$; $y = 3\int x^2 dx = x^2 + C$.

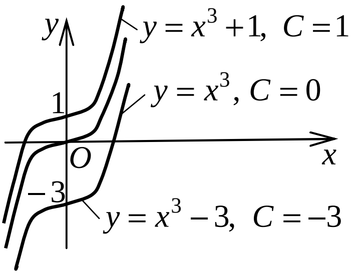

Рис. 52

Отже, $y = x^3 + C$ − загальний розв'язок. Геометрично йому відповідає однопараметрична сім'я інтегральних кривих. Поклавши послідовно $C = -3$, $C = 0$ і $C = 1$, отримаємо три частинні розв'язки, зображені на рис. 52. ■

2.1.3. Початкові та крайові умови. Задача Коші та крайова задача

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

2) ***крайові*** (***граничні***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих.

Для ДР n-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';...;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ − відомі числа (початкові дані).

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

<u>Приклад 1</u>. Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):

$$y'' = e^{-x/2};\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = 1.$$

□ Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y' = \int e^{-x/2}dx;\quad y' = -2e^{-x/2} + C_1;$$

$$y=\int(-2e^{-x/2}+C_1)\,dx; \quad y=4e^{-x/2}+C_1x+C_2.$$

В одержаний загальний розв’язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$-1=4e^0+C_1\cdot 0+C_2;\ 1=-2\,e^0+C_1;\ \ C_1=3,\ C_2=-5.$$

Тоді частинний розв’язок рівняння (розв'язок задачі Коші):

$$y_K=4e^{-x/2}+3x-5. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Розв’язати крайову задачу (знайти частинний розв’язок заданого ДР, що задовольняє вказаним граничним умовам):

$$y''=6x; \quad y(0)=3; \ y'(1)=-1.$$

□ Знайдемо загальний розв’язок рівняння:

$$y'=6\int x\,dx; \ \ y'=3x^2+C_1; \ \ y=\int(3x^2+C_1)\,dx;$$

$$y=x^3+C_1x+C_2.$$

В отриманий загальний розв’язок та його першу похідну підставимо задані крайові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$3=0+C_1\cdot 0+C_2;\ -1=3\cdot 1+C_1;\ \ C_1=-4,\ C_2=3.$$

Звідси частинний розв’язок (розв'язок крайової задачі):

$$y_b=x^3-4x+3. \ \blacksquare$$

Зауваження 1. У диференціального рівняння можуть існувати так звані ***особливі розв’язки***, які неможливо одержати із загального розв’язку ні при яких значеннях довільних сталих. Геометрично особлива інтегральна крива не входить у сім’ю, що відповідає загальному розв’язку, а тому не може лежати всередині області існування цієї сім’ї.

Наприклад, нехай маємо рівняння $y'=y^{2/3}$. При $y\neq 0$ отримаємо: $y^{-2/3}y'=1$; $(3y^{1/3})'=1$; $3y^{1/3}=x+C$. Звідси $y=(1/27)(x+C)^3$ − загальний розв’язок. Але розв’язок $y(x)\equiv 0$ у нього не входить і тому є особливим.

Зауваження 2. У деяких випадках виникає обернена задача знаходження ДР, що описує задану сім’ю інтегральних кривих.

Приклад 3. Знайти ДР першого порядку, загальний розв'язок якого $y = C\sin x - x^2$, де C − довільна стала.

□ Продиференціюємо загальний розв'язок. Вираз для похідної $y' = C\cos x - 2x$ не можна назвати диференціальним рівнянням, оскільки коефіцієнт C − невизначений. Вилучимо з нього C. Для цього з початкового рівняння $y = C\sin x - x^2$ виразимо C і підставимо знайдене значення у співвідношення для похідної:

$$C = (y + x^2)/\sin x; \quad y' = \cos x(y + x^2)/\sin x - 2x \text{ або}$$

$$y'\sin x = y\cos x + x^2\cos x - 2x\sin x$$

− шукане ДР першого порядку. ■

Приклад 4. Знайти ДР першого порядку, загальний інтеграл якого $x^3y + 4x = Ce^{2y}$.

□ Продиференціюємо загальний інтеграл (знайдемо похідну неявної функції):

$$(x^3y + 4x)' = (Ce^{2y})'; \quad 3x^2y + x^3y' + 4 = 2Ce^{2y}y';$$

$$2Ce^{2y}y' - x^3y' = 3x^2y + 4; \quad y' = (3x^2y + 4)/(2Ce^{2y} - x^3).$$

Вилучимо з отриманого виразу невизначений коефіцієнт C. З рівняння $x^3y + 4x = Ce^{2y}$ маємо $C = (x^3y + 4x)e^{-2y}$.

Підставимо це значення в одержану похідну:

$$y' = (3x^2y + 4)\Big/\Big(2e^{2y} \cdot (x^3y + 4x)e^{-2y} - x^3\Big);$$

$$y' = (3x^2y + 4)/(2x^3y + 8x - x^3)$$

− шукане ДР першого порядку. ■

Зауваження 3. Теорія диференціальних рівнянь ще далека до завершення. Для ДР у канонічній формі доведено теореми, що виражають достатні умови існування та єдиності розв'язку відповідної задачі Коші. На жаль, аналогічні умови для крайових задач значно жорсткіші, менше просунені й досить віддалені від необхідних. У практичних застосуваннях задача Коші, при певних обмеженнях, має єдиний розв'язок, крайова задача може мати довільну кількість розв'язків.

2.2. Диференціальні рівняння першого порядку

2.2.1. Умови існування й єдиності розв'язку задачі Коші

Диференціальне рівняння першого порядку має ***загальний вигляд*** $\boxed{F(x, y, y')=0}$, де $y = y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x.

Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно похідної і подати його в ***нормальній формі*** $\boxed{y' = f(x, y)}$. Для таких рівнянь справджується

теорема Коші (існування й єдиності розв'язку). *Нехай у рівнянні* $y' = f(x, y)$ *функція* $f(x, y)$ *та її частинна похідна* $f_y'(x, y)$ *неперервні у деякій області* D *площини* Oxy. *Тоді для довільної внутрішньої точки* $M_0(x_0; y_0)$ *цієї області існує визначений і диференційовний у деякому околі точки* x_0 *єдиний розв'язок* $y = y(x)$ *даного рівняння, що задовольняє початковій умові* $y(x_0) = y_0$. (Без доведення).

З неперервності правої частини $f(x, y)$ випливає існування розв'язку, а умова неперервності похідної $f_y'(x, y)$ забезпечує його єдиність.

Геометричний зміст: для кожної внутрішньої точки $M_0(x_0; y_0)$ області D існує і причому єдина інтегральна крива ДР $y' = f(x, y)$, яка проходить через цю точку.

Особливими точками ДР $y' = f(x, y)$ називаються ті, в яких не виконуються умови теореми Коші, тобто де права частина $f(x, y)$ або її похідна $f_y'(x, y)$ мають розрив.

Такі точки можуть бути ізольованими чи утворювати ***особливі лінії***. Якщо особлива лінія є інтегральною, то вона відповідає особливому розв'язку ДР. Геометрично через особливу точку або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить не менше двох.

2.2.2. Геометричний зміст диференціальних рівнянь першого порядку. Їх наближене розв'язування

Геометричний зміст: рівняння $y' = f(x, y)$ задає ***поле напрямків*** дотичних до його розв'язку: кожній точці $M(x; y) \in D$ (D − область визначення рівняння) ДР ставить у відповідність напрямок дотичної до єдиної інтегральної кривої, яка проходить через цю точку $M(x; y)$ (рис. 53).

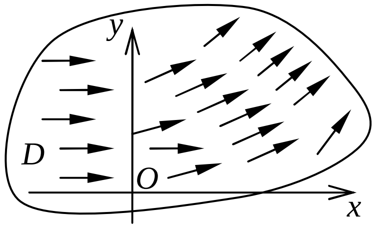

Рис. 53

Ізоклиною називається крива на площині Oxy, в кожній точці якої розглядуване поле має один і той самий напрямок $y' = k$, $k = const$. Рівняння ізоклин має вигляд

$$\boxed{f(x, y) = k, \;\; k = const}$$

Розглянемо декілька методів наближеного розв'язування ДР першого порядку.

1. Знаходження ізоклин та напрямів вздовж них дозволяє впорядкувати поле напрямків та наближено побудувати інтегральні лінії даного ДР, тобто ***графічно проінтегрувати*** це рівняння ***методом ізоклин***.

Приклад 1. Для диференціального рівняння $y' = x^2 + y$ побудувати поле напрямків, покладаючи y' рівним -1, 0, $1/\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 3. Побудувати методом ізоклін наближено інтегральну лінію, яка проходить через точку $M_0(1;-2)$.

□ Рівняння ізоклин даного ДР має вигляд $x^2 + y = k$, $k = const$. Тобто, ізоклини − однопараметрична сім'я вертикальних парабол $y = k - x^2$.

Покладемо y' рівним кожному з указаних значень по черзі. Отримаємо: $-1 = x^2 + y$ при $y' = -1$, що відповідає параболі $y = -1 - x^2$; $0 = x^2 + y$ при $y' = 0$, що відповідає параболі $y = -x^2$; $1/\sqrt{3} = x^2 + y$ при $y' = 1/\sqrt{3}$, що відповідає параболі

$y = 1/\sqrt{3} - x^2$; $\sqrt{3} = x^2 + y$ при $y' = \sqrt{3}$, що відповідає параболі $y = \sqrt{3} - x^2$; $3 = x^2 + y$ при $y' = 3$, що відповідає параболі $y = 3 - x^2$. Всі ці лінії складають поле напрямків і показані на рис. 54.

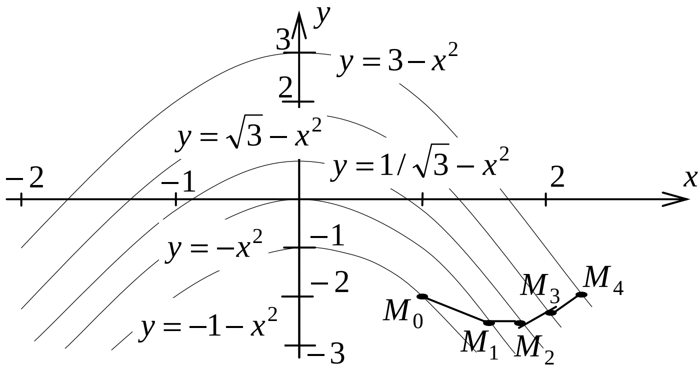

Рис. 54

Побудуємо наближено інтегральну лінію, яка проходить через задану точку M_0. Точка M_0 знаходиться на ізоклині, що відповідає значенню $y' = -1$. Для неї $tg\,\alpha = k = -1$, $\alpha_0 = -45^\circ$. Проведемо через точку M_0 пряму, що утворює кут α_0 з додатнім напрямком осі Ox до найближчої точки M_1 перетину з наступною ізоклиною $y = -x^2$. З точки M_1 проведемо пряму, яка утворює з Ox кут $\alpha_1 = 0^\circ$, оскільки для цієї ізоклини $tg\,\alpha = k = 0$. Отримаємо точку M_2, яка лежить на перетині цієї прямої з $y = 1/\sqrt{3} - x^2$. Через точку M_2 будемо проводити пряму, що утворює з Ox кут $\alpha_2 = 30^\circ$. Через M_3 − пряму під кутом $\alpha_3 = 60^\circ$.

Таким чином, отримали ламану $M_0M_1M_2M_3M_4$, що служить наближеним розв'язком ДР $y' = x^2 + y$ з початковою умовою

$y(1) = -2$ (на рис. 54 ламана розтягнута вздовж Ox відповідно відношенню масштабів осей Ox і Oy). ■

2. ***Метод Ейлера*** відноситься до ***чисельних методів*** розв'язування диференціальних рівнянь.

На відрізку $[a;b]$ розглянемо диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x,y)$, для якого задана початкова умова $y(x_0) = y_0$, де $x_0 = a$. Нехай відрізок $[a;b]$ розбитий на n рівних частин одновимірною ***сіткою*** – послідовністю точок $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, де $x_i = x_0 + ih$ – i-й ***вузол сітки*** (розбиття) ($i = 0,1,\ldots,n$), $h = (b-a)/n$ − ***крок сітки*** (***крок дискретизації***). Потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ поставленої задачі Коші на відрізку $[a;b]$ у вигляді наближених значень $\tilde{y}_i$, $i = \overline{0,n}$ ***сіткової функції*** $y_i = y(x_i)$, $i = \overline{0,n}$.

Згідно з методом Ейлера на кожному i-му кроці замінимо похідну y' її ***скінченно різницевою апроксимацією*** (наближенням) за формулою

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \;\Rightarrow\; y_i' \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx \frac{\Delta \tilde{y}_i}{\Delta x_i} = \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1}}{h}$$

і візьмемо значення правої частини $f(x,y)$ у попередній $(i-1)$-й точці $(x_{i-1};\tilde{y}_{i-1})$. У результаті отримаємо ***різницеве рівняння***

$$\boxed{\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + h\, f(x_{i-1}, \tilde{y}_{i-1}),\; i = 1,2,\ldots,n},$$

що служить наближенням даного ДР з похибкою порядку h^2 на кожному кроці. На n кроках сумарна похибка має порядок $nh^2 = (x_n - x_0)/n$.

Додаючи початкову умову $\tilde{y}_0 = y_0$, одержимо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Якщо кожну пару сусідніх точок $M_{i-1}(x_{i-1};\tilde{y}_{i-1})$ і $M_i(x_i;\tilde{y}_i)$, $i = \overline{1,n}$ сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$, наближено замінюється ***ламаною Ейлера*** $M_0 M_1 M_2 ... M_n$. Кожна ланка $M_{i-1}M_i$ цієї ламаної має напрям, який співпадає з напрямом тієї інтегральної кривої ДР, що проходить через точку M_{i-1}.

Приклад 2. Побудувати ламану Ейлера, що служить апроксимацією інтегральної кривої – розв'язку задачі Коші $y' = x^2 + y$, $y(1) = -2$ на відрізку $[1;2]$. Крок дискретизації $h = 0{,}2$. Обчислення проводити наближено до трьох десяткових знаків після коми.

□ За умовою $f(x, y) = x^2 + y$; $h = 0{,}2$; $x_0 = 1$; $y_0 = -2$. Кількість кроків $n = (b - a)/h = (2-1)/0{,}2 = 5$. Тоді за формулою $\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + h\, f(x_{i-1}, \tilde{y}_{i-1})$ маємо:

$$i = 1:\ x_0 = 1;\ \tilde{y}_0 = y_0 = -2;\ f(x_0, \tilde{y}_0) = 1 - 2 = -1;$$

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + h\, f(x_0, \tilde{y}_0) = -2 + 0{,}2 \cdot (-1) = -2{,}2;$$

$$i = 2:\ x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}2 = 1{,}2;\ f(x_1, \tilde{y}_1) = (1{,}2)^2 - 2{,}2 =$$

$$= -0{,}76;\ \tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + h\, f(x_1, \tilde{y}_1) = -2{,}2 + 0{,}2 \cdot (-0{,}76) = -2{,}352.$$

Продовжуючи обчислення до кроку $i = n = 5$, запишемо отримані результати у вигляді таблиці:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\tilde{y}_i$	-2	$-2{,}2$	$-2{,}352$	$-2{,}43$	$-2{,}4$	$-2{,}24$
$f(x_i, \tilde{y}_i)$	-1	$-0{,}76$	$-0{,}392$	0,13	0,836	1,763

Ламана Ейлера $M_0 M_1 M_2 ... M_5$ показана на рис. 55. ■

Зауваження 1. Описаний метод Ейлера – ***явний*** (нове значення $\tilde{y}_i$ обчислюється безпосередньо) і ***однокроковий*** (на кожному кроці використовується значення розв'язку тільки в одній попередній точці x_{i-1}) зі сталою довжиною кроку h. Метод Ейлера є досить грубим і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень, однак його ідеї лежать в основі більш досконалих способів чисельного розв'язування ДР.

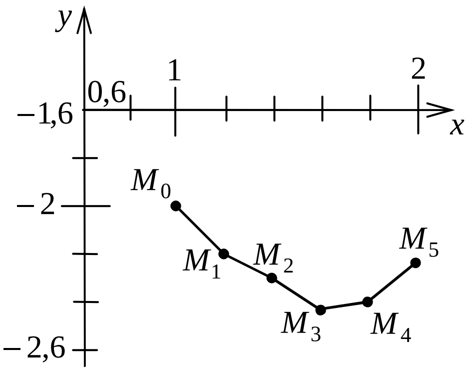

Рис. 55

3. ***Метод ітерацій*** (***метод Пікара***) відноситься до ***наближених аналітичних способів*** розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

За цим методом здійснюється перехід до еквівалентного ***інтегрального рівняння***

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt},$$

яке розв'язується за допомогою послідовних наближень.

Шуканий розв'язок $y(x)$ знаходиться як границя послідовності функцій $y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x), ...$ ($n = 0, 1, 2, ...$):

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x),$$

де $\boxed{y_0(x) = y_0}$; $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt$; $y_2(x) = y_0 +$

$$+ \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt; \; ...; \; \boxed{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt}.$$

Практично число необхідних ітерацій n визначається з умови $\max\limits_{x \in [a;b]} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \varepsilon$, де $[a; b]$ – відрізок, на якому розв'язується задача Коші; ε – максимально допустима абсолютна похибка обчислень.

Приклад 3. Методом Пікара знайти третє наближення $y_3(x)$ до розв'язку задачі Коші: $y' = 3x^2 - 4y$, $y(0) = 1$.

□ За умовою $y_0(x)=1$. Тоді за методом Пікара:

$$y_1(x)=1+\int_0^x(3t^2-4\cdot 1)\,dt=1+(t^3-4t)\Big|_0^x=1+x^3-4x;$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x\left(3t^2-4\cdot(1+t^3-4t)\right)dt=1+\int_0^x(3t^2-4-4t^3+$$

$$+16t)\,dt=1+(t^3-4t-t^4+8t^2)\Big|_0^x=1+x^3-4x-x^4+8x^2;$$

$$y_3(x)=1+\int_0^x\left(3t^2-4\cdot(1+t^3-4t-t^4+8t^2)\right)dt=1+$$

$$+\int_0^x(4t^4-4t^3-29t^2+16t-4)\,dt=1+(4t^5/5-t^4-29t^3/3+$$

$$+8t^2-4t)\Big|_0^x=4x^5/5-x^4-29x^3/3+8x^2-4x+1. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. При грубій оцінці розв’язку ДР часто використовуються різні ***спрощуючі прийоми***: лінеаризація функцій; усереднення коефіцієнтів; розщеплення на швидкі та повільні процеси; розбиття області дослідження на частини, де домінують певні фактори; введення додаткових чи відкидання наявних малих членів і т.п.

2.2.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Не існує єдиного аналітичного методу точного розв'язування ДР першого порядку. Далі розглянемо окремі типи таких рівнянь і відповідні методи знаходження аналітичного розв'язку.

Зауваження 1. Зустрічаються рівняння, що одночасно відносяться до різних типів. Інколи ДР тотожними перетвореннями чи заміною змінних можна перевести з одного типу в інший. Для розв'язування таких рівнянь треба вибирати їх найзручніше подання.

Диференціальне рівняння першого порядку $y'=f(x,y)$ називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його права частина $f(x,y)$ може бути подана як добуток $f(x,y)=h(x)\,g(y)$ двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Щоб знайти розв'язок такого ДР $\boxed{y' = h(x)\ g(y)}$, треба відокремити змінні: похідну записати як відношення диференціалів $y' = dy/dx$, а потім обидві його частини помножити на dx і поділити на такий вираз $g(y)$, щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна y, а в іншу − тільки змінна x. Шуканий розв'язок $y = y(x)$ перетворює одержане рівняння $dy/g(y) = h(x)\,dx$ у тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\boxed{\int dy/g(y) = \int h(x)\,dx + C},$$

де C – довільна стала.

Зауваження 2. При діленні обох частин рівняння на вираз, який містить змінні x чи y, можна "втратити" розв'язки, що перетворюють цей вираз у нуль. Такі випадки треба розглядати окремо.

Зауваження 3. Для спрощення запису загального розв'язку ДР часто довільну сталу подають у вигляді деякого виразу з іншою довільною сталою C, при умові, що цей вираз приймає довільні значення. Наприклад, $(1/2)\ln C$, де $C > 0$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\text{а) } xyy' = 1 + y^2;\ \text{ б) } y' + \sin(x+y) = \sin(x-y);$$

$$\text{в) } (x + xy^2)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0.$$

□ а) Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2; \quad \frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{2ydy}{1+y^2} = 2\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln(1+y^2) = 2\ln|x| + \ln|C|.$$

Вигляд одержаного загального інтеграла можна спростити потенціюванням. Саме тому довільна стала записана як логарифм іншої довільної сталої. Тоді загальний інтеграл можна записати так: $1 + y^2 = Cx^2$. Далі $y = \pm\sqrt{Cx^2 - 1}$ – загальний розв’язок в явній формі.

Виконуючи ділення, припускали, що $x \neq 0$, і могли втратити розв’язок $x = 0$. Підставляючи $x = 0$ у рівняння, переконуємося, що ця функція не є розв'язком.

б) Перенесемо синуси в один бік від знака рівності та перетворимо їх різницю в добуток, користуючись відповідною тригонометричною тотожністю:

$$y' = \sin(x-y) - \sin(x+y)\,;$$

$$y' = 2\sin((x-y-x-y)/2)\cos((x-y+x+y)/2)\,;$$

$$y' = 2\sin(-y)\cos x\,; \quad y' = -2\sin y\cos x\,.$$

Відокремимо змінні й проінтегруємо:

$$dy/\sin y = -2\cos x\,dx\,; \quad \int\frac{dy}{\sin y} = -2\int\cos x\,dx + \ln|C|\,;$$

$$\ln\left|tg(y/2)\right| = -2\sin x + \ln|C|\,; \quad \ln\left|tg(y/2)\right| = \ln\left|Ce^{-2\sin x}\right|\,;$$

$$tg(y/2) = Ce^{-2\sin x}$$

– загальний розв’язок у неявній формі (загальний інтеграл).

в) Спочатку винесемо з перших дужок x, з других – y, а потім відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$x(1+y^2)\,dx + y(1-x^2)\,dy = 0\,;$$

$$\frac{x\,dx}{1-x^2} + \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0\,; \quad \int\frac{x\,dx}{1-x^2} + \int\frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln C\,.$$

Зробимо заміну змінної: у першому інтегралі $s = 1-x^2$, у другому – $t = 1+y^2$. Отримаємо

$$-\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln C\,;$$

$$(-1/2)\ln|s| + (1/2)\ln|t| = (1/2)\ln C\,; \quad \ln|t/s| = \ln C\,.$$

Здійснивши обернену підстановку та потенціювання одержимо загальний інтеграл рівняння

$$(1+y^2)/(1-x^2) = C\,.$$

Звідси $y = \pm\sqrt{C(1-x^2)-1}$ – загальний розв’язок в явній формі. ■

Приклад 2. Розв’язати задачу Коші:

а) $y / y' = \ln y$, $y(2) = 1$; б) $e^x y' + xy^2 = 0$, $y(0) = -1$.

□ а) Спочатку знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$y' = \frac{y}{\ln y}\,; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}\,; \quad \frac{\ln y\, dy}{y} = dx\,; \quad \int \frac{\ln y\, dy}{y} = \int dx\,.$$

Зробивши заміну $t = \ln y$, отримаємо

$$(1/2)\ln^2 y = x + C\,.$$

Враховуючи початкову умову $y(2) = 1$, підставимо у рівняння замість x значення 2, замість y значення 1 і знайдемо C:

$$(1/2)\ln^2 1 = 2 + C\,; \quad 2 + C = 0\,; \quad C = -2\,.$$

Отримуємо частинний розв’язок у неявній формі (частинний інтеграл)

$$\ln^2 y = 2(x-2)\,.$$

Звідси $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ – частинний розв’язок в явній формі.

(Задачу б) розв’язати самостійно). ■

Зауваження 4. Диференціальне рівняння вигляду $y' = f(ax + by + c)$, де a, b і c − задані числа, заміною $u = ax + by + c$, де $u = u(x)$ − нова шукана функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними: $u' = a + b\,y'$; $u' = a + b\,f(u)$.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок:

а) $y' = \sqrt{2x + y}$; б) $y' = \cos^2(x - y)$.

□ Нехай $u = 2x + y$, $u' = 2 + y'$, $y' = u' - 2$. Складемо й розв’яжемо рівняння для u:

$$u' - 2 = \sqrt{u}\,; \quad \frac{du}{\sqrt{u} + 2} = dx\,; \quad \int \frac{du}{\sqrt{u} + 2} = \int dx\,;$$

$$t = \sqrt{u}\,; \quad \int \frac{2t\, dt}{t + 2} = x + C\,; \quad \int (2 - 4/(t+2))\, dt = x + C\,;$$

$$2t-4\ln|t+2|=x+C;\quad 2\sqrt{2x+y}-\ln(\sqrt{2x+y}+2)^4=x+C$$

– загальний розв'язок у неявній формі (загальний інтеграл).

(Рівняння б) розв'язати самостійно). ■

2.2.4. Рівняння з однорідною правою частиною (однорідні рівняння)

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною*** k***-го порядку однорідності***, якщо виконується тотожність

$$\boxed{f(tx,ty)=t^k f(x,y)}\,.$$

<u>Приклад 1</u>. Переконатися, що функція

$$f(x,y)=xy+5y^2\sin(x/y)+\sqrt{x^4+y^4}-x^5/(x^3+y^3)$$

є однорідною і знайти порядок однорідності.

□ $$f(tx,ty)=tx\cdot ty+5(ty)^2\sin(tx/ty)+\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}-$$

$$-(tx)^5/((tx)^3+(ty)^3)=t^2xy+5t^2y^2\sin(x/y)+t^2\sqrt{x^4+y^4}-$$

$$-t^2x^5/(x^3+y^3)=t^2(xy+5y^2\sin(x/y)+\sqrt{x^4+y^4}-$$

$$-x^5/(x^3+y^3))=t^2f(x,y);\quad k=2.$$

Отже, дана функція є однорідною другого порядку однорідності. ■

Диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною (***однорідним рівнянням***) називається рівняння, яке можна подати у вигляді

$$\boxed{y'=f(y/x)}\ \text{або}\ \boxed{P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0}\,,$$

де $f(y/x)$ − однорідна функція нульового порядку однорідності; $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ − однорідні функції одного порядку однорідності.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $u=y/x$, де $u=u(x)$ − допоміжна шукана функція. Тоді $y=ux$, $y'=u'x+u$ і ДР $y'=f(y/x)$ після перетворень приймає вигляд $du/\big(f(u)-u\big)=dx/x$.

Зауваження. Якщо $f(u)-u=0$, тобто $f(y/x)-y/x=0$. Тоді $f(y/x)=y/x$. Рівняння $y'=f(y/x)$ приймає вигляд ДР з відокремлюваними змінними $y'=y/x$ і розв'язується відповідним чином.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'=-3xy/(x^2-y^2)$; б) $\sqrt{x^2-y^2}\,dx+y\,dx-x\,dy=0$.

□ а) Це рівняння – однорідне, оскільки його права частина є однорідною функцією нульового порядку однорідності:

$$f(tx,ty)=-3(tx)(ty)/((tx)^2-(ty)^2)=-3t^2xy/(t^2(x^2-y^2))=$$

$$=-3xy/(x^2-y^2)=f(x,y).$$

Зробимо заміну $u=y/x$, де u – нова шукана функція аргументу x. Тоді $y=ux$, $y'=u'x+u$. Вихідне рівняння набуває вигляду

$$u'x+u=-3x\cdot ux/(x^2-u^2x^2)=3u/(u^2-1);$$

$$u'x=\frac{3u}{u^2-1}-u;\quad u'x=\frac{3u-u^3+u}{u^2-1};\quad \frac{du}{dx}\,x=-\frac{u(u^2-4)}{u^2-1}.$$

Припускаючи, що $x\neq 0$ і $u(u^2-4)\neq 0$, тобто $u\neq 0$, $u\neq \pm 2$, відокремимо змінні:

$$\frac{(u^2-1)du}{u(u^2-4)}=-\frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування обох частин рівняння знайдемо

$$\int\frac{(u^2-1)\,du}{u(u^2-4)}=\int\frac{(u^2-1)\,du}{u(u+2)(u-2)}=\int\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u+2}+\frac{C}{u-2}\right)du=$$

$$=\Big|A(u+2)(u-2)+Bu(u-2)+Cu(u+2)=u^2-1;$$

$$\begin{array}{r} u=0: \\ u=2: \\ u=-2: \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} -4A=-1, & A=1/4; \\ 8C=3, & C=3/8; \\ 8B=3; & B=3/8 \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int\frac{du}{u}+\frac{3}{8}\int\frac{du}{u+2}+$$

$$+\frac{3}{8}\int\frac{du}{u-2}=\frac{1}{4}\ln|u|+\frac{3}{8}\ln|u+2|+\frac{3}{8}\ln|u-2|+C=$$

$$=\frac{1}{8}\ln|u^2(u^2-4)^3|+C; \quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$$

$$(1/8)\ln|u^2(u^2-4)^3|=-\ln|x|+(1/8)\ln|C|;$$

$$\ln|u^2(u^2-4)^3|=\ln|Cx^{-8}|; \;\; u^2(u^2-4)^3=Cx^{-8}.$$

Підставляючи значення $u=y/x$, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$(y/x)^2((y/x)^2-4)^3=Cx^{-8} \;\; \text{або} \;\; y^2((y^2-4x^2)^3=C \qquad .$$

Виконуючи ділення, могли втратити розв’язки $x=0$, $u=0 \Rightarrow y=0$, $u=\pm2 \Rightarrow y=\pm2x$. Підставляючи їх у початкове рівняння, переконуємося, що функція $x=0$ не є розв'язком, а функції $y=0$ та $y=\pm2x$ служать розв'язками, причому входять у загальний інтеграл при $C=0$.

б) Функції $P(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+y$ та $Q(x,y)=-x$ є однорідними одного (першого) порядку однорідності. Це означає, що дане ДР є однорідним. Розв'яжемо його відносно похідної $y'=dy/dx$:

$$\sqrt{x^2-y^2}+y=x\,dy/dx; \;\; y'=\sqrt{1-(y/x)^2}+y/x.$$

Покладемо $u=y/x$. Тоді $y=ux$, $y'=xu'+u$. Підставивши в рівняння вирази для y та y', отримаємо

$$x\,du/dx=\sqrt{1-u^2}.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$du/\sqrt{1-u^2}=dx/x; \;\; \int du/\sqrt{1-u^2}=\int dx/x;$$

$$\arcsin u=\ln x+\ln C; \quad \arcsin u=\ln Cx.$$

Замінивши u на y/x, будемо мати загальний інтеграл

$$\arcsin(y/x) = \ln Cx \quad \text{або} \quad y = x \sin \ln Cx$$

– загальний розв’язок в явній формі.

Крім того, розв'язками є $u = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$, що могли бути втрачені при діленні. Ці розв'язки не містяться в загальному розв’язку і є особливими. ■

2.2.5. Лінійні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку, яке алгебраїчними перетвореннями можна звести до вигляду

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), називається ***лінійним***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та її похідної $y' = dy/dx$.

Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** (***ЛОДР***) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку – ***лінійним неоднорідним*** (***ЛНДР***) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Лінійне однорідне рівняння – це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його відповідним чином:

$$\boxed{y' + p(x)\,y = 0};\ \ dy/y = -p(x)\ dx;\ \ \int dy/y = -\int p(x)\ dx;$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\ dx + \ln|C|;\ \boxed{y = C\,e^{-\int p(x)\ dx}}$$

– загальний розв'язок.

1. Для розв'язування ЛНДР застосуємо ***метод варіації довільної сталої*** (***метод Лагранжа***). За цим методом загальний розв'язок шукаємо в такому ж самому вигляді, як і розв'язок відповідного однорідного ДР, одержаного відкиданням правої частини $q(x)$ (поклавши $q(x) \equiv 0$), але вважаємо C не сталою, а невідомою функцією x, тобто $\boxed{y = C(x)\ e^{-\int p(x)\ dx}}$.

Знайдемо похідну y':

$$y' = C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, e^{-\int p(x)dx} p(x).$$

Підставимо вирази для y і y' в неоднорідне ДР і отримаємо співвідношення для знаходження функції $C(x)$:

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, e^{-\int p(x)dx} p(x) + p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= q(x);\ C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} = q(x);\ C'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи, одержуємо

$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C}$, де $\tilde{C}$ – довільна стала.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$\boxed{y = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C} \right) e^{-\int p(x)\, dx}}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді суми

$$\boxed{y = \tilde{C} e^{-\int p(x)\, dx} + \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx \right) e^{-\int p(x)\, dx} = \bar{y} + y_*},$$

де $\bar{y} = \tilde{C} e^{-\int p(x)\, dx}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; $y_* = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx \right) e^{-\int p(x)\, dx}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (при $\tilde{C} = 0$).

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок ЛНДР першого порядку $x^2 y' - x^2 y \cos x = 3e^{\sin x}$ методом варіації довільної сталої.

□ Ділячи обидві частини ДР на x^2, зводимо його до стандартного вигляду $y' - y\cos x = (3/x^2) e^{\sin x}$.

Розв'язуємо відповідне однорідне ДР (без правої частини):

$$y' - y\cos x = 0;\ dy/dx = y\cos x;\ dy/y = \cos x\, dx;$$

$$\int dy/y = \int \cos x\, dx;\quad \ln|y| = \sin x + \ln|C|;\quad y = C e^{\sin x}$$

– загальний розв'язок.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{\sin x}$. Тоді $y' = C'(x)\, e^{\sin x} - C(x)\, e^{\sin x} \cos x$.

Підставляємо в неоднорідне ДР і знаходимо невідому функцію $C(x)$:

$$C'(x)\, e^{\sin x} - C(x)\, e^{\sin x} \cos x + C(x)\, e^{\sin x} \cos x = (3/x^2) e^{\sin x};$$

$$C'(x) = 3/x^2; \;\; C(x) = 3\int dx \big/ x^2 = -3/x + \tilde{C}.$$

Таким чином, $y = (-3/x + \tilde{C}) e^{\sin x}$ – загальний розв’язок неоднорідного ДР. ■

2. Лінійне неоднорідне ДР можна розв'язати безпосередньо ***методом Бернуллі***. Згідно з ним загальний розв'язок будуємо у вигляді добутку двох функцій від x: $\boxed{y = u(x)v(x)}$ (***підстановка Бернуллі***). Оскільки при такій заміні вже відшукуються дві функції, то виникає додатковий ступінь вільності, що дозволяє розщепити лінійне ДР на два рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціюємо добуток: $y' = u'v + uv'$. Підставимо цей вираз у початкове рівняння, матимемо

$$u'v + uv' + puv = q \;\text{ або }\; u'v + u(v' + pv) = q.$$

Використовуючи наявний ступінь вільності, виберемо функцію v такою, що

$$v' + pv = 0.$$

Це співвідношення є рівнянням з відокремлюваними змінними для функції $v = v(x)$. Інтегруючи його, виберемо найпростіший за формою частинний розв'язок $v = e^{-\int p(x)\,dx}$.

Підставимо знайдену функцію у передостаннє ДР (враховуючи, що $v' + pv = 0$) і отримаємо для функції $u = u(x)$ рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'v = q \;\;\text{ або }\;\; du/dx = q(x)/v(x),$$

звідки $u = \int \big(q(x)/v(x)\big) dx + C$ – загальний розв’язок. Тут C – довільна стала.

Підставивши u і v у вираз для шуканої функції y, остаточно маємо

$$y = uv = \left(\int \left(q(x)/v(x)\right)dx + C\right)v(x) .$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок ЛНДР першого порядку $y'+2y = e^x$ за допомогою підстановки Бернуллі.

□ Рівняння є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y'. Зробимо заміну $y = u(x)\cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Отримаємо рівняння

$$u'v + uv' + 2uv = e^x \quad \text{або} \quad u'v + u(v'+2v) = e^x .$$

Знайдемо функцію v як частинний розв'язок рівняння $v'+2v = 0$. Це ДР з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо його:

$$dv/dx + 2v = 0 ;\;\; dv = -2v\,dx ;\;\; dv/v = -2\,dx ;$$

$$\int dv/v = -2\int dx ;\;\; \ln v = -2x .$$

Потенціюючи обидві частини рівняння, отримаємо $v = e^{-2x}$. Враховуючи, що $v'+2v = 0$, підставимо цю функцію у ДР, де виконали заміну, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u = u(x)$: $u'e^{-2x} = e^x$.

Розв'язавши його, знайдемо функцію u:

$$e^{-2x}du/dx = e^x ;\; du = e^{3x}dx ;\; \int du = \int e^{3x}dx ;\; u = (1/3)e^{3x} + C .$$

Тоді загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = uv = ((1/3)e^{3x} + C)e^{-2x} \quad \text{або} \quad y = (1/3)e^x + Ce^{-2x} . \quad ■$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші і знайти значення $\tilde{y} = y_K(\tilde{x})$ отриманого розв'язку $y_K = y_K(x)$ при вказаному значенні аргументу $\tilde{x}$:

$$y'+2xy = xe^{-x^2},\; y(0) = 2 ; \quad \tilde{x} = -1 .$$

□ Задане рівняння – лінійне. Спочатку знайдемо його загальний розв'язок за допомогою підстановки Бернуллі $y = uv$. Здійснимо заміну:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2} ;\;\; u'v + u(v'+2xv) = xe^{-x^2} .$$

Знайдемо v як деякий частинний розв’язок рівняння $v'+2xv=0$:

$$dv/dx=-2xv;\quad dv/v=-2x\,dx;\quad \int dv/v=-2\int x\,dx;$$

$$\ln v=-x^2;\quad v=e^{-x^2}.$$

Підставимо отриману функцію у рівняння, в якому зробили заміну, і розв’яжемо його відносно u:

$$u'e^{-x^2}=xe^{-x^2};\ du/dx=x;\ du=x\,dx;\ u=x^2/2+C.$$

Одержуємо загальний розв’язок початкового ДР:

$$y=u\,v=(x^2/2+C)e^{-x^2}.$$

Виділимо частинний розв’язок, що задовольняє початковій умові $y(0)=2$. Для цього знайдемо відповідне значення довільної сталої C:

$$2=(0/2+C)e^0;\ C=2.$$

Підставивши $C=2$ у загальний розв’язок, дістаємо шуканий частинний розв’язок (розв'язок задачі Коші):

$$y_K=(x^2/2+2)e^{-x^2}.$$

Обчислимо значення цього розв’язку в точці $\tilde{x}=-1$:

$$y_K(-1)=((-1)^2/2+2)e^{-(-1)^2}=(5/2)e^{-1}.\quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Диференціальне рівняння першого порядку інколи може бути лінійним не відносно y як функції від x, а навпаки, відносно x як функції від y, тобто може бути зведене до вигляду $\boxed{x'+p(y)x=q(y)}$.

<u>Приклад 4</u>. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y^2=(x+ye^{-1/y})y'.$$

□ Це ДР не є лінійним відносно функції $y=y(x)$. Перепишемо рівняння, вважаючи, що x є функцією змінної y:

$$y^2=(x+ye^{-1/y})\,dy/dx;\quad y^2dx/dy=x+ye^{-1/y};$$

$$x' - x/y^2 = e^{-1/y}/y.$$

Отримане рівняння є лінійним відносно оберненої функції $x = x(y)$ та її похідної $x' = dy/dx$. Використаємо підстановку Бернуллі $x = u(y) \cdot v(y)$. Тоді

$$x' = u'v + uv'; \;\; u'v + uv' - uv/y^2 = e^{-1/y}/y;$$

$$u'v + u(v' - v/y^2) = e^{-1/y}/y; \;\; v' - v/y^2 = 0; \;\; dv/dy = v/y^2;$$

$$dv/v = dy/y^2; \;\; \int dv/v = \int dy/y^2; \;\; \ln v = -1/y; \;\; v = e^{-1/y}.$$

Підставимо у рівняння одержану функцію $v = v(y)$ і знайдемо множник $u = u(y)$, а потім їх добуток $x = uv$:

$$u'e^{-1/y} = e^{-1/y}/y; \; du/dy = 1/y; \; du = dy/y;$$

$$\int du = \int dy/y; \; u = \ln|y| + C, \;\; x = uv = (\ln y + C)e^{-1/y}.$$

Маємо загальний розв’язок (загальний інтеграл) вихідного рівняння $x = (\ln y + C)e^{-1/y}$. ■

2.2.6. Рівняння Бернуллі

Диференціальним рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду $\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}}$, де $p(x)$ і $q(x)$ − відомі неперервні функції; $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$.

Зауваження 1. При $\alpha = 0$ це рівняння стає лінійним, а при $\alpha = 1$ маємо ДР з відокремлюваними змінними.

Зауваження 2. Рівняння Бернуллі можна звести до лінійного наступним чином. Спочатку помножимо обидві його частини на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, а потім зробимо заміну змінної $y^{1-\alpha} = z(x)$:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + p(x)(1-\alpha)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x); \;\; (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z';$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Відносно функції $z = z(x)$ дістали лінійне ДР

$$z' + \tilde{p}(x)z = \tilde{q}(x), \text{ де } \tilde{p}(x) = (1-\alpha)p(x); \;\; \tilde{q}(x) = (1-\alpha)q(x).$$

Зауваження 3. Краще всього рівняння Бернуллі розв'язувати безпосередньо за допомогою заміни $y = u(x)v(x)$ – підстановки Бернуллі. Схема методу розглянута вище на лінійному ДР.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі $y' - 4xy = 2e^{x^2}\sqrt{y}\cos x$.

□ Застосуємо підстановку Бернуллі:

$$y = uv;\quad y' = u'v + uv';\quad u'v + uv' - 4xuv = 2e^{x^2}\sqrt{uv}\cos x;$$

$$u'v + u(v' - 4xv) = 2e^{x^2}\sqrt{uv}\cos x;\quad v' - 4xv = 0;\quad dv/dx = 4xv;$$

$$dv/v = 4x\,dx;\quad \int dv/v = 4\int x\,dx;\quad \ln v = 2x^2;\quad v = e^{2x^2}.$$

Підставивши $v = e^{2x^2}$ у рівняння, одержимо:

$$u'e^{2x^2} = 2e^{x^2}\sqrt{ue^{2x^2}}\cos x;\quad u' = 2\sqrt{u}\cos x;$$

$$du/dx = 2\sqrt{u}\cos x;\quad \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\cos x\,dx;\quad \int\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\int\cos x\,dx;$$

$$2\sqrt{u} = 2\sin x + 2C;\quad u = (\sin x + C)^2;$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = uv = (\sin x + C)^2 e^{2x^2}.\quad ■$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші: $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$.

□ Задане ДР є рівнянням Бернуллі. Його можна проінтегрувати за допомогою підстановки $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Коли підставимо у початкове рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + uv = xu^2v^2;\quad u'v + u(v' + v) = xu^2v^2;$$

$$v' + v = 0;\quad dv/dx = -v;\quad dv/v = -dx;\quad \int dv/v = -\int dx;$$

$$\ln v = -x;\quad v = e^{-x}.$$

Підставивши $v = e^{-x}$ у рівняння, дістанемо:

$$e^{-x}du/dx = xu^2e^{-2x};\quad du/u^2 = xe^{-x}dx;\quad \int du/u^2 = \int xe^{-x}dx;$$

$$-1/u=-xe^{-x}-e^{-x}-C\,;\;\; u=1/(xe^{-x}+e^{-x}+C)\,.$$

(Для знаходження інтеграла $\int xe^{-x}dx$ скористалися формулою інтегрування частинами).

Тоді загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y=u\,v=e^{-x}/(xe^{-x}+e^{-x}+C)=1/(x+1+Ce^{x})\,.$$

Конкретне значення сталої C знайдемо з початкової умови:

$$y(0)=1:\;\; 1/(1+C)=1;\;\; C=0\,.$$

Шуканий частинний розв'язок рівняння (розв'язок задачі Коші) має вигляд $y_K=1/(x+1)$. ■

2.2.7. Загальні рекомендації щодо розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

Для вибору способу аналітичного розв'язування заданого ДР першого порядку треба з'ясувати його тип. Для цього необхідно розв'язати його відносно похідної і привести до нормального вигляду $y'=f(x,y)$.

Потім подивитися, чи розкладається права частина $f(x,y)$ на множники, кожний з яких залежить тільки від одного аргументу x або y. Якщо таке розвинення можливе, то далі ДР розв'язується відокремленням змінних.

Коли змінні не відокремлюються безпосередньо, то треба перевірити, чи є права частина $f(x,y)$ однорідною функцією нульового порядку однорідності, тобто чи можна функцію $f(x,y)$ записати у формі $f(x,y)=f(y/x)$. Якщо це так, то дане ДР розв'язується як однорідне рівняння.

Коли дане ДР не відноситься до розглянутих двох типів, то треба вияснити, чи є це ДР лінійним або рівнянням Бернуллі, тобто чи можна функцію $f(x,y)$ подати у вигляді $f(x,y)=-p(x)y+q(x)$ або $f(x,y)=-p(x)y+q(x)y^{\alpha}$.

Зауваження. Ще один важливий тип ДР першого порядку – рівняння в повних диференціалах – буде розглянуто далі при вивченні криволінійних інтегралів.

2.3. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають його зниження

Диференціальне рівняння другого порядку може бути записане у ***загальному вигляді***:

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}\,.$$

Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно старшої похідної, то воно набуває ***канонічної*** (***нормальної***) ***форми***:

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')}\,.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку – це функція незалежної змінної x та двох довільних сталих C_1 та C_2: $y = y(x, C_1, C_2)$.

Для ДР другого порядку ***задача Коші*** має вигляд:

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0; \quad y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'}$$

і з геометричної точки зору зводиться до побудови інтегральної кривої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$, в якій дотична має заданий кутовий коефіцієнт y_0'. За відповідною теоремою Коші при певних умовах ця крива існує й єдина.

Для ДР другого порядку може ставитися ***крайова задача***, зокрема, такого вигляду:

$$F(x, y, y', y'') = 0; \quad y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b\,.$$

<u>Зауваження 1</u>. При розв'язуванні задачі Коші (крайової задачі) звичайно спочатку знаходять загальний розв'язок ДР, а вже потім враховують початкові (крайові) умови. Коли в задачі досить визначити лише відповідний частинний розв'язок, то часто простіше відразу шукати цей розв'язок, враховуючи додаткові умови поступово, безпосередньо в процесі розв'язування.

Розглянемо три поширені типи ДР другого порядку, що шляхом заміни змінної зводяться до рівнянь першого порядку.

1. ***Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку***

$$\boxed{y'' = f(x)}\,.$$

Це ДР стає рівнянням першого порядку в результаті заміни $\boxed{y' = p}$, де $p = p(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y'' = p'$, і дістаємо ДР $p' = f(x)$, загальний розв’язок якого $p = \int f(x)\,dx + C_1$. Повертаючись до початкової змінної, знову маємо рівняння першого порядку $y' = \int f(x)\,dx + C_1$, що розв’язується безпосереднім інтегруванням: $y = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1 x + C_2$ – загальний розв’язок вихідного ДР другого порядку.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$\sqrt[3]{x+4}\,y'' = 1.$$

□ Приведемо задане рівняння до канонічного вигляду і зробимо відповідну заміну: $y'' = 1/\sqrt[3]{x+4}$, заміна $p = y'$.

Тоді отримаємо найпростіше рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, яке розв’яжемо розглянутим раніше способом:

$$p' = 1/\sqrt[3]{x+4};\ \ dp = dx/\sqrt[3]{x+4};\ \ \int dp = \int (x+4)^{-1/3} dx;$$

$$p = 3(x+4)^{2/3}/2 + C_1.$$

Але згідно зробленій заміні $p = y'$, і дістаємо ще одне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$y' = (3/2)(x+4)^{2/3} + C_1.$$

Розв’язуємо його:

$$dy/dx = (3/2)(x+4)^{2/3} + C_1;\ \ dy = ((3/2)(x+4)^{2/3} + C_1)\,dx;$$

$$\int dy = \int ((3/2)(x+4)^{2/3} + C_1)\,dx;$$

$$y = (9/10)(x+4)^{5/3} + C_1 x + C_2$$ – загальний розв’язок. ■

Зауваження 2. У випадку ДР довільного n-го порядку ($n \geq 2$) вигляду $y^{(n)} = f(x)$ робиться заміна $y^{(n-1)} = p$, що зводить його до такого ж найпростішого рівняння першого порядку $p' = f(x)$. Загальний розв’язок вихідного ДР знаходиться n-кратним інтегруванням.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y^{IV} = e^{2x} + 1/\sqrt{x}.$$

□ Зробимо заміну $p = y'''$. Тоді:

$$y^{IV} = p'; \quad p' = e^{2x} + 1\big/\sqrt{x}\,; \quad \int dp = \int \left(e^{2x} + 1\big/\sqrt{x}\right) dx\,;$$

$$p = (1/2)e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1; \quad y''' = (1/2)e^{2x} + 2x^{1/2} + C_1.$$

Тепер зробимо заміну $p = y''$ Тоді:

$$y''' = p'; \quad p' = (1/2)e^{2x} + 2x^{1/2} + C_1; \quad \int dp = \int ((1/2)e^{2x} +$$

$$+ 2x^{1/2} + C_1)\,dx\,; \quad p = (1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2;$$

$$y'' = (1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2.$$

Знову зробимо аналогічну заміну $p = y'$ Тоді:

$$y'' = p'; \quad p = (1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2;$$

$$\int dp = \int ((1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2)\,dx\,;$$

$$p = (1/8)e^{2x} + (8/15)x^{5/2} + (C_1/2)x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y' = (1/8)e^{2x} + (8/15)x^{5/2} + (C_1/2)x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$\int dy = \int ((1/8)e^{2x} + (8/15)x^{5/2} + (C_1/2)x^2 + C_2 x + C_3)\,dx\,;$$

$$y = (1/16)e^{2x} + (16/105)x^{7/2} + (C_1/6)x^3 + (C_2/2)x^2 +$$

$$+ C_3 x + C_4$$ – загальний розв’язок. ■

2. ***Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно шуканої функції*** y, тобто має вигляд

$$\boxed{F(x, y', y'') = 0}\,.$$

Зниження порядку досягається заміною $\boxed{y' = p}$, де $\boxed{p = p(x)}$ − допоміжна шукана функція від x. Тоді $y'' = p'$, і одержується ДР першого порядку загального вигляду $F(x, p, p') = 0$.

<u>Приклад 3</u>. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x^3 y'' + 2x^2 y' = \sqrt{x}\,.$$

□ Зробимо заміну $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'$. Дістанемо рівняння першого порядку

$$x^3 p'+2x^2 p=\sqrt{x}\,; \quad p'+2p/x=x^{-5/2},$$

що є лінійним відносно функції p та її похідної p'. Розв'яжемо його за допомогою підстановки Бернуллі:

$$p=uv\,;\;\; p'=u'v+uv'\,;\;\; u'v+uv'+2uv/x=x^{-5/2}\,;\;\; u'v+u(v'+$$

$$+2v/x)=x^{-5/2}\,;\;\; v'+2v/x=0\,;\;\; v'=-2v/x\,;\;\; dv/v=-2\,dx/x\,;$$

$$\int dv/v=-2\int dx/x\,;\;\; \ln|v|=-2\ln|x|\,;\;\; \ln|v|=\ln x^{-2}\,;\;\; v=x^{-2}\,;$$

$$u'x^{-2}=x^{-5/2}\,;\;\; u'=1/\sqrt{x}\,;\;\; du=dx/\sqrt{x}\,;\;\; \int du=\int dx\big/\sqrt{x}\,;$$

$$u=2\sqrt{x}+C_1; \quad p=(2x^{1/2}+C_1)x^{-2}.$$

Повернемося до початкової функції y, враховуючи зроблену заміну, і проінтегруємо одержане рівняння:

$$y'=2x^{-3/2}+C_1x^{-2}\,;\;\; dy=(2x^{-3/2}+C_1x^{-2})\,dx\,;$$

$$\int dy=\int(2x^{-3/2}+C_1x^{-2})\,dx\,;\;\; y=-4x^{-1/2}-C_1x^{-1}+C_2$$

– загальний розв'язок. ■

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

а) $xy''=y'\ln(y'/x)$; $\quad y(1)=0$; $\quad y'(1)=1$;

б) $y''-2y'tg\,x=3\sqrt{y'\sin x}$; $\quad y(0)=2$; $\quad y'(0)=0$;

в) $y''-y'\cos x=-e^{\sin x}\sin x$; $\quad y(0)=-1$; $\quad y'(0)=1$.

□ а) Схема розв'язування: відразу шукаємо відповідний частинний розв'язок, знаходячи конкретні значення довільних сталих, що з'являються при інтегруванні, безпосередньо в місцях їх виникнення.

Зробимо заміну $y'=p$, де $p=p(x)$. Тоді $y''=p'$. Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$xp'=p\ln(p/x)\,;\;\; p'=(p/x)\ln(p/x),$$

що є рівнянням з однорідною правою частиною. Зробимо в ньому заміну $p/x=u$. Тоді:

$$p = ux;\quad p' = u'x = u;\quad u = p/x;\quad u'x + u = u\ln(ux/x);$$

$$u'x = u\ln u - u;\quad u' = (u\ln u - u)/x;\quad du/(u\ln u - u) = dx/x;$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x};\quad \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \begin{vmatrix} z = \ln u - 1; \\ dz = du/u \end{vmatrix} = \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \ln|z| = \ln|\ln u - 1|;\quad \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C_1|;$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|C_1 x|;\quad \ln u - 1 = C_1 x.$$

Повернемося до функції p, а потім до початкової функції y:

$$\ln(p/x) - 1 = C_1 x;\quad \ln(y'/x) - 1 = C_1 x.$$

Використаємо початкову умову $y'(1) = 1$ і знайдемо C_1:

$$\ln 1 - 1 = C_1 \cdot 1;\quad C_1 = -1;\quad \ln(y'/x) - 1 = -x;$$

$$\ln(y'/x) = 1 - x;\quad y'/x = e^{1-x};\quad y' = xe^{1-x}.$$

Дістали ще одне ДР першого порядку – рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$dy = xe^{1-x}dx;\ \int dy = \int xe^{1-x}dx;\ \int xe^{1-x}dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^{1-x}; & v = -e^{1-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -xe^{1-x} + \int e^{1-x}dx = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C_2;\ y = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C_2.$$

Знайдемо C_2, використовуючи початкову умову $y(1) = 0$, і отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$0 = -1 \cdot e^0 - e^0 + C_2;\quad C_2 = 2;\quad y_K = -xe^{1-x} - e^{1-x} + 2.$$

б) Застосовуємо попередню схему. Спочатку з'являється рівняння Бернуллі, яке розв'язуємо відповідним чином:

$$y' = p\text{, де } p = p(x);\quad y'' = p';\quad p' - 2p\,tg\,x = 3\sqrt{p}\sqrt{\sin x};$$

$$p = uv;\quad p = u'v + uv';\quad u'v + uv' - 2uv\,tg\,x = 3\sqrt{uv}\sqrt{\sin x};$$

$$u'v + u(v' - 2v\,tg\,x) = 3\sqrt{uv}\sqrt{\sin x};\quad v' - 2v\,tg\,x = 0;$$

$$dv/v = 2\,tg\,x\,dx;\quad \int dv/v = 2\int tg\,x\,dx;\quad \ln v = -2\ln\cos x;$$

$$\ln v = \ln \cos^{-2} x\,;\; v = \cos^{-2} x\,;\; u' \cos^{-2} x = 3\sqrt{u \cos^{-2} x}\,\sqrt{\sin x}\,;$$

$$u' = 3\sqrt{u}\,\sqrt{\sin x}\cos x\,;\quad du/dx = 3\sqrt{u}\sqrt{\sin x}\cos x\,;$$

$$\int du\big/\sqrt{u} = 3\int \sin^{1/2} x \cos x\; dx\,;\quad 2\sqrt{u} = 2\sin^{3/2} x + 2C_1\,;$$

$$u = (\sin^{3/2} x + C_1)^{\,2}\,;\quad p = u\,v = (\sin^{3/2} x + C_1)^{\,2} \cos^{-2} x\,;$$

$$y' = (\sin^{3/2} x + C_1)^{\,2} \cos^{-2} x\,.$$

Використовуючи початкову умову $y'(0) = 0$, знайдемо C_1:

$$(\sin^{3/2} 0 + C_1)^{\,2} \cos^{-2} 0 = 0\,;\quad (0 + C_1)^{\,2} = 0\,;\quad C_1 = 0\,;$$

$$y' = (\sin^{3/2} x + 0)^{\,2} \cos^{-2} x\,;\quad y' = \sin^3 x \cos^{-2} x\,.$$

Інтегруючи отримане ДР, дістаємо:

$$y = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^2 x}\,dx = \Big|\cos x = u\,;$$

$$du = -\sin x\,dx;\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2\Big| = -\int \frac{1-u^2}{u^2}\,dx =$$

$$= -\int du\big/u^2 + \int du = 1/u + u + C_2 = 1/\cos x + \cos x + C_2 \quad .$$

Значення C_2 визначається з початкової умови $y(0) = 2$:

$$1/\cos 0 + \cos 0 + C_2 = 2\,;\quad 2 + C_2 = 2\,;\quad C_2 = 0\,.$$

Тоді $y_K = 1/\cos x + \cos x$ – розв’язок задачі Коші.

в) Розв’яжіть самостійно за наведеною схемою. Спочатку застосуйте заміну $y' = p(x)$. В отриманому лінійному ДР використайте підстановку Бернуллі. Відповідь: $y_K = e^{\sin x} - 2$. ■

3. ***Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно незалежної змінної*** x, тобто має вигляд:

$$\boxed{F(y, y', y'') = 0}.$$

У цьому випадку приймаємо $\boxed{y' = p}$, де $\boxed{p = p(y(x))}$ − допоміжна складена функція від x, причому зовнішня функція

$p = p(y)$ проміжного аргументу y служить новою шуканою змінною. Тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо $y'' = (p(y))'_x = (dp/dy)\cdot(dy/dx) = p'p$ і приходимо до ДР першого порядку вигляду $F(y, p, p'p) = 0$.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 5(y')^2 ctg 5y = 0.$$

□ Зробимо заміну $y' = p(y)$. Тоді отримаємо і розв’яжемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'' = p'p;\ p'p + 5p^2 ctg 5y = 0;\ p(dp/dy + 5p\, ctg 5y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p = 0\ \textit{або}\ dp/dy + 5p\, ctg 5y\, dy = 0;\ \ y' = 0\ \textit{або}$$

$$dp/p = -5 ctg 5y\, dy;\ \int dp/p = -5\int ctg 5y\, dy;$$

$$\ln|p| = -\ln|\sin 5y| + \ln|C_1|;\ \ln|p| = \ln|C_1/\sin 5y|;$$

$$p = C_1/\sin 5y;\ \ y' = C_1/\sin 5y.$$

Звідси $y = C$ *або* $dy/dx = C_1/\sin 5y$;

$$\int \sin 5y\, dy = C_1 \int dx;\quad (1/5)\cos 5y = C_1 x + C_2$$

– загальний розв’язок (загальний інтеграл), який включає в себе розв’язок $y = C$ при $C_1 = 0$. ■

Приклад 6. Розв’язати задачу Коші

$$y\, y'' = (y')^2 - (y')^3;\ \ y(-1) = 1;\ \ y'(-1) = 2.$$

□ Схема розв’язування: відразу шукаємо частинний розв’язок, що задовольняє вказаним початковим умовам, знаходячи відповідні значення довільних сталих поступово, безпосередньо в місцях їх виникнення.

Зробимо у рівнянні заміну $y' = p$, де $p = p(y)$. Тоді дістанемо і розв’яжемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'' = p'p;\ \ yp\, dp/dy = p^2 - p^3;\ \ p\left(y\, dp/dy - p + p^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p = 0\ \textit{або}\ y\, dp/dy - p + p^2 = 0;\ \ y' = 0\ \textit{або}$$

$$\frac{dp}{p^2-p}=\frac{dy}{y};\ \int\frac{dp}{p(p-1)}=\int\frac{dy}{y};\ \int\frac{dp}{p(p-1)}=\int\left(\frac{A}{p}+\right.$$

$$\left.\frac{B}{p-1}\right)dp=\left|A(p-1)+Bp=1;\begin{matrix}p=0:\\ p=1:\end{matrix}\begin{cases}-A=1;\\ B=1;\end{cases}A=-1\right|=$$

$$=-\int\frac{dp}{p}+\int\frac{dp}{p-1}=-\ln|p|+\ln|p-1|+C=\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|+C;$$

$$\ln|(p-1)/p|=-\ln|y|+\ln|C_1|;\ \ \ln|(p-1)/p|=\ln|C_1/y|;$$

$$(p-1)/p=C_1/y;\ \ (y'-1)/y'=C_1/y.$$

Співвідношення $y'=0$ не задовольняє початкову умову $y'(-1)=2$. Його відкидаємо.

Знайдемо C_1, використавши початкові умови $y(-1)=1$ і $y'(-1)=2$:

$$(2-1)/2=C_1/1;\ \ C_1=1/2;\ \ (y'-1)/y'=(1/2)/y;$$

$$y'=2yy'-2y;\ \ y'-2y\,y'=-2y;\ \ (1-2y)\,y'=-2y;$$

Розв’яжемо отримане ДР першого порядку, що також є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$(1-2y)\,dy=-2y\,dx;\ \int(1-1/(2y))\,dy=\int dx;$$

$$y-(1/2)\ln|y|=x+C_2.$$

Підставивши початкову умову $y(-1)=1$, дістанемо C_2:

$$1-(1/2)\ln 1=-1+C_2;\ C_2=2.$$

Тоді $y_K-(1/2)\ln|y_K|=x+2$ – розв’язок задачі Коші (частинний інтеграл, що відповідає заданим початковим умовам). ■

<u>Зауваження 3</u>. У випадку ДР другого порядку, що не містить явно як самої шуканої функції y, так і її аргументу x, тобто має вигляд $F(y',y'')=0$ можна застосувати будь-яку підстановку $y'=p(x)$ чи $y'=p(y)$, але частіше більш доцільно першу з них.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші:

$$y''=2\sqrt{y'};\quad y(2)=-1/3;\quad y'(2)=4$$

двома способами: а) підстановкою $y'=p(x)$; б) підстановкою $y'=p(y)$. (Розв'яжіть самостійно. Відповідь: $y_K=x^3/3-3$).

2.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

2.4.1. Загальні поняття

Лінійним диференціальним рівнянням n***-го порядку*** $(n\geq 1)$ називається рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x)},$$

де $y=y(x)$ − шукана функція аргументу x; $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ та $f(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), причому $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ − ***коефіцієнти***, $f(x)$ − ***права частина***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y=y(x)$ та всіх її похідних.

Якщо $f(x)\equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** ДР (ЛОДР) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку, коли $f(x)\neq 0$, − ***лінійним неоднорідним*** (ЛНДР) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Загальні властивості лінійних ДР вищих порядків розглянемо на прикладі ***лінійного ДР другого порядку***

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина.

Система функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ $(n\geq 2)$ називається ***лінійно залежною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо існують сталі числа $\mu_1,\ \mu_2,\ ...,\ \mu_n$, не всі рівні нулю, такі, що для відповідної лінійної комбінації у кожній точці $x\in(a;b)$ виконується рівність

$$\boxed{\mu_1 y_1(x)+\mu_2 y_2(x)+...+\mu_n y_n(x)\equiv 0}\,.$$

Якщо ця тотожність виконується лише за умови, коли всі $\mu_i=0$, $i=\overline{1,n}$, то система функцій $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ називається ***лінійно незалежною*** в інтервалі $(a;b)$.

У випадку двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ умову лінійної залежності можна подати у вигляді

$$y_1(x)/y_2(x)=C=const\,,\ \forall x\in(a;b)\,.$$

Наприклад, а) функції $y_1(x)=\ln x$ і $y_2(x)=\lg x$ лінійно залежні на півпрямій $(0;+\infty)$, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x)=\ln x/\lg x=\ln 10=const\,;$$

б) функції $y_1(x)=\sin x$ і $y_2(x)=\sin 2x$ лінійно незалежні на множині дійсних чисел R, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x)=\sin x/\sin 2x=1/(2\cos x)\neq const\,.$$

2.4.2. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

На деякому проміжку $(a;b)$ розглянемо систему n функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$, що є частинними розв'язками деякого одного ЛОДР n-го порядку $(n\geq 2)$ і тому n разів диференційовні. Сформуємо функціональний визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

що називається ***визначником Вронського*** (***вронськіаном***) даної системи.

Ознаку лінійної залежності чи незалежності такої системи виражає наступна

<u>теорема 1</u>. *Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи* n *частинних розв'язків* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *якого-небудь одного ЛОДР* n*-го порядку дорівнює нулю в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$, *то ця система розв'язків – лінійно залежна, причому вронськіан* $W(x)$ *тотожно рівний нулю на всьому проміжку* $(a;b)$. *Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *відмінний від нуля в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$, *то ця система розв'язків – лінійно незалежна, причому вронськіан* $W(x)$ *не перетворюється в нуль у жодній точці проміжку* $(a;b)$.
(Без доведення).

Для даного ЛОДР n-го порядку будь-яка лінійно незалежна система n його частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називається ***фундаментальною***.

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає така

<u>теорема 2</u>. *Якщо функції* $y_1(x), y_2(x)$ *утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація*

$$\boxed{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2},$$

де C_1 *і* C_2 *− довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння.*

□ Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Перевіримо, що їх лінійна комбінація $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію $\bar{y}$ та її похідні у рівняння:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad \bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' +$$

$$+ p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2.

Справді, для визначення C_1 і C_2 дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

визначником якої служить вронськіан

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ вронськіан відмінний від нуля $W(x_0) \neq 0$. Тому система лінійних рівнянь відносно C_1 і C_2 завжди має і причому єдиний розв'язок.

Отже, $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ − загальний розв'язок ЛОДР. ■

<u>Наприклад</u>, частинними розв'язками ЛОДР другого порядку $y'' + y = 0$ служать функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$. (Перевірте це самостійно). Їх вронськіан відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому ці розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ − лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

<u>Зауваження 1</u>. Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР $y = 0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому вронськіан тотожно рівний нулю. (Перевірте це самостійно).

<u>Зауваження 2</u>. Для ЛОДР другого і вищих порядків у загальному випадку не існує конструктивного способу знаходження його

ненульових розв'язків. Проте якщо один такий розв'язок y_1 відомий (наприклад, знайдений підбором), то можна понизити на одиницю порядок рівняння, зберігаючи лінійність, підстановкою $y = y_1 \int u\,dx$, де $u = u(x)$ − нова шукана функція.

2.4.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Для ***ЛОДР*** n***-го порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0\,,\ \ a_i = const \in R\,,\ i = \overline{1,n}}$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи і на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі ***ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0\,,\ \ p = const \in R;\ q = const \in R}\ .$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y = e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0}\,,$$

яке називають ***характеристичним рівнянням*** даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта $\boxed{D = p^2 - 4q}$.

Випадок 1. $D > 0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$: $k_{1,2} = \left(-p \pm \sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ − лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд $\boxed{\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок $y'' + 3y' + 2y = 0$.

$$\square\ k^2 + 3k + 2 = 0;\ D = 9 - 8 = 1 > 0;$$

$$k_1 = -1,\ k_2 = -2;\ \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}. \quad \blacksquare$$

<u>Випадок 2</u>. $D = 0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Тобто, $k = -p/2$ − один корінь кратності $r = 2$. Тоді $y_1 = e^{kx}$ − частинний розв'язок. Знайдемо другий лінійно незалежний з ним розв'язок y_2. Скористаємося методом збурень.

Вважатимемо, що k_1 і k_2 відрізняються на нескінченно малу величину Δk: $k_1 = k$; $k_2 = k + \Delta k$; $\Delta k \to 0$. Таким чином, повертаємося до випадку 1. Тоді лінійна комбінація $y_{2*} = \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right) / \Delta k$ − теж частинний розв'язок. Переходячи у y_{2*} до границі при $\Delta k \to 0$, дістаємо невизначеність типу $0/0$, що розкривається за правилом Лопіталя:

$$y_2 = \lim_{\Delta k \to 0} y_{2*} = \lim_{\Delta k \to 0} \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right) / \Delta k = \left|0/0\right| =$$

$$= \lim_{\Delta k \to 0} (e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx})' / (\Delta k)' = \lim_{\Delta k \to 0} e^{(k+\Delta k)x} x = x e^{kx}.$$

Перевіримо, що одержана функція $y_2 = x\,e^{kx}$ служить розв'язком ЛОДР:

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx};\ \ y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2 xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2 xe^{kx};$$

$$2ke^{kx} + k^2 xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = e^{kx}(k^2 x + 2k +$$

$$+ p + pkx + qx) = \left|k = -p/2\right| = e^{kx}((-p/2)^2 x + 2(-p/2) +$$

$$+ p + p(-p/2)x + qx) = -(1/4)e^{kx}(p^2 - 4q)x =$$

$$= \left|p^2 - 4q = D = 0\right| = -xe^{kx} \cdot 0 = 0.$$

До того ж, вронськіан системи $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x\,e^{kx}$ відмінний від нуля:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & x\,e^{kx} \\ k\,e^{kx} & e^{kx}+kx\,e^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0 .$$

Тому ці розв'язки $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = x\,e^{kx}$ – лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему.

Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\boxed{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\,e^{kx} + C_2 x\,e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)} .$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти загальний розв'язок $y''-y'+0{,}25y=0$.

□ $D=1-1=0$, $k_1=k_2=k=1/2$; $\bar{y}=e^{x/2}(C_1+C_2x)$. ■

<u>Випадок 3</u>. $D<0$. Характеристичне рівняння має два комплексні спряжені корені $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, де $\alpha=-p/2$, $\beta=\sqrt{-D}/2$, $D=p^2-4q<0$, $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді $y_{1к}=e^{k_1x}=e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_{2к}=e^{k_2x}=e^{(\alpha-\beta i)x}$ – комплексні лінійно незалежні розв'язки. Їх лінійна комбінація $\boxed{\bar{y}_к = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}}$ служить комплексним загальним розв'язком.

Але ДР має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв'язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к}=e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);\quad y_{2к}=e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Можна показати, що *для комплекснозначної функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками*. (Зробіть це самостійно).

Таким чином, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним розв'язком служить їх лінійна комбінація

$$\boxed{\begin{gathered}\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x= \\ =e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).\end{gathered}}$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок $y''+4y'+13y=0$.

□ $k^2+4k+13=0$; $D=16-52=-36<0$;

$$k_{1,2}=(-4\pm\sqrt{-36})/2=(-4\pm6\sqrt{-1})/2=(-4\pm6i)/2=-2\pm3i;$$

$$\alpha=-2;\ \beta=3;\quad \bar{y}=e^{-2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x).\quad ■$$

Приклад 4. Розв’язати задачу Коші:

а) $y''+16y'=0;\quad y(1)=-2;\ y'(1)=0$;

б) $y''-16y=0;\quad y(0)=3;\ y'(0)=-4$;

в) $y''+8y'+16y=0;\quad y(0)=1;\ y'(0)=3$;

г) $y''+16y=0;\quad y(\pi/2)=6;\ y'(\pi/2)=2$;

д) $y''+8y'+20y=0;\quad y(0)=0;\ y'(0)=12$.

□ а) Складаємо і розв’язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+16k=0;\ k(k+16)=0;\ k_1=0;\ k_2=-16.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1\neq k_2$, то маємо випадок 1. У відповідній формі записуємо загальний розв’язок: $\bar{y}=C_1e^{0x}+C_2e^{-16x}=C_1+C_2e^{-16x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$\bar{y}'=-16C_2e^{-16x};$$

$$\begin{matrix} y(1)=-2: \\ y'(1)=0: \end{matrix}\quad \begin{cases} -2=C_1+C_2e^{-16\cdot1}; \\ \ \ 0=-16C_2e^{-16\cdot1}; \end{cases}\quad \begin{cases} C_2=0; \\ C_1=-2-0=-2. \end{cases}$$

Тоді $y_K=-2$ − розв’язок задачі Коші.

б) $k^2-16=0;\ k^2=16;\ k_{1,2}=\pm4;\ \bar{y}=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$;

$$\bar{y}'=4C_1e^{4x}-4C_2e^{-4x};\quad \begin{cases} 3=C_1e^{4\cdot0}+C_2e^{-4\cdot0}; \\ -4=4C_1e^{4\cdot0}-4C_2e^{-4\cdot0}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1 - C_2 = -1; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 2 \end{cases} y_K = e^{4x} + 2e^{-4x}.$$

в) $k^2 + 8k + 16 = 0$; $D = 64 - 64 = 0$; $k_1 = k_2 = k = -4$;

$$\bar{y} = e^{-4x}(C_1 + C_2 x);\ \bar{y}' = C_2 e^{-4x} - 4(C_1 + C_2 x)e^{-4x};$$

$$\begin{cases} 1 = e^{-4\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0); \\ 3 = C_2 e^{-4\cdot 0} - 4(C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-4\cdot 0}; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 - 4C_1 = 3;\ C_2 = 7; \end{cases}$$

$$y_K = e^{-4x}(1 + 7x).$$

г) $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$; $\alpha = 0$; $\beta = 4$;

$$\bar{y} = e^{0x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x;$$

$$\bar{y}' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x;$$

$$\begin{matrix} y(\pi/2) = 6: \\ y'(\pi/2) = 2: \end{matrix} \begin{cases} 6 = C_1 \cos(4\cdot\pi/2) + C_2 \sin(4\cdot\pi/2); \\ 2 = -4C_1 \sin(4\cdot\pi/2) + 4C_2 \cos(4\cdot\pi/2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = C_1; \\ 2 = 4C_2;\ C_2 = 1/2; \end{cases} \quad y_K = 6\cos x + (1/2)\sin 4x.$$

д) $k^2 + 8k + 20 = 0$; $D = 64 - 80 = -16 < 0$;

$$k_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{-16})/2 = (-4 \pm 4i)/2 = -2 \pm 2i;\quad \alpha = -2;\ \beta = 2;$$

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);\quad \bar{y}' = -2e^{-2x}(C_1 \cos 2x +$$

$$+ C_2 \sin 2x) + e^{-2x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x);$$

$$\begin{cases} 0 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0); \\ 12 = -2e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1; \\ 12 = -2C_1 + 2C_2;\ C_2 = 6; \end{cases} \quad y_K = 6e^{-2x} \sin 2x. \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Розв'язати крайову задачу:

$$y''+4y=0; \qquad y(0)=5; \;\; y'(\pi/2)=6\,.$$

$$\square \;\; k^2+4=0\,; \;\; k^2=-4\,; \;\; k_{1,2}=\pm 2i\,;$$

$$\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\,; \;\; \bar{y}'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x\,;$$

$$\begin{cases} 5=C_1\cos 0+C_2\sin 0; \\ 6=-2C_1\sin\pi+2C_2\cos\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1=5; \\ -2C_2=6; \;\; C_2=-3; \end{cases}$$

$y_b=5\cos 2x-3\sin 2x$ − розв'язок крайової задачі. ■

Зауваження. Для ЛОДР довільного n-го порядку $(n\ge 2)$ зі сталими коефіцієнтами характеристичне рівняння має n коренів k_i, $i=\overline{1,n}$ і його загальний розв'язок можна подати у вигляді $\bar{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$, де $y_1(x),\, y_2(x),\ldots,\; y_n(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків. Можливі три випадки.

1. Усі корені $k_1,k_2,\ldots,k_n$ – дійсні різні числа. Тоді

$\bar{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_nx}$, тобто $y_i=e^{k_ix}$, $i=\overline{1,n}$.

2. Усі корені – різні числа, але серед них є комплексні попарно спряжені. Тоді кожній парі комплексно спряжених коренів $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ відповідає пара дійсних лінійно незалежних розв'язків $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

3. Серед коренів є кратні (рівні між собою). Тоді:

а) кожному дійсному кореню k кратності r відповідає r лінійно незалежних розв'язків: $y_1=e^{kx},\, y_2=xe^{kx},\ldots,y_r=x^{r-1}e^{kx}$;

б) кожній парі комплексно спряжених коренів $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ кратності s відповідає $2s$ дійсних лінійно незалежних розв'язків:

$$y_{2i-1}=x^{i-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\,, \;\; y_{2i}=x^{i-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,, \;\; i=\overline{1,s}\,.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок:

а) $y'''-y''-2y'=0$; б) $y'''+y''-y'-y=0$;

в) $y'''+y''+y'+y=0$;   г) $y^{IV}+2y''+y=0$.

□ а) $k^3-k^2-2k=0$; $k(k^2-k-2)=0$; $k_1=0$;

$$k^2-k-2=0;\ D=1+8=9;\ k_2=2;\ k_3=-1;$$

$$\bar{y}=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}.$$

б) $k^3+k^2-k-1=0$; $k^2(k+1)-(k+1)=0$;

$$(k+1)(k^2-1)=0;\ (k+1)^2(k-1)=0;\ k_1=k_2=k=-1;$$

$$r=2;\quad k_3=1;\ \bar{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{x}.$$

в) $k^3+k^2+k+1=0$; $k^2(k+1)+(k+1)=0$;

$$(k+1)(k^2+1)=0;\ k_1=-1;\ k_{2,3}=\pm i;$$

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

г) $k^4+2k^2+1=0$; $(k^2+1)^2=0$; $k_1=k_2=i$; $k_3=k_4=-i$.

Кратність пари $k=\pm i$ комплексно спряжених коренів $s=2$. Тоді $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x$. ■

<u>Приклад 7</u>. Розв’язати задачу Коші:

$y'''+2y''=0$; $y(0)=3$; $y'(0)=0$; $y''(0)=12$.

□ $k^3+2k^2=0$; $k^2(k+2)=0$; $k_1=k_2=k=0$ − корінь кратності $r=2$; $k_3=-2$; $\bar{y}=C_1+C_2x+C_3e^{-2x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1, C_2 і C_3 знаходимо з початкових умов:

$$\bar{y}'=C_2-2C_3e^{-2x};\quad \bar{y}''=4C_3e^{-2x};$$

$$\begin{array}{l} y(0)=3: \\ y'(0)=0: \\ y''(0)=12: \end{array} \left\{\begin{array}{l} C_1+C_3=3; \\ C_2-2C_3=0; \\ 4C_3=12; \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} C_3=3; \\ C_2=2C_3=6; \\ C_1=-C_3+3=0. \end{array}$$

Тоді розв’язок задачі Коші: $y_K=6x+3e^{-2x}$. ■

2.4.4. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

Структуру загального розв'язку ЛНДР другого порядку визначає така

<u>теорема 1</u>. *Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)},$$

можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\bar{y}$ *відповідного ЛОДР*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0}$$

і якого-небудь частинного розв'язку y_* *ЛНДР:* $\boxed{y=\bar{y}+y_*}$.

□ Перевіримо, що функція $y=\bar{y}+y_*$ є розв'язком ЛНДР:

$$y'=\bar{y}'+y_*';\ y''=\bar{y}''+y_*'';\ \ \bar{y}''+y_*''+p(\bar{y}'+y_*')+q(\bar{y}+y_*)=$$
$$=(\bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y})+(y_*''+py_*'+qy_*)=0+f(x)=f(x).$$

Оскільки $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$, де $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР, то розв'язок $y=\bar{y}+y_*=C_1y_1+C_2y_2+y_*$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2. Можна показати (зробіть це самостійно аналогічно доведенню теореми про структуру загального розв'язку ЛОДР), що для довільних початкових умов $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y_0'$ знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2. Тобто розв'язок $y=\bar{y}+y_*$ є загальним. ■

Принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна

<u>теорема 2</u>. *Якщо у ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}$$

права частина є сумою двох функцій $\boxed{f(x)=f_1(x)+f_2(x)}$, *то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми* $\boxed{y_*=y_{*1}+y_{*2}}$, *де* y_{*1} *і* y_{*2} *– частинні розв'язки рівнянь*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)} \text{ і } \boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)}$$

з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями $f_1(x)$, $f_2(x)$ *праворуч.*

(Доведіть самостійно безпосередньою підстановкою).

Зауваження 1. Сформульовані теореми безпосередньо переносяться на ЛНДР довільного n-го порядку $(n \geq 2)$.

Зауваження 2. Способи знаходження загального розв'язку $\bar{y}$ ЛОДР розглянуто раніше. Частинний розв'язок y_* ЛНДР залежить від правої частини $f(x)$ і для його побудови розроблені методи, що наведені далі.

2.4.5. Метод варіації довільних сталих

За ***методом варіації довільних сталих*** (***методом Лагранжа***) *загальний розв'язок ЛНДР ІІ порядку*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}$$

можна шукати в такому ж вигляді, як загальний розв'язок відповідного ЛОДР, вважаючи при цьому C_1 *і* C_2 *не довільними сталими, а невідомими функціями від* x:

$$\boxed{y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)},$$

де $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР; $C_1(x), C_2(x)$ – нові шукані функції.

Оскільки замість однієї невідомої функції $y(x)$ тепер відшукуються дві $C_1(x)$ і $C_2(x)$, то з'являється додатковий ступінь вільності, використання якого дозволяє спростити процес розв'язування задачі.

Знайдемо похідну від функції $y(x)$:

$$y'=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x)=$$

$$=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)+C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x).$$

Використовуючи додатковий ступінь вільності, накладемо на функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову:

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0.$$

Тоді $y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$, тобто похідна загального розв’язку набуває такого ж вигляду, як при сталих C_1 і C_2.

Друга похідна загального розв'язку ЛНДР має вигляд

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставимо отримані $y,\ y',\ y''$ у неоднорідне ДР:

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x)+$$
$$+\,p(C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x))+q(C_1(x)y_1(x)+$$
$$+C_2(x)y_2(x))=f(x);\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+$$
$$+C_1(\underbrace{y_1''+py_1'+qy_1}_{=0})+C_2(\underbrace{y_2''+py_2'+qy_2}_{=0})=f(x).$$

Отже, $$C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x).$$

Об’єднавши одержані рівності, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\boxed{\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0;\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x),\end{cases}}$$

де невідомими є похідні $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Дана система є сумісною і визначеною, бо її визначником є відмінний від нуля вронськіан

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Знайшовши єдиний розв’язок цієї системи $C_1'(x)=\varphi_1(x)$ і $C_2'(x)=\varphi_2(x)$, далі дістаємо:

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)\,dx+\tilde{C}_1;\ C_2(x)=\int\varphi_2(x)\,dx+\tilde{C}_2,$$

де $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ − нові довільні сталі.

Загальний розв’язок ЛНДР має вигляд

$$\boxed{y = \left(\int \varphi_1(x)\,dx + \tilde{C}_1\right)\, y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x)\,dx + \tilde{C}_2\right)\, y_2(x)}\,.$$

Якщо покласти $\tilde{C}_1 = 0$ і $\tilde{C}_2 = 0$, то дістанемо частинний розв’язок ЛНДР $\boxed{y_* = y_1(x)\int \varphi_1(x)\,dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)\,dx}$.

Тоді загальний розв’язок ЛНДР можна подати у вигляді

$$\boxed{\begin{gathered} y = \bar{y} + y_* = \underbrace{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}_{\bar{y}} + \\ + \underbrace{y_1(x)\int \varphi_1(x)\,dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)\,dx}_{y_*}\,. \end{gathered}}$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв’язок $y'' + 25y = ctg5x$.

□ Для відповідного ЛОДР $y'' + 25y = 0$ розв’язуємо характеристичне рівняння $k^2 + 25 = 0$; $k_{1,2} = \pm 5i$ і записуємо його загальний розв’язок $\bar{y} = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$, де $y_1 = \cos 5x$ і $y_2 = \sin 5x$ – фундаментальна система частинних розв’язків, похідні яких $y_1' = -5\sin 5x$; $y_2' = 5\cos 5x$.

Загальний розв’язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)\cos 5x + C_2(x)\sin 5x\,,$$

де $C_1(x)$, $C_2(x)$ – нові шукані функції. Для їх знаходження складаємо і розв’язуємо (методом Крамера) систему відносно похідних $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos 5x + C_2'(x)\cdot\sin 5x = 0; \\ C_1'(x)\cdot(-5\sin 5x) + C_2'(x)\cdot 5\cos 5x = \operatorname{ctg} 5x; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -5\sin 5x & 5\cos 5x \end{vmatrix} = 5\cos^2 5x - (-5\sin^2 5x) =$$

$$= 5(\cos^2 5x + \sin^2 5x) = 5;\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 5x \\ \operatorname{ctg} 5x & 5\cos 5x \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - \mathrm{ctg}\,5x \cdot \sin 5x = -\cos 5x\,; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 5x & 0 \\ -5\sin 5x & \mathrm{ctg}\,5x \end{vmatrix} =$$

$$= \cos 5x \cdot \mathrm{ctg}\,5x - 0 = \cos^2 5x / \sin 5x\,;$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{5}\cos 5x; \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos^2 5x}{5\sin 5x}\,.$$

Інтегруючи отримані вирази, дістанемо:

$$C_1(x) = (-1/5)\int \cos 5x\,dx = (-1/25)\sin 5x + \tilde{C}_1\,;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{5}\int \frac{\cos^2 5x}{\sin 5x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1 - \sin^2 5x}{\sin 5x}\,dx = \frac{1}{5}\int\!\left(\frac{1}{\sin 5x} -\right.$$

$$\left. - \sin 5x\right)dx = (1/25)(\ln|\,\mathrm{tg}(5x/2)\,| + \cos 5x) + \tilde{C}_2\,.$$

Тоді загальний розв’язок ЛНДР

$$y = ((-1/25)\sin 5x + \tilde{C}_1)\cos 5x + ((1/25)(\ln|\,\mathrm{tg}(5x/2)\,| +$$

$$+ \cos 5x) + \tilde{C}_2)\sin 5x = \tilde{C}_1\cos 5x + \tilde{C}_2\sin 5x - (1/25)\sin 5x \times$$

$$\times \cos 5x + (1/25)\ln|\,tg(5x/2)\,|\sin 5x + (1/25)\cos 5x \sin 5x =$$

$$= \tilde{C}_1\cos 5x + \tilde{C}_2\sin 5x + (1/25)\ln|\,tg(5x/2)\,|\sin 5x\,. \ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Розв’язати задачу Коші:

а) $y'' - 2y' + y = e^x \ln x\,; \quad y(1) = (1/4)e; \; y'(1) = -(3/4)e\,;$

б) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin x}\,; \quad y(\pi/2) = 0; \; y'(\pi/2) = \dfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2}\,.$

□ а) $y'' - 2y' + y = 0\,; \quad k^2 - 2k + 1 = 0\,; \quad k_{1,2} = k = 1\,;$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x\,; \quad y_1 = e^x\,; \quad y_2 = xe^x\,; \quad y_1' = e^x\,;$$

$$y_2' = e^x + xe^x\,; \quad y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x\,;$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0; \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = e^x \ln x; \end{cases} \qquad C_1'(x) = -xC_2'(x)\,;$$

$$-xC_2'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = e^x \ln x\,;$$

$$C_2'(x)(-x+1+x) = \ln x\,;\ \ C_2'(x) = \ln x\,;\ \ C_1'(x) = -x\ln x\,;$$

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x; du=(1/x)\,dx; \\ dv = x\,dx;\ v = x^2/2 \end{matrix}\right| = -(x^2/2)\ln x +$$

$$+(1/2)\int x\,dx = -(x^2/2)\ln x + x^2/4 + \tilde{C}_1\,;$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln x; du=(1/x)\,dx; \\ dv = dx;\ v = x \end{matrix}\right| = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + \tilde{C}_2\,;\ \ y = (-(x^2/2)\ln x + x^2/4 + \tilde{C}_1)e^x +$$

$$+(x\ln x - x + \tilde{C}_2)xe^x = \tilde{C}_1e^x + \tilde{C}_2xe^x - (x^2/2)e^x\ln x +$$

$$+x^2e^x/4 + x^2e^x\ln x - x^2e^x = \tilde{C}_1e^x + \tilde{C}_2xe^x + (1/2)x^2e^x\ln x -$$

$$-(3/4)x^2e^x \text{ – загальний розв'язок.}$$

Конкретні значення довільних сталих $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ знаходимо з початкових умов:

$$y' = \tilde{C}_1e^x + \tilde{C}_2(e^x + xe^x) + (1/2)(2xe^x\ln x + x^2e^x\ln x + xe^x) -$$

$$-(3/4)(2xe^x + x^2e^x)\,;$$

$$\begin{matrix} y(1) = (1/4)e: \\ y'(1) = -(3/4)e: \end{matrix} \begin{cases} \tilde{C}_1e + \tilde{C}_2e - (3/4)e = (1/4)e; \\ \tilde{C}_1e + 2\tilde{C}_2e + (1/2)e - (9/4)e = -(3/4)e; \end{cases}$$

$$\tilde{C}_1 = 1 - \tilde{C}_2\,;\ \ 1 - \tilde{C}_2 + 2\tilde{C}_2 = 1\,;\ \ \tilde{C}_2 = 0\,;\ \ \tilde{C}_1 = 1\,.$$

Остаточно, розв'язком задачі Коші служить функція

$$y_K = e^x + (1/2)x^2e^x\ln x - (3/4)x^2e^x\,.$$

(Задачу б) розв'яжіть самостійно.

Відповідь: $y_K = -x\,e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x \cdot \ln|\sin x|$). ■

2.4.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо ***ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y''+py'+qy = f(x), \quad p = const \in R;\ q = const \in R},$$

де права частина має ***спеціальний вигляд***

$$\boxed{f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)}.$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − многочлени відповідно степеня n і m; a і b − дійсні сталі, з яких формується ***характерне комплексне число*** $z = a + bi$.

Зауваження 1. m і n − довільні невід’ємні цілі числа, $m \geq 0$, $n \geq 0$; a і b − довільні дійсні числа, в тому числі $a = 0,\ b = 0$.

Згідно ***з методом невизначених коефіцієнтів*** *структура частинного розв'язку* y_* *ЛНДР формується за виглядом правої частини* $f(x)$ *з урахуванням того, коренем якої кратності* r $(r \geq 0)$ *служить характерне число* $z = a + bi$ *для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно* x *членах.*

Частинний розв’язок має вигляд

$$\boxed{y_* = x^r e^{ax}(\overline{P_s}(x)\cos bx + \overline{Q}_s(x)\sin bx)},$$

де $\overline{P_s}(x)$ і $\overline{Q}_s(x)$ − многочлени степеня $s = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Приклад 1. Записати структуру частинного розв’язку y_*:

$$y''+4y'+20y = e^{-2x}(x^2\cos 4x - \sin 4x).$$

□ $y''+4y'+20y = 0$; $k^2 + 4k + 20 = 0$; $D = -64$;

$k_{1,2} = -2 \pm 4i$; $z = a + bi = -2 + 4i$ − корінь кратності $r=1$; $s=\max\{2;0\}=2$;

$$y_*=x^1e^{-2x}((Ax^2+Bx+C)\cos 4x+(Dx^2+Ex+F)\sin 4x),$$

де A, B, C, D, E, F – невідомі коефіцієнти. ■

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-y'-2y=e^x(9\cos x-7\sin x)$.

□ $y''-y'-2y=0$; $k^2-k-2=0$; $D=9$; $k_1=2$;

$k_2=-1$; $\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$; $z=a+bi=1+i$ – не є коренем

$(r=0)$; $s=\max\{0;0\}=0$; $y_*=e^x(A\cos x+B\sin x)$;

$$y_*'=e^x(A\cos x+B\sin x)+e^x(-A\sin x+B\cos x)=e^x(A\cos x+$$

$$+B\sin x-A\sin x+B\cos x);\quad y_*''=e^x(A\cos x+B\sin x-$$

$$-A\sin x+B\cos x)+e^x(-A\sin x+B\cos x-A\cos x-B\sin x)=$$

$$=e^x(-2A\sin x+2B\cos x);$$

$$e^x(-2A\sin x+2B\cos x)-e^x(A\cos x+B\sin x-A\sin x+$$

$$+B\cos x)-2e^x(A\cos x+B\sin x)=e^x(9\cos x-7\sin x)\,|:e^x\neq 0;$$

$$-A\sin x+B\cos x-3A\cos x-3B\sin x=9\cos x-7\sin x;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos x & \left\{\begin{array}{lll} B-3A=9; & B=9+3B; & A=-2; \\ -A-3B=-7; & -A-27-9A=-7; & B=3; \end{array}\right. \\ \sin x & \end{array}$$

Отже, маємо загальний розв'язок

$$y=\bar{y}+y_*=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+e^x(-2\cos x+3\sin x).\ ■$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

$$y''+2y'+5y=12e^{-x}\sin 2x;\quad y(0)=0;\ y'(0)=5.$$

□ $y''+2y'+5y=0$; $k^2+2k+5=0$; $D=4-20=-16$;

$k_{1,2}=-1\pm 2i$; $\bar{y}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

$z=a+bi=-1+2i$ – корінь кратності $r=1$; $s=\max\{0;0\}=0$;

$$y_* = x^1 e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)\,; \quad y_*' = e^{-x}(A\cos 2x +$$

$$+ B\sin 2x) - xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2xe^{-x}(-A\sin 2x +$$

$$+ B\cos 2x)\,; \quad y_*'' = -2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4e^{-x} \times$$

$$\times(-A\sin 2x + B\cos 2x) - 3xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) -$$

$$- 4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x)\,;$$

$$- 2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4e^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) -$$

$$- 3xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) +$$

$$+ 2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 2xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) +$$

$$+ 4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) + 5xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) =$$

$$= 12e^{-x}\sin 2x \;\; | \div e^{-x} \neq 0\,;$$

$$- 2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 3Ax\cos 2x -$$
$$- 3Bx\sin 2x + 4Ax\sin 2x - 4Bx\cos 2x + 2A\cos 2x +$$
$$+ 2B\sin 2x - 2Ax\cos 2x - 2Bx\sin 2x - 4Ax\sin 2x +$$
$$+ 4Bx\cos 2x + 5Ax\cos 2x + 5Bx\sin 2x = 12\sin 2x\,;$$
$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 12\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{c|} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \quad \begin{cases} 4B = 0; \\ -4A = 12; \end{cases} \quad \begin{array}{l} B = 0; \\ A = -3; \end{array} \quad y_* = -3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y = \bar{y} + y_* = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - 3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y' = -e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 2e^{-x}(-C_1\sin 2x + C_2\cos 2x) -$$

$$- 3e^{-x}\cos 2x + 3xe^{-x}\cos 2x + 6xe^{-x}\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{r} y(0) = 0: \\ y'(0) = 5: \end{array} \begin{cases} C_1 = 0; \\ -C_1 + 2C_2 - 3 = 5; \end{cases} \begin{array}{l} C_1 = 0; \\ C_2 = 4; \end{array}$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$y_K = 4e^{-x}\sin 2x - 3xe^{-x}\cos 2x\,. \quad \blacksquare$$

Розглянемо більш детально окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв'язку y_* ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

1. Права частина – многочлен степеня n:

$$\boxed{f(x) = P_n(x), \quad P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n}.$$

Можливі наступні випадки структури y_* в залежності від того, чи є характерне число $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ коренем характеристичного многочлена:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює характерному числу $z = 0$, тобто $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$, то y_* шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня n з невизначеними коефіцієнтами: $\boxed{y_* = \overline{P_n}(x) = \overline{A}_0 x^n + \overline{A}_1 x^{n-1} + ... + \overline{A}_n}$.

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z = 0$, наприклад, $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$, то:

$$\boxed{y_* = x\overline{P_n}(x) = \overline{A}_0 x^{n+1} + \overline{A}_1 x^n + ... + \overline{A}_n x}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок:

$$\text{а) } y'' + 3y' + 2y = 1 - x^2; \qquad \text{б) } 7y'' - y' = 12x.$$

□ а) $y'' + 3y' + 2y = 0$; $k^2 + 3k + 2 = 0$; $D = 9 - 8 = 1$;

$$k_1 = -1; \ k_2 = -2; \ \overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x};$$

$$z = a + bi = 0 + 0i = 0 \ \text{ − не є коренем; } \ n = 2;$$

$$y_* = Ax^2 + Bx + C; \ y_*' = 2Ax + B; \ y_*'' = 2A;$$

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 1 - x^2;$$

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = 1 - x^2;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{ \begin{array}{ll} 2A = -1; & A = -1/2; \\ 6A + 2B = 0; & B = -3A = 3/2; \\ 2A + 3B + 2C = 1; & C = 1/2 - A - (3/2)B = -5/4; \end{array} \right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

$$y_* = -x^2/2 + (3/2)x - 5/4; \quad y = \bar{y} + y_*;$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - x^2/2 + (3/2)x - 5/4.$$

б) $7y'' - y' = 0; \quad 7k^2 - k = 0; \quad k(7k-1) = 0;$

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1/7; \quad \bar{y} = C_1 + C_2 e^{x/7};$$

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ − корінь кратності $r = 1$; $n = 1$;

$$y_* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx; \quad y_*' = 2Ax + B; \quad y_*'' = 2A;$$

$$7 \cdot 2A - (2Ax + B) = 12x; \ 14A - 2Ax - B = 12x;$$

$$-2Ax + (14A - B) = 12x; \quad \begin{array}{c|l} x^1 & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} -2A = 12; \\ 14A - B = 0; \end{cases}$} \\ x^0 & \end{array} \quad A = -6;$$

$$B = 14A; \quad B = -84; \quad y_* = -6x^2 - 84x;$$

$$y = \bar{y} + y_*; \quad y = C_1 + C_2 e^{x/7} - 6x^2 - 84x. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Підкреслимо, що у многочлені $P_n(x)$ коефіцієнти A_i, $i = \overline{1, n}$ можуть дорівнювати нулю. Але в будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо з повним многочленом $\overline{P_n}(x)$.

2. Права частина – добуток сталого множника на експоненту:

$$\boxed{f(x) = Ae^{ax}}.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z = a + 0i = a$ коренем характеристичного многочлена та якої кратності r, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює числу $z = a$, тобто $k_1 \neq a, k_2 \neq a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}e^{ax}}$.

б) Якщо тільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює $z = a$, наприклад, $k_1 = a,\ k_2 \neq a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}xe^{ax}}$.

в) Якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють числу $z = a$, тобто $k_1 = k_2 = a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}x^2 e^{ax}}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок:

а) $y''+4y'+3y=8e^{3x}$; б) $y''-5y'-6y=2e^{-x}$;

в) $3y''-6y'+3y=e^{x}$; г) $y''-4y=e^{-2x}$.

□ а) $y''+4y'+3y=0$; $k^2+4k+3=0$; $D=4$; $k_1=-1$;

$k_2=-3$; $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$; $z=a+bi=3+0i=3$

– не є коренем; $y_*=\overline{A}e^{3x}$; $y_*'=3\overline{A}e^{3x}$; $y_*''=9\overline{A}e^{3x}$;

$9\overline{A}e^{3x}+4\cdot 3\overline{A}e^{3x}+3\overline{A}e^{3x}=8e^{3x}$; $24\overline{A}e^{3x}=8e^{3x}$; $\overline{A}=1/3$;

$y_*=e^{3x}/3$; $y=\bar{y}+y_*$; $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}/3$.

б) $y''-5y'-6y=0$; $k^2-5k-6=0$; $D=49$; $k_1=-1$;

$k_2=6$; $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; $z=a+bi=-1+0i=-1$

– корінь кратності $r=1$; $y_*=\overline{A}xe^{-x}$; $y_*'=\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x}$;

$y_*''=-\overline{A}e^{-x}-\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}=-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}$;

$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5(\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x})-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x}$;

$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5\overline{A}e^{-x}+5\overline{A}xe^{-x}-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x}$;

$-7\overline{A}e^{-x}=2e^{-x}$; $\overline{A}=-2/7$; $y_*=(-2/7)xe^{-x}$;

$y=\bar{y}+y_*$; $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}-(2/7)xe^{-x}$.

в) $3y''-6y'+3y=0$; $y''-2y'+y=0$; $D=0$;

$k_1=k_2=k=1$; $\bar{y}=e^{x}(C_1+C_2x)$; $z=a+bi=1+0i=1$

– корінь кратності $r=2$; $y_*=\overline{A}x^2e^{x}$; $y_*'=2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x}$;

$y_*''=2\overline{A}e^{x}+2\overline{A}xe^{x}+2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x}=2\overline{A}e^{x}+4\overline{A}xe^{x}+$

$+\overline{A}x^2e^{x}$; $3(2\overline{A}e^{x}+4\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x})-6(2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x})+$

$+3\overline{A}x^2e^{x}=e^{x}$; $6\overline{A}e^{x}+12\overline{A}xe^{x}+3\overline{A}x^2e^{x}-12\overline{A}xe^{x}-$

$-6\overline{A}x^2e^{x}+3\overline{A}x^2e^{x}=e^{x}$; $6\overline{A}e^{x}=e^{x}$; $\overline{A}=1/6$;

$$y_* = x^2 e^x / 6;\quad y = \bar{y} + y_*;\quad y = e^x(C_1 + C_2 x) + x^2 e^x / 6.$$

(Рівняння г) розв'язати самостійно). ■

3. <u>Права частина – лінійна комбінація косинуса і синуса одного і того ж аргументу</u>:

$$\boxed{f(x) = A\cos bx + B\sin bx}.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z = 0 + bi = bi$ коренем характеристичного многочлена, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює $z = bi$, тобто $k_{1,2} \neq \pm bi$, то $y_* = \bar{A}\cos bx + \bar{B}\sin bx$.

$$\boxed{y_* = \bar{A}\cos bx + \bar{B}\sin bx}.$$

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z = bi$, тобто $k_{1,2} = \pm\beta i$ і $\beta = b$, то

$$\boxed{y_* = x(\bar{A}\cos bx + \bar{B}\sin bx)}.$$

<u>Зауваження 3</u>. A і B − довільні задані числа, одне з яких може дорівнювати нулю. У будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо у відповідному повному вигляді з $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

<u>Приклад 6</u>. Знайти загальний розв'язок:

а) $y'' - 6y' + 5y = 26\cos x$; б) $y'' + 16y = 4\cos 4x - 24\sin 4x$.

□ а) $y'' - 6y' + 5y = 0$; $k^2 - 6k + 5 = 0$; $D = 16$; $k_1 = 1$;

$k_2 = 5$; $\bar{y} = C_1 e^{5x} + C_2 e^x$; $z = a + bi = 0 + 1i = i$

− не є коренем; $y_* = \bar{A}\cos x + \bar{B}\sin x$; $y_*' = -\bar{A}\sin x +$

$+ \bar{B}\cos x$; $y_*'' = -A\cos x - B\sin x$; $-\bar{A}\cos x - \bar{B}\sin x -$

$- 6(-\bar{A}\sin x + \bar{B}\cos x) + 5(\bar{A}\cos x + \bar{B}\sin x) = 26\cos x$;

$-\bar{A}\cos x - \bar{B}\sin x + 6\bar{A}\sin x - 6\bar{B}\cos x + 5\bar{A}\cos x + 5\bar{B}\sin x =$

$= 26\cos x$; $(-\bar{A} - 6\bar{B} + 5\bar{A})\cos x + (-\bar{B} + 6\bar{A} + 5\bar{B})\sin x =$

$$= 26\cos x; \quad (4\overline{A} - 6\overline{B})\cos x + (6\overline{A} + 4\overline{B})\sin x = 26\cos x;$$

$$\begin{array}{c|}\cos x \\ \sin x\end{array} \begin{cases} 4\overline{A} - 6\overline{B} = 26; \\ 6\overline{A} + 4\overline{B} = 0; \end{cases} \begin{cases} \overline{B} = (-3/2)\overline{A}; \\ 4\overline{A} + 9\overline{A} = 26; \ \overline{A} = 2; \ \overline{B} = -3; \end{cases}$$

$$y_* = 2\cos x - 3\sin x; \quad y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 2\cos x - 3\sin x.$$

б) $y'' + 16y = 0$; $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$;

$$\overline{y} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x; \quad z = a + bi = 0 + 4i = 4i$$

− корінь кратності $r = 1$; $y_* = x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)$;

$$y_*' = \overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x + x(-4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x);$$

$$y_*'' = -4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x - 4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x +$$

$$+ x(-16\overline{A}\cos 4x - 16\overline{B}\sin 4x) = -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) -$$

$$-8A\sin 4x + 8B\cos 4x; \quad -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)x -$$

$$-8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x + 16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) = 4\cos 4x -$$

$$-24\sin 4x; \quad -8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x = 4\cos 4x - 24\sin 4x;$$

$$\begin{array}{c|}\cos 4x \\ \sin 4x\end{array} \begin{cases} 8\overline{B} = 4; & \overline{B} = 1/2; \\ -8\overline{A} = -24; & \overline{A} = 3; \end{cases}$$

$$y_* = x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x); \quad y = \overline{y} + y_*;$$

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x). \ \blacksquare$$

Зауваження 4. Якщо права частина $f(x)$ не має спеціального вигляду, то часто її можна подати як скінченну суму

$$\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)},$$

де кожний доданок $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ уже має спеціальний вигляд. Тоді за принципом суперпозиції $\boxed{y_* = y_{*1} + y_{*2} + \ldots + y_{*n}}$, де y_{*i} – частинний розв'язок рівняння $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)}$ з тією ж самою лівою і відповідною правою частиною, $i = \overline{1, n}$.

<u>Приклад 7</u>. Знайти загальний розв'язок

$$\text{а) } y''-2y'+6y=18e^{2x}-29\sin x;$$

$$\text{б) } y''+4y=12e^{-2x}+8x;.$$

□ а) Для відповідного ЛОДР $y''-2y'+6y=0$ розв'язуємо характеристичне рівняння

$$k^2-2k+6=0;\;\; D=-20;\; k_{1,2}=1\pm\sqrt{5}i$$

і записуємо його загальний розв'язок

$$\bar{y}=e^x(C_1\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x).$$

Права частина $f(x)=18e^{2x}-29\sin x$ не має спеціального вигляду, але її можна подати як суму двох доданків спеціального вигляду

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x), \text{ де } f_1(x)=18e^{2x},\; f_2(x)=-29\sin x.$$

Тоді $y_*=y_{*1}+y_{*2}$. Знайдемо окремо y_{*1} і y_{*2}:

$$z_1=a_1+b_1i=2+0i=2 \text{ – не є коренем; } \; y_{*1}=\overline{A}e^{2x};$$

$$y'_{*1}=2\overline{A}e^{2x};\;\; y''_{*1}=4\overline{A}e^{2x};\;\; 4\overline{A}e^{2x}-2\cdot 2\overline{A}e^{2x}+6\overline{A}e^{2x}=$$

$$=18e^{2x};\;\; 6\overline{A}e^{2x}=18e^{2x};\;\; \overline{A}=3;\quad y_{*1}=3e^{2x};$$

$$z_2=a_2+b_2i=0+1i=i \text{ – не є коренем; } y_{*2}=\overline{A}\cos x+\overline{B}\sin x;$$

$$y'_{*2}=-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x;\;\; y''_{*2}=-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x;$$

$$-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x-2(-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x)+6(\overline{A}\cos x+$$

$$+\overline{B}\sin x)=-29\sin x;$$

$$-(5\overline{A}-2\overline{B})\cos x+(2\overline{A}+5\overline{B})\sin x=-29\sin x;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos x & \\ \sin x & \end{array}\begin{cases} 5\overline{A}-2\overline{B}=0; \\ 2\overline{A}+5\overline{B}=-29; \end{cases} \begin{cases} \overline{B}=(5/2)\overline{A}; \\ 2\overline{A}+5\cdot(5/2)\overline{A}=-29; \end{cases}$$

$$\overline{A}=-2;\;\; \overline{B}=-5;\;\; y_{*2}=-2\cos x-5\sin x;$$

$$y_*=y_{*1}+y_{*2}=3e^{2x}-2\cos x-5\sin x.$$

Отже, загальний розв’язок ЛНДР

$$y = \bar{y} + y_* = e^x(C_1 \cos\sqrt{5}x + C_2 \sin\sqrt{5}x) +$$

$$+ 3e^{2x} - 2\cos x - 5\sin x\,.$$

(Рівняння б) розв’язати самостійно). ■

<u>Приклад 8</u>. Розв’язати задачу Коші:

а) $y'' + 4y' = -16x + 8 + 40\sin 2x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 7$;

б) $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-x} + 6\cos x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$.

□ а) $y'' + 4y' = 0$; $k^2 + 4k = 0$; $k(k+4) = 0$; $k_1 = 0$;

$$k_2 = -4;\quad \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-4x};\quad f(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

$$f_1(x) = -16x + 5;\quad f_2(x) = 40\sin 2x;\quad y_* = y_{*1} + y_{*2};$$

$z_1 = a_1 + b_1 i = 0 + 0i = 0$ − корінь кратності $r = 1$; $n = 1$;

$$y_{*1} = (\overline{A}x + \overline{B})x = \overline{A}x^2 + \overline{B}x;\quad y'_{*1} = 2\overline{A}x + \overline{B};\quad y''_{*1} = 2\overline{A};$$

$$2\overline{A} + 4(2\overline{A}x + \overline{B}) = -16x + 8;\quad 8\overline{A}x + 2\overline{A} + 4\overline{B} = -16x + 8;$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \left\{\begin{array}{ll} 8\overline{A} = -16; & \overline{A} = -2; \\ 2\overline{A} + 4\overline{B} = 8; & 2\cdot(-2) + 4\overline{B} = 8;\ \overline{B} = 3; \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array}\quad y_{*1} = -2x^2 + 3x;$$

$z_2 = a_2 + b_2 i = 0 + 2i = 2i$ − не є коренем;

$$y_{*2} = \overline{A}\cos 2x + \overline{B}\sin 2x;\quad y'_{*2} = -2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x;$$

$$y''_{*2} = -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x;\quad -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x +$$

$$+ 4(-2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x) = 40\sin 2x;$$

$$(-4\overline{A} + 8\overline{B})\cos 2x + (-8\overline{A} - 4\overline{B})\sin 2x = 40\sin 2x;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & \left\{\begin{array}{ll} -4\overline{A} + 8\overline{B} = 0; & \overline{A} = 2\overline{B}; \\ -8\overline{A} - 4\overline{B} = 40; & -8\cdot 2\overline{B} - 4\overline{B} = 40;\ \overline{B} = -2;\ \overline{A} = -4; \end{array}\right. \\ \sin 2x & \end{array}$$

$$y_{*2} = -4\cos 2x - 2\sin 2x;\quad y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2x^2 + 3x -$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x;\quad y = \bar{y} + y_* = C_1 + C_2 e^{-4x} - 2x^2 + 3x -$$

$-4\cos 2x - 2\sin 2x$; $y' = -4C_2 e^{-4x} - 4x + 3 + 8\sin 2x -$

$-4\cos 2x$; $\begin{matrix} y(0)=3: \\ y'(0)=7: \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 - 4 = 3; & C_2 = -2; \\ -4C_2 + 3 - 4 = 7; & C_1 = 7 - C_2 = 9; \end{cases}$

$$y_K = 9 - 2e^{-4x} - 2x^2 + 3x - 4\cos 2x - 2\sin 2x .$$

(Задачу б) розв'язати самостійно). ■

Приклад 9. Розв'язати крайову задачу

$$y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x} + 28;\quad y(0) = 7;\ y(1) = 7 + 3e^2 .$$

□ $y'' - 4y' + 4y = 0$; $k^2 - 4k + 4 = 0$; $D = 0$; $k_1 = k_2 = k = 2$;

$\bar{y} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$; $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; $f_1(x) = 10e^{2x}$;

$f_2(x) = 28$; $y_* = y_{*1} + y_{*2}$; $z_1 = a_1 + b_1 i = 2 + 0i = 2$ – корінь кратності $r = 2$; $y_{*1} = \overline{A}x^2 e^{2x}$; $y'_{*1} = 2\overline{A}xe^{2x} + 2\overline{A}x^2 e^{2x}$;

$y''_{*1} = 2\overline{A}e^{2x} + 4\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}x^2 e^{2x} = 2\overline{A}e^{2x} +$

$+ 8\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}x^2 e^{2x}$; $2\overline{A}e^{2x} + 8\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}x^2 e^{2x} -$

$-4(2\overline{A}xe^{2x} + 2\overline{A}x^2 e^{2x}) + 4\overline{A}x^2 e^{2x} = 10e^{2x}$; $2\overline{A}e^{2x} = 10e^{2x}$;

$\overline{A} = 5$; $y_{*1} = 5x^2 e^{2x}$; $z_2 = a_2 + b_2 i = 0 + 0i = 0$ – не є коренем;

$n = 0$; $y_{*2} = \overline{A}$; $y'_{*2} = 0$; $y''_{*2} = 0$; $4\overline{A} = 28$; $\overline{A} = 7$;

$$y_{*2} = 7;\qquad y_* = y_{*1} + y_{*2} = 5x^2 e^{2x} + 7;$$

$$y = \bar{y} + y_* = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 5x^2 e^{2x} + 7;$$

$$\begin{matrix} y(0)=7: \\ y(1)=7+3e^2: \end{matrix} \begin{cases} C_1 e^2 + 7 = 7; & C_1 = 0; \\ (C_1 + C_2)e^2 + 7 = 7 + 3e^2; & C_2 = 3; \end{cases}$$

$$y_b = 3xe^{2x} + 5x^2 e^{2x} + 7 .\ ■$$

Зауваження 5. Для ЛНДР довільного n-го порядку $(n \geq 2)$ зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),\ \ a_i = const \in R,\ i = \overline{1,n},$$

де права частина $f(x)$ має вказаний вище спеціальний вигляд, загальний розв'язок ЛНДР також шукаємо у вигляді $y = \overline{y} + y_*$, де $\overline{y}$ − загальний розв'язок відповідного ЛОДР, y_* − деякий частинний розв'язок ЛНДР. Правила знаходження частинного розв'язку y_* аналогічні розглянутим для випадку ЛНДР другого порядку.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок

а) $y^{IV} - 18y'' + 81y = 216e^{-3x}$; б) $y''' - 2y'' + y' = 300\cos 3x$;

в) $y^{IV} - y = 15\cos 2x$.

□ а) $y^{IV} - 18y'' + 81y = 0$; $k^4 - 18k^2 + 81 = 0$;

$(k^2 - 9)^2 = 0$; $k_1 = -3$ − корінь кратності $r_1 = 2$; $k_2 = 3$ − корінь кратності $r_2 = 2$; $\overline{y} = e^{-3x}(C_1 + C_2x) + e^{3x}(C_3 + C_4x)$;

$z = a + bi = -3 + 0i = -3$ − корінь кратності $r_1 = 2$;

$y_* = \overline{A}x^2e^{-3x}$; $y'_* = 2\overline{A}xe^{-3x} - 3\overline{A}x^2e^{-3x}$; $y''_* = 2\overline{A}e^{-3x} - 6\overline{A}xe^{-3x} - 6\overline{A}xe^{-3x} + 9\overline{A}x^2e^{-3x} = 2\overline{A}e^{-3x} - 12\overline{A}xe^{-3x} + 9\overline{A}x^2e^{-3x}$; $y'''_* = -6\overline{A}e^{-3x} - 12\overline{A}e^{-3x} + 36\overline{A}xe^{-3x} + 18\overline{A}xe^{-3x} - 27\overline{A}x^2e^{-3x} = -18\overline{A}e^{-3x} + 54\overline{A}xe^{-3x} - 27\overline{A}x^2e^{-3x}$; $y^{IV} = 54\overline{A}e^{-3x} + 54\overline{A}e^{-3x} - 162\overline{A}xe^{-3x} - 54\overline{A}xe^{-3x} + 81\overline{A}x^2e^{-3x} = 108\overline{A}e^{-3x} - 216\overline{A}xe^{-3x} + 81\overline{A}x^2e^{-3x}$;

$108\overline{A}e^{-3x} - 216\overline{A}xe^{-3x} + 81\overline{A}x^2e^{-3x} - 18(2\overline{A}e^{-3x} - 12\overline{A}xe^{-3x} + 9\overline{A}x^2e^{-3x}) + 81\overline{A}x^2e^{-3x} = 216e^{-3x}$; $108\overline{A}e^{-3x} = 216e^{-3x}$;

$\overline{A} = 2$; $y_* = 2x^2e^{-3x}$;

$$y = \overline{y} + y_* = e^{-3x}(C_1 + C_2x) + e^{3x}(C_3 + C_4x) + 2x^2e^{-3x}.$$

б) $y''' - 2y'' + y' = 0$; $k^3 - 2k^2 + k = 0$; $k(k-1)^2 = 0$;

$k_1 = 0$; $k_2 = 1$ − корінь кратності $r_2 = 2$; $\overline{y} = C_1 + e^x(C_2 + C_3x)$;

$z = a + bi = 0 + 3i = 3i$ − не є коренем; $y_* = \overline{A}\cos 3x + \overline{B}\sin 3x$;

$y'_* = -3\overline{A}\sin 3x + 3\overline{B}\cos 3x$; $y''_* = -9\overline{A}\cos 3x - 9\overline{B}\sin 3x$;

$y'''_* = 27\overline{A}\sin 3x - 27\overline{B}\cos 3x$; $27\overline{A}\sin 3x - 27\overline{B}\cos 3x - 2\times$

$\times(-9\overline{A}\cos 3x - 9\overline{B}\sin 3x) - 3\overline{A}\sin 3x + 3\overline{B}\cos 3x = 300\cos 3x$;

$24\overline{A}\sin 3x - 24\overline{B}\cos 3x + 18\overline{A}\cos 3x + 18\overline{B}\sin 3x = 300\cos 3x$;

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x & \\ \sin 3x & \end{array}\begin{cases} 18\overline{A} - 24\overline{B} = 300; & \overline{B} = -(4/3)\overline{A}; \\ 24\overline{A} + 18\overline{B} = 0; & 18\overline{A} + 32\overline{A} = 300; \end{cases} \quad \overline{A} = 6;$$

$\overline{B} = -8$; $y_* = 6\cos 3x - 8\sin 3x$; $y = \overline{y} + y_* =$

$= C_1 + e^x(C_2 + C_3x) + 6\cos 3x - 8\sin 3x$.

в) $y^{IV} - y = 0$; $k^4 - 1 = 0$; $(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$;

$k^2 - 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm 1$; $k^2 + 1 = 0$; $k_{3,4} = \pm i$;

$\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x$; $z = a + bi =$

$= 0 + 2i = 2i$ − не є коренем; $y_* = \overline{A}\cos 2x + \overline{B}\sin 2x$;

$y'_* = -2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x$; $y''_* = -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x$;

$y'''_* = 8\overline{A}\sin 2x - 8\overline{B}\cos 2x$; $y^{IV} = 16\overline{A}\cos 2x + 16\overline{B}\sin 2x$;

$16\overline{A}\cos 2x + 16\overline{B}\sin 2x - \overline{A}\cos 2x - \overline{B}\sin 2x = 15\cos 2x$;

$15\overline{A}\cos 2x + 15\overline{B}\sin 2x = 15\cos 2x$;

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & \\ \sin 2x & \end{array}\begin{cases} 15\overline{A} = 15; & \overline{A} = 1; \\ 15\overline{B} = 0; & \overline{B} = 0; \end{cases} \quad y_* = \cos 2x;$$

$y = \overline{y} + y_* = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x + \cos 2x$. ■

Приклад 11. Розв’язати задачу Коші:

$y''' + 4y' = 32x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 6$; $y''(0) = -8$.

□ $y''' + 4y' = 0$; $k^3 + 4k = 0$; $k(k^2 + 4) = 0$; $k_1 = 0$;

$$k_{2,3} = \pm 2i\,; \quad \bar{y} = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x\,;$$

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ − корінь кратності $r = 1$; $n = 1$;

$$y_* = (\overline{A}x + \overline{B})x = \overline{A}x^2 + \overline{B}x\,; \quad y'_* = 2\overline{A}x + \overline{B}\,; \quad y''_* = 2\overline{A}\,;$$

$$y'''_* = 0\,; \quad 4(2\overline{A}x + \overline{B}) = 32x\,; \quad 8\overline{A}x + 4\overline{B} = 32x\,;$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \begin{cases} 8\overline{A} = 32; & \overline{A} = 4; \\ 4\overline{B} = 0; & \overline{B} = 0; \end{cases} \\ x^0 & \end{array} \quad y_* = 4x^2; \quad y = \bar{y} + y_* = C_1 +$$

$$+ C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + 4x^2\,; \quad y' = -2C_2\sin 2x +$$

$$+ 2C_3\cos x + 8x\,; \quad y'' = -4C_2\cos 2x - 2C_3\sin 2x + 8\,;$$

$$\begin{array}{r} y(0) = 0: \\ y'(0) = 6: \\ y''(0) = -8: \end{array} \begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ 2C_3 = 6; \\ -4C_2 = -8; \end{cases} \begin{cases} C_3 = 3; \\ C_2 = 2; \\ C_1 + 2 = 0; \quad C_1 = -2; \end{cases}$$

$$y_K = -2 + 2\cos 2x + 3\sin 2x + 4x^2\,. \quad \blacksquare$$

2.4.7. Застосування лінійних диференціальних рівнянь для дослідження електричних коливань

До ЛНДР другого порядку приводить вивчення проходження струму в електричному колі.

Розглянемо електричний контур, що складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C, які підключенні до джерела електрорушійної сили (ЕРС) E, що змінюється з бігом часу t за відомим законом $E = E(t)$ (рис. 56). Дослідимо, як змінюється сила струму в контурі $I = I(t)$ з часом t.

Для елементів R, L і C виконуються відомі з фізики співвідношення, що зв'язують падіння напруги на кінцях елемента $U(t)$ та силу струму в ньому $I(t)$:

$$U_R(t) = R\,I_R(t)\,; \;\; U_L(t) = L\,\frac{dI_L(t)}{dt}\,;$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_C(t)\,dt + U_C(0),$$

де $U_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t = 0$.

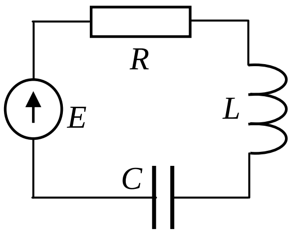

Рис. 56

При послідовному сполученні сила струму у всіх елементах однакова:

$$I_R(t) = I_L(t) = I_C(t) = I(t).$$

За другим законом Кірхгофа алгебраїчна сума падінь напруги на всіх елементах замкнутого контура дорівнює ЕРС:

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = E(t).$$

Тому

$$R\,I(t) + L\,\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt + U_C(0) = E(t).$$

Диференціюючи по t отриману рівність, дістанемо для сили струму $I = I(t)$ ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$R\,\frac{dI(t)}{dt} + L\,\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{dE(t)}{dt};$$

$$I'' + 2\alpha I' + \omega_0^2 I = (1/L)E',$$

де $\alpha = R/(2L)$; $\omega_0^2 = 1/(LC)$ і для скорочення запису опущено аргумент t.

Загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді $I = \bar{I} + I_*$, де $\bar{I}$ − загальний розв'язок відповідного ЛОДР, I_* − деякий частинний розв'язок ЛНДР.

Розглянемо відповідне однорідне ДР $I'' + 2\alpha I' + \omega_0^2 I = 0$, характеристичне рівняння якого $k^2 + 2\alpha k + \omega_0^2 = 0$.

1. Нехай активний опір відсутній $R = 0$, тоді $\alpha = 0$ і ЛОДР набуває вигляду $I'' + \omega_0^2 I = 0$. Спрощене характеристичне рівняння $k^2 + \omega_0^2 = 0$ має уявні спряжені корені $k_{1,2} = \pm\omega_0 i$. Загальний

розв'язок $\bar{I} = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$ відповідає вільним незатухаючим коливанням і його можна записати як $\bar{I} = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$, де A і φ – нові довільні сталі, що зв'язані з C_1 і C_2 рівностями $C_1 = A\sin\varphi$ і $C_2 = A\cos\varphi$. Використовується наступна термінологія: ω_0 – власна кругова частота; A – амплітуда; φ – початкова фаза.

2. Нехай активний опір такий великий, що $\alpha > \omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння має різні дійсні корені $k_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$ і $k_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$. Загальний розв'язок $\bar{I} = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$ не містить періодичних складових (коливання відсутні) і прямує до нуля при $t \to \infty$.

3. Нехай активний опір задовольняє умову $\alpha = \omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння $k^2 + 2\alpha k + \omega_0^2 = 0$ має один дійсний корінь $k = -\alpha < 0$ кратності $r = 2$. Загальний розв'язок $\bar{I} = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$, як і в попередньому випадку, не містить періодичних складових (коливання відсутні) і прямує до нуля при $t \to \infty$.

4. Нехай активний опір такий малий, що $\alpha < \omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $k_{1,2} = -\alpha \pm \omega i$, де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} > 0$. Загальний розв'язок $\bar{I} = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)e^{-\alpha t}$ відповідає затухаючим коливанням з круговою частотою ω. Його можна записати у формі $I = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$, де A і φ – нові довільні сталі, що зв'язані з C_1 і C_2 рівностями $C_1 = A\sin\varphi$ і $C_2 = A\cos\varphi$. Амплітуда коливань $Ae^{-\alpha t}$ прямує до нуля при $t \to \infty$.

При розгляді неоднорідного ДР обмежимося лише найважливішим випадком малого опору R, коли $\alpha < \omega_0$, і періодичної ЕРС $E = E_0 \sin\tilde{\omega} t$, де E_0 – амплітуда; $\tilde{\omega}$ – кругова частота. Тоді права частина ЛНДР $f(t) = (1/L)E' = (\tilde{\omega} E_0 / L)\cos\tilde{\omega} t$ має спеціальний вигляд. Частинний розв'язок I_* шукаємо у відповідній формі $I_* = \overline{A}\cos\tilde{\omega}t + \overline{B}\sin\tilde{\omega}t$, оскільки характерне число $z = a + bi = 0 + \tilde{\omega}i = \tilde{\omega}i$ не є коренем характеристичного рівняння. Знайдемо коефіцієнти $\overline{A}$ і $\overline{B}$:

$$I_*' = -\overline{A}\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}t + \overline{B}\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t\,;\;\; I_*'' = -\overline{A}\tilde{\omega}^2\cos\tilde{\omega}t - \overline{B}\tilde{\omega}^2\sin\tilde{\omega}t\,;$$

$$-\overline{A}\tilde{\omega}^2\cos\tilde{\omega}t - \overline{B}\tilde{\omega}^2\sin\tilde{\omega}t + 2\alpha(-\overline{A}\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}t + \overline{B}\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t) +$$

$$+\omega_0^2(\overline{A}\cos\tilde{\omega}t + \overline{B}\sin\tilde{\omega}t) = (\tilde{\omega}E_0/L)\cos\tilde{\omega}t\,;\;\; (-\tilde{\omega}^2\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{B} +$$

$$+\omega_0^2\overline{A})\cos\tilde{\omega}t - (\tilde{\omega}^2\overline{B} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{A} - \omega_0^2\overline{B})\sin\tilde{\omega}t = (\tilde{\omega}E_0/L)\cos\tilde{\omega}t\,;$$

$$\begin{array}{l|} \cos\tilde{\omega}t \\ \sin\tilde{\omega}t \end{array}\;\; \begin{cases} -\tilde{\omega}^2\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{B} + \omega_0^2\overline{A} = \tilde{\omega}E_0/L; \\ -(\tilde{\omega}^2\overline{B} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{A} - \omega_0^2\overline{B}) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{B} = \tilde{\omega}E_0/L; \\ 2\alpha\tilde{\omega}\overline{A} - (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\overline{B} = 0; \end{cases}\;\; \overline{B} = (2\alpha\tilde{\omega}\overline{A})\big/(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\,;$$

$$(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}(2\alpha\tilde{\omega}\overline{A})\big/(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) = \tilde{\omega}E_0/L\,;$$

$$\overline{A} = \frac{\tilde{\omega}E_0(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}{L((\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2\tilde{\omega}^2)};\;\; \overline{B} = \frac{2\alpha\tilde{\omega}^2E_0}{L((\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2\tilde{\omega}^2)}.$$

Частинний розв'язок I_* відповідає вимушеним коливанням. Його можна подати у вигляді $I_* = \overline{N}\sin(\tilde{\omega}t + \overline{\varphi})$, де амплітуда $\overline{N}$ знаходиться за формулою:

$$\overline{N} = \sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2} = \left(\tilde{\omega}E_0/L\right)\Big/\sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2\tilde{\omega}^2}\,.$$

Амплітуда $\overline{N}$ вимушених коливань, як функція від $\tilde{\omega}$, досягає максимуму при $\tilde{\omega} = \omega_0$ (дослідження на екстремум за допомогою похідної проробіть самостійно) і

$$\overline{N}_{max} = E_0\big/(2L\alpha) = E_0\big/(2L\cdot R/(2L)) = E_0\big/R\,.$$

Таким чином, якщо частота $\tilde{\omega}$ зовнішнього збудження (електрорушійної сили) співпадає з частотою ω_0 вільних коливань

$\tilde{\omega} = \omega_0$, то амплітуда вимушених коливань при досить малому активному опорі R досягає дуже великого значення $\overline{N}_{max} = E_0 / R$. Це явище називається ***резонансом***.

Можна показати (зробіть це самостійно), що у випадку відсутності активного опору R (вільні коливання) при резонансі, коли $E = E_0 \sin \omega_0 t$, частинний розв'язок I_* має вигляд $I_* = (E_0 /(2L)) t \sin \omega_0 t$, тобто амплітуда вимушених коливань необмежено зростає (лінійно з бігом часу t).

2.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

2.5.1. Загальні поняття

У багатьох задачах потрібно знайти не одну, а декілька невідомих функцій, які характеризують взаємодіючі об'єкти. що описуються системою диференціальних рівнянь.

При розгляді специфічних підходів до розв'язування диференціальних систем обмежимося лише найпростішою ***нормальною системою лінійних ДР першого порядку (СЛДР) зі сталими коефіцієнтами***, що має вигляд:

$$\begin{cases} dx_1 / dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1(t); \\ dx_2 / dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n / dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n(t), \end{cases}$$

де t − аргумент; $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ − шукані функції; $a_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ − сталі коефіцієнти (відомі дійсні числа); $b_1(t), b_2(t), \ \ldots, b_n(t)$ − вільні члени (відомі неперервні функції). Число n називається ***порядком*** системи.

Якщо всі вільні члени $b_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ тотожно рівні нулю $b_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, то система називається ***однорідною***, в протилежному випадку – ***неоднорідною***. У матричній формі однорідну та неоднорідну системи можна записати відповідно так:

$$\boxed{\frac{dX}{dt}=AX}\;; \qquad \boxed{\frac{dX}{dt}=AX+B}\,,$$

де

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\ \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \dots \\ dx_2/dt \end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи називається матриця-стовпець функцій $X=(x_1(t)\ x_2(t)\ \dots\ x_n(t))^T$, підстановка яких у рівняння системи перетворює їх у вірні тотожності. У $(n+1)$-вимірному просторі $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ йому відповідає ***інтегральна крива***.

За аналогією з диференціальними рівняннями визначаються ***загальний*** і ***частинний розв'язки***.

Загальний розв'язок неоднорідної СЛДР $dX/dt=AX+B$ можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\overline{X}$ відповідної однорідної системи $dX/dt=AX$ і будь-якого частинного розв'язку X_* неоднорідної системи: $X=\overline{X}+X_*$.

Загальний розв'язок однорідної СЛДР має вигляд лінійної комбінації

$$\boxed{\overline{X}=C_1X_1+C_2X_2+\dots+C_nX_n=M(t)C}\,,$$

де $M(t)=(X_1\,X_2\,\dots\,X_n)$ − ***фундаментальна матриця розв'язків***, складена з n лінійно незалежних частинних розв'язків $X_i=(x_{1i}\,x_{2i}\,\dots\,x_{ni})^T$, $i=\overline{1,n}$, що утворюють ***фундаментальну систему***; $C=(C_1\,C_2\,\dots\,C_n)^T$ − матриця-стовпець довільних сталих.

Фундаментальна матриця є квадратною n-го порядку і невиродженою (її визначник відмінний від нуля $|M(t)|\neq 0$).

Якщо нормальну систему доповнити ***початковими умовами*** $X(t_0)=X_0$, де $X_0=(x_{10}\,x_{20}\,\dots\,x_{n0})^T$ − матриця-стовпець; x_{i0},

$i = \overline{1, n}$ − задані дійсні числа, то одержимо для неї ***задачу Коші***. У цьому випадку справедлива відповідна теорема існування і єдиності розв’язку.

Зауваження. У більшості практично важливих випадків система, що складається з ДР довільного порядку, введенням додаткових шуканих функцій може бути зведена до системи, що включає ДР тільки першого порядку.

2.5.2. Матричний метод розв’язування однорідних систем

Матричний метод є видозміненим методом Ейлера розв’язування однорідних лінійних диференціальних рівнянь.

Подаючи нормальну однорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами як єдине матричне ДР $\boxed{dX/dt = AX}$, ненульовий розв’язок $X \neq 0$ шукаємо у вигляді добутку сталого матричного множника на змінний скаляр: $\boxed{X = Pe^{kt}}$, де $P = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)^T$ − матриця-стовпець невідомих сталих, $P \neq 0$; k − невідомий сталий коефіцієнт.

Підставляючи функцію $X = Pe^{kt}$ у рівняння, ліворуч при диференціюванні можна винести сталий матричний множник:

$$dX/dt = (Pe^{kt})' = P(e^{kt})' = Pe^{kt}k = kPe^{kt},$$

а праворуч у матричному добутку можна винести сталий скаляр:

$$AX = A(Pe^{kt}) = e^{kt}AP.$$

Поділивши обидві частини ДР на відмінну від нуля експоненту e^{kt}, дістанемо рівняння

$$kP = AP \quad \text{або} \quad (A - kE)P = 0,$$

що є матричним записом квадратної однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Відомо, що така система має ненульовий розв’язок $P \neq 0$, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\boxed{\det(A-kE)=0} \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Це алгебраїчне рівняння називається ***характеристичним***, його порядок n співпадає з порядком системи.

Шукані значення параметра k служать його коренями. Характеристичне рівняння степеня n має n коренів (із врахуванням їх кратності). Вони можуть бути дійсні чи комплексні, прості чи кратні. Можливі такі випадки: а) усі корені k_i, $i=\overline{1,n}$ − дійсні й різні: $k_i \neq k_j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{i+1,n}$; $k_i \in R$, $i=\overline{1,n}$; б) усі корені k_i різні, але серед них є комплексні попарно спряжені; в) серед дійсних і комплексно спряжених коренів k_i є кратні.

Для простоти обмежимося розглядом лише випадку а). При цьому кожному кореню k_i відповідає частинний розв'язок $X_i = P_i e^{k_i t}$, де матриця-стовпець $P_i = (p_{1i}\ p_{2i}\ \dots\ p_{ni})^T$ визначається з однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(A-k_iE)P_i = 0 \text{ або } \begin{cases} (a_{11}-k_i)p_{1i} + a_{12}p_{2i} + \dots + a_{1n}p_{ni} = 0; \\ a_{21}p_{1i} + (a_{22}-k_i)p_{2i} + \dots + a_{2n}p_{ni} = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}p_{1i} + a_{n2}p_{2i} + \dots + (a_{nn}-k_i)p_{ni} = 0. \end{cases}$$

Ця система невизначена і має безліч розв'язків, що залежать від однієї довільної сталої. Шукаючи один її частинний розв'язок, можна в матриці-стовпці P_i один з елементів вибрати довільно, наприклад, покласти рівним одиниці перший з них $p_{1i}=1$, а решту знайти з даної системи, заздалегідь відкидаючи з неї будь-яке одне рівняння, наприклад, останнє.

Частинні розв'язки $X_i = P_i e^{k_i t}$, $i=\overline{1,n}$, − лінійно незалежні й утворюють фундаментальну систему. Таким чином, загальний розв'язок $\overline{X}$ однорідної СЛДР має вигляд їх лінійної комбінації:

$$\overline{X} = M(t)C = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n \quad \text{або}$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ ... \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1x_{11} + C_2x_{12} + ... + C_nx_{1n} \\ C_1x_{21} + C_2x_{22} + ... + C_nx_{2n} \\ ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \\ C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + ... + C_nx_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} \; p_{12} \cdots p_{1n} \\ p_{21} \; p_{22} \cdots p_{2n} \\ ... \; ... \; ... \; ... \; ... \\ p_{n1} \; p_{n2} \cdots p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{k_1t} \\ C_2e^{k_2t} \\ ... \\ C_ne^{k_nt} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Записати однорідну СЛДР в матричній формі та знайти її загальний розв'язок матричним методом (за допомогою характеристичного рівняння) і подати його в матричній формі та звичайній скалярній формі:

$$\begin{cases} dx_1 / dt = 6x_1 - x_2; \\ dx_2 / dt = 3x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

□ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\dfrac{dX}{dt} = AX$ − матричний запис однорідної СЛДР.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - kE) = 0; \quad \begin{vmatrix} 6-k & -1 \\ 3 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \quad (6-k)(2-k) + 3 = 0;$$

$$k^2 - 8k + 15 = 0; \quad k_1 = 5; \quad k_2 = 3.$$

Кореню $k_1 = 5$ відповідає частинний розв'язок $X_1 = P_1e^{k_1t}$, де матриця-стовпець $P_1 = (p_{11} \; p_{21})^T$ визначається з однорідної лінійної алгебраїчної системи:

$$(A-k_1E)P_1=0\,;\quad \begin{cases}(6-5)\,p_{11}-p_{21}=0;\\ 3p_{11}+(2-5)\,p_{21}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}p_{11}-p_{21}=0;\\ 3p_{11}-3p_{21}=0.\end{cases}$$

$$p_{11}-p_{21}=0\,;\ p_{21}=p_{11}\,.$$

Покладаючи $p_{11}=1$ і вилучаючи з системи друге рівняння, знаходимо значення p_{21}:

$$p_{11}-p_{21}=0\,;\quad p_{21}=p_{11}\,;\quad p_{21}=1\,.$$

Аналогічно, кореню $k_2=3$ відповідає частинний розв'язок $X_2=P_2e^{k_2t}$, де матриця-стовпець $P_2=(p_{12}\ p_{22})^T$ визначається з однорідної лінійної алгебраїчної системи:

$$(A-k_2E)P_2=0\,;\quad \begin{cases}(6-3)\,p_{12}-p_{22}=0;\\ 3p_{12}+(2-3)\,p_{22}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}3p_{12}-p_{22}=0;\\ 3p_{12}-p_{22}=0.\end{cases}$$

Покладаючи $p_{12}=1$ і видаляючи з системи останнє рівняння, дістаємо значення p_{22}:

$$3p_{12}-p_{22}=0\,;\quad p_{22}=3p_{12}\,;\quad p_{22}=3\,.$$

Далі знаходимо загальний розв'язок в матричній формі:

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{k_1t}\\ C_2e^{k_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{5t}\\ C_2e^{3t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1e^{5t}+C_2e^{3t}\\ C_1e^{5t}+3C_2e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Звідси маємо загальний розв'язок в скалярній формі:

$$\overline{x}_1=C_1e^{5t}+C_2e^{3t}\,;\quad \overline{x}_2=C_1e^{5t}+3C_2e^{3t}\,.\quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases}dx_1/dt=6x_1-3x_2;\\ dx_2/dt=8x_1-4x_2\,;\end{cases}\quad x_1(0)=-1;\quad x_2(0)=7\,.$$

□ Спочатку матричним методом знаходимо загальний розв'язок:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\ \ A=\begin{pmatrix}6&-3\\8&-4\end{pmatrix};\ \ \frac{dX}{dt}=AX\ ;\ \ \det(A-kE)=0\,;$$

$$\begin{vmatrix}6-k&-3\\8&-4-k\end{vmatrix}=0\,;\ \ (6-k)(-4-k)+24=0\,;$$

$$k^2-2k=0\,;\ \ k_1=0\,;\ \ k_2=2\,;\ \ X_1=P_1e^{k_1t}=P_1e^{0t}=P_1\,;$$

$$P_1=(p_{11}\ p_{21})^T\,;\ \ (A-k_1E)P_1=0\,;\ \ \begin{cases}(6-0)\,p_{11}-3p_{21}=0;\\8p_{11}+(-4-0)\,p_{21}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2p_{11}-p_{21}=0;\\8p_{11}-4p_{21}=0.\end{cases}\ \ p_{11}=1\,;\ \ 2p_{11}-p_{21}=0\,;\ \ p_{21}=2p_{11}=2\,;$$

$$X_2=P_2e^{k_2t}=P_2e^{2t}\,;\ \ P_2=(p_{12}\ p_{22})^T\,;\ \ (A-k_2E)P_2=0\,;$$

$$\begin{cases}(6-2)\,p_{12}-3p_{22}=0;\\8p_{12}+(-4-2)\,p_{22}=0;\end{cases}\ \ \begin{cases}4p_{12}-3p_{22}=0;\\8p_{12}-6p_{22}=0.\end{cases}\ \ p_{12}=1\,;$$

$$4p_{12}-3p_{22}=0\,;\ \ p_{22}=(4/3)\,p_{12}=4/3\,;$$

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{k_1t}\\C_2e^{k_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{0t}\\C_2e^{2t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1+2C_2e^{2t}\\C_1+(4/3)C_2e^{2t}\end{pmatrix};\ \ \begin{cases}\overline{x}_1=C_1+2C_2e^{2t};\\\overline{x}_2=C_1+(4/3)C_2e^{2t}.\end{cases}$$

Далі з початкових умов визначаємо конкретні значення довільних сталих:

$$\begin{matrix}x_1(0)=-1:\\x_2(0)=7:\end{matrix}\ \begin{cases}C_1+2C_2=-1;\\C_1+(4/3)C_2=7;\end{cases}\ \begin{matrix}2C_2-(4/3)C_2=-1-7;\\C_2=-12;\ C_1=-1-2C_2=23.\end{matrix}$$

Отже, розв’язок задачі Коші:

$$\begin{cases}x_{1K}=23+2\cdot(-12)e^{2t}=23-24e^{2t};\\x_{2K}=23+(4/3)\cdot(-12)e^{2t}=23-16e^{2t}.\end{cases}\qquad\blacksquare$$

Зауваження. Загальний розв'язок однорідної СЛДР $dX/dt = AX$ можна записати у вигляді $\boxed{\overline{X} = M(t)C = e^{At}C}$, де фундаментальна матриця розв'язків $M(t)$ подана у формі ***матричної експоненти*** $\boxed{M(t) = e^{At}}$, яку можна знайти як функцію від матриці.

2.5.3. Розв'язування однорідних систем методом вилучення

Нормальну однорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n/dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

можна звести до одного лінійного однорідного рівняння того ж порядку зі сталими коефіцієнтами, вилучивши всі невідомі функції $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, крім довільно вибраної однієї, наприклад, $x_1(t)$. Розв'язавши його, отримаємо відповідну шукану функцію $x_1(t)$. Потім знайдемо всі інші функції з набору $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ за допомогою операції диференціювання.

Застосовуючи ***метод вилучення***, спочатку перше рівняння системи продиференціюємо по t і в одержане співвідношення замість похідних dx_i/dt, $i = \overline{1,n}$ підставимо їх вирази з нормальної системи. Дістанемо лінійне ДР другого порядку

$$d^2x_1/dt^2 = a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n .$$

Продовжуємо аналогічно процес, доки не отримаємо лінійне ДР n-го порядку

$$d^nx_1/dt^n = a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n)}x_n .$$

Потім з одержаних на попередніх $n-1$ етапах рівнянь треба виразити $x_i(t)$, $i = \overline{2,n}$ і підставити в останнє рівняння. У результаті дістанемо ЛОДР n-го порядку відносно функції $x_1(t)$. Знайшовши його загальний розв'язок $\overline{x}_1(t)$, інші функції $\overline{x}_i(t)$, $i=\overline{2,n}$ визначимо з попередніх проміжних співвідношень для $x_i(t)$, $i=\overline{2,n}$, в які треба підставити загальний розв'язок $\overline{x}_1(t)$ та його похідні $d^m\overline{x}_1/dt^m$, $m=\overline{1,n-1}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок однорідної СЛДР методом вилучення (за допомогою зведення до одного диференціального рівняння вищого порядку):

$$\begin{cases} dx_1/dt = 3x_1+3x_2; \\ dx_2/dt = 2x_1+4x_2. \end{cases}$$

□ Обидві частини першого рівняння системи диференціюємо по t і отримуємо ДР другого порядку:

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 3\,dx_2/dt\,.$$

Замість похідної dx_2/dt підставимо вираз з другого рівняння системи:

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 3(2x_1+4x_2)\,;$$

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 6x_1 + 12x_2\,.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію x_2:

$$x_2 = (1/3)\,dx_1/dt - x_1$$

і підставимо цей вираз замість x_2 у останнє рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 6x_1 + 12\cdot((1/3)\,dx_1/dt - x_1)\,;$$

$$d^2x_1/dt^2 = 7\,dx_1/dt - 6x_1\,;\;\; d^2x_1/dt^2 - 7\,dx_1/dt + 6x_1 = 0\,.$$

Одержане ЛОДР другого порядку розв'язуємо за допомогою характеристичного рівняння:

$$k^2-7k+6=0\,;\;\; k_1=1\,;\; k_2=6\,;\; \overline{x}_1 = C_1e^t + C_2e^{6t}\,.$$

Знайдемо похідну отриманого загального розв'язку

$$d\overline{x}_1/dt = C_1e^t + 6C_2e^{6t}$$

і підставимо вирази для $\overline{x}_1(t)$, $d\overline{x}_1/dt$ у співвідношення для x_2:

$$\bar{x}_2 = (1/3)(C_1 e^t + 6C_2 e^{6t}) - (C_1 e^t + C_2 e^{6t}) = -(2/3)C_1 e^t + C_2 e^{6t}.$$

Отже, загальний розв’язок СЛДР:

$$\bar{x}_1 = C_1 e^t + C_2 e^{6t};\ \bar{x}_2 = -(2/3)C_1 e^t + C_2 e^{6t}. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Розв’язати задачу Коші:

$$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 - 5x_2; \\ dx_2/dt = x_1 + 6x_2; \end{cases} \quad x_1(0) = 0;\ \ x_2(0) = -4.$$

□ Методом вилучення знаходимо загальний розв’язок:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - 5\,dx_2/dt;\ \ d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt -$$

$$-5(x_1 + 6x_2);\ \ d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - 5x_1 - 30x_2;$$

$$x_2 = (1/5)(4x_1 - dx_1/dt);\ \ d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - 5x_1 -$$

$$-30\cdot(1/5)(4x_1 - dx_1/dt);\ \ d^2x_1/dt^2 - 10\,dx_1/dt + 29x_1 = 0;$$

$$k^2 - 10k + 29 = 0;\ D = (-10)^2 - 4\cdot 29 = -16 < 0;\ k_{1,2} = 5 \pm 2i;$$

$$\alpha = 5;\ \ \beta = 2;\ \ \bar{x}_1 = e^{5t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t);\ \ d\bar{x}_1/dt = 5e^{5t}\times$$

$$\times(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) + 2e^{5t}(-C_1\sin 2t + C_2\cos 2t);$$

$$\bar{x}_2 = (1/5)\Big(4e^{5t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) - 5e^{5t}(C_1\cos 2t +$$

$$+C_2\sin 2t) - 2e^{5t}(-C_1\sin 2t + C_2\cos 2t)\Big) =$$

$$=(1/5)e^{5t}\big(-(C_1 + 2C_2)\cos 2t + (2C_1 - C_2)\sin 2t\big).$$

Таким чином, загальний розв’язок має вигляд:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = e^{5t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t); \\ \bar{x}_2 = (1/5)e^{5t}\big(-(C_1 + 2C_2)\cos 2t + (2C_1 - C_2)\sin 2t\big). \end{cases}$$

Конкретні значення довільних сталих дістаємо, враховуючи початкові умови:

$$\begin{matrix} x_1(0) = 0: \\ x_2(0) = -4: \end{matrix} \begin{cases} C_1 = 0; \\ -(1/5)(C_1 + 2C_2) = -4;\ \ C_2 = 10. \end{cases}$$

Отже, розв’язок задачі Коші:

$$x_{1K}=10e^{5t}\sin 2t;\ \ x_{2K}=-2e^{5t}(2\cos 2t+\sin 2t)\,. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти загальний розв'язок однорідної СЛДР двома способами: а) зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку; б) за допомогою характеристичного рівняння. Записати дану систему та її загальний розв'язок у матричній формі:

$$\begin{cases} dx/dt = x+y; \\ dy/dt = -2x+4y. \end{cases}$$

□ а) $x''=x'+y'$; $y'=-2x+4y$; $x''=x'-2x+4y$; $y=x'-x$;

$$x''=x'-2x+4x'-4x\,;\ \ x''-5x'+6x=0\,;\ \ k^2-5k+6=0\,;$$

$$k_1=2\,;\ \ k_2=3\,;\ \ \bar{x}=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}\,;\ \ \bar{x}'=2C_1e^{2t}+3C_2e^{3t}\,;$$

$$\bar{y}=2C_1e^{2t}+3C_2e^{3t}-C_1e^{2t}-C_2e^{3t}=C_1e^{2t}+2C_2e^{3t}\,.$$

Отже, загальний розв'язок:

$$\bar{x}=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}\,;\ \ \bar{y}=C_1e^{2t}+2C_2e^{3t}\,.$$

б) $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -2 & 4-k \end{vmatrix}=0$; $(1-k)(4-k)+2=0$; $k^2-5k+6=0$;

$$k_1=2\,;\ \ k_2=3\,;\ \ k=k_1=2:\ \begin{cases} (1-2)\,p_{11}+p_{21}=0; \\ -2\,p_{11}+(4-2)\,p_{21}=0; \end{cases}\ \ p_{21}=p_{11};$$

$$p_{11}=1\,;\ \ p_{21}=1;\ \ x_1=e^{2t};\ \ y_1=e^{2t}\,;$$

$$k=k_2=3:\ \begin{cases} (1-3)\,p_{12}+p_{22}=0; \\ -2\,p_{12}+(4-3)\,p_{22}=0; \end{cases}\ \ p_{22}=2\,p_{12}\,;$$

$$p_{12}=1\,;\ \ p_{22}=2\,;\ \ x_2=e^{3t};\ \ y_2=2e^{3t}\,;$$

Отже, загальний розв'язок:

$$\bar{x}=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}\,;\ \ \bar{y}=C_1e^{2t}+2C_2e^{3t}\,.$$

Запишемо систему та її загальний розв'язок у матричній формі запису система та її загальний розв'язок мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ \ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.5.4. Розв’язування неоднорідних систем методом варіації довільних сталих

Для розв’язування неоднорідної СЛДР можна застосувати ***метод варіації довільних сталих*** (***метод Лагранжа***), який уже розглядався стосовно неоднорідних лінійних ДР.

Розв’язуючи нормальну неоднорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами $\boxed{dX/dt = AX + B}$ цим методом, спочатку знаходимо загальний розв'язок $\overline{X}$ відповідної однорідної СЛДР $dX/dt = AX$ у вигляді лінійної комбінації:

$$\boxed{\overline{X} = M(t)C} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

$$\text{або} \quad \overline{x}_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} C_j x_{ij} = C_1 x_{i1} + C_2 x_{i2} + \ldots + C_n x_{in}, \quad i = \overline{1,n},$$

де $M(t) = (X_1 \; X_2 \; \ldots \; X_n)$ − квадратна фундаментальна матриця розв'язків, складена з n лінійно незалежних частинних розв'язків $X_i = (x_{1i} \; x_{2i} \; \ldots \; x_{ni})^T$, $i = \overline{1,n}$; $C = (C_1 \, C_2 \; \ldots \; C_n)^T$ − матриця-стовпець довільних сталих.

Далі шукаємо загальний розв’язок неоднорідної СЛДР у такому ж вигляді, тільки замінюючи довільні сталі C_i, $i = \overline{1,n}$ на невідомі поки що функції $C_i(t)$, $i = \overline{1,n}$:

$$\boxed{X = M(t)C(t)} = \sum\nolimits_{j=1}^{n} C_j(t) X_j = C_1(t) X_1 + C_2(t) X_2 + \ldots +$$

$$+ C_n(t) X_n \quad \text{або} \quad x_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} C_j(t) x_{ij} = C_1(t) x_{i1} +$$

$$+ C_2(t) x_{i2} + \ldots + C_n(t) x_{in}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Підставимо сформовану вектор-функцію $X = M(t)C(t)$ та її похідну

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}\big(M(t)C(t)\big) = M'(t)C(t) + M(t)C'(t)$$

у неоднорідну систему й отримаємо (для скорочення запису далі аргумент t опускаємо):

$$M'C + M\,C' = AM\,C + B; \quad M\,C' = (AM - M')C + B;$$

$$M\,C' = \sum_{i=1}^{n} C_i \underbrace{(AX_i - X_i')}_{=0} + B\,; \quad M\,C' = B\,,$$

де враховано, що $AX_i - X_i' = 0$, оскільки X_i – розв'язок відповідної однорідної системи.

Одержана квадратна система

$$\boxed{M\,C' = B} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1' x_{11} + C_2' x_{12} + \ldots + C_n' x_{1n} = b_1; \\ C_1' x_{21} + C_2' x_{22} + \ldots + C_n' x_{2n} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' x_{n1} + C_2' x_{n2} + \ldots + C_n' x_{nn} = b_n \end{cases}$$

є лінійною відносно похідної C' з відмінним від нуля визначником $|M| \neq 0$. Тому вона має єдиний розв'язок, який можна подати у вигляді:

$$C_i' = \varphi_i(t)\,, \ i = \overline{1, n}\,,$$

де $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ – відомі функції.

Інтегруючи останні рівності, знаходимо:

$$C_i = \int \varphi_i(t)\,dt + \tilde{C}_i\,, \ i = \overline{1, n}\,,$$

де $\tilde{C}_i$, $i = \overline{1, n}$ – нові довільні сталі.

Отже, маємо загальний розв’язок неоднорідної СЛДР:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\int \varphi_j(t)\,dt + \tilde{C}_j \right) x_{ij} = \left(\int \varphi_1(t)\,dt + \tilde{C}_1 \right) x_{i1} +$$

$$+ \left(\int \varphi_2(t)\,dt + \tilde{C}_2 \right) x_{i2} + \ldots + \left(\int \varphi_n(t)\,dt + \tilde{C}_n \right) x_{in}\,, \ i = \overline{1, n}\,.$$

Якщо покласти $\tilde{C}_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то дістанемо частинний розв’язок X_* неоднорідної системи:

$$x_{i*} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \int \varphi_j(t)\,dt = x_{i1} \int \varphi_1(t)\,dt + x_{i2} \int \varphi_2(t)\,dt + \ldots +$$

$$+ x_{in} \int \varphi_n(t)\,dt\,, \ i = \overline{1, n}\,.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідної СЛДР можна подати у вигляді суми $X = \overline{X} + X_*$.

<u>Приклад</u>. Розв'язати задачу Коші для неоднорідної СЛДР, будуючи загальний розв'язок відповідної однорідної системи матричним методом і знаходячи загальний розв'язок неоднорідної системи методом варіації довільних сталих:

$$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + x_2 - e^{2t}; \\ dx_2/dt = -3x_1 + 2x_2 + 6e^{2t}; \end{cases} \quad x_1(0) = 0;\ x_2(0) = 5.$$

□ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix};\ \dfrac{dX}{dt} = AX + B$

− матричний запис неоднорідної СЛДР.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - kE) = 0;\ \begin{vmatrix} -2-k & 1 \\ -3 & 2-k \end{vmatrix} = 0;\ (-2-k)(2-k) + 3 = 0;$$

$$k^2 - 4 + 3 = 0;\ k^2 = 1;\ k_{1,2} = \pm 1.$$

Знаходимо фундаментальну систему частинних розв'язків:

$$k_1 = 1:\ X_1 = P_1 e^{k_1 t};\ P_1 = (p_{11}\ p_{21})^T;$$

$$\begin{cases} (-2-1)p_{11} + p_{21} = 0; & -3p_{11} + p_{21} = 0; & p_{11} = 1; \\ -3p_{11} + (2-1)p_{21} = 0; & p_{21} = 3p_{11}; & p_{21} = 3; \end{cases}$$

$$k_2 = -1:\ X_2 = P_2 e^{k_2 t};\ P_2 = (p_{12}\ p_{22})^T;$$

$$\begin{cases} (-2+1)p_{12} + p_{22} = 0; & -p_{12} + p_{22} = 0; & p_{12} = 1; \\ -3p_{12} + (2+1)p_{22} = 0; & p_{22} = p_{12}; & p_{22} = 1; \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t};$$

$$x_{11} = e^t;\ x_{21} = 3e^t; \qquad x_{12} = e^{-t};\ x_{22} = e^{-t}.$$

Формуємо загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^t\\ C_2e^{-t}\end{pmatrix};\quad \begin{matrix}\overline{x}_1=C_1e^t+C_2e^{-t};\\ \overline{x}_2=3C_1e^t+C_2e^{-t}.\end{matrix}$$

За методом варіації довільних сталих загальний розв'язок неоднорідної системи шукаємо в аналогічному вигляді, розглядаючи C_1 і C_2 як нові невідомі функції від t:

$$x_1=C_1(t)e^t+C_2(t)e^{-t};\ \ x_2=3C_1(t)e^t+C_2(t)e^{-t}.$$

Складаємо і розв'язуємо, застосовуючи метод вилучення, лінійну алгебраїчну систему відносно похідних C_1' і C_2':

$$\begin{cases}C_1'x_{11}+C_2'x_{12}=b_1;\\ C_1'x_{21}+C_2'x_{22}=b_2;\end{cases}\quad \begin{cases}C_1'e^t+C_2'e^{-t}=-e^{2t};\\ 3C_1'e^t+C_2'e^{-t}=6e^{2t};\end{cases}$$

$$C_1'=-e^t-C_2'e^{-2t};\ \ 3(-e^t-C_2'e^{-2t})e^t+C_2'e^{-t}=6e^{2t};$$

$$-3e^{2t}-3C_2'e^{-t}+C_2'e^{-t}=6e^{2t};\ \ C_2'=-(9/2)e^{3t};$$

$$C_1'=-e^t+(9/2)e^{3t}e^{-2t}=(7/2)e^t.$$

Інтегруючи одержані співвідношення для похідних, знаходимо самі шукані функції $C_1(t)$ і $C_2(t)$:

$$C_1=(7/2)\int e^t dt=(7/2)e^t+\tilde{C}_1;$$

$$C_2=-(9/2)\int e^{3t}dt=-(3/2)e^{3t}+\tilde{C}_2.$$

Отже, маємо загальний розв'язок неоднорідної СЛДР:

$$x_1=(7e^t/2+\tilde{C}_1)e^t+(-3e^{3t}/2+\tilde{C}_2)e^{-t}=$$

$$=7e^{2t}/2+\tilde{C}_1e^t-3e^{2t}/2+\tilde{C}_2e^{-t}=\tilde{C}_1e^t+\tilde{C}_2e^{-t}+2e^{2t};$$

$$x_2=3(7e^t/2+\tilde{C}_1)e^t+(-3e^{3t}/2+\tilde{C}_2)e^{-t}=21e^{2t}/2+$$

$$+3\tilde{C}_1e^t-3e^{2t}/2+\tilde{C}_2e^{-t}=3\tilde{C}_1e^t+\tilde{C}_2e^{-t}+9e^{2t}.$$

Використаємо початкові умови і обчислимо конкретні значення довільних сталих $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$:

$$x_1(0)=0: \begin{cases} \tilde{C}_1+\tilde{C}_2+2=0; \\ 3\tilde{C}_1+\tilde{C}_2+9=5; \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{C}_2=-2-\tilde{C}_1; \\ 3\tilde{C}_1-2-\tilde{C}_1+9=5; \end{cases}$$
$$x_2(0)=5:$$

$$2\tilde{C}_1=-2\,;\;\; \tilde{C}_1=-1\,;\;\; \tilde{C}_2=-2-(-1)=-1\,.$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$x_{1K}=-e^t-e^{-t}+2e^{2t}\,;\;\; x_{2K}=-3e^t-e^{-t}+9e^{2t}\,.\;\; \blacksquare$$

Зауваження. Коли вільні члени $b_1(t),\, b_2(t),\; \ldots, b_n(t)$ мають спеціальний вигляд сум і добутку функцій − многочлена $P_n(t)$, експоненти e^{at}, косинуса $\cos bt$ або синуса $\sin bt$, то частинний розв'язок X_* неоднорідної системи можна шукати, застосовуючи принцип суперпозиції та метод невизначених коефіцієнтів. Правила побудови такого розв'язку аналогічні випадку одного ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду.

2.5.5. Розв’язування неоднорідних систем методом вилучення

Нормальну неоднорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами завжди можна звести до одного лінійного неоднорідного рівняння того ж порядку зі сталими коефіцієнтами, використовуючи ті самі прийоми, що у випадку однорідної системи.

Тому розгляд ***методу вилучення*** обмежимо конкретними прикладами застосування.

Приклад 1. Розв’язати задачу Коші для неоднорідної СЛДР методом вилучення (зведенням до одного ДР вищого порядку). Обчислити значення $\tilde{x}_1=x_{1K}(\tilde{t}\,)$; $\tilde{x}_2=x_{2K}(\tilde{t}\,)$ отриманого розв’язку в заданій точці $\tilde{t}$:

а) $\begin{cases} dx_1/dt=4x_1-x_2-5t+1; \\ dx_2/dt=x_1+2x_2+t-1; \end{cases}$ $\quad x_1(0)=3\,;\; x_2(0)=2\,;\; \tilde{t}=-1\,;$

б) $\begin{cases} dx_1/dt=-x_1+2x_2+\sin 2t; \\ dx_2/dt=-4x_1+3x_2; \end{cases}$ $\quad x_1(0)=2\,;\; x_2(0)=0\,;\; \tilde{t}=\pi\,.$

□ а) Обидві частини першого рівняння системи диференціюємо по t і отримуємо ДР II порядку:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - dx_2/dt - 5.$$

Замість похідної dx_2/dt підставимо вираз з другого рівняння системи:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - (x_1 + 2x_2 + t - 1) - 5;$$

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - x_1 - 2x_2 - t - 4.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію x_2:

$$x_2 = -dx_1/dt + 4x_1 - 5t + 1$$

і підставимо цей вираз замість x_2 у останнє рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - x_1 - 2(-dx_1/dt + 4x_1 - 5t + 1) - t - 4;$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 6\frac{dx_1}{dt} - 9x_1 + 9t - 6;\quad \frac{d^2x_1}{dt^2} - 6\frac{dx_1}{dt} + 9x_1 = 9t - 6.$$

Для одержаного ЛНДР другого порядку спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного ДР за допомогою характеристичного рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 - 6\,dx_1/dt + 9x_1 = 0;\;\; k^2 - 6k + 9 = 0;\;\; k_1 = k_2 = 3;$$

$$\bar{x}_1 = (C_1 + C_2 t)e^{3t}.$$

Оскільки права частина ЛНДР має спеціальний вигляд − многочлен першого степеня, то його частинний розв'язок x_{1*} будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$z = a + bi = 0 + 0i = 0 \text{ − не є коренем; } x_{1*} = At + B;$$

$$x'_{1*} = A;\;\; x''_{1*} = 0;\;\; -6A + 9At + 9B = 9t - 6;$$

$$\begin{array}{c|l} t^1 \\ t^0 \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 9A = 9; & A = 1; \\ -6A + 9B = -6; & -6\cdot 1 + 9B = -6;\; B = 0; \end{array}\right. \quad x_{1*} = t.$$

Тоді загальний розв’язок неоднорідного ДР можна подати у вигляді суми:

$$x_1 = \bar{x}_1 + x_{1*} = (C_1 + C_2 t)e^{3t} + t\,.$$

Знайдемо похідну отриманого загального розв'язку

$$dx_1 / dt = C_2 e^{3t} + 3(C_1 + C_2 t)e^{3t} + 1$$

і підставимо вирази для $x_1(t)$, dx_1 / dt у співвідношення для x_2:

$$x_2 = -C_2 e^{3t} - 3(C_1 + C_2 t)e^{3t} - 3 + 4(C_1 + C_2 t)e^{3t} + 4t - 5t + 1 =$$

$$= (-C_2 - 3C_1 - 3C_2 t + 4C_1 + 4C_2 t)e^{3t} - t - 2 =$$

$$= (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{3t} - t - 2\,.$$

Для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1 і C_2 використаємо початкові умови:

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = 3: & \begin{cases} C_1 = 3; \\ C_1 - C_2 - 2 = 2; \end{cases} \quad \begin{array}{l} C_1 = 3; \\ -C_2 = 4 - 3;\ C_2 = -1. \end{array} \\ x_2(0) = 2: & \end{array}$$

Отже, маємо розв'язок задачі Коші:

$$x_{1K} = (3 - t)e^{3t} + t;\ x_{2K} = (4 - t)e^{3t} - t - 2\,.$$

Обчислимо значення отриманого розв'язку в заданій точці:

$$\tilde{x}_1 = x_{1K}(-1) = (3 + 1)e^{-3} - 1 = 4e^{-3} - 1\,;$$

$$\tilde{x}_2 = x_{2K}(-1) = (4 + 1)e^{-3} + 1 - 2 = 5e^{-3} - 1.$$

(Задачу б) розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору $R = 3$ та індуктивності $L = 2$, зв'язані взаємною індукцією M, де $M = L/2 = 1$ (рис. 57). Знайти закон зміни сили струму в першому $I_1(t)$ та другому $I_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур у початковий момент часу $t = 0$ підключається до джерела зі змінною електрорушійною силою $E = E_0 \sin \tilde{\omega} t$, де $E_0 = 6$ – амплітуда; $\tilde{\omega} = 2$ – кругова частота (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення B в положення A).

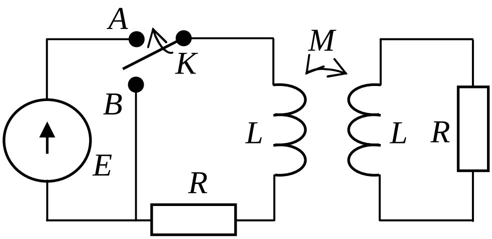

Рис. 57

□ У початковий момент $t=0$ обидва контури закорочені, тому початкова сила струму дорівнює нулю:

$$I_1(0)=0\,;\quad I_2(0)=0\,.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з контурів, одержимо лінійну диференціальну систему:

$$\begin{cases} RI_1+L\dfrac{dI_1}{dt}+M\dfrac{dI_2}{dt}=E;\\ RI_2+L\dfrac{dI_2}{dt}+M\dfrac{dI_1}{dt}=0. \end{cases}$$

Підставляючи конкретні дані з умови задачі, маємо

$$\begin{cases} 2I_1'+I_2'=-3I_1+6\sin 2t;\\ I_1'+2I_2'=-3I_2\,. \end{cases}$$

Розв’яжемо отриману систему відносно похідних I_1', I_2' (проробіть це самостійно методом Крамера) і запишемо її в нормальній формі:

$$\begin{cases} I_1'=-2I_1+I_2+4\sin 2t;\\ I_2'=I_1-2I_2-2\sin 2t. \end{cases}$$

Одержану нормальну СЛДР методом вилучення зведемо до одного ЛНДР другого порядку:

$$I_1''=-2I_1'+I_2'+8\cos 2t\,;\ \ I_1''=-2I_1'+I_1-2I_2-2\sin 2t+$$
$$+8\cos 2t\,;\ \ I_2=I_1'+2I_1-4\sin 2t\,;\ \ I_1''=-2I_1'+I_1-2(I_1'+$$
$$+2I_1-4\sin 2t)-2\sin 2t+8\cos 2t\,;\ \ I_1''+4I_1'+3I_1=$$
$$=8\cos 2t+6\sin 2t\,.$$

Загальний розв’язок $\bar{I}_1$ відповідного ЛОДР знайдемо за допомогою характеристичного рівняння:

$$I_1''+4I_1'+3I_1=0;\quad k^2+4k+3=0;\quad k_1=-3;\quad k_2=-1;$$

$$\bar{I}_1=C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}.$$

Оскільки число $z=a+bi=0+2i=2i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок I_{1*} ЛНДР, що відповідає правій частині, шукаємо у вигляді

$$I_{1*}=A\cos 2t+B\sin 2t.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів (проробіть це самостійно), дістанемо значення A і B:

$$A=-56/65;\qquad B=14/13.$$

Тоді $\qquad I_{1*}=-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t.$

Загальний розв'язок I_1 ЛНДР знайдемо як суму отриманих розв'язків:

$$I_1=\bar{I}_1+I_{1*}=C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t.$$

Продиференціюємо одержану функцію $I_1=I_1(t)$, а потім підставимо вирази для I_1 і I_1' у співвідношення для I_2:

$$I_1'=-3C_1e^{-3t}-C_2e^{-t}+(112/65)\sin 2t+(28/13)\cos 2t;$$

$$I_2=-3C_1e^{-3t}-C_2e^{-t}+(112/65)\sin 2t+(28/13)\cos 2t+$$

$$+2(C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t)-4\sin 2t=$$

$$=-C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}+(28/65)\cos 2t-(8/65)\sin 2t.$$

Враховуючи початкові умови, визначимо конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{matrix} I_1(0)=0: \\ I_2(0)=0: \end{matrix}\ \begin{cases} C_1+C_2-56/65=0; & 2C_1-84/65=0; \\ -C_1+C_2+28/65=0; & 2C_2-28/65=0; \end{cases}$$

$$C_1=42/65;\quad C_2=14/65.$$

Отже, шукані закони зміни сили струму (розв'язок задачі Коші для диференціальної системи):

$$I_1=(42/65)e^{-3t}+(14/65)e^{-t}-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t;$$

$$I_2 = -(42/65)e^{-3t} + (14/65)e^{-t} + (28/65)\cos 2t - (8/65)\sin 2t\ .$$

■

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати крайову задачу для неоднорідної СЛДР зведенням до одного ДР вищого порядку:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 - \cos t; \\ dx_2/dt = -x_1 + \sin t; \end{cases} \quad x_1(-\pi) = -\pi\ ;\ x_2(\pi) = 3\ .$$

Записати систему та знайдений розв'язок у матричній формі.

$$\square\ d^2x_1/dt^2 = dx_2/dt + \sin t\ ;\ \ d^2x_1/dt^2 = -x_1 + \sin t + \sin t\ ;$$

$$d^2x_1/dt^2 + x_1 = 2\sin t\ ;\ \ d^2x_1/dt^2 + x_1 = 0\ ;\ \ k^2 + 1 = 0\ ;$$

$$k_{1,2} = \pm i\ ;\ \ \bar{x}_1 = C_1\cos t + C_2\sin t\ ;\ \ z = a + bi = 0 + 1i = i$$

$$\text{– корінь кратності } r = 1;\ \ x_{1*} = t(A\cos t + B\sin t)\ ;$$

$$x'_{1*} = A\cos t + B\sin t + t(-A\sin t + B\cos t)\ ;$$

$$x''_{1*} = -A\sin t + B\cos t - A\sin t + B\cos t +$$

$$+ t(-A\cos t - B\sin t) = -2A\sin t + 2B\cos t - t(A\cos t + B\sin t)\ ;$$

$$-2A\sin t + 2B\cos t - t(A\cos t + B\sin t) + t(A\cos t + B\sin t) =$$

$$= 2\sin t\ ;\ -2A\sin t + 2B\cos t = 2\sin t\ ;$$

$$\begin{array}{r|l} \cos x & \\ \sin x & \end{array} \begin{cases} -2A = 2; & A = -1; \\ 2B = 0; & B = 0; \end{cases} \quad x_{1*} = -t\cos t\ ;$$

$$x_1 = \bar{x}_1 + x_{1*} = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t\ ;$$

$$x_2 = dx_1/dt + \cos t\ ;\ \ dx_1/dt = -C_1\sin t + C_2\cos t - \cos t + t\sin t\ ;$$

$$x_2 = -C_1\sin t + C_2\cos t - \cos t + t\sin t + \cos t =$$

$$= C_2\cos t - C_1\sin t + t\sin t\ .$$

Використавши крайові умови, отримаємо конкретні значення довільних сталих:

$$\begin{array}{r} x_1(-\pi) = -\pi: \\ x_2(\pi) = 3: \end{array} \begin{cases} C_1 - \pi = -\pi; \\ C_2 = 3; \end{cases} \quad C_1 = 0\ .$$

Отже, маємо розв'язок крайової задачі:

$$x_{1b} = 3\sin t - t\cos t;\quad x_{2b} = 3\cos t + t\sin t.$$

Запишемо СЛДР та її розв'язок у матричній формі:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix};\quad \frac{dX}{dt} = AX + B;$$

$$\begin{pmatrix} x_{1b} \\ x_{2b} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Метод вилучення може застосовуватися до системи, що складається з ДР довільного порядку. При цьому немає потреби спочатку зводити її до системи, що включає ДР тільки першого порядку. Раціональніше безпосередньо переходити до одного ДР вищого порядку.

<u>Приклад 4</u>. Розв'язати задачу Коші для системи, що включає ДР другого порядку, зведенням до одного ДР вищого порядку:

$$\begin{cases} x'' = 2x + y + 4t; & x(0) = 0; & y(0) = -4; \\ y'' = 2x' + y' - 24t; & x'(0) = 2; & y'(0) = 16. \end{cases}$$

□ Двічі продиференціюємо перше рівняння системи:

$$x''' = 2x' + y' + 4;\quad x^{IV} = 2x'' + y''.$$

Замість другої похідної y'' підставимо вираз з другого рівняння системи:

$$x^{IV} = 2x'' + 2x' + y' - 24t.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію y і продиференціюємо одержану рівність:

$$y = x'' - 2x - 4t;\quad y' = x''' - 2x' - 4.$$

Підставимо цей вираз замість y' у останнє рівняння:

$$x^{IV} = 2x'' + 2x' + x''' - 2x' - 4 - 24t;\quad x^{IV} - x''' - 2x'' = -24t - 4.$$

Для отриманого ЛНДР четвертого порядку спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР за допомогою характеристичного рівняння:

$$x^{IV} - x''' - 2x'' = 0;\;\; k^4 - k^3 - 2k^2 = 0;\;\; k^2(k^2 - k - 2) = 0;$$

$$k^2 = 0;\;\; k_1 = k_2 = k = 0;\;\; k^2 - k - 2 = 0;\;\; k_3 = -1;\;\; k_4 = 2;$$

$$\overline{x} = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 e^{2t}.$$

Правою частиною цього ЛНДР служить многочлен першого степеня $f(t) = -24t - 4$. Частинний розв'язок x_* будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$z = a + bi = 0 + 0i = 0 \text{ − корінь кратності } r = 2;$$

$$x_* = (At + B)t^2 = At^3 + Bt^2;\;\; x_*' = 3At^2 + 2Bt;\;\; x_*'' = 6At + 2B;$$

$$x_*''' = 6A;\;\; x_*^{IV} = 0;\;\; 0 - 6A - 2(6At + 2B) = -24t - 4;$$

$$-6A - 12At - 4B = -24t - 4;$$

$$\begin{array}{c|l} t^1 & \left\{\begin{array}{ll} -12A = -24; & A = 2; \\ -6A - 4B = -4; & -6 \cdot 2 - 4B = -4;\;\; B = -2; \end{array}\right. \\ t^0 & \end{array} \qquad x_* = 2t^3 - 2t^2.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР можна подати у вигляді суми:

$$x = \overline{x} + x_* = C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} + C_4 e^{2t} + 2t^3 - 2t^2.$$

Знайдемо другу похідну отриманого загального розв'язку і підставимо вирази для $x(t)$, $x''(t)$ у співвідношення для y:

$$x' = C_2 - C_3 e^{-t} + 2C_4 e^{2t} + 6t^2 - 4t;\;\; x'' = C_3 e^{-t} + 4C_4 e^{2t} +$$

$$+ 12t - 4;\;\; y = C_3 e^{-t} + 4C_4 e^{2t} + 12t - 4 - 2(C_1 + C_2 t + C_3 e^{-t} +$$

$$+ C_4 e^{2t} + 2t^3 - 2t^2) - 4t = -2C_1 - 2C_2 t - C_3 e^{-t} + 2C_4 e^{2t} -$$

$$- 4t^3 + 4t^2 + 8t - 4.$$

Для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1, C_2, C_3 і C_4 використаємо початкові умови:

$$y' = -2C_2 + C_3 e^{-t} + 4C_4 e^{2t} - 12t^2 + 8t + 8;$$

$$
\begin{array}{r}
x(0)=0: \\
y(0)=-4: \\
x'(0)=2: \\
y'(0)=16:
\end{array}
\begin{cases}
C_1+C_3+C_4=0; \\
-2C_1-C_3+2C_4-4=-4; \\
C_2-C_3+2C_4=2; \\
-2C_2+C_3+4C_4+8=16;
\end{cases}
\begin{cases}
C_1+C_3+C_4=0; \\
-2C_1-C_3+2C_4=0; \\
C_2-C_3+2C_4=2; \\
-2C_2+C_3+4C_4=8.
\end{cases}
$$

Одержану лінійну алгебраїчну систему $AC=B$ розв'яжемо методом Гаусса:

$$
(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & -2 & 1 & 4 & 8
\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & -2 & 1 & 4 & 8
\end{array}\right)\sim
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 4 & 8
\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 8 & 12
\end{array}\right)\sim
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 12 & 12
\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right).
$$

$$
\begin{cases}
C_1+C_3+C_4=0; \\
C_2-C_3+2C_4=2; \\
\qquad C_3+4C_4=0; \\
\qquad\qquad C_4=1;
\end{cases}
\qquad
\begin{array}{r}
C_4=1; \\
C_3=-4C_4=-4; \\
C_2=2+C_3-2C_4=-4; \\
C_1=-C_3-C_4=3.
\end{array}
$$

Отже, маємо розв'язок задачі Коші:

$$
x_K=3-4t-4e^{-t}+e^{2t}+2t^3-2t^2=-4e^{-t}+e^{2t}+2t^3-
$$

$$
-2t^2-4t+3;\quad y_K=-6+8t+4e^{-t}+2e^{2t}-4t^3+4t^2+
$$

$$
+8t-4=4e^{-t}+2e^{2t}-4t^3+4t^2+16t-10.\ \blacksquare
$$

2.6. Контрольні запитання

1. Що таке диференціальне рівняння? Як визначається його порядок?
2. Який загальний вигляд ДР n–го порядку? Його канонічний (нормальний) вигляд?
3. Що називається розв'язком ДР?
4. Що таке інтегральна крива ДР?
5. Що називається загальним розв'язком ДР? Частинним розв'язком? Який їх геометричний зміст?
6. Що таке початкові та крайові умови? Як ставиться початкова задача (задача Коші)? Крайова задача?
7. Що таке особливий розв'язок ДР?
8. Як для ДР першого порядку формулюється теорема Коші (існування та єдиності розв'язку)? У чому її геометричний зміст?
9. Що називається ізоклиною? У чому полягає метод ізоклин наближеного розв'язування ДР першого порядку ?
10. Як методом Ейлера наближено будується розв'язок задачі Коші для ДР першого порядку?
11. У чому полягає метод ітерацій (метод Пікара) наближеного розв'язування задачі Коші для ДР першого порядку?
12. Що таке ДР з відокремлюваними змінними?
13. Яка функція називається однорідною k-го порядку однорідності?
14. Що таке ДР з однорідною правою частиною (однорідне рівняння)?
15. За допомогою якої підстановки однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
16. Яке ДР першого порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?
17. Як будується розв'язок ЛНДР першого порядку методом варіації довільної сталої?
18. Як розв'язується ЛНДР першого порядку методом Бернуллі?
19. Яке ДР першого порядку називається рівнянням Бернуллі? Як воно розв'язується?
20. Які основні типи ДР другого порядку допускають зниження порядку? Наведіть відповідні заміни шуканої функції.
21. Яке ДР n-го порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?

22. Яка система функцій $y_1(x),\ y_2(x), ...,\ y_n(x)$ $(n \geq 2)$ називається лінійно залежною? Лінійно незалежною?
23. Сформулюйте ознаку лінійної залежності чи незалежності системи n частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ одного ЛОДР n-го порядку.
24. Що таке фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР n-го порядку?
25. Яка структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку?
26. Що таке характеристичне рівняння для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
27. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
28. Яка структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку?
29. У чому полягає принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР?
30. Як будується розв'язок ЛНДР другого порядку методом варіації довільних сталих?
31. Для ЛНДР що таке права частина спеціального вигляду?
32. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?
33. Який вигляд має ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке описує процеси в електричному контурі, що складається з послідовно сполучених активного опору, індуктивності і ємності? У чому полягає явище резонансу в такому електричному колі?
34. Який вигляд має нормальна система лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами? Наведіть матричний запис однорідної та неоднорідної систем.
35. Який вигляд має загальний розв'язок однорідної СЛДР?
36. У чому полягає матричний метод розв'язування однорідних систем?
37. У чому полягає метод вилучення розв'язування однорідної СЛДР?
38. Як розв'язується неоднорідна СЛДР методом варіації довільних сталих?
39. Як розв'язується неоднорідна СЛДР методом вилучення?

2.7. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

№ в-та	Завдання
1	$4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
2	$\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
3	$6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$
4	$(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$
5	$6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
6	$y(4+e^x)dy-e^xdx=0$
7	$2xdx-2ydy=x^2ydy-xy^2dx$
8	$(e^x+8)dy-ye^xdx=0$
9	$(3+e^x)yy'=e^x$
10	$\sqrt{5+y^2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$
11	$6xdx-2ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$
12	$6xdx-ydy=x^2ydy-3xy^2dx$
13	$xdx-ydy=x^2ydy-xy^2dx$
14	$(1+e^x)yy'=e^x$
15	$2xdx-ydy=x^2ydy-xy^2dx$
16	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
17	$\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
18	$x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$
19	$y'y\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=0$
20	$x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$

21	$\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x=0$
22	$x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$
23	$(1+e^x)y'=ye^x$
24	$y\ln y+2xy'=0$
25	$\sqrt{1-x^2}\,y'+xy^2+x=0$
26	$4(x^2y+y)dy+\sqrt{5+y^2}\,dx=0$
27	$(1+y^2)^{3/2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$
28	$\sqrt{4+y^2}\,dx+4(x^2y+y)dy=0$
29	$y(1+\ln y)+3x^2y'=0$
30	$2xy^2+2x+\sqrt{2-x^2}\,y'=0$

Завдання 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння першого порядку з однорідною правою частиною.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y'=\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2$	16	$xy'=\frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$
2	$xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y$	17	$xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$
3	$x^2y'=y^2-xy+x^2$	18	$xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$
4	$y'=\frac{x+2y}{2x-y}$	19	$xy'=\frac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$
5	$3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$	20	$y'=\frac{x+y}{x-y}$

6	$y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+6$	21	$y'=\dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$
7	$xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y$	22	$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$
8	$xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$	23	$xy'=\sqrt{4x^2-y^2}+y$
9	$2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+8$	24	$y'=\dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$
10	$y'=\dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$	25	$3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+10$
11	$xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$	26	$xy'=\dfrac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$
2	$4y'=\dfrac{y^2}{x^2}+10\dfrac{y}{x}+5$	27	$y'=\dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$
13	$2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+3$	28	$xy'=\dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$
14	$y'=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$	29	$y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+12$
15	$xy'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$	30	$y'=\dfrac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$

Завдання 3. Розв’язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. (Знайти частинний розв’язок $y_K = y_K(x)$ диференціального рівняння, що задовольняє вказаній початковій умові). Задачу розв’язати двома способами:

а) методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа);

б) за допомогою підстановки Бернуллі.

Обчислити значення $\tilde{y} = y_K(\tilde{x})$ отриманого розв’язку в заданій точці $\tilde{x}$.

№ в-та	Завдання
1	$y'-4y/x=x^5e^{-x}$; $y(1)=0$; $\tilde{x}=2$
2	$y'+y\sin x=3\sin 2x$; $y(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
3	$(x^2-1)y'-2xy=x(x^2-1)^2$; $y(0)=3$; $\tilde{x}=2$
4	$xy'-y=x^2\sin x$; $y(\pi/2)=1$; $\tilde{x}=\pi$
5	$y'+y/(2x)=x^2$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=2$
6	$x^2y'-(2x-5)y=5x^2$; $y(2)=4$; $\tilde{x}=1$
7	$y'+y/x=-2\ln x/x$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=e$
8	$y'+2y/x=x^3$; $y(1)=-5/6$; $\tilde{x}=2$
9	$y'-2xy/(1+x^2)=1+x^2$; $y(1)=2$; $\tilde{x}=2$
10	$y'+y/(3x)=2/x$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=2$
11	$y'+2xy=xe^{-x^2}$; $y(0)=1$; $\tilde{x}=1$
12	$(1+x)y'-2y=e^x(1+x)^3$; $y(0)=1$; $\tilde{x}=1$
13	$xy'-3y=x^4e^{-2x}$; $y(1)=-e^{-2}/2$; $\tilde{x}=-1$
14	$y'-4xy=-4x^3$; $y(0)=-1/2$; $\tilde{x}=1$
15	$y'-3x^2y=x^2(1+x^3)$; $y(0)=0$; $\tilde{x}=1$
16	$y'-3y/x=-2/x^2$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=2$
17	$y'-y\,ctg\,x=2x\sin x$; $y(\pi/2)=0$; $\tilde{x}=\pi/4$
18	$y'+y\,ctg\,x=\cos^2 x$; $y(\pi/2)=2$; $\tilde{x}=\pi/4$
19	$(x+1)y'-y=e^x(x+1)^2$; $y(0)=1$; $\tilde{x}=1$
20	$y'+y/(2x)=\sqrt{x}\sin 2x$; $y(\pi)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
21	$y'+y/x=e^x(x+1)/x$; $y(1)=e$; $\tilde{x}=2$
22	$y'-y/x=-12/x^3$; $y(1)=4$; $\tilde{x}=2$
23	$y'+y/(2x)=3x$; $y(1)=0$; $\tilde{x}=2$

24	$y'+(1-2x)y\big/x^2=1;\ \ y(1)=1;\ \tilde{x}=2$
25	$y'+2xy=-2x^3;\ y(1)=1/e;\ \tilde{x}=-1$
26	$y'-2xy=-x^3;\ y(0)=3;\ \tilde{x}=1$
27	$(1-x^2)y'-xy=x(1-x^2);\ y(0)=-1/3;\ \tilde{x}=1/2$
28	$y'-2y\cos x=6\cos x;\ y(0)=3;\ \tilde{x}=\pi$
29	$y'-y/x=-\ln x\big/x;\ y(1)=1;\ \tilde{x}=e$
30	$y'+y\cos x=6\sin 2x;\ y(0)=-1;\ \tilde{x}=\pi$

Завдання 4. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, що допускає зниження порядку заміною змінної $y'=p$, де $p=p(x)$ – нова шукана функція. (Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання
1	$x\,y''+y'=\ln x;\ y(1)=-1/4;\ y'(2)=-1/4$
2	$y''-y'ctg\,x=\sin x;\ y(\pi/2)=0;\ y'(\pi/2)=\pi/2$
3	$x\,y''=(2x^2+1)\,y';\ y(1)=0;\ y'(1)=e$
4	$y''-2\,y'ctg\,x=\sin^3 x;\ y(\pi/2)=1;\ y'(\pi/2)=0$
5	$x\,y''=y'\ln y';\ y(1)=0;\ y'(1)=e$
6	$y''+xy'=2x(1-x^2);\ y(0)=3;\ y'(0)=-2$
7	$xy''-y'=x^2e^x;\ y(1)=0;\ y'(1)=e$
8	$y''+(1-x)\,(y')^2=0;\ y(1)=1;\ y'(1)=-1/2$
9	$x^2y''+2\sqrt{y'}=0;\ y(1)=0;\ y'(1)=4$
10	$y''=y'/x+2\sqrt{y'/x};\ y(e)=0;\ y'(e)=1$
11	$(x^2+1)\,y''-2x\ y'=2x;\ y(0)=3;\ y'(0)=0$

12	$(x^2-1)\,y''+2xy'=3x^2$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$
13	$xy''\ln x=y'$; $y(e)=0$; $y'(e)=1$
14	$2\,x\,y'\,y''=(y')^2+1$; $y(1)=1$; $y'(1)=0$
15	$y''-y'tg\,x=\cos^2 x$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$
16	$3\,x\,(y')^2\,y''=(y')^3-1$; $y(1)=12$; $y'(1)=2$
17	$(x^2+1)y''+(y')^2+1=0$; $y(0)=-2$; $y'(0)=0$
18	$y''+y'tg\,x=2\cos^2 x$; $y(0)=2$; $y'(0)=-1$
19	$x\,y''e^{y'}=e^{y'}+1$; $y(1)=-1$; $y'(1)=0$
20	$y''(e^x+1)+e^x y'=0$; $y(0)=3$; $y'(0)=1/2$
21	$x\,y''-y'=2x^2\cos 2x$; $y(\pi)=1$; $y'(\pi)=0$
22	$y''=y'/x+(y'/x)\,\ln(y'/x)$; $y(1)=0$; $y'(1)=e$
23	$y''+y'\mathrm{tg}\,x=\sin 2x$; $y(0)=3$; $y'(0)=-2$
24	$(x^2+1)\,y'\,y''=x\left(1+(y')^2\right)$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$
25	$y''-y'ctg\,x=ctg\,x$; $y(\pi/2)=0$; $y'(\pi/2)=-1$
26	$y''=y'/x+tg\,(y'/x)$; $y(1)=0$; $y'(1)=\pi/2$
27	$y''+y'ctg\,x=\sin^2 x$; $y(\pi/2)=1$; $y'(\pi/2)=0$
28	$x\,y''-y'=x\sin(y'/x)$; $y(1)=2$; $y'(1)=\pi/2$
29	$x\,y''\ln x-y'=x\ln^2 x$; $y(e)=0$; $y'(e)=e$
30	$(x^2+1)\,y''+2\,x\,y'=1/x^2$; $y(1)=-1$; $y'(1)=0$

Завдання 5. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, що допускає зниження порядку заміною змінної $y'=p$, де $p=p(y)=p\big(y(x)\big)$ – нова шукана функція. (Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання
1	$(y')^2 = yy''+y^2y'$; $y(1)=1$; $y'(1)=-1$
2	$(y^2+1)y''=(y')^3+y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
3	$2y\,y''=2y(y')^2-e^{2y}$; $y(0)=0$; $y'(0)=e$
4	$2yy''=4+(y')^2$; $y(0)=4$; $y'(0)=0$
5	$y''=2yy'$; $y(1)=2$; $y'(1)=4$
6	$yy''=(y')^2\ln y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=e$
7	$4y''\sqrt{y}=1$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
8	$2\sqrt{y}y''+(y')^3=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
9	$yy''+(y')^2=(y')^3y$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$
10	$yy''=(y')^2+y^4$; $y(0)=2$; $y'(0)=4$
11	$yy''-(y')^2=y'$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$
12	$yy''=(y')^3-y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=\sqrt{2}$
13	$y''=2\sqrt{y'}e^y$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$
14	$yy''-(y')^2=2y^3y'$; $y(0)=2$; $y'(0)=8$
15	$y''=2(y')^2 ctg\, y$; $y(0)=\pi/2$; $y'(0)=1$
16	$(y')^2+yy''=yy'$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$
17	$yy''-(y')^2=y^2\ln y$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
18	$3y\,y'\,y''=(y')^3+1$; $y(0)=1$; $y'(0)=0$
19	$y''=(y')^3\sin y$; $y(0)=\pi$; $y'(0)=-1$
20	$y^2y''=(2y^2+1)(y')^3$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$
21	$yy''-2(y')^2=0$; $y(0)=2$; $y'(0)=4$
22	$y^2y''+4(y')^{3/2}=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=4$
23	$4y^2+(y')^2-2yy''=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=2$
24	$3(y')^2=y''(y-1)$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$

25	$yy''-(y')^2=3y^4y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
26	$yy''-(y')^2=2yy'\ln y$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
27	$y^2y''+y(y')^2=1$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$
28	$y''(y')^2=8y$; $y(1)=1$; $y'(1)=2$
29	$y''=2y^2\sqrt{y'}$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
30	$y''+3y^2(y')^3=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$

Завдання 6. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Задачу розв'язати двома способами:
а) методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа);
б) методом невизначених коефіцієнтів за виглядом правої частини.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y''+3y'+2y=-6x^2$	16	$y''-4y'+8y=8x^2$
2	$y''-3y'=9x^2+4x$	17	$y''-8y'+16y=32x^2$
3	$y''+4y=8x^2-5x$	18	$y''-2y'=4x^2-3x+2$
4	$y''+2y'+5y=5x^2+6$	19	$y''+2y'-15y=12x^2$
5	$y''+9y=9x^2-4$	20	$y''+8y'+16y=16x^2$
6	$y''+4y=8x^2-12$	21	$y''+6y'+9y=24x^2$
7	$y''-4y=12x^2+5x$	22	$y''+y=6x^2-5$
8	$y''-4y'=24x^2+2x$	23	$y''-5y'+6y=18x^2$
9	$y''-3y'-18y=36x$	24	$y''+13y'+12y=24x$
10	$y''-4y'+4y=-4x^2$	25	$y''+2y'-8y=-8x^2$
11	$y''-2y'=6x^2+3x-2$	26	$y''-2y'-3y=3x^2+x$

12	$y''+3y'-10y=20x^2$	27	$y''+2y'+y=6x^2+2$
13	$y''-4y'=2x^2+3x$	28	$y''+3y'+4y=8x^2$
14	$y''+4y=8x^2+3x$	29	$y''-6y'+9y=9x^2$
15	$y''+4y'+4y=4x^2$	30	$y''+16y=32x^2+6x$

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y''-y'-2y=6e^{-x}$	16	$y''+3y'-10y=-12e^{2x}$
2	$y''+4y'+4y=9e^{-2x}$	17	$y''+9y=36e^{-3x}$
3	$y''+2y'-3y=8e^{x}$	18	$y''-4y'+3y=-4e^{x}$
4	$y''+y'-6y=2e^{-2x}$	19	$y''-6y'+9y=4e^{3x}$
5	$y''-2y'=8e^{2x}$	20	$y''-2y'-8y=8e^{-2x}$
6	$y''-4y'-12y=12e^{-2x}$	21	$y''+4y'=12e^{-4x}$
7	$y''-3y'+2y=12e^{2x}$	22	$y''-4y'-32y=8e^{4x}$
8	$y''-4y'+4y=6e^{2x}$	23	$y''+6y'+9y=16e^{x}$
9	$y''+2y'+y=18e^{-x}$	24	$y''-4y'+5y=18e^{2x}$
10	$y''+y'-2y=6e^{-2x}$	25	$y''+4y'+20y=8e^{-2x}$
11	$y''+3y'+2y=-2e^{-2x}$	26	$y''-9y=8e^{-3x}$
12	$y''+2y'-15y=12e^{3x}$	27	$y''-4y'=8e^{4x}$
13	$y''+3y'-28y=-2e^{4x}$	28	$y''-2y'=18e^{2x}$
14	$y''-2y'-24y=18e^{-4x}$	29	$y''-2y'-48y=35e^{-6x}$
15	$y''-5y'-6y=8e^{-x}$	30	$y''+4y'+8y=-6e^{-2x}$

Завдання 8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y''-2y'=4\sin 2x$	16	$y''-4y'+4y=10\cos 4x$
2	$y''-2y'+10y=3\cos 3x$	17	$y''+4y'+5y=10\cos 2x$
3	$y''-2y'+5y=6\sin 2x$	18	$y''+6y'+25y=6\sin 3x$
4	$y''+2y'=8\cos 2x$	19	$y''+2y'+17y=65\cos x$
5	$y''-6y'+13y=12\cos 2x$	20	$y''+2y'+5y=17\cos 2x$
6	$y''+4y'+8y=-2\sin 2x$	21	$y''-4y'+8y=20\cos 2x$
7	$y''+2y'+10y=4\sin 3x$	22	$y''-4y'+20y=8\sin 4x$
8	$y''+y=2\cos x-3\sin x$	23	$y''-2y'+17y=-\sin 4x$
9	$y''-8y'+17y=8\cos x$	24	$y''+8y'+16y=3\cos x$
10	$y''+6y'+18y=6\cos 2x$	25	$y''-6y'+9y=2\sin 3x$
11	$y''-2y'+y=4\sin 6x$	26	$y''+4y=2\cos x-\sin x$
12	$y''+9y=3\cos 3x$	27	$y''-4y'+40y=2\sin x$
13	$y''-6y'+18y=3\sin x$	28	$y''+3y'=4\sin 3x-\cos 3x$
14	$y''-10y'+25y=4\sin x$	29	$y''+6y'+13y=51\cos 2x$
15	$y''+y=2\cos 3x+\sin 3x$	30	$y''+16y=2\cos 4x$

Завдання 9. Розв'язати задачу Коші. (Знайти частинний розв'язок $y_K = y_K(x)$ диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам). Обчислити значення $\tilde{y} = y_K(\tilde{x})$ отриманого розв'язку в заданій точці $\tilde{x}$.

№ в-та	Завдання
1	$y''-2y'+10y=50x^2+6$; $y(0)=3$, $y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
2	$y''+4y'-12y=8\sin 2x$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi/2$
3	$y''-y'=2x^2-4x-6$; $y(0)=4$, $y'(0)=-3$; $\tilde{x}=1$
4	$y''-6y'+9y=-9x^2-6x$; $y(0)=-1$, $y'(0)=2$; $\tilde{x}=1/3$

5	$y''-7y'+6y=12\sin x$; $y(0)=-3,\ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
6	$y''-y'-2y=2e^{-x}$; $y(0)=4,\ \ y'(0)=-1$; $\tilde{x}=1$
7	$y''-2y'+2y=2x^2+6$; $y(0)=-5,\ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
8	$y''-3y'+2y=10e^{-x}$; $y(0)=2,\ \ y'(0)=-4$; $\tilde{x}=1$
9	$y''+5y'=-25\cos 5x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/5$
10	$y''-5y'=10x^2-3x+2$; $y(0)=0,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=2/5$
11	$y''+9y=12\sin 3x$; $y(0)=0,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi/3$
12	$y''+6y'+25y=26e^{3x}$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-6$; $\tilde{x}=\pi/4$
13	$y''+10y'+25y=12e^{-5x}$; $y(0)=1,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=2/5$
14	$y''+3y'=6e^{-3x}$; $y(0)=-1,\ \ y'(0)=4$; $\tilde{x}=1/3$
15	$y''+3y'-4y=68\cos 4x$; $y(0)=-3,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
16	$y''+10y'+25y=25x$; $y(0)=0,\ y'(0)=2$; $\tilde{x}=2/5$
17	$y''+3y'+2y=6\sin x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-4$; $\tilde{x}=\pi/2$
18	$y''+9y=12\cos 3x$; $y(0)=-3,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi/3$
19	$y''-9y'+18y=18\sin 3x$; $y(0)=3,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
20	$y''+2y'=6x^2-4x-1$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=1$
21	$y''+4y=12\cos 2x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-4$; $\tilde{x}=\pi/2$
22	$y''-4y'-5y=12e^{-x}$; $y(0)=-4,\ \ y'(0)=0$; $\tilde{x}=1$
23	$y''+6y'+13y=169x$; $y(0)=2,\ \ y'(0)=-3$; $\tilde{x}=\pi/2$
24	$y''+2y'=8e^{-2x}$; $y(0)=0,\ \ y'(0)=3$; $\tilde{x}=1$
25	$y''+5y'+6y=26\sin 2x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
26	$y''-8y'+16y=6e^{4x}$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=1/4$
27	$y''+y=2\sin x-6\cos x$; $y(0)=-3,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi$
28	$y''-9y=12e^{-3x}$; $y(0)=6,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=1/3$
29	$y''-4y'=6e^{4x}$; $y(0)=4,\ \ y'(0)=6$; $\tilde{x}=1/4$
30	$y''-4y'+3y=4\sin 3x$; $y(0)=-4,\ \ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi$

Завдання 10. Розв‘язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь методом вилучення (зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку). (Знайти частинний розв’язок диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам). Обчислити значення $\tilde{x}_1 = x_{1K}(\tilde{t})$; $\tilde{x}_2 = x_{2K}(\tilde{t})$ отриманого розв’язку в заданій точці $\tilde{t}$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - 2x_2 - 3e^{2t}; \\ dx_2/dt = 8x_1 + x_2 + e^{2t}; \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -4;\ \tilde{t} = 1$	16	$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 + 2x_2 + 3; \\ dx_2/dt = 2x_1 + 4x_2 - 2t; \end{cases}$ $x(0) = -3;\ y(0) = 1;\ \tilde{t} = 1$
2	$\begin{cases} dx_1/dt = -8x_1 + 3x_2; \\ dx_2/dt = -3x_1 + 2x_2 + 6t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 2;\ \tilde{t} = 1$	17	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + 3x_2 - e^{-2t}; \\ dx_2/dt = x_1 + 4x_2 + e^{-2t}; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = -3;\ \tilde{t} = 1$
3	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - 9x_2; \\ dx_2/dt = x_1 + 8x_2 - \sin t; \end{cases}$ $x(0) = -3;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = \pi$	18	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + 4x_2 - 2t; \\ dx_2/dt = 4x_1 + 2x_2 - 3; \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 1;\ \tilde{t} = 1$
4	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - x_2 - 2e^{3t}; \\ dx_2/dt = 4x_1 - 3x_2; \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 5;\ \tilde{t} = 1$	19	$\begin{cases} dx_1/dt = 10x_1 + 4x_2 + 3t; \\ dx_2/dt = -5x_1 + 2x_2 - 4; \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = 1$
5	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - 3x_2 + 4; \\ dx_2/dt = 3x_1 + 2x_2 - 6t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1;\ \tilde{t} = 1$	20	$\begin{cases} dx_1/dt = 5x_1 - 4x_2 - 3e^{-t}; \\ dx_2/dt = -4x_1 + 5x_2; \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 3;\ \tilde{t} = 1$
6	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + x_2 + 6t; \\ dx_2/dt = -6x_1 - 3x_2; \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = 1$	21	$\begin{cases} dx_1/dt = -3x_1 + x_2; \\ dx_2/dt = x_1 - 3x_2 - e^{4t}; \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 6;\ \tilde{t} = 1$

7	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - x_2 - 6e^{-t}; \\ dx_2/dt = -4x_1 + 4x_2; \end{cases}$ $x(0) = 5;\ y(0) = -1;\ \tilde{t} = 1$	22	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + 5x_2 - e^{-3t}; \\ dx_2/dt = 5x_1 + 2x_2; \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = -2;\ \tilde{t} = 1$
8	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - 2x_2; \\ dx_2/dt = x_1 - x_2 - \cos 3t; \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = -1;\ \tilde{t} = \pi$	23	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - 2x_2 + 6t; \\ dx_2/dt = -2x_1 + x_2 - 4; \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = 4;\ \tilde{t} = 1$
9	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - x_2 + 3t; \\ dx_2/dt = 4x_1 - 2x_2 - 1; \end{cases}$ $x(0) = -3;\ y(0) = 4;\ \tilde{t} = 1$	24	$\begin{cases} dx_1/dt = 5x_1 - 8x_2 - \cos t; \\ dx_2/dt = 9x_1 - 13x_2; \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = \pi$
10	$\begin{cases} dx_1/dt = 9x_1 - 5x_2 + \sin t; \\ dx_2/dt = 7x_1 - 3x_2 - \cos t; \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = 6;\ \tilde{t} = \pi$	25	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + 3x_2 - e^{3t}; \\ dx_2/dt = 3x_1 + x_2 + 2e^{3t}; \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -1;\ \tilde{t} = 1$
11	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - x_2 + 3t; \\ dx_2/dt = x_1 + 2x_2 - 2t; \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -4;\ \tilde{t} = 1$	26	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - x_2 + 4t; \\ dx_2/dt = -x_1 + 2x_2 - 6; \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 4;\ \tilde{t} = 1$
12	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + x_2 - 6e^{-3t}; \\ dx_2/dt = -5x_1 - 3x_2; \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 6;\ \tilde{t} = 1$	27	$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 - 12x_2 - 3t; \\ dx_2/dt = 4x_1 - 10x_2 + 4; \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = -1;\ \tilde{t} = 1$
13	$\begin{cases} dx_1/dt = 3x_1 + 2x_2; \\ dx_2/dt = x_1 + 2x_2 - \cos t; \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 1;\ \tilde{t} = \pi$	28	$\begin{cases} dx_1/dt = 3x_1 + x_2 - 4e^{-2t}; \\ dx_2/dt = 7x_1 - 3x_2 + e^{-2t}; \end{cases}$ $x(0) = -2;\ y(0) = 4;\ \tilde{t} = 1$
14	$\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 - 2x_2 + 4t; \\ dx_2/dt = 3x_1 + 4x_2 - 6t; \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 6;\ \tilde{t} = 1$	29	$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 8x_2 - 3; \\ dx_2/dt = -2x_1 + 6x_2 + 2t; \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = 1$
15	$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 5x_2 + e^{2t}; \\ dx_2/dt = -7x_1 + 10x_2; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = -3;\ \tilde{t} = 1$	30	$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 7x_2 + 2; \\ dx_2/dt = x_1 + 4x_2 - \cos t; \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -4;\ \tilde{t} = \pi$

Змістовий модуль 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ. ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Операційне числення, розроблене на основі перетворення Лапласа, широко використовується для розв'язування диференціальних та інших споріднених з ними рівнянь, що описують процеси функціонування різноманітних об'єктів. Зокрема, для розрахунків перехідних режимів електричних ланцюгів. Однак треба застерегти, що операційний метод безпосередньо незастосовний для ланцюгів, параметри та структура яких змінюються з бігом часу, а також таких, що містять нелінійні елементи.

Методи варіаційного числення знаходять широке застосування в різних галузях науки та виробництва при постановці та розв'язуванні задач моделювання, оптимізації та керування.

3.1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

3.1.1. Оператор Лапласа. Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення

Оригіналом називається довільна функція $f(t)$, що розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$ і має такі властивості:

1) $f(t)$ кусково-неперервна на півінтервалі $[0;+\infty)$, тобто на будь-якому скінченному інтервалі має скінченне число точок розриву першого роду (скінченних стрибків);

2) існують додатні сталі $a>0,\ M>0$ такі, що $|f(t)|<M\,e^{at}$ при довільному значенні t із півінтервалу $[0;+\infty)$.

Для таких функцій $f(t)$ вводиться ***оператор Лапласа*** (***перетворення Лапласа***) наступним чином:

$$\boxed{L(f(t))=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt},\quad \text{де } p - \textbf{\textit{параметр}}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Параметр p – це комплексна змінна $p=\alpha+i\beta$ з додатною дійсною частиною $\alpha>0$, що забезпечує

збіжність невласного інтеграла.

Оператор – це відображення, що переводить функцію у функцію.

Інтегральний оператор Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність єдину функцію

$$\boxed{F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt},$$

яка називається ***зображенням***. Позначається

$$\boxed{L(f(t))=F(p)} \quad \text{або} \quad \boxed{f(t) \doteqdot F(p)}, \quad \text{або} \quad \boxed{f(t) \leftarrow F(p)}.$$

Спеціальний розділ вищої математики, в якому вивчається перетворення Лапласа та його застосування, називається ***операційним численням***. Властивості перетворення Лапласа відображені в таблиці 1. У таблиці 2 наведено перелік найбільш вживаних функцій та їх зображень. Основні співвідношення більш докладно розглядаються нижче.

Таблиця 1 – **Правила операційного числення**

№ п/п	Операція, властивість	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	Лінійність	$C_1 f_1(t) \pm$ $\pm C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(p) \pm$ $\pm C_2 F_2(p)$
2	Зміщення аргументу зображення (затухання оригіналу)	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
3*	Зміна масштабу (подібність)	$f(at)$, $a>0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
4	Зміщення аргументу оригіналу (запізнювання оригіналу)	$f(t-b) \times$ $\times \eta(t-b)$, $b>0$	$e^{-bp} F(p)$

5	Диференціювання зображення	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
5а	Перша похідна зображення	$t\, f(t)$	$-F'(p)$
6	Зображення похідних оригіналу	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) - \ldots -$ $- pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
6а	Зображення першої похідної оригіналу	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
6б	Зображення другої похідної оригіналу	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
7	Зображення інтеграла від оригіналу	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p} F(p)$

Таблиця 2 – **Основні оригінали та їх зображення**

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-b) = \begin{cases} 1, & t > b \\ 0, & t < b \end{cases}$	$e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
4	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$
6	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$
7	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$

8	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
8а	t	$\dfrac{1}{p^2}$
8б	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$
9	$t\,\eta(t-b)$	$e^{-bp}\left(b\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)$
10	$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
10а	te^{-at}	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
11	$t\sin bt$	$\dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
12	$t\cos bt$	$\dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
13	$\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\,\cos bt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
14	$\delta(t)$	1
15	$\delta(t-b)$	e^{-bp}
16	$\delta'(t)$	p

Зауваження 2. Будь-який оригінал $f(t)$ розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$. Його зручно продовжити рівним нулю на всю числову пряму, поклавши $f(t)=0, \quad t<0$.

Зауваження 3. З означення випливає, що оригінал $f(t)$ може прямувати до нескінченності при $t \to +\infty$, але не надто швидко. Наприклад, функція $f(t) = e^{t^2}$ не є оригіналом.

Функції, що відповідають умові 2) з означення оригіналу, називаються ***функціями експоненціального росту***.

Функція $f(t) = e^{t^2}$ до таких не належить.

Теорема 1 (***про поведінку зображень на нескінченності***). Нехай $f(t)$ – довільний оригінал, $F(p)$ – його зображення. Тоді $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} F(p) = 0}$, тобто *будь-яке зображення прямує до нуля, коли параметр* p *прямує до нескінченності.*

□ $|f(t)| < Me^{at}$; $a > 0$, $M > 0$; $p > a$;

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \le \int_0^{+\infty} \left| e^{-pt} f(t) \right| dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} |f(t)| dt <$$

$$< \int_0^{+\infty} e^{-at} M e^{dt}\, dt = M \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\, dt = M \lim_{N \to +\infty} \int_0^{N} e^{-(p-a)t}\, dt =$$

$$M \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \right) \Bigg|_0^N = M/(p-a),$$

бо $e^{-(p-a)N} \to 0$ при $N \to +\infty$ $(p > a)$.

Якщо $p \to +\infty$, то $M/(p-a) \to 0$. Отже, $F(p) \to 0$ при $p \to +\infty$. ■

Теорема 2 (***єдиності***). *Якщо дві неперервні функції* $f_1(t)$ *і* $f_2(t)$ *мають одне і те ж зображення* $F(p)$, *то ці функції тотожно рівні*, тобто

$$\text{якщо } f_1(t) \doteqdot F_1(p);\ f_2(t) \doteqdot F_2(p);\ F_1(p) = F_2(p), \text{ то}$$

$$f_1(t) = f_2(t).$$ (Без доведення).

3.1.2. Одинична ступінчаста функція Хевісайда $\eta(t)$ та її зображення

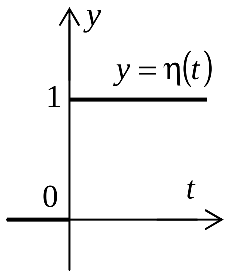

Рис. 58

Функція $\eta(t)$, яка задається формулою

$$\boxed{\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}}$$

називається ***одиничною ступінчастою функцією Хевісайда*** (рис. 58). (За оригінал приймаємо $f(t)=1$).

$$L(\eta(t))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\eta(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-pt}\times$$

$$\times 1dt=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_0^N=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pN}}{p}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p},$$

бо $\lim\limits_{N\to+\infty}e^{-pN}=0\quad(p>0)$. Отже, $\boxed{\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}}$ або $\boxed{1\risingdotseq\frac{1}{p}}$.

Зауваження. Основи операційного числення розробив Хевісайд як інструмент для вивчення характеру проходження електричних сигналів. За допомогою одиничної функції $\eta(t)$ він описав стандартні сигнали азбуки Морзе (крапка і тире).

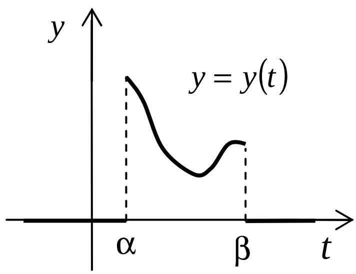

Рис. 59

Довільну імпульсну функцію $y=y(t)$, яка скрізь дорівнює нулю, за винятком скінченного інтервалу $(\alpha;\beta)$ (рис. 59)

$$y=y(t)=\begin{cases}0, & t<\alpha;\\ f(t), & t\in(\alpha;\beta);\\ 0, & t>\beta,\end{cases}$$

можна подати однією формулою

$$y=f(t)(\eta(t-\alpha)-\eta(t-\beta)),$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням

$$\eta(t-b)=\begin{cases}1, & t>b;\\ 0, & t<b.\end{cases}$$

3.1.3. Зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$

На основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{-be^{at}\cos bt+ae^{at}\sin bt}{a^2+b^2}+C$$

маємо $L(\sin bt)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\sin bt\,dt=\lim\limits_{N\to+\infty}\int\limits_0^{N}e^{-pt}\sin bt\,dt=$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-be^{pt}\cos bt+(-p)e^{-pt}\sin bt\right)\Big|_0^N=$$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-be^{-pN}\cos bN-pe^{-pN}\sin bN+b\right)=\frac{b}{p^2+b^2},$$

бо $e^{-pN}\to 0$; $\cos bN$ і $\sin bN$ - обмежені функції.

Отже, $\boxed{\sin bt \doteqdot \frac{b}{p^2+b^2}}$.

Аналогічно, на основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\cos bt\,dt=\frac{ae^{at}\cos bt+be^{at}\sin bt}{a^2+b^2}+C$$

маємо $L(\cos bt)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\cos bt\,dt=$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-pe^{-pt}\cos bt+be^{-pt}\sin bt\right)\Big|_0^N=\frac{p}{p^2+b^2}.$$

Отже, $\boxed{\cos bt \doteqdot \frac{p}{p^2+b^2}}$.

3.1.4. Теорема зміщення (затухання)

<u>Теорема</u> (***зміщення*** (***затухання***)). *Якщо функція* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $F(p+a)$ *служить зображенням функції* $e^{-at}f(t)$:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{-at}f(t) \risingdotseq F(p+a)}\,.$$

$$\square \quad L\left(e^{-at}f(t)\right) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}f(t)dt = F(p+a)\,. \blacksquare$$

3.1.5. Зображення функцій e^{-at}, $e^{-at}\sin bt$, $e^{-at}\cos bt$

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad e^{-at} = e^{-at}\times 1 \risingdotseq \frac{1}{p+a}; \quad \boxed{e^{-at} \risingdotseq \frac{1}{p+a}};$$

$$\sin bt \risingdotseq \frac{b}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{-at}\sin bt \risingdotseq \frac{b}{(p+a)^2+b^2}};$$

$$\cos bt \risingdotseq \frac{p}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{-at}\cos bt \risingdotseq \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}}.$$

3.1.6. Теорема про лінійність оператора Лапласа

<u>Теорема</u> (**про лінійність оператора Лапласа**). *Зображення алгебраїчної суми двох функцій, помножених на сталі величини, дорівнює відповідній сумі зображень цих функцій, помножених на відповідні сталі*

$$\boxed{L(C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)) = C_1 L(f_1(t)) \pm C_2 L(f_2(t))}\,,$$

тобто якщо $f(t) = C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)$ і $f(t) \risingdotseq F(p)$,

$f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $\quad f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то $\quad F(p) = C_1F_1(p) \pm C_2F_2(p)$.

□ $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\left(C_1 f_1(t)\pm C_2 f_2(t)\right)dt = C_1\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t)dt \pm$

$$\pm C_2\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t)dt = C_1F_1(p)\pm C_2F_2(p). \quad ■$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти зображення функції

а) $f(t)=2+6\cos 3t-5\sin 3t$; б) $f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t$.

□ а) $F(p)=2\,L(1)+6L(\cos 3t)-5L(\sin 3t)=$

$$=2\cdot\frac{1}{p}+6\cdot\frac{p}{p^2+3^2}-5\cdot\frac{3}{p^2+3^2}=\frac{8p^2-15p+18}{p(p^2+9)};$$

б) $f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t \risingdotseq 3\cdot\dfrac{p-1}{(p-1)^2+4^2}+$

$$+2\cdot\frac{4}{(p-1)^2+4^2}=\frac{3p+5}{p^2-2p+17}\ . \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти оригінал функції $F(p)=\dfrac{5p+7}{p^2-6p+25}$.

$$□ \quad F(p)=\frac{5p+7}{p^2-6p+25}=\frac{5p+7}{(p-3)^2+4^2}=$$

$$=\left|\frac{p-3}{(p-3)^2+4^2}\risingdotseq e^{3t}\cos 4t\ ;\quad \frac{4}{(p-3)^2+4^2}\risingdotseq e^{3t}\sin 4t\right|=$$

$$=5\cdot\frac{p-3+7/5+3}{(p-3)^2+4^2}=5\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+4^2}+\frac{11}{2}\times$$

$$\times\frac{4}{(p-3)^2+4^2}\risingdotseq 5e^{3t}\cos 4t-\frac{11}{2}e^{3t}\sin 4t=f(t). \quad ■$$

3.1.7. Теорема подібності (зміни масштабу)

Теорема (***подібності (зміни масштабу)***). *Якщо функція* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $(1/a)F(p/a)$ *служить зображенням функції* $f(at)$, *де* $a>0$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(at) \doteqdot \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a>0}\,.$$

$$\square \quad L(f(at)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\,dt = \left| u = at;\ \ t = u/a\ ;\ dt = du/a\ ;\right.$$

$$\left. u_н = 0;\ \ u_в = +\infty \right| = \int_0^{+\infty} e^{-pu/a} f(u)\frac{du}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-pu/a} f(u)\,du = \frac{1}{a}F(p/a)\,. \quad \blacksquare$$

3.1.8. Теорема запізнювання (зсув аргументу в оригіналі)

Теорема (***запізнювання (зсув аргументу в оригіналі)***). *Нехай функція* $f(t)$ *тотожно дорівнює нулю при* $t<0$. *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *то функція* $e^{-bp}F(p)$ *служить зображенням функції* $f(t-b)$, *де* $b>0$ (рис. 60), тобто

$$\text{якщо } f(t) \doteqdot F(p), \text{ то } \boxed{f(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p), \quad b>0}\,.$$

$$\square \quad L(f(t-b)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)\,dt = \int_0^{b} e^{-pt} f(t-b)\,dt +$$

$$+ \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)\,dt = \left| \begin{matrix} f(t-b) = 0 \\ при\ \ t<b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int_0^{b} e^{-pt} f(t-b)\,dt = 0 \right| =$$

$$= \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)\,dt = \left| \begin{matrix} u = t-b; & t = u+b; \\ du = dt; & u_н = 0;\ \ u_в = +\infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+b)} f(u)du = e^{-bp} \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-bp} F(p). \quad \blacksquare$$

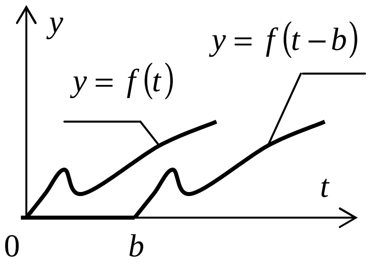

Рис. 60

Зауваження 1. Для явного врахування умови

$$f(t-b) = 0 \quad \text{при} \quad t < b$$

формулу теореми запізнювання можна подати так

$$f(t-b)\eta(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p),$$

$$b > 0,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням, при цьому

$$\boxed{\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \eta(t-b) \doteqdot e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}}.$$

Зауваження 2. Згідно з теоремою запізнювання зображенням $Y(p)$ довільної імпульсної функції (рис. 59) $y(t)$, яку можна подати однією формулою

$$\boxed{y(t) = f(t)(\eta(t-\alpha) - \eta(t-\beta))},$$

служить $\boxed{Y(p) = e^{-\alpha p}F(p) - e^{-\beta p}F(p)}$, де $f(t) \doteqdot F(p)$.

Приклад 1. За відомим зображенням знайти відповідний оригінал:

а) $F(p) = \dfrac{2pe^{-\pi p/3} + 2pe^{-2\pi p/3}}{p^2+9}$; б) $F(p) = \dfrac{3e^{-p} - 3e^{-2p}}{p+1}$.

□ а) $F(p) = 2e^{-\pi p/3} \cdot \dfrac{p}{p^2+9} + 2e^{-2\pi p/3} \cdot \dfrac{p}{p^2+9} \doteqdot 2\cos 3(t -$

$$-\pi/3) \cdot \eta(t-\pi/3) + 2\cos 3(t - 2\pi/3) \cdot \eta(t - 2\pi/3) = -2\cos 3t \times$$

$$\times\eta(t-\pi/3)+2\cos 3t\times$$
$$\times\eta(t-2\pi/3)=-2\cos 3t\times$$
$$\times\big(\eta(t-\pi/3)-$$
$$-\eta(t-2\pi/3)\big)=f(t).$$

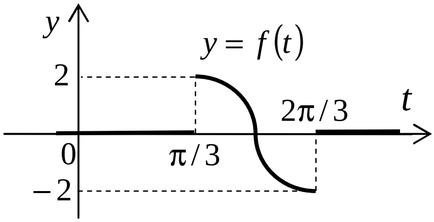

Рис. 61

Графік одержаного оригіналу подано на рис. 61.

б) $F(p)=3e^{-p}\dfrac{1}{p+1}-3e^{-2p}\dfrac{1}{p+1}\doteqdot 3e^{-t}\eta(t-1)-$

$$-3e^{-t}\eta(t-2)=3e^{-t}\big(\eta(t-1)-\eta(t-2)\big)=f(t).$$

(Графік отриманого оригіналу побудуйте самостійно). ■

3.1.9. Диференціювання зображення

Теорема (***про диференціювання зображення***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $(-1)^n\dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$ *служить зображенням функції* $t^n f(t)$:

$$f(t)\doteqdot F(p)\quad\Rightarrow\quad \boxed{t^n f(t)\doteqdot(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)}\,.$$

□ Диференціюючи ліву і праву частини формули

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$$

по параметру p, дістанемо

$$F'(p)=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right)f(t)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-pt}f(t)dt=-\int_0^{+\infty}e^{-pt}tf(t)dt\;.$$

Отже, $F'(p) \doteq -t\,f(t)$ або $t\,f(t) \doteq -F'(p)$.

Аналогічно знаходимо другу похідну зображення

$$F''(p)=\frac{d}{dp}\left(-\int_0^{+\infty} e^{-pt} tf(t)dt\right)=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right)tf(t)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^2 f(t)dt \ .$$

Отже, $$t^2 f(t) \doteq F''(p) \ .$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільної n-ої похідної зображення маємо співвідношення

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p) \ . \quad \blacksquare$$

3.1.10. Зображення функцій $t,\ t^n,\ t\eta(t-b),$ $te^{-at},\ t^n e^{-at},\ t\sin bt,\ t\cos bt$

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда і похідної зображення, одержимо

$$1 \doteq 1/p \ \Rightarrow\ t = t\times 1 \doteq -(1/p)' = -\left(-1/p^2\right) = 1/p^2 \ .$$

Отже, $$\boxed{t \doteq \frac{1}{p^2}}\ .$$

Тоді $$t^2 = t\times t \doteq -\left(1/p^2\right)' = \frac{2}{p^3} = \frac{1\cdot 2}{p^3};$$

$$t^3 = t\times t^2 \doteq -\left(2/p^3\right)' = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{p^4} \ .$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільного n маємо співвідношення

$$\boxed{t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}},$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ – факторіал числа n.

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)$ і похідної зображення, одержимо

$$\eta(t-b) \doteq \frac{1}{p} e^{-bp} \quad \Rightarrow \quad t\,\eta(t-b) \doteq -\left(e^{-bp}/p\right)' =$$

$$= -\frac{e^{-bp}(-b)p - e^{-bp}}{p^2} = e^{-bp}\left(b \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right).$$

Отже, $$\boxed{t\,\eta(t-b) \doteq e^{-bp}\left(b \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)}.$$

Використовуючи зображення функцій t, t^n і теорему зміщення (затухання), одержимо зображення функцій te^{-at} і $t^n e^{-at}$:

$$\boxed{te^{-at} \doteq \frac{1}{(p+a)^2}}; \qquad \boxed{t^n e^{-at} \doteq \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}}.$$

Використовуючи формули для зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$ і похідної зображення, дістанемо:

$$\sin bt \doteq \frac{b}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad t \sin bt \doteq -\frac{d}{dp}\left(\frac{b}{p^2+b^2}\right) =$$

$$= -b \cdot \frac{-2p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}; \quad \cos bt \doteq \frac{p}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t \cos bt \doteq -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right) = -\frac{p^2+b^2-2p \cdot p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}.$$

Отже, $$\boxed{t \sin bt \doteq \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}}; \qquad \boxed{t \cos bt \doteq \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}}.$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти оригінал функції

$$F(p)=\frac{5p}{\left(p^2+16\right)^2}.$$

□ $F(p)=\dfrac{5p}{\left(p^2+16\right)^2}=5\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2p\cdot 4}{\left(p^2+16\right)^2}\ \dot{\overset{\bullet}{=}}\ \dfrac{5}{8}\cdot t\sin 4t$. ■

3.1.11. Зображення похідних оригіналу

<u>Теорема</u> (***про зображення похідної оригіналу***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $pF(p)-f(0)$ *служить зображенням похідної* $f'(t)$:

$$f(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}F(p)\quad\Rightarrow\quad\boxed{f'(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}pF(p)-f(0)}.$$

□ Використовуючи означення перетворення Лапласа і формулу інтегрування частинами, одержимо

$$L\left(f'(t)\right)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f'(t)dt=\left|u=e^{-pt};\ du=-pe^{-pt}dt;\ dv=f'(t)dt;\right.$$

$$\left.v=\int f'(t)dt=f(t)\right|=e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}f(t)\times\left(-pe^{-pt}\right)dt=$$

$$=\left|\lim_{t\to+\infty}e^{-pt}f(t)=0\right|=-f(0)+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=pF(p)-f(0).$$

Отже, $\qquad f'(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}pF(p)-f(0)$. ■

Застосовуючи цю формулу повторно, одержимо

$$L\left(f''(t)\right)=L\left(\left(f'(t)\right)'\right)=pL\left(f'(t)\right)-f'(0)=$$

$$=p\left(pF(p)-f(0)\right)-f'(0)=p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0).$$

Отже, $\boxed{f''(t) \doteqdot p^2F(p) - p\,f(0) - f'(0)}$.

На основі методу математичної індукції для довільної n-ої похідної оригіналу маємо співвідношення

$$\boxed{\begin{aligned} f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - \\ - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}}$$

<u>Зауваження</u>. Формули для зображення похідних спрощуються, якщо всі початкові умови нульові: $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, ... Тоді

$$f(t) \doteqdot F(p);\quad f'(t) \doteqdot pF(p);\quad f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p).$$

3.1.12. Зображення інтеграла від оригіналу

<u>Теорема</u> (***про зображення інтеграла від оригіналу***). *Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $(1/p)F(p)$ служить зображенням інтеграла $\int_0^t f(u)du$:*

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_0^t f(u)du \doteqdot \frac{1}{p}F(p)}.$$

□ Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$; $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(u)du \doteqdot \Phi(p)$. Знайдемо похідну інтеграла зі змінною верхньою межею

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(u)du = f(t).$$

Використаємо формулу для зображення похідної оригіналу

$$\varphi'(t) \doteqdot p\Phi(p) - \varphi(0).$$

Але $\varphi(0)=\int\limits_0^0 f(u)du=0$, тому $\varphi'(t)\doteqdot p\Phi(p)$.

Таким чином, $\left.\begin{array}{r} f(t)=\varphi'(t)\doteqdot p\Phi(p) \\ f(t)\doteqdot F(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(p)=p\Phi(p).$

Отже, $\Phi(p)=(1/p)F(p)$. ■

<u>Приклад 1</u>. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу і формулою $\sin t\doteqdot\dfrac{1}{p^2+1}$, знайти зображення функції $\cos t$.

$$\square \quad \cos t=1-\int\limits_0^t \sin u\,du \doteqdot \frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+1} - = \frac{p}{p^2+1}\,. \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням:

$$F(p)=1/(p^3-6p^2+13p)\,.$$

$$\square \quad F(p)=\frac{1}{p(p^3-6p^2+13p)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2-6p+13}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p-3)^2+2^2}=\left|\frac{2}{(p-3)^2+2^2}\doteqdot e^{3t}\sin 2t\right|\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{3u}\sin 2u\,du=\left|\int e^{at}\sin bt\,dt=(-be^{at}\cos bt+ae^{at}\sin bt):\right.$$

$$\left.:(a^2+b^2)+C\right|=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{-2e^{3u}\cos 2u+3e^{3u}\sin 2u}{3^2+2^2}\right|_0^t=$$

$$=(1/26)\cdot(-2e^{3t}\cos 2t+3e^{3t}\sin 2t+2)=f(t)\,. \quad ■$$

3.1.13. Одинична імпульсна дельта-функція Дірака $\delta(t)$ та її зображення

Розглянемо імпульсну функцію $\delta_h(t)$, яка задається рівністю

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1/h, & 0<t<h;\\ 0, & t>h,\end{cases}$$

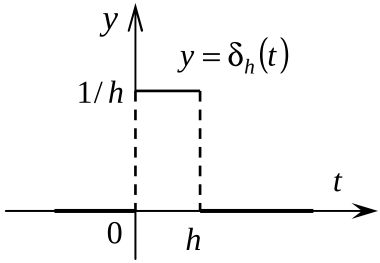

Рис. 62

де $h>0$ – ширина імпульсу (рис. 62).

Співвідношення для $\delta_h(t)$ можна подати однією формулою за допомогою одиничної функції Хевісайда

$$\delta_h(t)=\frac{1}{h}\big(\eta(t)-\eta(t-h)\big) .$$

Знайдемо зображення цієї імпульсної функції $\delta_h(t)$:

$$\delta_h(t) \risingdotseq \frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-e^{-hp}\frac{1}{p}\right)=\frac{1-e^{-hp}}{ph}.$$

Одиничною імпульсною дельта-функцією Дірака $\delta(t)$ називається ***узагальнена функція***, яка визначається умовами:

$$1)\ \boxed{\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ +\infty, & t=0;\\ 0, & t>0;\end{cases}} \qquad 2)\ \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1}.$$

Дельта-функцію $\delta(t)$ можна розглядати як границю імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h\to 0$: $\delta(t)=\lim\limits_{h\to 0}\delta_h(t)$.

За зображення дельта-функції $\delta(t)$ природно взяти границю зображення імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h\to 0$

$$\delta(t) \doteqdot \lim_{h\to 0} L(\delta_h(t)) = \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-hp}}{ph} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\left(1-e^{-hp}\right)' \big/ (ph)'\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-e^{-hp}(-p)}{p} = 1 .$$

Отже, $$\boxed{\delta(t) \doteqdot 1} .$$

Зауваження 1. (Фізичний зміст дельта-функції). З точки зору механіки дельта-функцію $\delta(t)$ можна трактувати як нескінченну силу, що діє миттєво і має одиничний імпульс.

Зауваження 2. Використовуючи означення $\delta(t)$ і формулу для зображення інтеграла від оригіналу, можна встановити зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u)du = \eta(t); \qquad \delta(t) = \frac{d\eta(t)}{dt} .$$

3.2. Обернення перетворення Лапласа. Відшукання оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу

У загальному випадку, знаходження оригіналу $f(t)$ за його зображенням $F(p)$ – досить складна задача: ***загальна формула обернення*** передбачає обчислення комплексного інтеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} F(p) dp ,$$

де інтегрування здійснюється вздовж вертикальної прямої в області збіжності оператора Лапласа.

Обмежимося лише розв'язуванням цієї задачі за допомогою таблиці 2 відповідності оригіналів та їх зображень. Розглянемо найбільш поширений випадок, коли зображення має вигляд раціонального дробу.

Правило. *Нехай необхідно знайти оригінал* $f(t)$ *для зображення* $F(p)$ *у вигляді раціонального дробу* $F(p) = P_m(p)/Q_n(p)$, *де* $P_m(p)$ *і* $Q_n(p)$ *– многочлени відповідно степеня* m *і* n.

Тоді:

1) *Якщо дріб неправильний* $(m \ge n)$, *то з нього треба виділити цілу частину*.

2) *Правильний дріб* $(m < n)$ *треба розкласти на суму елементарних дробів виду*

$$\frac{A}{(p-a)^k} \ ; \quad \frac{Bp+C}{(p^2+a_1p+a_2)^k} \ ; \quad k \ge 1 \ ; \quad D = a_1^2 - 4a_2 < 0 \ .$$

3) *Знайти оригінали для цілої частини і кожного елементарного дробу, скористатися властивістю лінійності перетворення Лапласа і знайти оригінал початкового дробу*.

4) *Спростити одержаний вираз*.

Приклад 1. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p) = \frac{7p-1}{(p^2-4)(p^2+2p+5)} \ .$$

$$\square \quad F(p) = \frac{7p-1}{(p-2)(p+2)(p^2+2p+5)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+2} +$$

$$+ \frac{Cp+D}{p^2+2p+5} = \Big| \ A(p+2)(p^2+2p+5) + B(p-2)\times$$

$$\times(p^2+2p+5) + (Cp+D)(p-2)(p+2) = 7p-1;$$

$$\begin{matrix} p=2: \\ p=-2: \\ p^3: \\ p^0: \end{matrix} \quad \begin{cases} 4\cdot 13A = 13; \\ -4\cdot 5B = -15; \\ A+B+C = 0; \\ 10A - 10B - 4D = -1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} A=1/4\,;\quad B=3/4\,; \\ 1/4+3/4+C=0;\quad C=-1; \\ 5/2-15/2-4D=-1;\ D=-1 \end{array}\right| = \frac{1/4}{p-2}+\frac{3/4}{p+2}+$$

$$+\frac{-1p-1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-$$

$$-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} \risingdotseq \frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-e^{-t}\cos 2t = f(t).\ \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. В елементарному дробі з квадратним тричленом у знаменнику для спрощення наступного переходу до оригіналу можна спочатку виділити повний квадрат двочлена, а потім подати цей дріб у вигляді

$$\frac{A(p+a)+B}{\left((p+a)^2+b^2\right)^k}\,.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{3p^2-8}{p^3-4p^2+8p}\,.$$

$$\square\quad F(p)=\frac{3p^2-8}{p(p^2-4p+8)}=\frac{3p^2-8}{p\left((p-2)^2+4\right)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B(p-2)+C}{(p-2)^2+4}=$$

$$=\Big|\ A\left((p-2)^2+4\right)+\left(B(p-2)+C)\right)p=3p^2-8\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \left\{\begin{array}{ll} 8A=-8; & A=-1; \\ 4A+2C=4; & C=2-2A=4; \\ A+B=3; & B=3-A=4 \end{array}\right. \\ p=2: & \\ p^2: & \end{array}\right| =$$

$$=\frac{-1}{p}+\frac{4(p-2)+4}{(p-2)^2+4}=-\frac{1}{p}+4\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+4}+$$

$$+2\cdot\frac{2}{(p-2)^2+4} \doteqdot -1+4e^{2t}\cos 2t+2e^{2t}\sin 2t = f(t). \ \blacksquare$$

3.3. Операційний метод розв‘язування диференціальних рівнянь та їх систем

Загальна схема методу показана на рис.63. Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

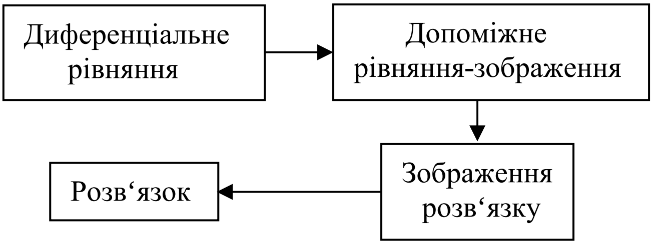

Рис. 63

Приклад 1. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку:

$$y'-4y=12t; \quad y(0)=0.$$

□ Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)\ ; \quad t\doteqdot\frac{1}{p^2}\ .$$

Одержимо ***операторну форму*** диференціального рівняння

$$pY(p)-4Y(p)=12\cdot 1/p^2$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо його:

$$Y(p)(p-4)=\frac{12}{p^2}\ ; \quad Y(p)=\frac{12}{p^2(p-4)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{12}{p^2(p-4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-4}=$$

$$=\Big|12=Ap(p-4)+B(p-4)+Cp^2\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \left\{\begin{array}{ll} -4B=12; & \quad B=-3; \\ 16C=12; & \quad C=3/4; \\ A+C=0; & \quad A=-C=-3/4 \end{array}\right. \\ p=4: & \\ p^2: & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{-3/4}{p}+\frac{-3}{p^2}+\frac{3/4}{p-4}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}-3\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-4}\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}$$

$$\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}-\frac{3}{4}\cdot 1-3t+\frac{3}{4}e^{4t}=\frac{3}{4}e^{4t}-3t-\frac{3}{4}=y(t)$$

– шуканий розв‘язок. ■

<u>Приклад 2</u>. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y''-4y'+4y=10e^t\sin 3t;\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0.$$

□ Нехай $y(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}pY(p)-y(0)=pY(p)-1;\quad y''(t)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}p^2Y(p)-py(0)-$$

$$-y'(0)=p^2Y(p)-p;\quad e^t\sin 3t\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}\frac{3}{(p-1)^2+3^2}=\frac{3}{p^2-2p+10}.$$

Одержимо

$$p^2Y(p)-p-4(pY(p)-1)+4Y(p)=10\cdot 3/(p^2-2p+10)$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\cdot(p^2-4p+4)=p-4+\frac{30}{p^2-2p+10};$$

$$Y(p)\cdot(p-2)^2=\frac{p^3-2p^2+10p-4p^2+8p-40+30}{p^2-2p+10};$$

$$Y(p)=\frac{p^3-6p^2+18p-10}{(p-2)^2(p^2-2p+10)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{p^3-6p^2+18p-10}{(p-2)^2(p^2-2p+10)}=\frac{A}{(p-2)^2}+\frac{B}{p-2}+$$

$$+\frac{Cp+D}{p^2-2p+10}=\Big|\, A(p^2-2p+10)+B(p-2)(p^2-2p+10)+$$

$$+(Cp+D)(p-2)^2=p^3-6p^2+18p-10;$$

$$\begin{matrix} p=2: \\ p=0: \\ p=1: \\ p^3: \end{matrix}\begin{cases}10A=10; \\ 10A-20B+4D=-10; \\ 9A-9B+C+D=3; \\ B+C=1;\end{cases}\qquad \begin{matrix} A=1; \\ \begin{cases}-20B+4D=-20; \\ -9B+C+D=-6; \\ C=1-B;\end{cases}\end{matrix}$$

$$-\begin{cases}-5B+D=-5; \\ -9B+1-B+D=-6;\end{cases}\qquad \begin{matrix} B=2/5; \\ D=5B-5=-3; \\ C=1-B=3/5\end{matrix}\Bigg|=$$
$$5B-1=1\;;$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2/5}{p-2}+\frac{(3/5)p-3}{p^2-2p+10}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+$$

$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-5}{(p-1)^2+9}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1-4}{(p-1)^2+9}=$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+9}\;\dot{=}$$

$$\dot{=}\; te^{2t}+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{3}{5}e^{t}\cos 3t-\frac{4}{5}e^{t}\sin 3t=y(t)$$

– шуканий розв‘язок. ■

Приклад 3. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+9y = 2\sin 3t \\ y(0) = 2;\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

□ Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 1\ ;$$

$$\sin 3t \doteqdot \frac{3}{p^2+3^2} = \frac{3}{p^2+9}\ .$$

Одержимо $p^2Y(p) - 2p + 1 + 9Y(p) = 2\cdot 3\big/(p^2+9)$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо його:

$$Y(p)\cdot(p^2+9) = 2p - 1 + \frac{6}{p^2+9};$$

$$Y(p) = \frac{2p^3+18p-p^2-9+6}{(p^2+9)^2} = \frac{2p^3-p^2+18p-3}{(p^2+9)^2}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{(p^2+9)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+9} = \Big|\ Ap+B+(Cp+D)(p^2+9) =$$

$$= 2p^3 - p^2 + 18p - 3;$$

$$Ap + B + Cp^3 + 9Cp + Dp^2 + 9D = 2p^3 - p^2 + 18p - 3;$$

$$\left.\begin{array}{l} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{array}\begin{cases} C = 2; \\ D = -1; \\ A + 9C = 18; \qquad A = 18 - 9C = 0; \\ B + 9D = -3; \qquad B = -3 - 9D = 6 \end{cases}\right| =$$

$$= \frac{0\cdot p+6}{(p^2+9)^2} + \frac{2p-1}{p^2+9} = 6\cdot\frac{1}{(p^2+9)^2} + 2\cdot\frac{p}{p^2+9} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9} \doteqdot$$

$$\doteqdot 6\cdot\frac{1}{2\cdot 3^3}\cdot(\sin 3t - 3t\cos 3t) + 2\cos 3t - \frac{1}{3}\cdot\sin 3t =$$

$$= -\frac{2}{9}\sin 3t - \frac{1}{3}t\cos 3t + 2\cos 3t = y(t)$$ – шуканий розв‘язок. ■

Приклад 4. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + 2y' = 4\sin 2t - 3\delta(t); \quad y(0) = 1; \; y'(0) = 0 \; .$$

□ Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1; \quad y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) -$$

$$- y'(0) = p^2Y(p) - p; \quad \sin 2t \doteqdot \frac{2}{p^2+4}; \quad \delta(t) \doteqdot 1.$$

Одержимо $p^2Y(p) - p + 2\big(pY(p) - 1\big) = 4\cdot\frac{2}{p^2+4} - 3\cdot 1$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\cdot(p^2+2p) = p + 2 + \frac{8}{p^2+4} - 3; \quad Y(p) = \frac{p^3 - p^2 + 4p + 4}{(p^2+2p)(p^2+4)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{p^3 - p^2 + 4p + 4}{p(p+2)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} =$$

$$= \Big|\, A(p+2)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + (Cp+D)\,p\,(p+2) =$$

$$= p^3 - p^2 + 4p + 4;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \left\{\begin{array}{l} 8A=4; \\ -16B=-16; \\ A+B+C=1; \\ 5A-5B+C-D=-2; \end{array}\right. \\ p=-2: & \\ p^3: & \\ p=-1: & \end{array} \quad \begin{array}{c} A=1/2; \\ B=1; \\ C=-1/2; \\ D=-1 \end{array}\right| =$$

$$=\frac{1/2}{p}+\frac{1}{p+2}+\frac{(-1/2)p-1}{p^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\risingdotseq\frac{1}{2}+e^{-2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t=y(t)$$

– шуканий розв‘язок. ■

Приклад 5. Розв‘язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

а) $\begin{cases} x'=x+4y-2e^t; \\ y'=y-x+5; \end{cases}$ $\quad x(0)=0$; $\quad y(0)=-2$;

б) $\begin{cases} x'=2x+3y; \\ y'=2x+y-50\sin 2t; \end{cases}$ $\quad x(0)=0$; $\quad y(0)=0$.

□ а) Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$; $y(t)\risingdotseq Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень:

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p);$$

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)+2;\ \ e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1};\ \ 1\risingdotseq\frac{1}{p}.$$

Дістанемо операторну форму диференціальної системи

$$\begin{cases} pX(p)=X(p)+4Y(p)-2/(p-1) \\ pY(p)+2=Y(p)-X(p)+5/p \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера:

$$\begin{cases}(p-1)\cdot X(p)-4Y(p)=-2/(p-1)\\ X(p)+(p-1)\cdot Y(p)=(-2p+5)/p\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-1 & -4\\ 1 & p-1\end{vmatrix}=(p-1)^2+4\,;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}-2/(p-1) & -4\\ (-2p+5)/p & p-1\end{vmatrix}=$$

$$=-2+\frac{-8p+20}{p}=\frac{-10p+20}{p}\,;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}p-1 & -2/(p-1)\\ 1 & (-2p+5)/p\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(p-1)(-2p+5)}{p}+\frac{2}{p-1}=\frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)}\,;$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)}\,;$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$X(p)=\frac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2+4}=$$

$$=\Big|\ A\left((p-1)^2+4\right)+(B(p-1)+C)\,p=-10p+20\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll}p=0: & \begin{cases}5A=20; & A=4;\\ 4A+C=10; & C=10-4A=-6;\\ A+B=0; & B=-A=-4\end{cases}\\ p=1: & \\ p^2: & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{p}+\frac{-4(p-1)-6}{(p-1)^2+4}=4\cdot\frac{1}{p}-4\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-$$

$$-3\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\risingdotseq 4\cdot 1-4e^t\cos 2t-3e^t\sin 2t=x(t)\,;$$

$$Y(p)=\frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C(p-1)+D}{(p-1)^2+4}=$$

$$=\left| A(p-1)\left((p-1)^2+4\right)+Bp\left((p-1)^2+4\right)+\right.$$

$$+(C(p-1)+D)\,p\,(p-1)=-2p^3+9p^2-12p+5\ ;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: \\ p=1: \\ p^3: \\ p=2: \end{array}\begin{cases} -5A=5; & A=-1;\ B=0; \\ 4B=0; & C=-2-A-B=-1; \\ A+B+C=-2; & -5-2+2D=-17; \\ 5A+10B+2C+2D=-17; & D=-5 \end{cases}\right| =$$

$$=\frac{-1}{p}+\frac{0}{p-1}+\frac{-(p-1)-5}{(p-1)^2+4}=-\frac{1}{p}-\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\ \dot{\underset{\bullet}{=}}\ -1-e^t\cos 2t-\frac{5}{2}\,e^t\sin 2t=y(t)\,.$$

Отже, $\begin{cases} x(t)=4-4e^t\cos 2t-3e^t\sin 2t\ ; \\ y(t)=-1-e^t\cos 2t-(5/2)\,e^t\sin 2t \end{cases}$

– шуканий розв‘язок.

(Задачу б) розв’язати самостійно. Відповідь:

$$\begin{cases} x(t)=-9\cos 2t+12\sin 2t+12e^{-t}-3e^{4t}; \\ y(t)=14\cos 2t-2\sin 2t-12e^{-t}-2e^{4t} \end{cases}$$

– шуканий розв‘язок.) ■

Зауваження. Крім диференціальних рівнянь, що включають похідні невідомої функції, для математичного моделювання різних явищ використовуються також інші споріднені з ними рівняння. Зокрема, ***інтегральні рівняння***, що містять інтеграли від невідомої функції, а також ***інтегро-диференціальні рівняння***, в яких невідома функція входить як під знак похідної, так і під знак інтеграла.

Приклад 6. Знайти частинний розв‘язок інтегро-диференціального рівняння $y'+2y-3\int_0^t y(u)\,du=4e^{-3t}$, який задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

□ Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;$$

$$\int_0^t y(u)\,du \doteqdot \frac{1}{p}Y(p); \qquad e^{-3t} \doteqdot \frac{1}{p+3}.$$

Одержимо $pY(p) - 1 + 2Y(p) - 3 \cdot \frac{1}{p}Y(p) = 4 \cdot \frac{1}{p+3}$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо його:

$$(p^2 + 2p - 3) \cdot Y(p) = p + \frac{4p}{p+3}; \; Y(p) = \frac{p^2 + 7p}{(p+3)(p^2 + 2p - 3)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{p^2 + 7p}{(p+3)(p^2 + 2p - 3)} = \left| p^2 + 2p - 3 = 0; \;\; p_1 = 1; \right.$$

$$\left. p_2 = -3; \; p^2 + 2p - 3 = (p-1)(p+3) \right| = \frac{p^2 + 7p}{(p-1)(p+3)^2} =$$

$$= \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p+3)^2} + \frac{C}{p+3} = \left| A(p+3)^2 + B(p-1) + \right.$$

$$\left. + C(p-1)(p+3) = p^2 + 7p; \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} p = 1: \\ p = -3: \\ p^2: \end{array} \begin{cases} 16A = 8; & A = 1/2; \\ -4B = -12; & B = 3; \\ A + C = 1; & C = 1 - A = 1/2 \end{cases} \right| = \frac{1/2}{p-1} +$$

$$+ \frac{3}{(p+3)^2} + \frac{1/2}{p+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} + 3 \cdot \frac{1}{(p+3)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+3} \doteqdot$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}e^{t}+3te^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-3t}=y(t)$$ – шуканий розв‘язок. ■

3.4. Застосування операційного числення для розв'язування задач електротехнічного змісту

Математичними моделями перехідних процесів у електричних ланцюгах служать диференціальні та споріднені з ними (інтегральні, інтегро-диференціальні, скінченно-різницеві і т. п.) рівняння. При складанні таких рівнянь звичайно користуються першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа: *алгебраїчна сума всіх струмів, що протікають в довільній точці ланцюга, дорівнює нулю.*

Другий закон Кірхгофа: *для кожного замкнутого контуру алгебраїчна сума падінь напруги в окремих гілках дорівнює нулю.*

У довільний момент часу t перехідного процесу для активного опору R, індуктивності L, ємності C справедливі наступні співвідношення, що зв’язують падіння напруги на кінцях елемента $u(t)$ та силу струму в ньому $i(t)$:

$$u_R(t)=R\,i_R(t);\;\; u_L(t)=L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt};\;\; u_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt+u_C(0),$$

де $u_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t=0$.

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R та індуктивності L (рис. 64). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і закороченні ланцюга в початковий момент часу $t=0$ (перемикач K переводиться при $t=0$ із положення A в положення B).

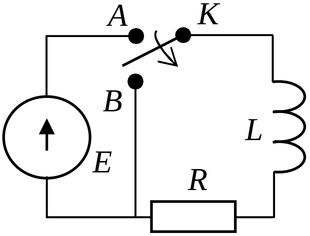

Рис. 64

□ Нехай $i(t)\risingdotseq I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У момент перемикання $t=0$ за законом Ома сила струму $i(0)=E/R$.

Після перемикання за другим законом Кірхгофа

$$L\,di/dt+Ri=0\,.$$

Перейдемо в одержаному ДР до зображень:

$$\frac{di}{dt}\doteqdot p\,I(p)-i(0)=p\,I(p)-E/R\,;\;\; L(p\,I(p)-E/R)+RI(p)=0$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо його:

$$(Lp+R)I(p)=\frac{LE}{R}\;;\qquad I(p)=\frac{LE/R}{Lp+R}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$I(p)=\frac{LE/R}{Lp+R}=\frac{E}{R}\times\frac{1}{p+R/L}\doteqdot\frac{E}{R}e^{-(R/L)t}=i(t)$$

– шуканий закон зміни сили струму в контурі. ■

<u>Приклад 2</u>. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C (рис. 65). Знайти закон зміни сили струму в контурі при його підключенні в початковий момент часу $t=0$ до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B у положення A).

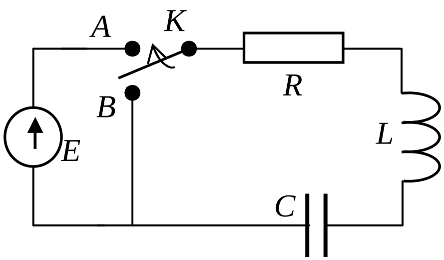

Рис. 65

□ Нехай $i(t)\doteqdot I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У початковий момент $t=0$ сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсатора дорівнюють нулю

$$i(0)=0\,;\quad u_C(0)=0\,.$$

Тоді згідно з другим законом Кірхгофа

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(z)\,dz = E\ .$$

Перейдемо в обох частинах одержаного інтегро-диференціального рівняння до зображень:

$$\frac{di}{dt} \fallingdotseq pI(p) - i(0) = pI(p);\ \int_0^t i(z)\,dz \fallingdotseq \frac{1}{p}I(p);\ 1 \fallingdotseq \frac{1}{p};$$

$$R\,I(p) + Lp\,I(p) + (1/C)\cdot(1/p)I(p) = E\cdot(1/p)$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння:

$$CRp\,I(p) + CLp^2 I(p) + I(p) = CE\ ;$$

$$I(p) = \frac{CE}{CLp^2 + CRp + 1} = \frac{E/L}{p^2 + (R/L)p + 1/(CL)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал.

Обмежимося найважливішим для практики випадком малого опору R і введемо позначення:

$\alpha = R/(2L)$ – коефіцієнт затухання; $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$ – власна кругова частота, яку мав би контур при відсутності активного опору $(R = 0)$; $\omega = \sqrt{1/(LC) - (R/(2L))^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – кругова частота контура. Припускаємо, що $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0$ (опір R малий).

Тоді

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL} = p^2 + \frac{R}{2L}p + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} =$$

$$= p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega_0{}^2 - \alpha^2 = (p+\alpha)^2 + \omega^2;$$

$$I(p) = \frac{E}{L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} \fallingdotseq \frac{E}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t = i(t)$$

– шуканий закон зміни сили струму в контурі. ■

Приклад 3. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C, зв'язані взаємною індукцією M (рис. 66). Знайти закон зміни сили струму в першому $i_1(t)$ та другому $i_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур у початковий момент часу $t=0$ підключається до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B в положення A). Вважати індукційний зв'язок ідеальним, при якому $M=L$.

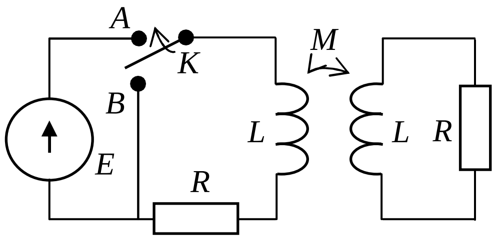

Рис. 66

□ Нехай

$$i_1(t) \doteqdot I_1(p),$$

$$i_2(t) \doteqdot I_2(p)$$

– шукані закони зміни сили струму (оригінали) і відповідні зображення. У початковий момент $t=0$ обидва контури закорочені, тому початкова сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсаторів дорівнюють нулю:

$$i_1(0)=0;\ u_{C1}(0)=0;\ i_2(0)=0;\ u_{C2}(0)=0.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з контурів, одержимо інтегро-диференціальну систему

$$\begin{cases} Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(z)\,dz + M\dfrac{di_2}{dt} = E; \\ Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2(z)\,dz + M\dfrac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Враховуючи умову $M=L$, маємо

$$\begin{cases} Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(z)\,dz + L\dfrac{di_2}{dt} = E; \\ Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2(z)\,dz + L\dfrac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Перейдемо в обох частинах одержаної інтегро-диференціальної системи до зображень:

$$\frac{di_1}{dt} \doteqdot p\,I_1(p)-i_1(0)=p\,I_1(p);\;\; \int_0^t i_1(z)\,dz \doteqdot \frac{1}{p}I_1(p);$$

$$\frac{di_2}{dt} \doteqdot p\,I_2(p)-i_2(0)=p\,I_2(p);\;\; \int_0^t i_2(z)\,dz \doteqdot \frac{1}{p}I_2(p);\;\; 1 \doteqdot \frac{1}{p};$$

$$\begin{cases} R\,I_1(p)+Lp\,I_1(p)+\dfrac{1}{Cp}\,I_1(p)+Lp\,I_2(p)=E\cdot\dfrac{1}{p}; \\ R\,I_2(p)+Lp\,I_2(p)+\dfrac{1}{Cp}\,I_2(p)+Lp\,I_1(p)=0 \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} \left(LCp^2+RCp+1\right)I_1(p)+LCp^2\,I_2(p)=EC; \\ LCp^2\,I_1(p)+\left(LCp^2+RCp+1\right)I_2(p)=0. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} LCp^2+RCp+1 & LCp^2 \\ LCp^2 & LCp^2+RCp+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(RCp+1)\left(2LCp^2+RCp+1\right)=$$

$$=2RC^2L\,\left(p+1/(RC)\right)\left(p^2+(R/(2L))\,p+1/(2LC)\right);$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} EC & LCp^2 \\ 0 & LCp^2+RCp+1 \end{vmatrix}=2RC^2L\left(\frac{E}{2R}p^2+\frac{E}{2L}p+\right.$$

$$\left.+\frac{E}{2RCL}\right);\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} LCp^2+RCp+1 & EC \\ LCp^2 & 0 \end{vmatrix}=-EC^2Lp^2;$$

$$I_1(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{(E/(2R))\,p^2+(E/(2L))\,p+E/(2RCL)}{\left(p+1/(RC)\right)\left(p^2+(R/(2L))\,p+1/(2LC)\right)};$$

$$I_2(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{(E/(2R))\;p^2}{\left(p+1/(RC)\right)\left(p^2+(R/(2L))\,p+1/(2LC)\right)}$$

– зображення шуканих сил струму. Знайдемо відповідні оригінали.

Введемо позначення:

$$\frac{1}{RC}=\alpha\ ;\quad \frac{R}{4L}=\beta\ ;\quad \frac{1}{2LC}-\frac{R^2}{16L^2}=\omega^2>0\ .$$

Тоді

$$p^2+(R/(2L))p+1/(2LC)=\left(p^2+2\cdot(R/(4L))p+\right.$$

$$\left.+(R/(4L))^2\right)+\left(1/(2LC)-(R/(4L))^2\right)=(p+\beta)^2+\omega^2;$$

$$I_1(p)=\frac{(E/(2R))p^2+(E/(2L))p+E/(2RCL)}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=\frac{E/(2R)}{p+\alpha}+$$

$$\frac{E/(4L)}{(p+\beta)^2+\omega^2}=\frac{E}{2R}\cdot\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\ \risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ \sin\omega t=i_1(t);$$

$$I_2(p)=-\frac{(E/(2R))\,p^2}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=-\ \frac{E/(2R)}{p+\alpha}+$$

$$\frac{E/(4L)}{(p+\beta)^2+\omega^2}=-\ \frac{E}{2R}\cdot\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\ \risingdotseq$$

$$\risingdotseq-\ \frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ \sin\omega t=i_2(t).$$

Отже, шукані закони зміни сили струму

$$i_1(t)=\left(E/(2R)\right)e^{-\alpha t}+\left(E/(4L\omega)\right)e^{-\beta t}\ \sin\omega t\,;$$

$$i_2(t)=-\left(E/(2R)\right)e^{-\alpha t}+\left(E/(4L\omega)\right)e^{-\beta t}\ \sin\omega t\ .\quad \blacksquare$$

Зауваження. У багатьох випадках, зокрема, коли неможливе вимірювання внутрішніх змінних або невідомі закони протікання процесів, математичне моделювання здійснюється на основі дослідження зовнішньої поведінки системи у термінах “вхід – вихід”.

Передаточною функцією системи $W(p)$ називається відношення зображень вихідної $Y(p)$ і вхідної $U(p)$ змінних при нульових початкових умовах

$$W(p)=Y(p)/U(p)\ .$$

Метод дослідження і проектування систем за допомогою передаточної та зв'язаних з нею функцій є одним з основних у теорії автоматичного керування.

<u>Приклад 4</u>. На рис. 67 зображена аперіодична ланка у вигляді електричного ланцюга, що складається з активних опорів R_1, R_2 та індуктивності L. Знайти передаточну функцію $W(p)$ цієї системи.

□ Така система описується ДР першого порядку

$$T\frac{dy}{dt}+y=ku\,,$$

де $u=u_1(t)$ і $y=u_2(t)$ – відповідно вхідна та вихідна змінні (напруги на вході та виході); T,k – сталі коефіцієнти (T – стала часу, k – коефіцієнт підсилення). При цьому

$$T=L/(R_1+R_2);\quad k=R_2/(R_1+R_2).$$

Перейдемо до зображень за Лапласом при нульових початкових умовах:

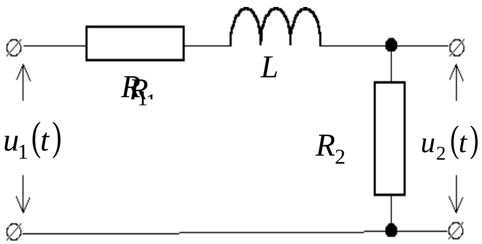

Рис. 67

$$u(t)\doteqdot U(p)\ ;$$

$$y(t)\doteqdot Y(p)\ ;$$

$$\frac{dy}{dt}\doteqdot pY(p).$$

Одержимо операторну форму рівняння динаміки аперіодичної ланки $(Tp+1)Y(p)=kU(p)$. Звідси

$$Y(p)=\left(k/(Tp+1)\right)U(p);\ \ W(p)=Y(p)/U(p)=k/(Tp+1)$$

– передаточна функція аперіодичної ланки. ■

3.5. Функціонал та його варіація. Екстремум

3.5.1. Поняття про функціонал

Нехай задано деякий клас D функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)$ із класу D за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної I, то ця змінна I називається ***функціоналом від однієї функціональної змінної*** $y(x)$ і позначається $I = I[y] = I[y(x)]$.

Клас D функцій $y(x)$, на яких визначений функціонал, називається ***областю визначення*** функціоналу. При цьому функція $y(x)$ служить ***незалежною змінною (аргументом)*** функціоналу. Функції із області визначення D даного функціоналу I називаються ***функціями порівняння*** або ***допустимими функціями***.

Кожну функцію $y(x)$, яка належить області визначення D функціоналу $I[y]$, можна розглядати як точку (елемент) деякої множини (простору) функцій. Простори, елементами яких служать функції, називаються ***функціональними просторами***.

Функціонал – це відображення, при якому значеннями незалежної змінної $y(x)$ є точки функціонального простору, а значеннями залежної змінної I – числа.

Приклади функціоналів: значення функції в точці, границя функції, визначений інтеграл від функції.

Розглядаються також функціонали від кількох незалежних функціональних змінних. Якщо скінченному набору функцій $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ з певного класу D ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I, то I називається ***функціоналом від*** n ***функціональних змінних*** і позначається $I = I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = I[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$.

<u>Приклад 1</u>. Обчислити заданий функціонал при вказаних значеннях аргументу:

а) $I[y] = y(8)$; $y_1 = \sqrt[3]{x}$; $y_2 = tg\,(\pi x/32)$.

б) $I[y] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x}$; $y_1 = \sin x$; $y_2 = xe^{-x}$.

в) $I[y] = y'(\pi);\;\; y_1 = \cos^2 x;\quad y_2 = \sin x^3.$

г) $I[y] = \int\limits_0^{1/2} \frac{xy'}{\sqrt{1-y^2}}dx\,;\;\; y_1 = x;\;\; y_2 = \cos x.$

д) $I[y,z] = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{e^y z^3}{\sin^2 x}dx;\;\; y_1 = \cos x;\;\; z_1 = \sin x.$

□ а) $I[y_1] = \sqrt[3]{8} = 2;\;\; I[y_2] = tg\,\frac{\pi\cdot 8}{32} = 1.$

б) $I[y_1] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0;\;\; I[y_2] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x e^{-x}}{x} = 0.$

в) $I[y_1] = (\cos^2 x)'\Big|_{x=\pi} = (-2\cos x \sin x)\Big|_{x=\pi} = 0;$

$I[y_2] = (\sin x^3)'\Big|_{x=\pi} = \left(\cos x^3 \cdot 3x^2\right)\Big|_{x=\pi} = 3\pi^2\cos\pi^3.$

г) $I[y_1] = \int\limits_0^{1/2} \frac{x\cdot 1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\right)\Bigg|_0^{1/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$I[y_2] = \int\limits_0^{1/2} \frac{x\cdot(-\sin x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx = -\int\limits_0^{1/2} x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{1/2} = -\frac{1}{8}\,.$$

д) $I[y_1, z_1] = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{e^{\cos x}\sin^3 x}{\sin^2 x}dx = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\cos x}\sin x\,dx =$

$$= -e^{\cos x}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -1 + e^{1/2}.\quad ■$$

<u>Зауваження</u>. Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал у вигляді визначеного інтеграла $I[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$, допустимими для якого служать функції класу $C_1[a;b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a;b]$, тобто, гладкі на відрізку $[a;b]$.

3.5.2. Екстремум функціоналу

Відстанню нульового порядку між функціями (лініями) $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\boxed{\rho_0 = \rho_0(y_1, y_2) = \max\limits_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)|}$. При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.

Відстанню першого порядку між функціями (лініями) $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\boxed{\rho_1 = \rho_1(y_1, y_2) = \max_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'_1(x) - y'_2(x)|}.$$

При цьому вважається, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[a;b]$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти відстань першого порядку між кривими $y = y_1(x) = x^2/2$ і $y = y_2(x) = x^3/3$ на відрізку $[0;2]$.

□ $\rho_1 = \max\limits_{0 \le x \le 2} |y_1(x) - y_2(x)| + \max\limits_{0 \le x \le 2} |y'_1(x) - y'_2(x)|$.

Розглянемо функції $z_0(x) = y_1(x) - y_2(x) = x^2/2 - x^3/3$ і $z_1(x) = y'_1(x) - y'_2(x) = x - x^2$. Знайдемо їх найбільші та найменші значення на відрізку $[0;2]$:

$$z'_0(x) = x - x^2 = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ z_0(0) = 0;\ z_0(1) = 1/6;$$

$$z_0(2) = -2/3;\ \max_{0 \le x \le 2} z_0(x) = 1/6;\ \min_{0 \le x \le 2} z_0(x) = -2/3;$$

$$z'_1(x) = 1 - 2x = 0;\ x_1 = 1/2;\ z_1(1/2) = 1/4;\ z_1(0) = 0;$$

$$z_1(2) = -2;\ \max_{0 \le x \le 2} z_1(x) = 1/4;\ \min_{0 \le x \le 2} z_1(x) = -2.$$

Тоді $\max\limits_{0 \le x \le 2} |y_1(x) - y_2(x)| = \max\limits_{0 \le x \le 2} |z_0(x)| = 2/3;$

$$\max_{0 \le x \le 2} |y'_1(x) - y'_2(x)| = \max_{0 \le x \le 2} |z_1(x)| = 2;\ \rho_1 = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}.\ ■$$

Нехай D_1 – деякий клас функцій порівняння (підмножина області визначення D) функціоналу $I = I[y]$. Функціонал $I = I[y]$ має в цьому класі D_1 ***абсолютний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $\overline{y}(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$ виконується нерівність

$$I[y(x)] \geq I[\overline{y}(x)] \quad \left(I[y(x)] \leq I[\overline{y}(x)]\right).$$

Функціонал $I = I[y]$ має в класі D_1 ***локальний або відносний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $y_0(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$, яка близька до функції $y_0(x)$, виконується нерівність

$$I[y(x)] \geq I[y_0(x)] \quad \left(I[y(x)] \leq I[y_0(x)]\right).$$

Максимуми і мінімуми називаються ***екстремумами***.

Якщо близькість функцій розуміється в сенсі відстані нульового порядку, тобто $\rho_0(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***сильним***.

Якщо близькість функцій розуміється в сенсі відстані першого порядку, тобто $\rho_1(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***слабким***.

На рис. 68 зображені лінії, близькі в сенсі відстані нульового порядку (координати їх близькі, а напрямки дотичних можуть суттєво відрізнятись), а на рис. 69 наведені криві, близькі в сенсі відстані першого порядку (близькі не тільки їх координати, а і напрямки дотичних).

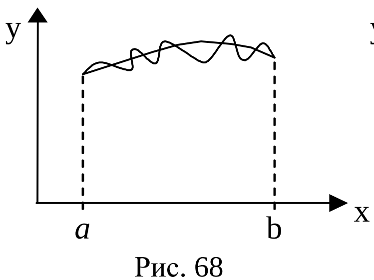

Рис. 68

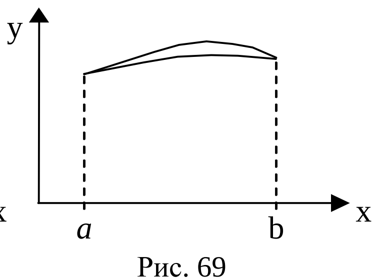

Рис. 69

Абсолютний екстремум тим паче є відносним екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Сильний відносний екстремум тим паче є слабким екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Надалі, як правило, будемо розглядати слабкий відносний екстремум і слова "слабкий", "відносний" будемо опускати.

Основною задачею варіаційного числення є дослідження функціоналу на екстремум.

Зауваження. На відміну від задачі пошуку екстремуму функції однієї змінної, що відповідно має один ступінь вільності, задача пошуку екстремуму функціоналу має нескінченне число ступенів вільності (пошук лінії $\overline{y}(x)$).

3.5.3. Варіація функції та приріст функціоналу. Неперервність. Лінійний функціонал

Нехай функціонал $I = I[y]$ визначений на класі функцій D, $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ – довільні функції даного класу D. Функція, яка дорівнює різниці функцій $\overline{y}(x)$ і $y(x)$, називається ***приростом або варіацією аргументу*** y функціоналу $I[y]$ і позначається δy: $\delta y = \delta y(x) = \overline{y}(x) - y(x)$. Тоді $\overline{y}(x) = y + \delta y$.

Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається ***приростом функціоналу*** $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Зазначимо, що *похідна варіації функції дорівнює варіації похідної*: $(\delta y)' = \delta y'$.

Дійсно, $(\delta y)' = \left(\overline{y}(x) - y(x)\right)' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$.

Якщо нескінченно малому приросту функції δy відповідає нескінченно малий приріст функціоналу ΔI, то такий функціонал $I[y]$ називається ***неперервним***.

Функціонал $I[y]$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1) Функціонал від алгебраїчної суми функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі функціоналів: $I[y_1 + y_2] = I[y_1] + I[y_2]$;

2) Сталий множник можна виносити за знак функціоналу: $I[Cy]=CI[y],\ C=const$.

3.5.4. Перша та друга варіації функціоналу

Нехай для довільної малої варіації аргументу δy відповідний приріст функціоналу ΔI можна подати у вигляді суми головної частини $L[y,\delta y]$, лінійної відносно δy, та нескінченно малої $\beta[y,\Delta y]$ вищого порядку порівняно з δy: $\Delta I=L[y,\delta y]+\beta[y,\delta y]$; $\beta[y,\delta y]=\gamma[y,\delta y]\cdot\max|\delta y|$, де $\lim\limits_{\max|\delta y|\to 0}\gamma[y,\delta y]=0$. Тоді функціонал $I[y]$ називається ***варійовним***, а головна лінійна відносно δy частина його приросту $L[y,\delta y]$ називається ***варіацією*** (***диференціалом***) ***функціоналу*** і позначається δI: $\delta I=L[y,\delta y]$, $\Delta I=\delta I+\beta[y,\delta y]$. (***Перше означення варіації*** функціоналу).

Приклад 1. Знайти варіацію функціоналу δI, користуючись першим означенням як головної, лінійної відносно δy, частини його приросту ΔI: $I[y]=\int_a^b y(y+\cos x)\,dx$.

□ Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b(y+\delta y)(y+\delta y+\cos x)dx-\int\limits_a^b y(y+\cos x)\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(y^2+2y\delta y+y\cos x+(\delta y)^2+\cos x\cdot\delta y-y^2-y\cos x\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^b(2y+\cos x)\delta y\ dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2\,dx.$$

За першим означенням $\delta I=\int_a^b(2y+\cos x)\delta y\,dx$. ■

Зауваження. Роль варіації δI при дослідженні функціоналів аналогічна тій, яку виконує при дослідженні функцій диференціал. У таблиці 1 наведено відповідність понять диференціального та варіаційного числень для випадку одного аргументу.

Таблиця 1

№ п/п	Диференціальне Числення	Варіаційне числення
1	Аргумент – числова змінна x	Аргумент – числова функція $y(x)$
2	Залежна змінна – числова y	Залежна змінна – числова I
3	Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
4	Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI
5	Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
6	Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
7	Необхідна умова екстремуму $dy = 0$	Необхідна умова екстремуму $\delta I = 0$
8	Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
9	Достатня умова екстремуму: $d^2 y > 0$ – min, $d^2 y < 0$ – max	Достатня умова екстремуму: $\delta^2 I > 0$ – min, $\delta^2 I < 0$ – max

Варіацію δI називають також ***варіацією першого порядку*** або ***першою варіацією функціоналу*** $I[y]$. Варіацію другого порядку введемо аналогічно тому, як це робиться для диференціала другого порядку функції.

Візьмемо довільну допустиму функцію $y = y(x)$ і довільну її варіацію $\delta y = \delta y(x)$ таку, що функція $y + \delta y$ є допустимою. Зафіксуємо y та δy і розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $\overline{y} = y + \alpha\delta y$, де α – деяке число (параметр). Функціонал $I[y]$ на вказаній сім'ї є функцією параметра α: $I[y+\alpha\delta y]=\Phi(\alpha)$.

Припустимо, що цю функцію можна розкласти за формулою Тейлора до квадратичного члена включно в околі точки $\alpha=0$:

$$I[y+\alpha\delta y]=I[y]+\left\{\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2}I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha^2+R_2(y,\delta y,\alpha),$$

де залишковий член $R_2(y,\delta y,\alpha)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з α^2: $R_2(y,\delta y,\alpha)=o(\alpha^2)$.

Тоді варіаціям першого та другого порядку можна дати такі означення.

Варіацією або ***першою варіацією функціоналу*** δI називається значення першої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$:

$$\boxed{\delta I=\delta I[y,\delta y]=\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\Bigg|_{\alpha=0}.}$$

(***Друге означення варіації*** функціоналу).

Можна показати, що це означення першої варіації рівносильне наведеному раніше. На практиці зручніше користуватись останнім означенням.

Другою варіацією функціоналу або ***варіацією другого порядку*** $\delta^2 I$ називається значення другої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$: $\boxed{\delta^2 I=\frac{d^2}{d\alpha^2}I[y+\alpha\delta y]\Bigg|_{\alpha=0}.}$

<u>Приклад 2</u>. Знайти варіацію функціоналу δI, користуючись другим означенням як похідної по параметру:

$$I[y]=\int_a^b x(y')^2\sin y\,dx.$$

□ У відповідності з другим означенням варіації функціоналу маємо:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b x\left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2 \sin(y+\alpha\delta y)\,dx\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\alpha} x\left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2 \sin(y+\alpha\delta y)\,dx\Bigg|_{\alpha=0} = \int_a^b x\big(2(y'+\alpha\delta y')\times$$

$$\times\delta y'\sin(y+\alpha\delta y)+(y'+\alpha\delta y')^2\cos(y+\alpha\delta y)\cdot\delta y\big)\Big|_{\alpha=0} dx =$$

$$= \int_a^b x\left(2y'\sin y\cdot\delta y' + (y')^2\cos y\cdot\delta y\right)dx\,. \quad \blacksquare$$

3.6. Необхідна умова екстремуму. Диференціальні рівняння екстремалей

3.6.1. Необхідна умова екстремуму функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає в рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціонала справедлива

<u>теорема</u> (***необхідна умова екстремуму*** в варіаційній формі). *Якщо функціонал* $I[y]$ *має варіацію* δI *і досягає на деякій функції* $y_0 = y_0(x)$ *екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю:* $\boxed{\delta I[y_0, \delta y] = 0.}$

□ Розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $y_0 + \alpha\delta y$, де α – деяке число. На вказаній сім'ї функціонал $I[y]$ є функцією параметра α: $\delta I[y_0, \delta y] = \Phi(\alpha)$, яка згідно з умовою теореми має екстремум при $\alpha = 0$.

У відповідності з необхідною умовою екстремуму функції маємо $\left.\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, тобто $\left.\frac{d}{d\alpha} I[y_0 + \alpha\delta y]\right|_{\alpha=0} = 0$. За другим означенням указана похідна є варіацією функціоналу $\delta I[y_0, \delta y]$. Отже, $\delta I[y_0, \delta y] = 0.$ ■

Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються ***стаціонарними функціями*** або ***допустимими екстремалями***.

3.6.2. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Рівняння Ейлера

Розглянемо ***найпростішу задачу варіаційного числення***:
знайти мінімум (максимум) функціоналу

$$\boxed{I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx}$$

при крайових умовах $\boxed{y(x_1)=y_1;\ y(x_2)=y_2}$

серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)$, де x_1,x_2,y_1,y_2 – відомі числа.

Оскільки в даній задачі всі допустимі криві, серед яких шукається та, що доставляє екстремум функціоналу, проходять через дві різні нерухомі точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, то поставлена задача називається ***варіаційною задачею з закріпленими кінцями***.

<u>Теорема</u>. *Допустимі екстремалі функціоналу з закріпленими кінцями* $I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,dx;\ \ y(x_1)=y_1;\ \ y(x_2)=y_2$, *визначаються як розв'язки диференціального рівняння* $\boxed{F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0}$ *при крайових умовах* $y(x_1)=y_1;\ y(x_2)=y_2$.

Диференціальне рівняння другого порядку $\boxed{F'_y-dF'_{y'}/dx=0}$ називається ***рівнянням Ейлера***. Розв'язки рівняння Ейлера називаються ***екстремалями***, а само рівняння Ейлера – ***диференціальним рівнянням екстремалей***.

Таким чином, в даній задачі ***допустимі екстремалі*** виділяються зі всіх екстремалей врахуванням крайових умов.

□ Необхідна умова екстремуму, з якої знаходяться екстремалі, має вигляд $\delta I[y,\delta y]=0$. Оскільки ця умова повинна виконуватись для будь-якої варіації функції δy, то при закріплених кінцях повинні справджуватись рівності $\delta y(x_1)=0,\ \delta y(x_2)=0$.

Виразимо варіацію функціоналу через функцію $F(x,y,y')$ та її похідні:

$$\delta I=\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\,\delta y]\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\,dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+$$

$$+\alpha\delta y')\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha+F'_{y'}(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\times$$

$$\times(y'+\alpha\delta y')'_\alpha\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y'\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y,y')\times$$

$$\times\delta y+F'_{y'}(x,y,y')\cdot\delta y'\Big]\,dx=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y\,dx+\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx,$$

де $\quad F'_y=F'_y\,(x,y,y'),\quad F'_{y'}=F'_{y'}\,(x,y,y').$

До другого доданка останньої рівності застосуємо інтегрування частинами:

$$\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx=\left|\begin{matrix}u=F'_{y'}; & du=\dfrac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx\\ dv=\delta y'\cdot dx=(\delta y)'dx; & v=\int(\delta y)'dx=\delta y\end{matrix}\right|=$$

$$=F'_{y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\delta y\cdot\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx=F'_{y'}\cdot\delta y(x_2)-F'_{y'}\cdot\delta y(x_1)-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx,$$

оскільки $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$.

Тоді варіацію функціоналу можна подати у вигляді

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\cdot\delta y\,dx-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

На екстремалі варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx=0,$$

причому для довільної варіації функції δy такої, що $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$. Це можливо лише за умови, що вираз в дужках під знаком інтеграла дорівнює нулю для всіх x із відрізка $[x_1;x_2]$:

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 1.</u> Знайти екстремалі функціоналу:

$$I[y]=\int_0^1\left(12xy-4xy'+(y')^2\right)dx;.$$

□ Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=12xy-4xy'+(y')^2;\quad F'_y=12x;\quad F'_{y'}=-4x+2y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{d}{dx}(-4x+2y')=-4+2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-dF'_{y'}/dx=0$ набуває вигляду: $12x-(-4+2y'')=0$; $y''=6x+2$. Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y'=\int(6x+2)\,dx=3x^2+2x+C_1;$$

$$y=\int\left(3x^2+2x+C_1\right)dx=x^3+x^2+C_1x+C_2.$$

Отже, екстремалями служать функції

$y=x^3+x^2+C_1x+C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. ■

Приклад 2. Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

$$I[y]=\int_0^{\pi}\left(6y\sin 2x+2y\,y'+(y')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y(\pi)=0\,.$$

□ Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=6y\sin 2x+2y\,y'+(y')^2-y^2\,;$$

$$F'_y=6\sin 2x+2y'-2y\,;\ \ F'_{y'}=2y+2y'\,;\ \ \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y'+2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-dF'_{y'}/dx=0$ набуває вигляду:

$$6\sin 2x+2y'-2y-2y'-2y''=0\,;\quad y''+y=3\sin 2x\,.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y''+y=0\,;\quad k^2+1=0\,;\ \ k_{1,2}=\pm i\,;\quad \overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x;$$

$$y_*=A\cos 2x+B\sin 2x;\quad y'_*=-2A\sin 2x+2B\cos 2x\,;$$

$$y''_*=-4A\cos 2x-4B\sin 2x\,;$$

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=3\sin 2x\,;$$

$$\begin{matrix}\cos 2x:\\ \sin 2x:\end{matrix}\begin{cases}-3A=0; & A=0;\\ -3B=3; & B=-1;\end{cases}\quad y_*=-\sin 2x;$$

$$y=\overline{y}+y_*=C_1\cos x+C_2\sin x-\sin 2x$$

– екстремалі, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Крайові умови дають систему алгебраїчних рівнянь для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases}C_1\cos 0+C_2\sin 0-0\cdot\sin 0=0;\\ C_1\cos\pi+C_2\sin\pi-\pi\cdot\sin 2\pi=0;\end{cases}\begin{cases}C_1=0;\\ C_1+C_2\cdot 0=0;\end{cases}\begin{matrix}C_1=0;\\ 0\cdot C_2=0.\end{matrix}$$

З останньої рівності випливає, що C_2 може набувати довільних значень. Значить, допустимими екстремалями служать функції $y=C_2\sin x-\sin 2x$, де C_2 – довільна стала. Таким чином, дана варіаційна задача має нескінченну множину розв'язків. ■

3.6.3. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу

$$\boxed{I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx}$$

при крайових умовах $\boxed{y_i(x_1) = y_{i1},\ y_i(x_2) = y_{i2},\ i = \overline{1, n}.}$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ при $\delta y_i(x_1) = 0$ і $\delta y_i(x_2) = 0$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} F'_{y_1} - dF'_{y'_1} / dx = 0; \\ F'_{y_2} - dF'_{y'_2} / dx = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F'_{y_n} - dF'_{y'_n} / dx = 0 \end{cases}}$$

при крайових умовах $\begin{cases} y_i(x_1) = y_{i1}, \\ y_i(x_2) = y_{i2}, \end{cases} i = \overline{1, n}.$

Розв'язки диференціальної системи називаються ***екстремалями***, а сама система – ***системою диференціальних рівнянь екстремалей*** або ***системою рівнянь Ейлера – Лагранжа***.

Приклад 1. Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y, z] = \int_0^{\pi/2} \left((y')^2 + (z')^2 + 2z\,z' - 2y\,z' - 2y'\sin x\right) dx$;

$$y(0) = 0;\quad z(0) = 0;\quad y(\pi/2) = 1;\quad z(\pi/2) = 2;$$

б) $I[y, z] = \int_0^1 \left((y')^2 + 2y'z' + 2y\,z' + z^2\right) dx$;

$$y(0) = 0;\quad z(0) = -6;\quad y(1) = -2;\quad z(1) = -3.$$

□ а) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера – Лагранжа:

$$F(x, y, z, y', z') = (y')^2 + (z')^2 + 2z\,z' - 2y\,z' - 2y'\sin x;$$

$$F'_y = -2z'; \quad F'_{y'} = 2y' - 2\sin x; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y'' - 2\cos x;$$

$$F'_z = 2z'; \quad F'_{z'} = 2z' + 2z - 2y; \quad \frac{d}{dx}F'_{z'} = 2z'' + 2z' - 2y'.$$

Тоді система рівнянь Ейлера – Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y - dF'_{y'}\big/dx = 0; \\ F'_z - dF'_{z'}\big/dx = 0 \end{cases}$$

набуває вигляду $\begin{cases} -2z' - 2y'' + 2\cos x = 0; \\ 2z' - 2z'' - 2z' + 2y' = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y'' + z' = \cos x; \\ z'' - y' = 0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку:

$$z' = \cos x - y''; \quad z'' = -\sin x - y'''; \quad -\sin x - y''' - y' = 0;$$

$$y''' + y' = -\sin x; \quad k^3 + k = 0; \quad k(k^2 + 1) = 0; \quad k_1 = 0;$$

$$k_{2,3} = \pm i; \quad y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x;$$

$$z' = \cos x - y'' \quad \Rightarrow \quad z = \int(\cos x - y'')\,dx = \sin x - y' + C_4;$$

$$y' = -C_2\sin x + C_3\cos x; \quad z = \sin x + C_2\sin x - C_3\cos x + C_4.$$

Використавши крайові умови, знайдемо конкретні значення довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{array}{ll} y(0) = 0: & \\ z(0) = 0: & \\ y(\pi/2) = 2: & \\ z(\pi/2) = 1: & \end{array} \begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ -C_3 + C_4 = 0; \\ C_1 + C_3 = 2; \\ 1 + C_2 + C_4 = 1; \end{cases} \quad \begin{array}{l} C_1 = 1;\ C_2 = -1; \\ C_3 = 1;\ C_4 = 1. \end{array}$$

Отже, допустимі екстремалі: $\begin{cases} y = 1 - \cos x + \sin x; \\ z = 1 - \cos x. \end{cases}$

(Задачу б) розв’язати самостійно. Відповідь:

$y = x^3 - 3x^2$; $z = 3x^2 - 6$ – допустимі екстремалі.) ■

3.7. Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи

3.7.1. Достатні умови екстремуму

У багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту. Якщо при цьому допустима екстремаль єдина, то вона і служить розв'язком варіаційної задачі. У загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатись достатніми умовами екстремуму.

Нехай функція $y_0(x)$ є допустимою екстремаллю функціоналу $I[y]$ в деякому класі допустимих функцій D_1, тобто на цій кривій виконується необхідна умова екстремуму $\delta I[y_0, \delta y] = 0$. Характер екстремуму (максимум чи мінімум) визначається знаком приросту функціоналу: якщо $\Delta I \geq 0$, то функціонал має мінімум, а якщо $\Delta I \leq 0$, то – максимум. Оскільки на допустимій екстремалі перша варіація дорівнює нулю $\delta I[y_0, \delta y] = 0$, то знак приросту функціоналу ΔI для довільної досить малої варіації аргументу δy визначається знаком другої варіації функціоналу $\delta^2 I$.

Достатня умова екстремуму у варіаційній формі*: якщо на деякому класі допустимих функцій D_1 для довільної досить малої варіації функції δy на допустимій екстремалі $y_0(x)$ друга варіація функціоналу додатна $(\delta^2 I > 0)$, то на цій екстремалі функціонал має мінімум, якщо друга варіація функціоналу від'ємна $(\delta^2 I < 0)$, то – максимум, якщо ж друга варіація функціоналу набуває значень обох знаків, то екстремуму немає.*

При певних умовах знак другої варіації функціоналу $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ визначається знаком другої похідної

$F''_{y'y'}$. Звідси випливають ***достатні умови Лежандра***:

1. ***Посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму***: *якщо на допустимій екстремалі* $y_0(x)$ *виконується нерівність* $\boxed{F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} > 0}$, *то на цій екстремалі функціонал має слабкий мінімум, а якщо нерівність* $\boxed{F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} < 0}$, *то – слабкий максимум.*

2. ***Достатні умови Лежандра сильного екстремуму***: *якщо в усіх точках* $(x;y)$, *які близькі до допустимої екстремалі* $y_0(x)$, *виконується нерівність* $\boxed{F''_{y'y'} \geq 0 \quad \left(F''_{y'y'} \leq 0\right)}$ *при довільних значеннях* y', *то ця екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).*

Приклад 1. Користуючись достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал при заданих крайових умовах:

а) $I[y] = \int\limits_1^2 \left(16x^3 y + (y')^2 x^2/2\right) dx$; $y(1)=2$; $y(2)=16$;

б) $I[y] = \int\limits_0^1 \dfrac{e^{-y}}{(y')^3} dx$; $y' \neq 0$; $y(0)=0$; $y(1)=4\ln 2$.

□ а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = 16x^3 y + (y')^2 x^2/2\ ;\ \ F'_y = 16x^3;\ \ F'_{y'} = y' x^2\ ;$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = x^2 y'' + 2x\,y'$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - dF'_{y'}/dx = 0$ набуває вигляду:

$$16x^3 - x^2 y'' - 2x\,y' = 0;\quad y'' + (2/x)y' = 16x\ .$$

Розв'яжемо останнє рівняння зниженням порядку заміною $y' = p$; $p = p(x)$. Тоді:

$$y'' = p';\quad p' + (2/x)p = 16x;\quad p = uv;\ \ p' = u'v + v'u\ ;$$

$$u'v + v'u + \frac{2}{x}uv = 16x; \quad u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = 16x; \quad v' + \frac{2}{x}v = 0;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x}; \ \ln|v| = -2\ln|x|; v = \frac{1}{x^2}; \quad u' \cdot \frac{1}{x^2} = 16x;$$

$$u' = 16x^3; \quad u = 16\int x^3\, dx = 4x^4 + C_1;$$

$$p = \left(4x^4 + C_1\right) \cdot (1/x); \ \ y' = 4x^3 + C_1 \cdot (1/x);$$

$$y = \int \left(4x^3 + C_1 \cdot (1/x)\right) dx = x^4 + C_1 \ln|x| + C_2 \ \text{– екстремалі.}$$

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{matrix} y(1) = 2: \\ y(2) = 16: \end{matrix} \quad \begin{cases} 1^4 + C_1 \ln 1 + C_2 = 2; & C_2 = 1; \\ 2^4 + C_1 \ln 2 + C_2 = 16; & C_1 = 0. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $y = x^4 + 1$.

Оскільки $F''_{y'y'} = \dfrac{d}{dy'}\left(y' x^2\right) = x^2 \geq 0$ при $x \in [1;2]$ і довільних значеннях y, то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y' = 4x^3; \quad F\left(x, y, y'\right) = 16x^3(x^4 + 1) + (4x^3)^2 x^2 / 2 =$$

$$= 16x^7 + 16x^3 + 8x^8; \quad I_{\min} = I\left[x^4 + 1\right] = \int_1^2 \left(16x^7 + 16x^3 + \right.$$

$$\left. + 8x^8\right) dx = 2x^8\Big|_1^2 + 4x^4\Big|_1^2 + \frac{8}{9} \cdot x^9\Big|_1^2 = 1024\frac{2}{9}.$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F\left(x, y, y'\right) = \frac{e^{-y}}{(y')^3}; \ \ F'_y = -\frac{e^{-y}}{(y')^3}; \ \ F'_{y'} = -\frac{3e^{-y}}{(y')^4};$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = -3 \cdot \frac{-e^{-y}y'(y')^4 - 4(y')^3 y'' e^{-y}}{(y')^8} =$$

$$= 3e^{-y}\left((y')^2 + 4y''\right) / (y')^5.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - dF'_{y'}\big/dx = 0$ набуває вигляду:

$$-e^{-y}\big/(y')^3 - 3e^{-y}\left((y')^2 + 4y''\right)\big/(y')^5 = 0;\ \ (y')^2 + 4y'' = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку заміною $y' = p;\ \ p = p(y)$. Тоді:

$$y'' = p'p;\quad p^2 + 4p'p = 0;\ \ p(p + 4p') = 0;\ \ p = y' \neq 0;$$

$$\frac{p'}{p} = -\frac{1}{4};\ \int\frac{dp}{p} = -\frac{1}{4}\int dy;\ \ \ln|p| = -\frac{1}{4}y + \ln C_1;\ \ p = C_1 e^{-y/4};$$

$$y' = C_1 e^{-y/4};\quad \int e^{y/4}dy = C_1\int dx;$$

$$4e^{y/4} = C_1 x + C_2;\quad y = 4\ln\left(C_1 x/4 + C_2/4\right) \text{ – екстремалі.}$$

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{matrix} y(0) = 0: \\ y(1) = 4\ln 2: \end{matrix}\ \begin{cases} 4\ln\left(C_2/4\right) = 0; & C_2 = 4; \\ 4\ln\left(C_1/4 + C_2/4\right) = 4\ln 2; & C_1 = 4. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $y = 4\ln(x+1)$.

Оскільки друга похідна

$$F''_{y'y'} = \frac{d}{dy'}\left(-3e^{-y}\big/(y')^4\right) = 12e^{-y}\big/(y')^5$$

залежить від y, то скористаємося посиленими достатніми умовами Лежандра слабкого екстремуму.

На допустимій екстремалі $y = 4\ln(x+1)$ маємо:

$$y' = 4/(x+1);\quad F''_{y'y'}\Big|_{y=4\ln(x+1)} = 12e^{-4\ln(x+1)}\big/\left(4/(x+1)\right)^5 =$$

$$= 3(x+1)\big/256 > 0 \quad \text{при} \quad x \in [0;1].$$

Отже, на цій екстремалі функціонал досягає слабкого мінімуму. Знайдемо його значення:

$$F\left(x, y, y'\right) = \frac{e^{-y}}{(y')^3} = \frac{e^{-4\ln(x+1)}}{(4/(x+1))^3} = \frac{(x+1)^{-4}}{64(x+1))^{-3}} = \frac{1}{64(x+1)}$$

$$I_{\min} = I\left[4\ln(x+1)\right] = \frac{1}{64}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{64}\cdot\ln(x+1)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{64}.\ \ \blacksquare$$

3.7.2. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача

Варіаційною ***задачею на умовний екстремум*** називається задача дослідження на екстремум функціоналу, коли на функції, від вибору яких залежить цей функціонал, крім крайових, накладено інші додаткові умови, що звуться ***зв'язками***.

В залежності від їх характеру зв'язки поділяються на: а) ***алгебраїчні*** або ***скінченні (голономні)***; б) ***диференціальні*** або ***неголономні***; в) ***інтегральні*** або ***ізопериметричні***.

За допомогою ***методу множників Лагранжа*** задачі на умовний екстремум зводяться до задач на безумовний екстремум.

Задача Лагранжа: знайти функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які доставляють мінімум (максимум) функціоналу

$$\boxed{I[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\, dx}$$

і задовольняють рівнянням зв'язку

$$\boxed{\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0, \quad j = \overline{1, m},\ m < n,}$$

а також крайовим умовам $\boxed{y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2}, \quad i = \overline{1, n}.}$

Припускається, що рівняння зв'язку незалежні, а крайові умови їх задовольняють.

<u>Теорема</u>. *Якщо функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *є допустимими екстремалями сформульованої задачі Лагранжа, то існують такі* <u>*функції*</u> $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, ***(множники Лагранжа)****, що функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *служать безумовними допустимими екстремалями для допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, dx,$$

де $\overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ *– допоміжна функція* ***(функція Лагранжа)***.

Правило. Згідно з наведеною теоремою для знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа необхідно:

1. *Скласти функцію Лагранжа* $\boxed{\overline{F} = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j}$ *і відповідний допоміжний функціонал* $\overline{I} = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F} dx$ *з невизначеними функціями* $\lambda_j(x),\ j = \overline{1,.m}$ *– множниками Лагранжа.*

2. *Скласти систему рівнянь Ейлера – Лагранжа для допоміжного функціоналу*:

$$\boxed{\overline{F}'_{y_i} - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},}$$

приєднати до неї рівняння зв'язку

$$\boxed{\varphi_j = 0, \quad j = \overline{1,m}}$$

і з одержаної об'єднаної системи знайти екстремалі $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n), i = \overline{1,n}$, *де* $C_i, i = \overline{1,n}$ *– довільні сталі, а також, якщо потрібно, визначити множники Лагранжа* $\lambda_j = \lambda_j(x, C_1, \ldots, C_n),\ j = \overline{1,m}$.

3. *Використовуючи крайові умови, знайти конкретні значення* $C_i, i = \overline{1,n}$ *і допустимі екстремалі.*

Приклад 1. Знайти екстремалі функціоналу

$I[y,z] = \int_0^1 (y^2 + 2yz' + z^2)\, dx$ на зв'язку $y' = y - 2z$

при крайових умовах $y(0) = 3,\ y(1) = 2e + e^{-1}$.

□ Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\varphi = y' - y + 2z; \quad \overline{F} = F + \lambda\varphi; \quad \overline{F} = y^2 + 2yz' + z^2 + \lambda(y' -$$

$$- y + 2z); \quad \overline{I} = \int_0^1 \overline{F} dx = \int_0^1 \left(y^2 + 2yz' + z^2 + \lambda(y' - y + 2z)\right) dx,$$

де $\lambda = \lambda(x)$.

Складемо систему рівнянь Ейлера – Лагранжа:

$$\overline{F}'_y = 2y + 2z' - \lambda;\quad \overline{F}'_z = 2z + 2\lambda;\quad \overline{F}'_{y'} = \lambda;\quad \overline{F}'_{z'} = 2y;$$

$$\begin{matrix} \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = \lambda'; \\ \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 2y'; \end{matrix}\qquad \begin{cases} \overline{F}'_y - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; \\ \overline{F}'_z - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 2z' - \lambda - \lambda' = 0; \\ 2z + 2\lambda - 2y' = 0; \end{cases}\qquad \begin{cases} 2y + 2z' - \lambda - \lambda' = 0; \\ \lambda = y' - z. \end{cases}$$

Враховуючи рівняння зв'язку, маємо систему:

$$\begin{cases} 2y + 2z' - \lambda - \lambda' = 0; \\ \lambda = y' - z'; \\ y' = y - 2z. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку:

$$z = y/2 - y'/2;\ z' = y'/2 - y''/2;\quad \lambda = y' - (y/2 - y'/2) =$$

$$= 3y'/2 - y/2;\quad \lambda' = 3y''/2 - y'/2;$$

$$2y + 2(y'/2 - y''/2) - (3y'/2 - y/2) - (3y''/2 - y'/2) = 0;$$

$$4y + 2y' - 2y'' - 3y' + y - 3y'' + y' = 0;\quad -5y'' + 5y = 0;$$

$$k^2 - 1 = 0;\ k_{1,2} = \pm 1;\ y = C_1e^x + C_2e^{-x};\ y' = C_1e^x - C_2e^{-x};$$

$$z = \left(C_1e^x + C_2e^{-x}\right)/2 - \left(C_1e^x - C_2e^{-x}\right)/2 = C_2e^{-x}.$$

Отже, екстремалями служать функції

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x};\quad z = C_2e^{-x}.$$

Знайдемо значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{matrix} y(0) = 3: \\ y(1) = 2e + e^{-1}: \end{matrix}\ \begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1e + C_2e^{-1} = 2e + e^{-1}; \end{cases}\quad \begin{matrix} C_1 = 2; \\ C_2 = 1. \end{matrix}$$

Отже, допустимі екстремалі $y = 2e^x + e^{-x};\ z = e^{-x}$. ■

Приклад 2. Знайти геодезичну (найкоротшу) лінію, яка сполучає дві задані точки $A(2;-1;-4)$ і $B(4;4;-3)$ поверхні $3x-2y+4z+8=0$. Знайти її довжину $I_{\min}$.

□ Нехай шукана лінія AB визначається рівняннями $y=y(x);\ z=z(x);\ \ x\in[2;4]$.

Тоді $y(2)=-1;\ \ z(2)=-4;\ \ y(4)=4;\ \ z(4)=-3$ – крайові умови; $\varphi(x,y,z)=3x-2y+4z+8=0$ – рівняння зв'язку;

$I[y,z]=\int\limits_2^4\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$ – функціонал (довжина дуги AB), мінімум якого треба знайти.

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F}=F+\lambda\varphi;\ \ \overline{F}=\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(3x-2y+4z+8);$$

$$\overline{I}[y,z]=\int\limits_2^4\overline{F}dx=\int\limits_1^2\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(3x-2y+4z+8)\,dx.$$

Складемо систему рівнянь Ейлера – Лагранжа:

$$\overline{F}'_y=-2\lambda;\ \ \overline{F}'_z=4\lambda;\ \ \overline{F}'_{y'}=y'\Big/\sqrt{1+(y')^2+(z')^2};$$

$$\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=\frac{y''+y''(z')^2-y'z'z''}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2}};\ \ \overline{F}'_{z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=\left(z''+z''(y')^2-y'y''z'\right)\Big/\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2};$$

$$\begin{cases}\overline{F}'_y-\dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\\ \overline{F}'_z-\dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}-2\lambda-\dfrac{y''+y''(z')^2-y'z'z''}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2}}=0;\\ 4\lambda-\dfrac{z''+z''(y')^2-y'z'y''}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2}}=0.\end{cases}$$

Вилучивши з останньої системи λ, одержимо

$$2\left(y''+y''(z')^2-y'z'z''\right)+z''+z''(y')^2-y'z'y''=0.$$

Продиференціювавши рівняння зв'язку, маємо:

$$3-2y'+4z'=0;\quad -2y''+4z''=0.\quad y'=3/2+2z';\quad y''=2z''.$$

Тоді $\quad 2\left(2z''+2z''(z')^2-(3/2+2z')z'z''\right)+$

$$+z''+z''(3/2+2z')^2-(3/2+2z')z'2z''=0;$$

$$4z''+4z''(z')^2-3z'z''-4(z')^2z''+$$

$$+z''+(9/4)z''+6z'z''+4(z')^2z''-3z'z''-4(z')^2z''=0;$$

$$(29/4)z''=0;\quad z''=0;\ z'=C_1;\ z=C_1x+C_2.$$

З рівняння зв'язку $y=(3x+4z+8)/2$ Тоді

$$y=\left(3x+4\left(C_1x+C_2\right)+8\right)/2=(3/2)x+2C_1x+2C_2+4.$$

Отже, $\quad y=(3/2)x+2C_1x+2C_2+4;\quad z=C_1x+C_2$

– екстремалі. Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{matrix} z(2)=-4: \\ z(4)=-3: \end{matrix}\ \begin{cases} 2C_1+C_2=-4; & C_1=1/2; \\ 4C_1+C_2=-3; & C_2=-5. \end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі:

$$y=(3/2)\,x+2\cdot(1/2)\cdot x+2\cdot(-5)+4=(5/2)\,x-6;$$

$$z=(1/2)\,x-5.$$

Таким чином, геодезична лінія визначається рівняннями

$$y=(5/2)\,x-6;\ z=(1/2)\,x-5;\ x\in[2;4].$$

Знайдемо її довжину: $\quad y'=5/2;\ \ z'=1/2;$

$$I_{\min}=I\left[\frac{5}{2}x-6;\frac{1}{2}x-5\right]=\int_2^4\sqrt{1+(5/2)^2+(1/2)^2}\,dx=\sqrt{30}\,.\ \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти екстремалі функціоналу

$I[y,z]=\int_0^1 (y'+y)\,z\,dx$ на зв'язку $y'+z'=y+z$

при крайових умовах $y(0)=0,\ \ y(1)=e^{-2}-e$.

□ Розв’язати задачу самостійно.

Відповідь: $y = e^{-2x} - e^{x}$; $z = -e^{-2x} - 2e^{x}$. ■

Найпростіша ***ізопериметрична задача***: знайти функцію $y(x)$, яка доставляє мінімум (максимум) функціоналу

$$\boxed{I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx}$$

і задовольняє інтегральному зв'язку $\boxed{I_*[y] = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y, y')\, dx = l}$,

а також крайовим умовам $\boxed{y(x_1) = y_1;\ y(x_2) = y_2}$.

<u>Теорема.</u> *Якщо функція* $y(x)$ *є допустимою екстремаллю сформульованої ізопериметричної задачі, то існує таке <u>число</u>* λ ***(множник Лагранжа)****, що функція* $y(x)$ *служить безумовною допустимою екстремаллю допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y,\ y',\ \lambda)\, dx ,$$

де $\boxed{\overline{F}(x, y,\ y',\ \lambda) = F + \lambda\varphi}$ *– допоміжна функція* ***(функція Лагранжа)***.

<u>Зауваження</u>. На відміну від алгебраїчних чи диференціальних, інтегральні зв'язки не накладають жорстких обмежень на шукані функції, бо з них не можна виразити одні з функцій через інші. Тому число ізопериметричних умов не обов'язково повинно бути меншим числа шуканих функцій.

<u>Приклад 4</u>. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^2 \left((y')^2 - xy'\right) dx$$

при крайових умовах $y(0) = 1,\quad y(2) = 2$

та ізопериметричному зв'язку $\int_0^2 x^2 y\, dx = 64/15$.

□ Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F} = F + \lambda\varphi; \quad \overline{F} = (y')^2 - xy' + \lambda x^2 y;$$

$$\overline{I} = \int_0^2 \overline{F}\, dx; \quad \overline{I} = \int_0^2 \left((y')^2 - xy' + \lambda x^2 y\right) dx; \quad \lambda = const.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y = \lambda x^2; \ \overline{F}'_{y'} = 2y' - x; \ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 2y'' - 1; \ \overline{F}'_y - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0;$$

$$\lambda x^2 - 2y'' + 1 = 0; \ y'' = (\lambda/2)x^2 + 1/2.$$

Звідси $y' = \dfrac{\lambda x^3}{6} + \dfrac{1}{2}x + C_1; \ y = \dfrac{\lambda x^4}{24} + \dfrac{x^2}{4} + C_1 x + C_2.$

Використаємо крайові умови:

$$\begin{matrix} y(0) = 1: \\ y(2) = 2: \end{matrix} \ \begin{cases} C_2 = 1; \\ 2\lambda/3 + 1 + 2C_1 + C_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_2 = 1; \\ \lambda = -3C_1; \end{matrix}$$

$$y = -(1/8)C_1 x^4 + (1/4)x^2 + C_1 x + 1.$$

З інтегрального зв'язку маємо:

$$\int_0^2 x^2\left(-(1/8)C_1 x^4 + (1/4)x^2 + C_1 x + 1\right) dx = \frac{64}{15};$$

$$\left(-(x^7/56)C_1 + x^5/20 + (x^4/4)C_1 + x^3/3\right)\Big|_0^2 = 64/15;$$

$$-(16/7)C_1 + 8/5 + 4C_1 + 8/3 = 64/15; \ C_1 = 0.$$

Отже, допустима екстремаль

$$y = -(1/8)\cdot 0 \cdot x^4 + (1/4)x^2 + 0 \cdot x + 1 = (1/4)x^2 + 1. \quad ■$$

<u>Приклад 5</u>. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^1 y'(\ln y' - 1)\, dx$$

при крайових умовах $y(0) = 0, \quad y(1) = 1 - e$

та ізопериметричному зв'язку $\int_0^1 y\, dx = 2 - e$.

□ Розв'язати задачу самостійно. Відповідь: $y = 1 - e^x$. ■

3.7.3. Варіаційні принципи

Варіаційні принципи застосовуються до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що зі всіх станів, допустимих для системи, реалізується той, який відповідає екстремуму певного функціоналу (для кожного принципу свого). Розглянемо найбільш відомі принципи.

Принцип Ферма в оптиці: *зі всіх можливих шляхів, які сполучають точки* A *і* B, *світло вибирає той, що відповідає найменшому часу руху*:

$$I = \frac{1}{c} \int\limits_{\cup AB} n\,dt \to \min.$$

Тут c – швидкість світла у вакуумі, n – показник заломлення світла в даному середовищі, t – час.

Форма кривої AB визначається мінімумом вказаного функціоналу. В оптично однорідному середовищі $(n = const)$ – це пряма лінія.

Принцип найменшої дії в механіці: *дійсний рух системи виділяється зі всіх допустимих рухів тим, що функціонал, який називається* ***дією****,* $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ *досягає при цьому мінімуму.*

Тут L – ***функція Лагранжа***, що є різницею кінетичної T і потенціальної U енергій: $L = T - U$; $[t_1; t_2]$ – проміжок часу руху.

Зауваження 1. Принцип найменшої дії – це узагальнення на задачі динаміки ***принципу мінімуму потенціальної енергії***, що застосовується у статиці.

Зауваження 2. Закони збереження імпульсу та енергії виступають наслідками варіаційного принципу найменшої дії.

3.8. Контрольні запитання

1. Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
2. Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
3. У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
4. Як веде себе будь-яке зображення на нескінченності?
5. Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
6. У чому полягає теорема про затухання оригіналу?
7. Сформулюйте теорему про зсув аргументу в оригіналі.
8. Який зв'язок між похідною зображення й оригіналом?
9. Як знаходиться зображення похідних оригіналу?
10. Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
11. За якою схемою здійснюється розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем?
12. Як знаходиться зображення інтеграла від оригіналу?
13. Що таке одинична імпульсна дельта-функція Дірака? Яке її зображення?
14. Який зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда?
15. Наведіть приклади розрахунку перехідних процесів у електричних ланцюгах за допомогою операційного числення.
16. Що називається функціоналом?
17. Який функціонал називається лінійним?
18. Що називається відстанню нульового порядку між функціями? Відстанню першого порядку?
19. Що таке відносний (абсолютний) екстремум функціоналу?
20. Що таке сильний (слабкий) екстремум функціоналу?
21. Сформулюйте перше і друге означення варіації функціоналу.
22. Що називається другою варіацією функціоналу?
23. Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення – задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями?
24. У чому полягає необхідна умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
25. Запишіть рівняння Ейлера. Який його порядок?

26. Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення для функціоналів, що залежать від кількох функцій?
27. Запишіть систему рівнянь Ейлера – Лагранжа.
28. У чому полягає достатня умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
29. Сформулюйте посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму функціоналу.
30. Сформулюйте достатні умови Лежандра сильного екстремуму функціоналу.
31. Як ставиться задача Лагранжа на умовний екстремум?
32. Що таке алгебраїчні (скінченні або голономні), диференціальні (неголономні) та інтегральні (ізопериметричні) зв'язки?
33. У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язування задачі Лагранжа на умовний екстремум?
34. Сформулюйте правило знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа на умовний екстремум.
35. Що таке ізопериметрична задача на умовний екстремум?
36. Чому кількість інтегральних зв'язків може бути більшою, ніж число шуканих функцій?
37. У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язування ізопериметричної задачі?
38. У чому полягає принцип Ферма в оптиці?
39. Сформулюйте принцип найменшої дії.
40. Як зв'язані фізичні закони збереження з варіаційними принципами?

3.9. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Використовуючи тотожні перетворення оригіналів і властивість лінійності, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень знайти зображення $F(p)$ вказаної функції $f(t)$. Результат записати у вигляді єдиного дробу.

№ в-та	Завдання
1	$f(t) = t\,e^{-2t} - 2\cos 3t - 3$
2	$f(t) = 3t\,\sin 2t - e^{3t} - 3$
3	$f(t) = e^{2t}\cos 2t - 3t\sin 2t$

4	$f(t) = 2e^{2t}\sin t - 3\cos 2t$
5	$f(t) = 4te^{-2t} - sh4t - 1$
6	$f(t) = 2e^{-t}\cos t - t \cdot sh2t$
7	$f(t) = e^{-2t}\sin t - 2t \cdot sh3t$
8	$f(t) = 2e^{3t}\cos t - 3\sin 2t$
9	$f(t) = 3e^{-3t}\sin 2t - 2t + 2$
10	$f(t) = 2e^{-t}\sin 4t - t \cdot sht$
11	$f(t) = 2t\,\sin 3t - 3\cos t$
12	$f(t) = 2t\,\cos 3t - 2t + 2$
13	$f(t) = e^{2t}\cos 2t - t \cdot sh2t$
14	$f(t) = e^{-2t}\cos t + 4t \cdot ch2t$
15	$f(t) = 3e^{-2t}\cos 3t - 4t^2$
16	$f(t) = ch^2 3t$
17	$f(t) = sh2t \cdot \cos 6t$
18	$f(t) = ch2t \cdot \cos 4t$
19	$f(t) = \cos 3t \cdot \cos 7t$
20	$f(t) = 4t\sin t - t \cdot ch2t$
21	$f(t) = sh2t \cdot \sin 6t$
22	$f(t) = ch3t \cdot \sin 4t$
23	$f(t) = \cos^2 3t$
24	$f(t) = sh^2 2t$
25	$f(t) = \sin 3t \cdot \sin 5t$
26	$f(t) = \sin 5t \cdot \cos 7t$
27	$f(t) = \sin^2 4t$
28	$f(t) = sh5t \cdot ch3t$
29	$f(t) = 2te^{3t} - \sin 4t + 3$
30	$f(t) = 3t\,\cos 2t - \sin 3t$

Завдання 2. Розкладаючи спочатку правильний раціональний дріб у суму елементарних дробів, а потім застосовуючи лінійність перетворення Лапласа і таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$F(p)=\dfrac{p+1}{p(p^2-4p+13)}$	16	$F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}$
2	$F(p)=\dfrac{p-2}{p(p^2-6p+25)}$	17	$F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$
3	$F(p)=\dfrac{p+4}{p(p^2-8p+17)}$	18	$F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p^2+16)}$
4	$F(p)=\dfrac{p^2-4}{p(p^2+8p-9)}$	19	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$
5	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p-5)}$	20	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p+2)(p^2+25)}$
6	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-12p+40)}$	21	$F(p)=\dfrac{p^2-4p}{p^3-8}$
7	$F(p)=\dfrac{p^2+6}{p(p^2+6p+18)}$	22	$F(p)=\dfrac{p^3}{p^4-5p^2-36}$
8	$F(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2-6p+10)}$	23	$F(p)=\dfrac{p^3+p}{p^4-16}$
9	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+7p-8)}$	24	$F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+5p^2+4}$
10	$F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p^2-9p-10)}$	25	$F(p)=\dfrac{p^2-3p+6}{p^3+27}$
11	$F(p)=\dfrac{p}{(p-5)(p^2+9)}$	26	$F(p)=\dfrac{p^2-8p}{p^3+8}$

12	$F(p)=\dfrac{p^2-1}{(p^2+4)(p^2+25)}$	27	$F(p)=\dfrac{p^3-p^2}{p^4-81}$
13	$F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2+1)(p^2+64)}$	28	$F(p)=\dfrac{p^2+9}{p(p^2+2p-3)}$
14	$F(p)=\dfrac{p^3+2}{(p^2+4)(p^2+36)}$	29	$F(p)=\dfrac{p^3-2p^2}{(p+2)^2(p^2+4)}$
15	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+49)}$	30	$F(p)=\dfrac{4p^3-3p^2}{p^4-3p^2-4}$

Завдання 3. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку (знайти частинний розв'язок заданого диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання
1	$x''+4x'+4x=3e^{-2t}\cos t$; $x(0)=3$; $x'(0)=0$
2	$x''+2x'-3x=\sin 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=0$
3	$x''+6x'+10x=6te^{-2t}$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$
4	$x''+5x'+6x=2\sin 2t$; $x(0)=0$; $x'(0)=4$
5	$x''+2x'=4e^{-2t}\cos t$; $x(0)=0$; $x'(0)=2$
6	$x''+4x'+13x=2te^{-2t}$; $x(0)=-3$; $x'(0)=1$
7	$x''+4x'+20x=6t$; $x(0)=4$; $x'(0)=-2$
8	$x''-4x'-5x=4e^{-t}\cos 2t$; $x(0)=-2$; $x'(0)=-4$
9	$x''-9x=4e^{-3t}\sin 3t$; $x(0)=4$; $x'(0)=0$
10	$x''-3x'-10x=6\,e^{2t}\cos 3t$; $x(0)=-4$; $x'(0)=2$
11	$x''-5x'+6x=2e^{2t}\sin 2t$; $x(0)=6$; $x'(0)=3$
12	$x''-6x'+10x=6te^{3t}$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$
13	$x''+2x'+17x=8\sin 4t$; $x(0)=2$; $x'(0)=6$

14	$x'' - 2x' - 3x = 6e^{3t} \sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -2$
15	$x'' + 4x = 4t^2$; $x(0) = -3$; $x'(0) = 2$
16	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t} \sin t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 1$
17	$x'' - 4x = 12\cos 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -2$
18	$x'' - x' - 6x = 12e^{-2t} \cos 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 0$
19	$x'' - 9x = 4\sin 3t$; $x(0) = 4$; $x'(0) = 0$
20	$x'' + 4x' + 5x = 2t\,e^{t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$
21	$x'' - 4x' + 13x = 12\cos 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 3$
22	$x'' + 2x' = 4e^{-2t} \cos 2t$; $x(0) = -3$; $x'(0) = 2$
23	$x'' + 4x' - 12x = e^{-2t} \sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -3$
24	$x'' + 5x' - 14x = 2t\,e^{2t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$
25	$x'' - 4x = 12e^{-2t} \sin 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = -4$
26	$x'' - x' - 6x = 12e^{3t} \cos 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -5$
27	$x'' + 2x' - 24x = 12t^2$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 4$
28	$x'' - 4x' + 29x = 10e^{2t}$; $x(0) = 2$; $x'(0) = -2$
29	$x'' + 6x' - 7x = 6e^{-t} \sin 2t$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 6$
30	$x'' + 9x = 4e^{-3t} \sin 3t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -4$

Завдання 4. Методом операційного числення розв‘язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (знайти частинний розв’язок заданої диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y + \cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 3$	16	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -x - 2\cos 3t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 0$

2	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 3x - y + \sin 3t \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 0$	17	$\begin{cases} x' = 6x - 10y \\ y' = x - y + 5\cos t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = -6$
3	$\begin{cases} x' = x + 4y + 3e^{-2t} \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$	18	$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{-t} \\ y' = x + 2y - 3e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 2$
4	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -2x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0$	19	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 5x - y + 6e^{-2t} \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 2$
5	$\begin{cases} x' = -x + 3y - e^{t} \\ y' = x + y - 3e^{t} \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -2$	20	$\begin{cases} x' = 4x + y + 3\cos 2t \\ y' = -2x + 3y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 0$
6	$\begin{cases} x' = 7x + 2y - 2\sin t \\ y' = -9x - 2y + \cos t \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 0$	21	$\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2t \\ y' = 2x - 2y + 3t \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0$
7	$\begin{cases} x' = -2x - 6y \\ y' = -x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 1$	22	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 7x - 3y - 4t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -2$
8	$\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = x + y + 6e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	23	$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 4x + y - 4\cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 7$
9	$\begin{cases} x' = -5x + 2y + 4e^{2t} \\ y' = 4x - 3y - 2e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -2$	24	$\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{-t} \\ y' = 2x + y - 4e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 1$
10	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4t \\ y' = 3x + 6y - 3t \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 6$	25	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 4t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 1$

11	$\begin{cases} x' = x + 5y - 2e^{2t} \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	26	$\begin{cases} x' = 4x + 6y + 4\cos 2t \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 5$
12	$\begin{cases} x' = 7x - 2y \\ y' = 4x - 2y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 0$	27	$\begin{cases} x' = -x + y - e^{-2t} \\ y' = x - y + 2e^{-2t} \end{cases}$ $x(0) = 5;\ y(0) = 1$
13	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y - 3 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ \ y(0) = 1$	28	$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 5x - y - \cos t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$
14	$\begin{cases} x' = 2x - y - 3e^{-t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -2;\ y(0) = 1$	29	$\begin{cases} x' = 6x - 2y - e^{2t} \\ y' = 5x - y - 3e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 4;\ \ y(0) = 0$
15	$\begin{cases} x' = 2x - y + 2\sin 2t \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $x(0) = -4;\ \ y(0) = 3$	30	$\begin{cases} x' = -x + 5y + 4e^{3t} \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = -4$

Завдання 5. Обчислити заданий функціонал при вказаному значенні аргументу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y] = \int_1^e xy\,(y'')^2\,dx;$ $y = \ln x$	16	$I[y] = \int_0^{\pi} y\,y''dx;$ $y = \cos(x/3)$
2	$I[y] = \int_0^{\pi} \left(y^2 + (y'')^2\right)\times$ $\times\sin x\ dx;\ \ y = \cos x$	17	$I[y] = \int_0^{\pi/2} y''\,y^2\,dx;$ $y = \sin x$

3	$I[y]=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{y''\sin x}{(y')^3}dx$; $y=\ln x$	18	$I[y]=\int\limits_0^1(y+xy')dx$; $y=\sin\pi x$
4	$I[y]=\int\limits_0^1 x\left(y^2+(y')^2\right)dx$; $y=\cos x$	19	$I[y]=\int\limits_0^1 y''(1+x^2)\,dx$; $y=\ln(1+x^2)$
5	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/8}\left(y^2-(y')^2\right)\times$ $\times\sin 2x\ dx$; $y=\cos x$	20	$I[y]=\int\limits_0^1 y^2\,dx$; $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$
6	$I[y]=\int\limits_0^1 x(y')^2dx$; $y=arctg\ x$	21	$I[y]=\int\limits_1^2\frac{x^2}{y''(1+x^2)}\ dx$; $y=arctg\ x$
7	$I[y]=\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{y''y^2}$; $y=x\ln x$	22	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y\ dx}{y'}$; $y=ctg\ x$
8	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{xy}{y'\cos x}\ dx$; $y=tg\ x$	23	$I[y]=\int\limits_0^1 x(y+y'')\,dx$; $y=e^{-3x}$
9	$I[y]=\int\limits_0^{3/5}\frac{x}{y'(1-x^2)}\ dx$; $y=\arcsin x$	24	$I[y]=\int\limits_0^{3/5}\frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$; $y=\arcsin x$
10	$I[y]=\int\limits_1^2\frac{y''}{xy'}dx$; $y=xe^{-x}$	25	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}y''e^{-x}dx$; $y=e^x\cos 2x$
11	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{y''}{y}\cos^2 x\ dx$; $y=e^x\cos x$	26	$I[y]=\int\limits_1^2\frac{yy''e^{-x}}{xy'}dx$; $y=x^2e^x$

12	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y''}{y}\sin 2x\,dx;$ $y=e^{-x}\sin x$	27	$I[y]=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{yy''}{(y')^2}\,dx;$ $y=\ln^2 x$
13	$I[y]=\int\limits_{1}^{e}\frac{\cos x\,dx}{y''+y-2\sin x};$ $y=x^2\sin x$	28	$I[y]=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{y^2}{y'}\,dx;$ $y=tg\,x$
14	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y^2\,dx}{y''-2\cos x};$ $y=x\sin x$	29	$I[y]=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{y^2}{x^3y''+3}\,dx;$ $y=\ln x/x$
15	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos^2 x\,dx}{y''+2\sin x};$ $y=x\cos x$	30	$I[y]=\int\limits_{e}^{e^3}\frac{y^2}{xy''}dx;$ $y=\sqrt{x}\ln x$

Завдання 6. Знайти відстань нульового порядку між заданими кривими на вказаних відрізках.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y_1(x)=x^3e^{-x};$ $y_2(x)=0;\ [0;2]$	16	$y_1(x)=\sin 2x;$ $y_2(x)=\sin x;\ [0;\pi/2]$
2	$y_1(x)=\sqrt{x}\ln x;$ $y_2(x)=\sqrt{x};\ [e^{-2};1]$	17	$y_1(x)=\ln x;$ $y_2(x)=x;\ [e^{-1};e]$
3	$y_1(x)=2arctg\,x;$ $y_2(x)=x;\ [0;\sqrt{3}]$	18	$y_1(x)=8\ln x;$ $y_2(x)=x^2;\ [1;e]$
4	$y_1(x)=4/(x+2)^2;$ $y_2(x)=-x;\ [-1;2]$	19	$y_1(x)=-108/x;$ $y_2(x)=2x^2;\ [2;4]$

5	$y_1(x)=4\sqrt{x+2}$; $y_2(x)=x$; $[-1;7]$	20	$y_1(x)=2x^3-3x^2$; $y_2(x)=12x$; $[-2;3]$
6	$y_1(x)=-16/x$; $y_2(x)=x^2$; $[1;4]$	21	$y_1(x)=6-x$; $y_2(x)=4/x^2$; $[1;4]$
7	$y_1(x)=x^4/4-2x^3/3$; $y_2(x)=3x^2/2$; $[-2;4]$	22	$y_1(x)=x^4$; $y_2(x)=8x^3$; $[-1;2]$
8	$y_1(x)=x^2/2$; $y_2(x)=8/x$; $[-4;-1]$	23	$y_1(x)=15\sqrt[3]{x^2}$; $y_2(x)=x\sqrt[3]{x^2}$; $[-1;4]$
9	$y_1(x)=108x-60$; $y_2(x)=x^4$; $[-1;4]$	24	$y_1(x)=2\sqrt{x-1}$; $y_2(x)=x$; $[1;5]$
10	$y_1(x)=-16/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[2;5]$	25	$y_1(x)=\ln x/x$; $y_2(x)=1/x$; $[e^{-1};e]$
11	$y_1(x)=x^2/2-2x$; $y_2(x)=8/(x-2)$; $[-2;1]$	26	$y_1(x)=2\ln x$; $y_2(x)=x$; $[1;e]$
12	$y_1(x)=3e^{-x}$; $y_2(x)=xe^{-x}$; $[0;5]$	27	$y_1(x)=-4/x^2$; $y_2(x)=8x$; $[1/2;2]$
13	$y_1(x)=x^2e^x$; $y_2(x)=8e^x$; $[0;3]$	28	$y_1(x)=3/x^2$; $y_2(x)=2/x^3$; $[1/2;2]$
14	$y_1(x)=-2/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[-3;0]$	29	$y_1(x)=xe^{-x}$; $y_2(x)=e^{-x}$; $[0;3]$
15	$y_1(x)=x^5-5x^4$; $y_2(x)=-5x^3$; $[-1;2]$	30	$y_1(x)=2x^5+5x^4$; $y_2(x)=10x^3$; $[-1;2]$

Завдання 7. Знайти варіацію δI заданого функціоналу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(x\cos y+(y')^3\right)dx$	16	$I[y]=\int\limits_0^{1} y\left(y'+e^{xy}\right)dx$
2	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}(x\sin y+y'\ln y)\,dx$	17	$I[y]=\int\limits_{-2}^{1}\left(xy-(y')^2\right)dx$
3	$I[y]=\int\limits_0^{1} y'\,arctg\,(x+y)\,dx$	18	$I[y]=\int\limits_1^{4}\left(\ln y-(y')^3\right)dx$
4	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(x\sin y+(y')^2\right)dx$	19	$I[y]=\int\limits_1^{e}\left(x\ln y'+y^4\right)dx$
5	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(y^2\cos x-(y')^2\right)dx$	20	$I[y]=\int\limits_0^{1}\left(xy'+ye^{y'}\right)dx$
6	$I[y]=\int\limits_1^{2}\left(\sqrt{xy}+\ln y'\right)dx$	21	$I[y]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2-xe^{y}\right)dx$
7	$I[y]=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^3(y')^2-e^{y}\right)dx$	22	$I[y]=\int\limits_0^{1}\left(yy'+xe^{y'}\right)dx$
8	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(x\cos y+y\sqrt{y'}\right)dx$	23	$I[y]=\int\limits_1^{3} y\sqrt{x+(y')^2}\,dx$
9	$I[y]=\int\limits_1^{2} y'\arcsin\sqrt{xy}\,dx$	24	$I[y]=\int\limits_1^{4} y'\,arctg\,\sqrt{xy}\,dx$
10	$I[y]=\int\limits_0^{1}(x^2+y')\arcsin y\,dx$	25	$I[y]=\int\limits_2^{5}\left(x^2-y\right)(y')^3\,dx$

11	$I[y]=\int\limits_0^1 (x-y')arctg\, y\, dx$	26	$I[y]=\int\limits_{-1}^1 \left(y^3-3x^4y'\right) dx$
12	$I[y]=\int\limits_0^1 y\, arctg\,(y'+x)\, dx$	27	$I[y]=\int\limits_1^e x^2 \ln\left(y'+y\right) dx$
13	$I[y]=\int\limits_0^{\pi} \left(y'\cos y + x(y')^2\right) dx$	28	$I[y]=\int\limits_1^2 y' \sqrt{x^2+y^2}\, dx$
14	$I[y]=\int\limits_1^e \left(x\ln y + (y')^2\right) dx$	29	$I[y]=\int\limits_0^4 y\sqrt{xy+y'}\, dx$
15	$I[y]=\int\limits_0^1 y'\arcsin(x+y)\, dx$	30	$I[y]=\int\limits_1^2 y' \sqrt{\ln xy}\, dx$

Завдання 8. Знайти екстремалі заданого функціоналу, що задовольняють указаним крайовим умовам (допустимі екстремалі). Дослідити на виконання достатніх умов екстремуму.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int\limits_0^1 \left(\sin y'+2(y')^2\right) dx;$ $y(0)=3;\ y(1)=1$	16	$I[y]=\int\limits_{-1}^0 \left(12xy-(y')^2\right) dx;$ $y(-1)=1;\ y(0)=0$
2	$I[y]=\int\limits_0^1 \left((y')^2-y^2-y\right)e^{2x} dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=e^{-1}$	17	$I[y]=\int\limits_0^1 \left(x+(y')^2\right) dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2$
3	$I[y]=\int\limits_1^2 \left((y')^2+2yy'+y^2\right) dx;$ $y(1)=1;\ y(2)=0$	18	$I[y]=\int\limits_0^{2\pi} \left((y')^2-y^2\right) dx;$ $y(0)=1;\ y(2\pi)=1$

4	$I[y]=\int_1^e \left(x(y')^2+yy'\right)dx;$ $y(1)=0;\ y(e)=1$	19	$I[y]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx;$ $y(1)=3;\ y(2)=5$
5	$I[y]=\int_0^1 \left((y')^2+y^2-4y\times\right.$ $\left.\times\sin x\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1$	20	$I[y]=\int_0^1 (y+\ln y')dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=3$
6	$I[y]=\int_0^1 (y+2xy'+(y')^2)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2$	21	$I[y]=\int_0^1 (xy'-(y')^2)\,dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=1/4$
7	$I[y]=\int_0^{3\pi/2} (y^2-2(y')^2)e^{-x}dx;$ $y(0)=0;\ y(3\pi/2)=e^{3\pi/4}$	22	$I[y]=\int_{-1}^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx;$ $y(-1)=1;\ y(2)=4$
8	$I[y]=\int_0^1 ((y')^2+yy'+12xy)\,dx;$ $y(0)=y(1)=0$	23	$I[y]=\int_0^1 \ln(yy')\,dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=3$
9	$I[y]=\int_1^2 \left(x^2(y')^2+2y^2+\right.$ $\left.+2xy\right)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=8$	24	$I[y]=\int_0^2 \left(xy'+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2)=0$
10	$I[y]=\int_0^2 \left(y'+(y')^2e^x-x^3\right)dx;$ $y(0)=2;\ y(2)=-1$	25	$I[y]=\int_0^1 \frac{e^y}{y'}dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=-\ln 2$
11	$I[y]=\int_0^{\pi} \left(4y\cos x+(y')^2-\right.$ $\left.-y^2\right)dx;\ y(0)=y(\pi)=0$	26	$I[y]=\int_0^1 \frac{dx}{(y')^2};$ $y(0)=0;\ y(1)=1$

12	$I[y]=\int\limits_1^2 (x^2(y')^2+12y^2)\ dx$; $y(1)=1;\ y(2)=8.$	27	$I[y]=\int\limits_0^1 (x+y^2(y')^2)\ dx$; $y(0)=1;\ y(1)=3$
13	$I[y]=\int\limits_0^1 \left((y')^2+y^2+6y\times \times sh2x\right)dx$; $y(0)=0; y(1)=1$	28	$I[y]=\int\limits_{-1}^1 \left(4xy'-(y')^2\right)dx$; $y(-1)=0;\ y(1)=1/2$
14	$I[y]=\int\limits_{-1}^1 \left(2y'/(1+x^2)- -(y')^2\right)dx;\ y(-1)=0; y(1)=3$	29	$I[y]=\int\limits_0^1 \left(x+4y+(y')^2\right)dx$; $y(0)=0; y(1)=0$
15	$I[y]=\int\limits_1^3 \left((y')^2-y'\ln x+ +2x\right)dx; y(1)=2; y(3)=-1$	30	$I[y]=\int\limits_0^1 (y/y')dx$; $y(0)=1;\ y(1)=e$

Завдання 9. Знайти екстремалі заданого функціоналу, що задовольняють указаним крайовим умовам (допустимі екстремалі).

№ в-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int\limits_0^1 \left((y')^2+(z')^2+2xy\right)dx$; $y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
2	$I[y,z]=\int\limits_1^2 \left((y')^2+z^2+(z')^2-2xy\right)dx$; $y(1)=1;\ z(1)=0;\ y(2)=2;\ z(2)=1$
3	$I[y,z]=\int\limits_0^\pi \left(2yz-2y^2+(y')^2-(z')^2\right)dx$; $y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(\pi)=1;\ z(\pi)=1$

4	$I[y,z]=\int\limits_{-1}^{1}\left(6xy-3(y')^2+(z')^2\right)dx;$ $y(-1)=2;\ z(-1)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
5	$I[y,z]=\int\limits_{0}^{1}\left((y')^2-2xyz'\right)dx;$ $y(0)=2;\ z(0)=0;\ y(1)=1;\ z(1)=-1$
6	$I[y,z]=\int\limits_{1}^{2}\left((z')^2-xy'z\right)dx;$ $y(1)=1;\ z(1)=1;\ y(2)=0;\ z(2)=1$
7	$I[y,z]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(y^2+z^2+y'z-yz'-2xz\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=1.$
8	$I[y,z]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left((y')^2+(z')^2+2yz-4y\sin x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=0$
9	$I[y,z]=\int\limits_{0}^{1}\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;$ $y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
10	$I[y,z]=\int\limits_{0}^{1}\left((y+z)^2+(y')^2+(z')^2+4xy\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=0$
11	$I[y,z]=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\cos x\right)dx;$ $y(0)=-1; z(0)=0; y(\pi/2)=0; z(\pi/2)=-2$
12	$I[y,z]=\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2-6y\sin 2x\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=-4$

13	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left(2y'z'+y^2+z^2+6y\sin x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(\pi/2)=0;\ z(\pi/2)=2$
14	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-6xz\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=-2;\ z(1)=0$
15	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2+2z\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(\pi/4)=2;\ z(\pi/4)=0$
16	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2xy\right)dx;$ $y(0)=4;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-2$
17	$I[y,z]=\int_0^{1}\left(2y'z'+y^2+z^2+6ye^{-2x}\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-2;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$
18	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\sin x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ y(\pi/2)=3;\ z(\pi/2)=0$
19	$I[y,z]=\int_0^{1}\left(2y'z'+y^2+z^2+4ye^{x}\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$
20	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2y\sin 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=1;\ y(\pi/4)=0;\ z(\pi/4)=0$
21	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2ye^{3x}\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-3;\ y(1)=1;\ z(1)=0$

22	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-2y\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=2;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=0$
23	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2ye^x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(1)=2;\ z(1)=-2$
24	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6xy\right)dx;$ $y(0)=3;\ z(0)=0;\ \ y(1)=0;\ \ z(1)=-1$
25	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+8ze^{-2x}\right)dx;$ $y(0)=-2;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
26	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(2y'z'-y^2+z^2-12y\cos x\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-4;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=0.$
27	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+4ye^{2x}\right)dx;$ $y(0)=2;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
28	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2z\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=0$
29	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;$ $y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
30	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2xz\right)dx;$ $y(0)=3;\ z(0)=-1;\ y(1)=1;\ z(1)=0$

Завдання 10. Розв’язати наступні задачі на умовний екстремум.
Варіанти №1–№17: Знайти допустимі екстремалі задачі Лагранжа.
Варіанти №18–№30: Знайти допустимі екстремалі ізопериметричної задачі.

№ В-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;$ $y(0)=-1; z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1;\ x+y+z=0$
2	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z\right)dx;$ $y(0)=1; z(0)=1;\ y(1)=e;\ z(1)=e^2+1;\ z-y^2-x=0$
3	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z^2\right)dx;$ $y(0)=0; z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=\sqrt{2};\ y-z^2+1=0$
4	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2} \left(2yz+z^2\right)dx;\ \ y'=y+z;$ $y(0)=0;\ \ z(0)=1;\ y(\pi/2)=1;\ z(\pi/2)=-1$
5	$I[y,z]=\int_0^1 y'z'\,dx;\quad y'+y+z-x^2=0;$ $y(0)=0;\ \ z(0)=-1;\ y(1)=3/2;\ \ z(1)=-5/2$
	$I[y,z]=\int_0^1 \left(y^2+2yz'+z^2\right)dx;\quad y'=-y-2z;$ $y(0)=1,\ \ y(1)=0$
7	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+(z')^2+x^3\right)dx;\ \ 3x+y-2z=0;$ $y(0)=2;\ \ z(0)=1;\ y(1)=1;\ \ z(1)=2$

8	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z^2\right)dx;\quad y'=z;$ $y(0)=0;\ z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=0$
9	$I[y,z]=\int_0^1 \left(y^2+2yz'+z^2\right)dx;\quad y'=4y-2z;$ $y(0)=0,\quad y(1)=2$
10	$I[y,z]=\int_{-2}^1 \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 3z=2x-5y-3;$ $y(-2)=-2;\ z(-2)=1;\ y(1)=-2;\ z(1)=3$
11	$I[y,z]=\int_1^4 \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 5y=2x+2z+14;$ $y(1)=2;\ z(1)=-3;\ y(4)=4;\ z(4)=-1$
12	$I[y,z]=\int_0^1 \left(y+z+(z')^2\right)dx;\quad y'+z'-1=0;$ $y(0)=0;\ z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=2$
13	$I[y,z]=\int_{-1}^3 \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 3z=2x+2y+2;$ $y(-1)=3;\ z(-1)=2;\ y(3)=5;\ z(3)=6$
14	$I[y,z]=\int_2^4 \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 3z=3x-4y-2;$ $y(2)=-2;\ z(2)=4;\ y(4)=1;\ z(4)=2$
15	$I[y,z]=\int_0^1 \left(y^2+2yz'+z^2\right)dx;\quad y'=-4y-2z;$ $y(0)=1,\quad y(1)=2$
16	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z^2+1\right)dx;\ y+z-2x^2=0;$ $y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(1)=2;\ z(1)=0$

17	$I[y,z]=\int_0^{\pi}\left((y')^2-(z')^2\right)dx$; $y'-z+\cos x=0$; $y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(\pi)=2;\ z(\pi)=\pi/2$
18	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+4x^3\right)dx$; $\int_0^1 ydx=2$; $y(0)=0;\ y(1)=0$
19	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2-3x^2\right)dx$; $\int_0^1 xydx=1$; $y(0)=2;\ y(1)=0$
20	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+2x\right)dx$; $\int_0^1 x^2y\,dx=0$; $y(0)=0,\ \ y(1)=1$
21	$I[y]=\int_0^{\pi}\left((y')^2+\cos x\right)dx$; $\int_0^{\pi} y\sin x\,dx=0$; $y(0)=0,\ \ y(\pi)=1$
22	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\left((y')^2-4y^2-8y\cos 4x+6\sin 2x\right)dx$; $\int_0^{\pi/4}(4\cos 2x+y-y')\,dx=5$; $y(0)=1,\ \ y(\pi/4)=3$
23	$I[y]=\int_0^{\pi}(y\sin x-\cos x)\,dx$; $\int_0^{\pi}(y')^2\,dx=3\pi/2$; $y(0)=0,\ \ y(\pi)=\pi$
24	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+4y^2+4ye^{-2x}-4x^3\right)dx$; $\int_0^1\left(3x^2-y+y'\right)dx=6$; $y(0)=2,\ \ y(1)=0$

25	$I[y]=\int_0^{\pi/6}\left((y')^2-9y^2+12y\sin 6x+6\cos 3x\right)dx$; $\int_0^{\pi/6}(6\sin 3x+y+y')\,dx=4$; $y(0)=3,\ \ y(\pi/6)=0$
26	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+3x^2\right)dx$; $\int_0^1 y^2dx=2$; $y(0)=0;\ \ y(1)=0$
27	$I[y]=\int_0^1(y')^2dx$; $\int_0^1\left(y-(y')^2\right)dx=1/12$; $y(0)=0;\ \ y(1)=1/4$
28	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+4y^2+4ye^{2x}-3x^2\right)dx$; $\int_0^1(6x-y-y')\,dx=4$; $y(0)=3,\ \ y(1)=0$
29	$I[y]=\int_0^{\pi/8}\left((y')^2-16y^2+4y\cos 8x-8\sin 4x\right)dx$; $\int_0^{\pi/8}(8\cos 8x-y+y')\,dx=6$; $y(0)=1,\ \ y(\pi/8)=3$
30	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+9y^2-18xy-3x^2\right)dx$; $\int_0^1(2x+y-y')\,dx=2$; $y(0)=2,\ \ y(1)=0$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бізюк В.В., Якунін А.В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

2.Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Операційне числення та його застосування. – К.: КНЕУ, 2003. – 295 с.

3. Вища математика / В.А. Домбровський, І.М. Крижанівський, Р.С. Мацьків та ін. За ред. М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. – 478 с.

4. Вища математика: Загальний курс. Ч.2. Математичний аналіз і диференціальні рівняння / В.П. Лавренчук, О.В. Мартинюк, П.П. Настасієв. – Чернівці: Рута, 2006. – 319 с.

5. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2003. – 479 с.

6. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. / За заг. ред. П.П. Овчинников. – К.: Техніка, 2003. Ч.1 / Х.Г, Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін. – 2003. – 279 с. Ч.2 / П.П. Овчинников, П.С. Кропив'янський, С.П. Полушкін та ін. – 2003. – 375 с.

7. Вища математика. У 2 ч. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинников. – К.: Техніка, 2003-2004. Ч.1. – 2003. – 600 с.; Ч.2. – 2004. – 791 с.

8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

9. Иглин С.П. Вариационное исчисление с применением MATLAB. –Харьков: НТУ “ХПИ”, 2001. – 108 с.

10. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

11. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

12. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

13. Петрук В.А. Вища математика з прикладними задачами для ігрових занять. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2006. – 130 с.

14. Рогачев А.И. Вариационное исчисление в примерах и задачах. –Харьков: НТУ “ХПИ”, 2008. – 92 с.

15. Станішевський С.О. Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А

д л я   е л е к т р о т е х н і к і в

у трьох модулях

Навчальний посібник

Модуль 2

Станішевський Степан Олександрович,
Якунін Анатолій Вікторович,
Володченко Анна Олександрівна

Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення

Відповідальний за випуск *М.Й. Кадець*
Редактор *М.З. Аляб'єв*

Підп. до друку	Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі	Ум. друк. арк. 20,0
Тираж 500 пр.	Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731
від 19.12.2001