С.О. Станішевський,
С.М. Мордовцев,
А.В. Якунін,
Л.О. Бистрова,
В.С. Ситникова

Р Я Д И

ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Харків – ХНАМГ – 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

С.О. Станішевський, С.М. Мордовцев,
А.В. Якунін, Л.О. Бистрова, В.С. Ситникова

Р Я Д И
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Методичні рекомендації та дидактичні матеріали до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050701 "Електротехніка та електротехнології" спеціальностей "Електротехнічні системи електроспоживання" і "Світлотехніка і джерела світла"

Харків – ХНАМГ – 2009

Ряди та їх застосування: Методичні рекомендації та дидактичні матеріали до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050701 "Електротехніка та електротехнології" спеціальностей "Електротехнічні системи електроспоживання" і "Світлотехніка і джерела світла". / Укл.: С.О. Станішевський, С.М. Мордовцев, А.В. Якунін, Л.О. Бистрова, В.С. Ситникова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 123 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. А.І. Колосов

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 3 від 24.10.2009 р.

Розділ 1. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

1.1. Загальні поняття. Необхідна ознака збіжності

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$. Вираз $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$ є його n-ою ***частковою сумою***. Границя послідовності часткових сум $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ при $n \to \infty$ називається ***сумою*** S ряду, тобто $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Якщо ряд має скінченну суму, то він ***збіжний***. Якщо вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то ряд ***розбіжний***.

Для збіжності ряду необхідно, щоб його загальний член прямував до нуля, коли n нескінченно зростає. Тобто, *якщо ряд* ***збігається***, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (*Необхідна ознака збіжності числового ряду*).

Але не навпаки: коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то не можна зробити висновок, що ряд обов'язково збігається: він може, як збігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, так і розбігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, хоча як $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$, так і $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$. Ця ознака є лише необхідною, але не є достатньою для збіжності.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд розбігається*. (*Достатня ознака розбіжності числового ряду*).

1.2. Приклади розв'язання задач

<u>Приклад</u>. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{2n-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3n^2+2n+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{\sqrt{n}+4}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{n^2+2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, tg\frac{n}{n^2+1}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n-3}\right)^n$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, arctg\frac{1}{n}$; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{n}{n+1}$; ї) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3}{n+1}$;

й) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 arctg\frac{n}{n^3+1}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}}$.

<u>Розв’язання.</u>

а) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності рядів:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n}{2-3/n} = \frac{3}{2} \neq 0 .$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

б) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2+2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+2/n+5/n^2} = \frac{1}{3} \neq 0 .$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

в) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{\sqrt{n}+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-2/n}{1/\sqrt{n}+4/n} = \left|\frac{3}{0}\right| = \infty \neq 0 .$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

г) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2+1/n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0 .$$

Отже, даний ряд розбігається.

д) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n+2/n^3} = \left|\frac{1}{0}\right| = \infty \neq 0 .$$

Отже, даний ряд розбігається.

е) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{(n/3)\cdot 3} =$$

$=\left(\lim\limits_{n\to\infty}(1+3/n)^{n/3}\right)^3 = e^3 \neq 0$. Отже, даний ряд розбігається.

є) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n^2}{1/n^2} = \left|\begin{matrix}\alpha = 1/n^2 \to 0\\ \textit{при} \quad n\to\infty\end{matrix}\right| =$$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \neq 0$.   Отже, даний ряд розбігається.

ж) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\, tg\,\frac{n}{n^2+1} = \left|\begin{matrix}\alpha = n/(n^2+1) \to 0\\ \textit{при}\ n\to\infty;\ tg\alpha \sim \alpha\end{matrix}\right| =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0$.   Ряд розбігається.

з) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+2/n}{2-3/n}\right)^n = \left|\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}\right| = +\infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

и) Застосуємо необхідну ознаку:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\, arctg\,\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{arctg\,1/n}{1/n} = 1 \neq 0.$$

(Оскільки $\alpha = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{arctg\alpha}{\alpha} = 1$).

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

і) За необхідною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{1+1/n} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Даний ряд розбігається.

ї) Необхідна ознака збіжності не виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-3/n^2}{1/n+1/n^2} = \left|\frac{4}{0}\right| = \infty \neq 0 .$$

Отже, даний ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 arctg\frac{n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{arctg\left(n/(n^3+1)\right)}{1/n^2} =$$

$$= \left| arctg\frac{n}{n^3+1} \sim \frac{n}{n^3+1} \quad \textit{при} \;\; n\to\infty \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n/(n^3+1)}{1/n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^3} = 1 \neq 0 . \quad \text{Ряд розбігається.}$$

к) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 1 \neq 0 .$$

Ряд розбігається.

л) За необхідною ознакою збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+1/n-1/n^2}{1+1/n^2}} = \sqrt[3]{1} = 1 \neq 0 .$$

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

1.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-4}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^2-2n+7}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin\frac{n^2}{n^4+3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\frac{n^2+1}{n^2}$

3	$\sum_{n=1}^{\infty} n\ln(1+4/n)$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(e^{3/n}-1)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2n^3+n-3}{n^3+5}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 arctg\,\dfrac{2}{n^3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot\sin\dfrac{n^2}{n^4+1}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3n+4}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n+1}{3n-2}\right)^n$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{n^3+3}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+7}{n}\right)^{n+1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{3}{n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n^2+1}{3n-4}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{2n+3}{2n+5}$

1.4. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності ***знакододатних числових рядів*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0$.

1.4.1. Ознаки порівняння

При застосуванні ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з ***еталонним рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

Перша (основна) ознака порівняння.

а) *Нехай маємо збіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *причому* $a_n \leq b_n$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *теж збігається.*

(Якщо $a_n > b_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) *Нехай маємо розбіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *, причому* $a_n \geq b_n$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *теж розбігається.* (Якщо $a_n < b_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

Друга (гранична) ознака порівняння.

Якщо $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (l \neq 0,\, l \neq \infty), \qquad (*)$$

то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.

Співвідношення (*) говорить про те, що загальні члени a_n і b_n цих рядів є нескінченно малими одного порядку. Це треба мати на увазі також при використанні першої ознаки, тобто підбирати для порівняння еталонний ряд, загальний член якого b_n є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член a_n ряду, що досліджується: $a_n \sim b_n$.

За еталонні ряди часто приймають:

а) ***узагальнений гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, що збігається, коли $p > 1$, і розбігається при $p \leq 1$;

б) ***геометричний ряд*** (ряд, складений із членів геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, що збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

1.4.2. Приклади розв’язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+3/n)$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2+3}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin(1/n^2)$;

і) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3^n+2)}$.

<u>Розв'язання</u>. а) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n = \frac{n}{n^2+4} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$, то порівнюємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+4/n^2} = 1.$$

Одержана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже ці ряди поводять себе однаково, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$ також розбігається.

б) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з більшим збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: $a_n = \frac{n}{n^3+4}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. $\frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Оскільки $a_n < b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$ також збігається.

в) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-4n+1} = 0.$$

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-4/n+1/n^2}=1\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}/n}{n/n+3/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{1+3/n}=0.$$

Оскільки $a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+3}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=b_n$, $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+3/n}=1\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Таким чином, даний ряд розбігається.

д) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^3+4/n^6}{4-2/n^4+5/n^5}=0.$$

Оскільки $a_n=\dfrac{n^3+4}{4n^6-2n^2+5n}\sim\dfrac{n^3}{4n^6}\sim\dfrac{1}{n^3}=b_n$, застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n^3+4)}{4n^6-2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+4n^2}{4n^5-2n+5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n^3}{4-2/n^4+5/n^5}=\frac{1}{4}\ \left(\frac{\neq 0}{\neq\infty}\right).$$

Отже, ці ряди поводять себе однаково щодо збіжності, тобто даний ряд теж збігається.

е) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0 .$$

Оскільки $a_n = 1\Big/\sqrt[3]{n^3+3n^2)} \sim 1\Big/\sqrt[3]{n^3} = 1/n = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+3n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+3/n}} = 1 \quad \left(\frac{\neq 0}{\neq \infty}\right).$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ розбігається, то і даний ряд теж розбігається.

є). Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0 .$$

Оскільки $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3n^5+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{3n^5}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = \dfrac{1}{n^{5/4}} = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/n^{5/4}$. Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/n^p$ збігається при $p > 1$. Оскільки $5/4 > 1$, то еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/n^{5/4}$ – збіжний.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/4}}{\sqrt[4]{3n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n^5}{3n^5+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{3+1\big/n^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} .$$

Тобто a_n і b_n є нескінченно малі одного порядку, два ряди поводять себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

ж) Відомо, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1/\alpha)\ln(1+\alpha) = 1$. Тому для даного ряду можна застосувати граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$a_n = \ln\left(1+3/n\right),\ b_n = 1/n; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+3/n\right)}{1/n} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+3/n\right)}{3/n} = \left|\,\alpha = 3/n \to 0 \ \ при \ \ n\to\infty\right| =$$

$$= 3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 3\ \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$ Ряд розбігається.

з) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1/n}{1+3/n^2} = \sin 0 = 0.$$

Порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. За граничною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(n/(n^2+3)\right)}{1/n} = 1\ \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$ Ряд розбігається.

и) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\arcsin\left(1/n^2\right) = \arcsin 0 = 0.$$

Порівняємо цей ряд за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\left(1/n^2\right)}{1/n^2} = 1\ \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}$.

Отже, даний ряд збігається.

і) Очевидно, необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(3^n+2)} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}(1/3)^n$. Цей ряд збігається, як складений з членів геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/3 < 1$. Справедлива нерівність

$$a_n = \frac{1}{n(3^n+2)} \le \frac{1}{3^n+2} \le \frac{1}{3^n} = b_n,$$

тобто члени даного ряду не перевищують членів збіжного еталонного ряду. Таким чином, цей ряд збігається.

1.4.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(5^n+2)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+9}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-5}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n-3}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{n^2}{n^3+1}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-3}{5n^6+n^2-4n+1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+7}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{n}{n^3+8}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+5)}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+5/n^2\right)$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^6+7}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+3n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+3^n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3}{n^5+4}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{2^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n^2}$

1.4.4. Інтегральна ознака Коші

Ця ознака заснована на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Якщо функція $f(x)$ *неперервна, монотонно спадає і додатна при* $x \ge a$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$

а) *збігається, коли збігається невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, *тобто якщо він дорівнює деякій скінченній величині*;

б) *розбігається, коли вказаний інтеграл розбігається, тобто* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена a_n ряду дискретну змінну n на неперервну змінну x, причому нижня межа a дорівнює початковому значенню n для даного ряду.

Наприклад, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$. Тоді $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$, $a = 2$, і будемо розглядати невласний інтеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

1.4.5. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^4 n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\, n}{1+n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$.

Розв'язання. а) Застосуємо достатню інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2;+\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_x^A = 2\lim_{A\to+\infty}\left(\sqrt{\ln A} - \sqrt{\ln 2}\right) = +\infty .$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

б) Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = 1/(x\ln^4 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2;+\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x} = \lim_{A\to+\infty}\int_2^A \frac{dx}{x\ln^4 x} = \lim_{A\to+\infty}\int_2^A \frac{d\ln x}{\ln^4 x} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\int_2^A \ln^{-4} x d(\ln x) = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{\ln^{-3}}{-3}\right|_x^A = -\frac{1}{3}\lim_{A\to+\infty} \left.\frac{1}{\ln^3 x}\right|_2^A =$$

$$= -(1/3)\lim_{A\to+\infty}\left(1/\ln^3 A - 1/\ln^3 2\right) = 1/(3\ln^3 2) \neq \infty .$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 n}$ теж збігається.

в) Оскільки $(arctg\ x)' = 1/(1+x^2)$, зручно застосувати інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{arctg\ x}{1+x^2}$, що на інтервалі $[1;+\infty)$ задовольняє умовам цієї ознаки. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{arctg\ x}{1+x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{arctg\ x}{1+x^2}dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_1^A arctg\, x\ d(arctg\ x) = \lim_{A\to\infty}\left(\left.\frac{1}{2}arctg^2 x\right|_1^A\right) =$$

$$= 1/2\cdot\lim_{A\to\infty}(arctg^2 A - arctg^2 1) = 1/2\cdot(arctg^2\infty - arctg^2 1) =$$

$$= 1/2\cdot\left((\pi/2)^2 - (\pi/4)^2\right) = 3\pi^2/32 \neq \infty .$$

Невласний інтеграл збігається, тому даний ряд теж збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot e^{-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n'}{(e^{n^2})'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{n^2}\cdot 2n} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0 .$$

Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = x\cdot e^{-x^2}$, що на інтервалі $[1;+\infty)$ відповідає умовам цієї ознаки. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty} \int_1^{A} e^{-x^2} d(-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty} e^{-x^2}\Big|_1^A = -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-A^2} - e^{-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} \neq \infty .$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і даний ряд теж збігається.

1.4.6. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n^3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\, 3n}{1+9n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{1+n^2}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln^4(3n+2)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(3n-1)}{(3n-1)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)\ \ln(4n+1)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+4n^2)\, arctg\, 2n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{1/n}}{n^2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n^2}}{n^3}$

1.4.7. Ознака Даламбера

Ця достатня ознака в своїй основі має порівняння даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ *, то при* $q<1$ *ряд збігається, при* $q>1$ *ряд розбігається, а при* $q=1$ *не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.*

Щоб не натрапити на останній випадок невизначеності, ознаку Даламбера застосовують до таких рядів, загальний член яких має в своєму складі факторіал або показникову функцію від n, наприклад $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^{2n+1}}$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-3}{(3n-1)!}$.

Зауважимо, що a_{n+1} одержуємо з a_n, замінюючи n на $n+1$. Наприклад, якщо $a_n=\dfrac{n^2}{3^{2n+1}}$, то $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{3^{2(n+1)+1}}=\dfrac{(n+1)^2}{3^{2n+3}}$, якщо $a_n=\dfrac{4n-3}{(3n-1)!}$, то $a_{n+1}=\dfrac{4(n+1)-3}{(3(n+1)-1)!}=\dfrac{4n+1}{(3n+2)!}$.

1.4.8. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+2}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^2+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2\cdot 4^n}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{4^{n-2}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{3^{n+1}}$; є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin\dfrac{1}{3^n}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{10^n(2n-1)}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}$; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 arctg\dfrac{n}{3^n}$; ї) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{2n-1}}{(n+1)!}$;

й) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{e^n}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{n!}$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

Розв'язання. а) У загальний член цього ряду входить показникова функція 5^n, тому доцільно застосувати достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3n+2}{5^n}; \quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{5^{n+1}} = \frac{3n+5}{5^{n+1}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+5)\cdot 5^n}{5^{n+1}(3n+2)} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{3n+2} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{3+5/n}{3+2/n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Ряд збігається.

б) У загальний член цього ряду входить факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n!}{n^2+2}, \; a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2+2}; \; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n^2+2)}{((n+1)^2+2)n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2+2n+2}{n^2+2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n+2/n^2+2/n^3}{1/n+2/n^2+3/n^3} = \left|\frac{1}{0}\right| = \infty > 1.$$

Ряд розбігається.

в) У загальний член цього ряду входить $(2n)!$, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n)^2}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= 1\cdot 0 = 0 < 1.$$ Ряд збігається.

г) Загальний член цього ряду можна записати у вигляді $a_n = \dfrac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2}\cdot 4^{n/3}}$. До його складу входить показникова функція $4^{n/3}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{5(n+1)+1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}\cdot 4^{(n+1)/3}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n+6)\sqrt[3]{n^2}\cdot 4^{n/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}\cdot 4^{(n+1)/3}(5n+1)} = \frac{1}{4^{1/3}} \lim_{n\to\infty} \frac{5n+6}{5n+1} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+2n+1}} = 4^{-1/3} \lim_{n\to\infty} \frac{5+6/n}{5+1/n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1+2/n+1/n^2}} =$$

$$= 4^{-1/3}\cdot 1\cdot \sqrt[3]{1} = 4^{-1/3} < 1.$$ Ряд збігається.

д) У загальному члені ряду є показникові функції 5^n і 4^{n-2}, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n\cdot 5^n}{4^{n-2}} = \frac{n\cdot 5^n}{4^n\cdot 4^{-2}} = n\cdot (5/4)^n\cdot 4^2 = 16n\cdot (5/4)^n;$$

$$a_{n+1} = 16(n+1)(5/4)^{n+1}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{16(n+1)(5/4)^{n+1}}{16n(5/4)^{n+1}} =$$

$$= (5/4)\lim_{n\to\infty}(1+1/n) = 5/4 > 1.$$ Ряд розбігається.

е) До загального члену ряду входить показникова функція 3^{n+1}, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^4}{3^{n+1}};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{3^{n+2}}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4 3^{n+1}}{3^{n+2}\cdot n^4} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^4 = \frac{1}{3} < 1.$$ Ряд збігається.

є) У загальному члені ряду є показникова функція 2^{n-1}, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)2^n}{(n+1)^2+3}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot 2^n (n^2+3)}{((n+1)^2+3)(n+1)\cdot 2^{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+1/n}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n^2}{(1+1/n)^2+3/n^2} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2 > 1.$$

Ряд розбігається.

ж) Застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = n\cdot \arcsin(1/3^n)\,;\; a_{n+1} = (n+1)\cdot \arcsin(1/3^{n+1})\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\arcsin(1/3^{n+1})}{n\arcsin(1/3^n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin(1/3^{n+1})}{\arcsin(1/3^n)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} =$$

$$= \left|\arcsin\alpha \sim \alpha \textit{ при } \alpha\to 0\right| = 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$ Ряд збігається.

з) У загальному члені ряду є показникова функція 10^n і факторіал $n!$, тому можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n!}{10^n(2n-1)}\,;\; a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2(n+1)-1)} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2n+1)}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 10^n(2n-1)}{10^{n+1}(2n+1)\,n!} = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)(2-1/n)}{2/n+1/n^2} = \left|\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{0}\right| = \infty > 1.$$ Ряд розбігається.

и) У загальному члені ряду є показникова функція 3^{n-1} і факторіал $(2n-3)!$ Отже, застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n\cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}\,;\;\; a_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot 3^n}{(2(n+1)-3)!} = \frac{(n+1)\cdot 3^n}{(2n-1)!}\,;\;\; \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n(2n-3)!}{(2n-1)!\cdot n\cdot 3^{n-1}} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-3)!}{n(2n-3)!(2n-2)(2n-1)} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-2)(2n-1)} = 3\cdot 1\cdot 0 = 0 < 1.$$

Ряд збігається.

і) У складі загального члена ряду є показникова функція 3^n. Отже, можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$a_n = n^2\cdot arctg(n/3^n)\,;\quad a_{n+1} = (n+1)^2\cdot arctg((n+1)/3^{n+1})\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 arctg\ ((n+1)/3^{n+1})}{n^2 arctg\ (n/3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\ ((n+1)/3^{n+1})}{arctg\ (n/3^n)}.$$

За допомогою правила Лопіталя знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\ln 3}=0.$$

За першою чудовою границею $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=1$, тобто $arctg\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. Тоді $arctg\frac{n}{3^n}\sim\frac{n}{3^n}$ при $\alpha=\frac{n}{3^n}\to 0$ і $arctg\frac{n+1}{3^{n+1}}\sim\frac{n+1}{3^{n+1}}$ при $\alpha=(n+1)\big/3^{n+1}\to 0$. Еквівалентні нескінченно малі у відношенні замінюються одна на іншу. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\ ((n+1)/3^{n+1})}{arctg\ (n/3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\big/3^{n+1}}{n\big/3^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1$. Ряд збігається.

ї) У загальному члені ряду є факторіал $(n+1)!$, а також показникова функція 5^{2n-1}, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{5^{2n-1}}{(n+1)!},\quad a_{n+1}=\frac{5^{2(n+1)-1}}{(n+1+1)!}=\frac{5^{2n+1}}{(n+2)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}(n+1)!}{(n+2)!5^{2n-1}}=25\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)}=25\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=$$

$$=25\cdot 0=0<1.\ \text{Ряд збігається.}$$

й) У загальному члені ряду є показникова функція e^n, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{n+1}{e^n},\quad a_{n+1}=\frac{n+2}{e^{n+1}};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)e^n}{e^{n+1}\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+1/n}=\frac{1}{e}<1.$$ Ряд збігається.

к) У загальному члені є факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{3n-1}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{3(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{3n+2}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)n!}{(n+1)!(3n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{(3n-1)(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3/n+2/n^2}{(3-1/n)(1+1/n)}=0<1.$$ Ряд збігається.

л) Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)},\quad a_{n+1}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)\cdot2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)(3n+2)\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n+1)\cdot}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n}{3+2/n}=\frac{2}{3}<1.$$ Ряд збігається.

1.4.9. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{7^n}$	9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3+1}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(3n)!}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\,arctg\,\frac{1}{5^n}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\cdot3^n}{6^{n+1}}$	11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^{n+2}}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot3^{n+4}}{n^2+5}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-4}{\sqrt[3]{n\cdot5^{n-1}}}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{4^n(3n+1)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+3}}{(2n+1)!}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} n\,arctg\frac{n^2}{6^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+3}}{(n+4)!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{e^{n+2}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+3}{(n+2)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+3)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sin\frac{n}{4^n}$

1.4.10. Радикальна ознака Коші

Ця ознака є достатньою і базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$*, то при* $q<1$ *ряд збігається, при* $q>1$ *ряд розбігається, а при* $q=1$ *не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду.*

Радикальну ознаку Коші зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n, з яких досить просто добувається корінь n-го степеня. Наприклад,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{n+2}\frac{n}{n^2-3};\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{3n}\frac{2n+1}{n+3};\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{7n+3}\right)^{n^2}.$$

1.4.11. Приклади розв'язання задач

<u>Приклад</u>. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{n+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{n+1}\right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+2}}{n^n}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{3n^2+1}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\frac{n^2}{n+1}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\Big/\left(arctg\frac{n}{n+2}\right)^{n-3}$; і) $\sum_{n=1}^{\infty}tg^{n+1}\frac{n+3}{n^2}$;

ї) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}$; й) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}\right)^{n}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{3n^2+1}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}}$.

Розв’язання. а) Загальний член ряду є n-м степенем дробу $(2n-3)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n}{3+1/n}=\frac{2}{3}<1.$$

Ряд збігається.

б) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin\left(n/(n^2+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n\frac{n}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1/n}{1+1/n^2}=$$

$=\sin 0=0<1$. Ряд збігається.

в) Загальний член ряду є степенем з показником $n+1$ виразу $arctg\,\frac{n^2+1}{n^3-2}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(arctg\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(arctg\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)^{(n+1)/n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(arctg\frac{1/n+1/n^3}{1-2/n^3}\right)^{1+1/n}=arctg\,0=0<1.$$ Ряд збігається.

г) Загальний член ряду є n-м степенем виразу $\arcsin\frac{n+3}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+3}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n+3}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1+3/n}{1+1/n} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} > 1.$$ Ряд розбігається.

д) Загальний член ряду є $(n-2)$-м степенем виразу $(5n+6)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{\frac{n-2}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+6/n}{2+1/n}\right)^{1-2/n} = \left(\frac{5}{2}\right)^1 = \frac{5}{2} > 1.$$ Ряд розбігається.

е) Загальний член ряду $a_n = \frac{3^{n+2}}{n^n} = \frac{3^n\cdot 3^2}{n^n} = 9\cdot(3/n)^n$. Таким чином, a_n містить у вигляді множника n-й степінь дробу $3/n$, тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{9\cdot(3/n)^n} = \lim_{n\to\infty}9^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}3/n = 1\cdot 0 = 0 < 1.$$

Ряд збігається.

є) Загальний член ряду є степенем з показником $2n^2-3$ виразу $(3n-1)/(3n+2)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{2n^2-3}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{-3}\cdot\left(-\frac{3}{3n+2}\cdot\frac{2n^2-3}{n}\right)} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-9}{3n^2+2n}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6-9/n^2}{3+2/n}} = e^{-2} < 1.$$ Ряд збігається.

ж) Показник степеня $3n^2+1$ у загальному члені даного ряду залежить від n, тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{3n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+4}\right)^{(3n^2+1)/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+(2n-4)/(n^2+4)\right)^{\frac{n^2+4}{2n-4}\cdot\left(\frac{2n-4}{n^2+4}\cdot\frac{3n^2+1}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4}{n}\cdot\frac{3n^2+1}{n^2+4}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2-4/n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2}{1+4/n^2}} = e^{2\cdot 3} = e^6 > 1.$$ Ряд розбігається.

з) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\ln\dfrac{n^2}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^n\frac{n^2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{1/n+1/n^2} =$$

$$= \left|\ln\frac{1}{0} = \ln\infty\right| = \infty > 1.$$ Ряд розбігається.

и) Загальний член ряду $a_n = 4^n : arctg^{n-3}\left(n/(n+2)\right)$ містить степені з показниками n та $3-n$, що залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n : arctg^{n-3}\left(n/(n+2)\right)} =$$

$$= 4 : \lim_{n\to\infty} arctg^{(n-3)/n}\left(n/(n+2)\right) = 4 : \lim_{n\to\infty} arctg^{1-3/n}\frac{1}{1+2/n} =$$

$$= 4 : arctg\, 1 = 16/\pi > 1.$$ Ряд розбігається.

і) У загальному члені ряду є степінь з показником $n+1$ виразу $tg\left((n+3)/n^2\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{tg^{n+1}\frac{n+3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} tg^{\frac{n+1}{n}}\frac{n+3}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} tg^{1+1/n}\left(1/n + 3/n^2\right) = tg\,0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

ї) Загальний член ряду має показник степеня $3n-1$, що залежить від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+5}\right)^{(3n-1)/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{1+1/n}{2+5/n}\right)^{3-1/n} =$$

$$= \left(\arcsin(1/2)\right)^3 = (\pi/6)^3 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

й) Загальний член ряду є n-м степенем дробу $\dfrac{5n^2+4}{2n^2+n+1}$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5+4/n^2}{2+1/n} = \frac{5}{2} > 1. \quad \text{Ряд розбігається.}$$

к) У загальному члені ряду показники степенів n та $3n^2+1$ залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{3n^2+1}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{(3n^2+1)/n} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+(-6)/(2n+3)\right)^{\frac{2n+3}{-6}\cdot\left(\frac{-6}{2n+3}\cdot\frac{3n^2+1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3}e^{-6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+3n}} = \frac{1}{3}e^{-6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2}{2+3/n}} = \frac{1}{3}e^{-6\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}e^{-9} < 1.$$

Ряд збігається.

л) У загальному члені ряду показники степенів n та $n+2$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n}{5^{(n+2)/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1/n}{5^{1+2/n}}=\frac{\sin 0}{5}=$$

$$=0<1.\quad \text{Ряд збігається.}$$

1.4.12. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{5n-3}\right)^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n+1}\frac{n^3}{n^2+3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}tg^n\frac{n^2}{n^3+3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty}5^{n+2}\Big/\sin^n\frac{n}{n+1}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{n^2+2}\right)^{n+3}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty}tg^{n-2}\frac{n^2+1}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n^2+5}{n^2-3}\right)^{3n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^{2n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n 1/n^2}{7^{n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+6}\right)^{n+4}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^4+1}{2n^4+n^2+3}\right)^{n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n^2+4}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+1}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2-3}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{n^2}\frac{n^4}{n^4+4}$

1.5. Знакопочергові ряди

Знакопочерговий ряд (***ряд Лейбниця***) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \quad (*)$$

де $|u_n| = a_n \geq 0$.

Якщо збігається ряд, складений із модулів членів даного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то сам ряд (*) теж збігається і називається ***абсолютно збіжним***.

Якщо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, а сам знакопочерговий ряд (*)збігається, тоді він називається ***умовно збіжним***.

Достатня ознака Лейбниця: *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *виконуються дві умови*:

$$1)\ a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots; \qquad 2)\ \lim_{n \to \infty} a_n = 0,$$

тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним.

Друга умова ознаки Лейбниця, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Підкреслимо, що виконання ознаки Лейбниця гарантує не абсолютну, а лише умовну збіжність ряду.

1.5.1. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакопочергові числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^{n-1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{n+1}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arcsin^n \frac{\pi n}{3^n}$;   і) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n+2}$;

ї) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 \sin\frac{n}{n^3+1}$;   й) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^2-3}{n^2+1}\right)^{n^2+2}$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$;   л) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$.

Розв'язання. а) Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+3}$. Порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{4n^2+3} < \frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

За основною ознакою порівняння ряд з модулів збігається. Таким чином, даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+3)(n+5)}$ з абсолютних величин членів даного знакопочергового ряду можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+3n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{1+3/n+2/n^2} = \frac{2}{1} = 2 \quad \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq \infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Застосуємо ознаку Лейбниця, щоб перевірити, чи збігається знакопочерговий ряд умовно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2/n}{(1+1/n)(1+2/n)} = 0.$$

Отже, виконується друга умова ознаки Лейбниця.

$a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{5}{12}$; $a_3 = \frac{7}{20}$ $a_4 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$;   …   маємо

$\frac{1}{2} > \frac{5}{12} > \frac{7}{20} > \frac{3}{10} > \ldots$ Отже, виконується перша умова ознаки Лейбниця: $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$.

Таким чином, даний ряд збігається. Оскільки ряд з його абсолютних величин розбігається, то ця збіжність умовна.

в) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{2-1/n} = \frac{0}{2} = 0; \;\; a_1 = 1; \;\; a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{5}; \ldots \; 1 > \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{5} > \ldots. \text{ Отже, } \; a_1 > a_2 > a_3 > \ldots.$$

Обидві умови ознаки Лейбниця виконуються, отже, даний ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд, складений з його абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$. Цей ряд можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, що розбігається:

$$a_n = \sqrt{n}/(2n-1); \quad b_n = 1/\sqrt{n};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-1/n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд розбігається. Отже, початковий знакопочерговий ряд збігається умовно.

г) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2/2^{n-1}\right)$, складений з абсолютних величин даного знакопочергового ряду. Дослідимо його збіжність, застосовуючи ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}; \;\; a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n}; \;\; \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot n^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, отже, даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

д) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}$, складений з абсолютних величин даного знакопочергового ряду, можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/3}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}; \quad b_n = \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{3n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{3-1/n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається.

Дослідимо початковий ряд на умовну збіжність. тобто перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}} = 0; \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}; \; a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}};$$

$a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; $a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{11}}$ … Маємо $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$.

Умови ознаки Лейбниця виконуються. Даний ряд збігається умовно.

е) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця для цього знакопочергового ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Щоб розкрити цю невизначеність, розглянемо функцію $2^x / x^2$, яка співпадає з даною $2^n / n^2$ на множині цілих додатних чисел. За правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x \ln 2}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x \ln^2 2}{2} = +\infty.$$

Отже, і $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{2^n}{n^2} = \infty \neq 0$, а значить друга умова ознаки Лейбниця не виконується, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2}$ розбігається.

є) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n+1} = |\sin 0| = 0;$$

$$a_n = \sin\frac{\pi}{n+1},\ a_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1;\ a_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$a_3 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, … . Маємо $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

Отже, ознака Лейбниця виконується, тому даний знакопочерговий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n+1}$ можна порівняти з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$a_n = \sin\frac{\pi}{n+1};\quad b_n = \frac{1}{n};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin \pi/n+1}{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cdot n}{n+1} = \pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n} = \pi\ \begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Таким чином, початковий ряд збігається умовно.

ж) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0$. Друга умова ознаки Лейбниця виконується.

$$a_n = \left|(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}\right| = \frac{1}{\ln(n+1)};\ a_1 = 1/\ln 2;\ a_2 = 1/\ln 3;$$

$a_3 = 1/\ln 4$, … . Функція $\ln x$ є зростаючою, тому перша умова ознаки Лейбниця виконується $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$.

Отже, даний ряд збігається.

Перевіримо, чи збігається він абсолютно. Ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ розбігається, тому що $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ (за основною ознакою порівняння з меншим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)$, що розбігається). Таким чином, даний ряд збігається умовно.

з) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0\,;\;\; a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\,;$$

$$a_1 = 1/(2\ln 2)\,;\; a_2 = 1/(3\ln 3)\,;\; a_3 = 1/(4\ln 4)\,,\;\ldots\;\; a_1 > a_2 > a_3 \ldots .$$

Ознака Лейбниця виконується, тому даний ряд збігається. Маємо дослідити його на абсолютну збіжність.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Розглянемо відповідну функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$, що на інтервалі $[1,\infty)$ приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає, причому $f(n) = |u_n|$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{A\to\infty}\ln(\ln(x+1))\Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\ln(\ln(A+1)) - \ln\ln 2 = \infty\,.$$ Інтеграл розбігається.

Отже, ряд з абсолютних величин теж розбігається. Таким чином, знакопочерговий ряд збігається умовно.

и) Дослідимо на абсолютну збіжність даний ряд, застосовуючи радикальну ознаку Коші до ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\left(\pi n/3^n\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arcsin^n\left(\pi n/3^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\left(\pi n/3^n\right)=$$

$$=\arcsin\left(\pi\lim_{n\to\infty}(n/3^n)\right)=\arcsin 0=0<1,$$

де для розкриття невизначеності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ скористалися відповідною границею для допоміжної функції $f(x)=x/3^x$, що співпадає з послідовністю $n/3^n$ при x цілих і додатних. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x\ln 3}=0.\ \text{ Отже і }\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0.$$

За радикальною ознакою Коші ряд з абсолютних величин збігається, тому даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

і) Перевіримо збіжність ряду з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{n+2}$ за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{(n+2)/n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-1/n}\right)^{1+2/n}=\frac{1}{3}<1.$$

Ряд з абсолютних величин збігається, а тому знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

ї) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n^2\sin\frac{n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n^3}=1\neq 0.$$

(Скористались тим, що $\sin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. $\alpha=n/(n^3+1)$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^2}{1+1/n^3}=0$. Тому $\sin\dfrac{n}{n^3+1}\sim\dfrac{n}{n^3+1}$ при $n\to\infty$).

Ознака Лейбниця не виконується, тому даний знакопочерговий ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+1}\right)^{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1-4}{n^2+1}\right)^{n^2+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-4/(n^2+1)\right)^{-\frac{n^2+1}{4}\cdot\frac{4(n^2+2)}{n^2+1}}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-4/(n^2+1)\right)^{-(n^2+1)/4}\right)^{-4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}}=e^{-4}\neq 0.$$

Вона не виконується, тому даний ряд розбігається.

к) Дослідимо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$ з абсолютних величин даного знакопочергового ряду. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$|u_{n+1}|=\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)!};\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n\cdot(n+1)!}{(n+2)!\,n\cdot 3^{n-1}}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+2n}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1/n+1/n^2}{1+2/n}=3\cdot\frac{0}{1}=0<1.$$

Ряд з модулів збігається, а тому знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

л) Дослідимо збіжність ряду з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2(n+1)-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3(n+1)-2)}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{3+1/n}=\frac{2}{3}<1.$$

Ряд з модулів збігається, а тому даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

1.5.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакопочергові числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{(n+1)(n+6)}$	9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{5n-2}\right)^{n+4}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3^{n+2}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+3}}$	11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{n+1}}{n^3}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{2\pi}{n+3}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln^2(n+2)}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$	13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n arctg^n\frac{\pi n}{5^n}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot\sin\frac{n}{n^2+5}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^{n^2+1}$	15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)\cdot 5^n}{(n+3)!}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n+2)}$	16	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

1.6. Степеневі ряди

Функціональний ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

де $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... – деякі функції аргументу x.

Областю збіжності функціонального ряду є множина всіх значень x, при яких збігається числовий ряд з відповідних значень функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ...

Важливим випадком функціонального ряду є ***степеневий ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad (**)$$

де a_n $(n = 0,1,2,3,\ldots)$ – коефіцієнти ряду.

Інтервалом збіжності степеневого ряду називається інтервал $(-R, R)$ такий, що всередині нього $(|x| < R)$ ряд збігається, причому абсолютно, а зовні $(|x| > R)$ – ряд розбігається. Число R називається ***радіусом збіжності*** і може приймати значення від нуля до нескінченності. (У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку $(R = 0)$, або ж ряд збігається при всіх значеннях x $(R = \infty)$).

На кінцях інтервалу $x = \pm R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

Областю збіжності степеневого ряду є об’єднання інтервалу збіжності $(-R, R)$ *і тих його кінців* $x = \pm R$, *де ряд збігається хоча б умовно.*

Інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ можна визначити:

а) за ознакою Даламбера для ряду з модулів:

якщо $\lim\limits_{n\to\infty} |u_{n+1}/u_n| < 1$, то ряд збігається.

б) за радикальною ознакою Коші для ряду з модулів:

якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1$, то ряд збігається.

Для степеневих рядів стандартного вигляду (**), застосовуючи ці ознаки, відповідно одержуємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right| \quad \text{або} \quad R=1\Big/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Аналогічно за цими ознаками можна знайти внутрішні точки області абсолютної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. У межових точках відповідні числові ряди досліджуються окремо.

Зауважимо, що степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

де x_0 – центр розвинення, можна привести до стандартного подання (**), якщо позначити $x_1=x-x_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_1{}^n\,.$$

Такий ряд збігається при $|x-x_0|<R$ і розбігається при $|x-x_0|>R$. Отже, маємо інтервал збіжності $x_0-R<x<x_0+R$. На кінцях інтервалу збіжності при $x=x_0+R$ і при $x=x_0-R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

1.6.1. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти області збіжності даних функціональних рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{x^2}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\,\frac{x}{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{4^{n+2}x^n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}(x+1/n); \qquad \text{д) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{3n}}{x^{2n}\ln n}\,.$$

Розв’язання. а) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з абсолютних величин:

$$u_n=\sqrt{n}\sin\frac{x^2}{3^n};\quad u_{n+1}=\sqrt{n+1}\sin\frac{x^2}{3^{n+1}};\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}\sin(x^2/3^{n+1})}{\sqrt{n}\sin(x^2/3^n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x^2/3^{n+1})}{\sin(x^2/3^n)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin\alpha\sim\alpha\ \textit{при}\ \alpha\to 0;\quad \sin(x^2/3^{n+1})\sim x^2/3^{n+1};\\ \sin(x^2/3^n)\sim x^2/3^n\ \textit{при}\ n\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}\lim_{n\to\infty}\frac{x^2/3^{n+1}}{x^2/3^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n}=\frac{1}{3}<1.$$

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $x\in(-\infty,\infty)$, тобто його областю збіжності є вся числова пряма.

б) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з модулів:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}tg\,(x/(n+1)^2)}{x^n tg\,(x/n^2)}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{tg\,(x/(n+1)^2)}{tg\,(x/n^2)}\right|=$$

$$=\left|\begin{matrix}tg\,\alpha\sim\alpha\ \textit{при}\,\alpha\to 0;\ \ tg\,(x/(n+1)^2)\sim x/(n+1)^2;\\ tg\,(x/n^2)\sim x/n^2\ \textit{при}\ n\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x/(n+1)^2}{x/n^2}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2}=|x|.$$

Отже, при $|x|<1$, тобто при $-1<x<1$ ряд збігається абсолютно. Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}tg\,(1/n^2)$. Цей ряд збігається за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{tg(1/n^2)}{(1/n^2)}=1$. Ряди поводять себе однаково.

2) При $x=-1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}tg\,(1/n^2)$. Цей знакопо-

черговий ряд збігається абсолютно, бо розглянутий вище ряд $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,(1/n^2)$ є рядом з його модулів.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $-1 \le x \le 1$, тобто його областю збіжності є відрізок $[-1;1]$.

в) Введемо нову змінну $z = 1/x$. Тоді $x = 1/z$ і ми маємо степеневий ряд за степенями z стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}} z^n$.

Знайдемо радіус збіжності цього ряду за радикальною ознакою Коші $R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$:

$$R = 1 : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{n-1}/4^{n+2}} = 1 : \lim_{n\to\infty} \frac{5^{(n-1)/n}}{4^{(n+2)/n}} =$$

$$= 1 : \lim_{n\to\infty} \frac{5^{1-1/n}}{4^{1+2/n}} = \frac{4}{5}.$$

Отже, утворений ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(5^{n-1} z^n \big/ 4^{n+2}\right)$ абсолютно збігається при $|z| < 4/5$, тобто $1/|x| < 4/5$, або $|x| > 5/4$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 5/4$ або $x < -5/4$, тобто при $x \in (-\infty, -5/4) \cup (5/4, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm\, 5/4$:

1) При $x = 5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}(5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80}$ що розбігається за необхідною ознакою:

$$u_n = 1/80;\ \lim_{n\to\infty} u_n = 1/80 \ne 0.$$

2) При $x = -5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}(-5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80}$. Цей знакопочерговий ряд розбігається, бо

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \cdot 1/80\right| = 1/80 \ne 0.$$

Отже, даний функціональний ряд має область збіжності

$(-\infty;-5/4)\cup(5/4;+\infty)$, де збігається абсолютно.

г) Застосуємо радикальну ознаку Коші до ряду з модулів:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\ln^{2n}(x+1/n)\right|}=\lim_{n\to\infty}\ln^2(x+1/n)=\ln^2 x.$$

При $\ln^2 x<1$ ряд збігається абсолютно. Звідси

$$|\ln x|<1;\quad -1<\ln x<1;\quad e^{-1}<x<e.$$

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x=e$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}(e+1/n)$. Оскільки:

$$q=\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln^{2n}(e+1/n)=\left|1^{\infty}\right|=$$

$$=\left|\ln q=\ln\lim_{t\to\infty}\ln^{2t}(e+1/t)=\left|s=1/t;\ s\to 0\ при\ t\to\infty\right|=\right.$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{\ln\ln(e+s)}{s}=\left|\frac{0}{0}\right|=2\lim_{s\to 0}\frac{(\ln\ln(e+s))'}{s'}=$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{1}{(e+s)\,\ln(e+s)}=\frac{2}{e};\ q=e^{2/e}\right|=e^{2/e}\neq 0,$$

то цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака.

2) При $x=e^{-1}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}(e^{-1}+1/n)$. Оскільки:

$$q=\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln^{2n}(e^{-1}+1/n)=\left|1^{\infty}\right|=$$

$$=\left|\ln q=\ln\lim_{t\to\infty}\ln^{2t}(e^{-1}+1/t)=\left|s=1/t;\ s\to 0\ при\ t\to\infty\right|=\right.$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{\ln\ln(e^{-1}+s)}{s}=\left|\frac{0}{0}\right|=2\lim_{s\to 0}\frac{(\ln\ln(e^{-1}+s))'}{s'}=$$

$$=2\lim_{s\to 0}\frac{1}{(e^{-1}+s)\,\ln(e^{-1}+s)}=-2e;\ q=e^{-2e}\right|=e^{-2e}\neq 0,$$

то цей ряд також розбігається.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $e^{-1}<x<e$, тобто його областю збіжності є інтервал $(e^{-1};e)$.

д) Введемо нову змінну $z = 1/x^2$. Тоді $x^2 = 1/z$ і ми маємо степеневий ряд за степенями z стандартного вигляду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n} z^n}{\ln n}$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}|$:

$$a_n = \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)}; \quad R = \lim_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)} : \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n} \right| = 4^3 \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 64 \times$$

$$\times \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'} = 64 \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/(x+1)} = 64 \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)'}{x'} = 64.$$

Отже, утворений ряд абсолютно збігається при $|z| < 64$, тобто $1/x^2 < 64$, або $|x| > 8$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 8$ або $x < -8$, тобто при $x \in (-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm 8$:

1) При $x = 8$ маємо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{8^{2n} \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Ряд з його модулів $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ розбігається за основною ознакою порівняння з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тому що $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$.

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \quad \text{і} \quad |u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} = |u_{n+1}|,$$

то за ознакою Лейбниця знакопочерговий ряд збігається умовно.

2) При $x = -8$ маємо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{(-8)^{2n} \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, що співпадає з одержаним при $x = 8$. Він збігається умовно.

Отже, областю збіжності даного функціонального ряду служить об'єднання двох закритих променів $(-\infty;-8]\cup[8;+\infty)$.

Приклад 2. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^{n-1}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+2)2^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{3^n(n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n(n+3)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(x+2)^n}{5^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$;

є) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n-1}(x-3)^n}{n!}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^{n+2}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\ln n}{n^2}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2+2}$; і) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}}$;

ї) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(x-4)^n}{n!}$.

Розв'язання. а) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|$:

$$a_n=n\cdot 3^{n-1};\ a_{n+1}=(n+1)\cdot 3^n;\ R=\lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot 3^{n-1}}{(n+1)\cdot 3^n}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/n}=\frac{1}{3}.$$

Ряд збігається абсолютно при $|x|<1/3$, тобто $-1/3<x<1/3$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x=1/3$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^{n-1}(1/3)^n=(1/3)\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=(1/3)\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq 0.$$

2) При $x=-1/3$ маємо знакопочерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1}(-1/3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$. Цей ряд теж розбігається, тому що не виконується необхідна ознака: $\lim_{n\to\infty}|u_n| = (1/3)\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$.

Отже, область збіжності ряду – інтервал $x \in (-1/3;\, 1/3)$.

б) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+2)2^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)2^n}; \quad R = \lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+3)\cdot 2^n}{(n+2)\cdot 2^{n-1}\cdot(-1)^{n+1}}\right| = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n}{1+2/n} = 2.$$

Ряд збігається абсолютно при $|x| < 2$, тобто $-2 < x < 2$. Перевіримо його збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = -2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{(n+2)2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}.$$

Цей ряд розбігається за граничною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2/n} = 1.$$

2) При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$. Щойно показано, що ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ розбігається. Знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ збігається умовно, бо для нього виконуються умови ознаки Лейбниця:

$$a_n = 1/(n+2);\ a_1 = 1/3,\ a_2 = 1/4,\ a_3 = 1/5,\ \ldots$$

$$1/3 > 1/4 > 1/5 > \ldots > 1/(n+2) > \ldots.\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/(n+2) = 0.$$

Отже, даний степеневий ряд має область збіжності $(-2,2]$, причому на правому кінці $x = 2$ він збігається умовно.

в) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{n!}{3^n (n+2)};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+3)};\ \ R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 3^{n+1}(n+3)}{3^n (n+2)(n+1)!} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+3/n}{1+2/n} = 3\cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Отже, радіус збіжності даного ряду $R = 0$, тобто даний ряд збігається тільки при $x = 0$.

г) Маємо степеневий ряд за степенями $x-1$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)};\ \ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+4)};\ \ \ R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+4)}{n(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{n+3} = \lim_{n\to\infty} (1+1/n) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n}{1+3/n} = 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при $|x-1| < 1$, тобто $-1 < x-1 < 1$, або $0 < x < 2$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 2$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)}$ Цей ряд збігається за основною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Таким чином, при $x = 2$ степеневий ряд збігається абсолютно.

2) При $x = 0$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$. Це знакопочерговий ряд. Вище показано, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, складений з його абсолютних величин, збігається. Отже, цей знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ збігається абсолютно.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[0,2]$, де скрізь збігається абсолютно.

д) Маємо степеневий ряд за степенями $x+2$ стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+2)^n$, де $a_n = (2n-1)/5^n$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)/5^n}{(2n+1)/5^{n+1}} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{2+1/n} = 5.$$

Отже, даний ряд збігається при $|x+2| < 5$, тобто $-5 < x+2 < 5$, або $-7 < x < 3$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = 3$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2n-1) = \infty \neq 0.$$

2) При $x = -7$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(-5)^n}{5^n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1)$. Цей знакопочерговий ряд теж розбігається, бо не виконується необхідна ознака: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} (2n-1) = \infty \neq 0$.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $(-7,3)$.

е) Даний степеневий ряд за степенями $x+1$ має нестандартний вигляд. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = 4^n (x+1)^{2n} \big/ n; \quad u_{n+1}(x) = 4^{n+1}(x+1)^{2n+2} \big/ (n+1);$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{n+1}(x+1)^{2n+2} \cdot n}{(n+1)\cdot 4^n (x+1)^{2n}} \right| =$$

$$= 4(x+1)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 4(x+1)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 4(x+1)^2.$$

Даний ряд збігається абсолютно, якщо $4(x+1)^2 < 1$ або $(x+1)^2 < 1/4$, $-1/2 < x+1 < 1/2$, $-3/2 < x < -1/2$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = -1/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{2n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Це гармонічний ряд, що розбігається.

2) При $x = -3/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (-1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(-2)^{2n} n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ що розбігається.}$$

Отже, область збіжності даного степеневого ряду – інтервал $\left(-3/2; -1/2\right)$.

є) Маємо степеневий ряд за степенями $x-3$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = 6^{n-1} \big/ n!; \quad a_{n+1} = 6^n \big/ (n+1)!;$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{6^{n-1}(n+1)!}{n!\, 6^n} \right| = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Отже, ряд збігається при $-\infty < x-3 < \infty$, або $-\infty < x < \infty$, тобто область збіжності цього ряду $x \in (-\infty, \infty)$.

ж) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{3^n}{5^{n+2}}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+3}}; \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n \cdot 5^{n+3}}{5^{n+2} \cdot 3^{n+1}} \right| = \frac{5}{3}.$$

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-5/3 < x < 5/3$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 5^n}{5^{n+2} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25},$$

що розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$u_n = 1/25; \ \lim_{n\to\infty} u_n = 1/25 \neq 0.$$

2) При $x = -5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (-5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (-1)^n \cdot 5^n / 3^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{25}.$$

Цей знакопочерговий ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака: $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| (-1)^n \cdot 1/25 \right| = 1/25 \neq 0$.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду служить ін.-тервал $(-5/3, 5/3)$.

з) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2}; \ a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}; \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} : \frac{\ln n}{n^2} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x+1)\right)'}{(\ln x)'} =$$

$$=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1/(x+1)}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(x+1)'}=1,$$

де друга границя як невизначеність типу ∞/∞ розкрита за правилом Лопіталя.

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-1<x<1$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x=-1$ маємо знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^2}$. До ряду з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ застосуємо інтегральну ознаку:

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left|\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du;\right.$$

$$\left.u=\ln x;\ du=\frac{dx}{x};\ dv=\frac{dx}{x^2};\ v=-\frac{1}{x}\right|=\lim_{A\to\infty}\left(\ln x\cdot(-1/x)\right)\Big|_1^A-$$

$$-\lim_{A\to\infty}\int_1^A(-1/x)\frac{dx}{x}=-\lim_{A\to\infty}\frac{\ln A}{A}-\lim_{A\to\infty}(1/x)\Big|_1^A=-\lim_{A\to\infty}\frac{(\ln A)'}{A'}-$$

$$-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}+1=-\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}-0+1=1\neq\infty.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

2) При $x=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$, що співпадає з вище дослідженим. Він збігається.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду служить відрізок $[-1;1]$.

и) Маємо степеневий ряд за степенями $x+3$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$.u_n=\frac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2+2};\quad u_{n+1}=\frac{(x+3)^{2(n+1)+1}}{3(n+1)^2+2}=\frac{(x+3)^{2n+3}}{3(n+1)^2+2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+3)^{2n+3}\cdot(3n^2+2)}{(3(n+1)^2+2)(x+3)^{2n+1}}\right| = (x+3)^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = (x+3)^2 \lim_{n\to\infty}\frac{3+2/n^2}{3(1+1/n)^2+2/n^2} =$$

$$= (x+3)^2\cdot(3/3) = (x+3)^2.$$

Отже, при $(x+3)^2 < 1$ ряд збігається абсолютно, тобто ряд збігається абсолютно при $-1 < x+3 < 1$, або $-4 < x < -2$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу:

1) При $x=-2$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2}$. Цей ряд збігається за ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$a_n = 1/(3n^2+2)$, $b_n = 1/n^2$; $a_n = 1/(3n^2+2) < 1/3n^2 < 1/n^2 = b_n$.

Отже $a_n < b_n$, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2}$ теж збігається.

2) При $x=-4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{3n^2+2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+2}.$$

Цей ряд відрізняється від попереднього лише сталим множником -1. Отже, він також збігається.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[-4,-2]$.

і) Маємо степеневий ряд за степенями $x+4$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+4|^{(3n+2)/n}}{5^{(n-3)/n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x+4|^{3+2/n}}{5^{1-3/n}} = \frac{|x+4|^3}{5}.$$

Ряд збігається абсолютно, якщо $|x+4|^3/5<1$. Звідси

$|x+4|<\sqrt[3]{5}$; $-\sqrt[3]{5}<x+4<\sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{5}-4<x<\sqrt[3]{5}-4$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x=\sqrt[3]{5}-4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}5^{2/3+3}=\sum_{n=1}^{\infty}5^{11/3}.$$

Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}5^{11/3}=5^{11/3}\neq 0.$$

2) при $x=-\sqrt[3]{5}-4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+2}5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 5^{11/3}.$$

Цей ряд теж розбігається, бо $\lim_{n\to\infty}|u_n|=5^{11/3}\neq 0$.

Таким чином, для даного степеневого ряду маємо область збіжності $(-\sqrt[3]{5}-4,\ \sqrt[3]{5}-4)$, де ряд збігається абсолютно.

ї) Маємо степеневий ряд нестандартного вигляду (за непарними степенями x). Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}};\quad u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}x^{2(n+1)-1}}{\sqrt[3]{n+1}}=\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}\cdot(-1)^{n+1}x^{2n-1}}\right|=|x|^2\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=$$

$$=|x|^2\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{1+1/n}}=|x|^2=x^2.$$

Цей ряд збігається при $x^2<1$. Звідси $-1<x<1$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x=1$ маємо знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$. За ознакою Лейбниця він збігається, бо

$$a_1 = 1 > a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \ldots \text{ і } \lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Складемо ряд з його абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$. Це розбіжний узагальнений гармонічний ряд. Отже, при $x = 1$ маємо ряд, що збігається умовно.

2) При $x = -1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}},$$

що відрізняється від попереднього тільки знаком. Отже, він також збігається умовно.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}$ збігається абсолютно на інтервалі $(-1,1)$. На кінцях інтервалу він збігається умовно. Область збіжності – відрізок $[-1;1]$.

к) Маємо степеневий ряд за степенями $x-4$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n\to\infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n! \cdot (n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n!};$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^n n!}{n!(n+1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{-1} \cdot \frac{-n}{n+1}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n}} = e^{-1}.$$

Таким чином, даний ряд збігається абсолютно при $|x-4| < e^{-1}$. Звідси $4 - 1/e < x < 4 + 1/e$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 4 + 1/e$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (1/e)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$. За

формулою Стирлінга при $n \to \infty$ маємо $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Отже, при $n \to \infty$ дістаємо

$$a_n = \frac{n^n}{e^n \cdot n!} \approx \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n .$$

Тому порівняємо наш ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ці ряди поводять себе однаково, тобто розбігаються. Отже, при $x = 4 + 1/e$ ряд розбігається.

2) При $x = 4 - 1/e$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (-1/e)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n .$$

Знайдемо границю модулів його членів:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n n!} = \left| n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad при \;\; n \to \infty \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0 .$$

Крім того, при $n \to \infty$ маємо:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} > a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}} .$$

Отже, за ознакою Лейбниця знакопочерговий ряд збігається. Оскільки вище доведено, що ряд з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ розбігається, то цей ряд збігається умовно.

Таким чином, область збіжності даного степеневого ряду – півінтервал $[4 - 1/e, 4 + 1/e)$. На лівому кінці збіжність умовна.

1.6.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 5^{n+2} x^n$	9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 3^{n+1}}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)!\, x^n}{2^n \cdot n}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)(n+2)}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x+2)^n}{(n+1)!}$	11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^{2n}}{n+2}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} (x-1)^n}{(2n-1)!}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1} (x+4)^n}{4^{n-3}}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+4}}{4n^2-3}$	13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+5} (x-2)^n}{2^{3n-1}}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}\, x^3}{3^{2n}}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+3}}{4^{n+1}}$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \sqrt{\ln n}}$	15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)(x-1)^n}{4^{n+2}}$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{5^{2n} \sqrt{4n^2-1}}$

Розділ 2. РЯДИ ТЕЙЛОРА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Розкладання функцій у степеневі ряди

Рядом Тейлора функції $f(x)$ називається ряд вигляду:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (1)$$

Тут a – центр розвинення; $f^{(n)}(a)$ – значення n-ї похідної в точці $x=a$; $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ – n-й коефіцієнт Тейлора, $n=0,1,2,\ldots$.

Якщо $a=0$, то ряд Тейлора приймає вигляд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

і називається ***рядом Маклорена***.

Теорема 1. *Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(a-R;\ a+R)$ можна розкласти в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.*

Наведемо умови, за яких сума ряду (1) збігається до функції $f(x)$, тобто умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема 2. *Для того, щоб ряд Тейлора (1) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(a-R;\ a+R)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член її формули Тейлора $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ прямував до нуля при $n\to\infty$ для всіх x з цього інтервалу, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.*

При виконанні вказаних умов маємо:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ і, зокрема, при } a=0 \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Прості достатні умови розвинення функції в ряд Тейлора. дає наступна

теорема 3. *Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(a-R;\ a+R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M>0$ таке, що $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$,*

$x\in\left(a-R;\ a+R\right)$, $n=0,1,2,...$, то функцію $f\left(x\right)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена:

1. $e^{x}=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^{2}}{2!}+...+\dfrac{x^{n}}{n!}+...,\quad -\infty<x<+\infty$.

2. $\sin\ x=x-\dfrac{x^{3}}{3!}+\dfrac{x^{5}}{5!}-\dfrac{x^{7}}{7!}+...+\dfrac{\left(-1\right)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $-\infty<x<+\infty$.

3. $\cos x=1-\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{x^{4}}{4!}-\dfrac{x^{6}}{6!}+...+\left(-1\right)^{n}\dfrac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\dfrac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}$, $-\infty<x<+\infty$.

4. $tgx=x+\dfrac{1}{3}x^{3}+\dfrac{2}{15}x^{5}+\dfrac{17}{315}x^{7}+...,\ \ x\in R,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}\left(2n-1\right),\ n\in Z$.

5. $(1+x)^{m}=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^{2}+...+\dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^{n}+...,\quad \left|x\right|<1$**.**

6. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+x^{3}+...+x^{n}+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n},\quad -1<x<1$.

7. $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+...+\left(-1\right)^{n}x^{n}+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{n},\ -1<x<1$.

8. $ln\left(1+x\right)=x-\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}-\dfrac{x^{4}}{4}+...+\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}x^{n}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}x^{n},\ -1<x\leq 1$.

9. $arctgx=x-\dfrac{x^{3}}{3}+\dfrac{x^{5}}{5}-\dfrac{x^{7}}{7}+...+\left(-1\right)^{n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$,
$-1\leq x\leq 1$.

10. $arcsin\,x=x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^{3}}{3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{x^{5}}{5!}+...+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot\left(2n-1\right)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+...=$
$=x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1<x\leq 1$, де $\left(2n-1\right)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot\left(2n-1\right)$,
$\left(2n\right)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot\left(2n\right)$.

2.1.1. Приклади розв’язання задач

Розкладання функцій в степеневі ряди в загальному випадку базується на використанні рядів Тейлора або Маклорена.

За ***першим способом*** знаходять похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,...$, які безпосередньо підставляють у відповідну формулу і одержують шукане розвинення.

На практиці частіше застосовують ***другий спосіб*** – без знаходження виразів для похідних довільного n-го порядку, а на основі формальних перетворень з використанням наведених стандартних розкладів елементарних функцій в ряди Маклорена. Зокрема, корисно використовувати почленне диференціювання чи інтегрування відомих рядів. В інтервалах збіжності одержані ряди збігаються до відповідних функцій.

Приклад 1**.** Розкласти в ряд Маклорена функції:

а) $f(x)=sin^2 x$; б) $f(x)=sin^3 x$

та знайти області, в яких ряд збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) **Спосіб І**. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x),\ n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(0),\ n=0,1,2,...$, що входять у ряд Маклорена

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...,$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=sin^2 x, \qquad f(0)=0,$$

$$f^{I}(x)=2\,sin\,x\,cos\,x=sin\,2x, \qquad f^{I}(0)=0,$$

$$f^{II}(x)=2\,cos\,2x=2\,sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{II}(0)=2,$$

$$f^{III}(x)=-2^2\,sin\,2x=2^2\,sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right), \qquad f^{III}(0)=0,$$

$$f^{IV}(x)=-2^3\,cos\,2x=2^3\,sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right), \qquad f^{IV}(0)=-2^3,$$

$$f^{V}(x)=+2^4\,sin\,2x=2^4\,sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right), \qquad f^{V}(0)=0,$$

$$f^{VI}(x)=2^5\,cos\,2x=2^5\,sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right), \qquad f^{VI}(0)=2^5,$$

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\,sin\left[2x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right], \qquad f^{(n)}(0)=2^{n-1}\,sin\left[\frac{\pi}{2}(n-1)\right].$$

Отже,

$$sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-...+\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+...,=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{2n+1}x^{2(n+1)}(2n)!}{(n+2)!\,2^{2n-1}x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^2x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 \text{ для всіх } x,$$

тобто інтервал збіжності ряду $(-\infty,+\infty)$.

Спосіб II. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення заданої функції та основними властивостями збіжних степеневих рядів.

Подамо функцію $f(x)=sin^2 x$ у вигляді:

$$sin^2 x=\frac{1}{2}(1-cos\,2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos\,2x$$

і використаємо відомий розклад

$$cos\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ \ -\infty<x<+\infty,$$

замінюючи x на $2x$. Тоді маємо:

$$sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty$$

Як бачимо, обидві відповіді збігаються.

б) З тригонометричної тотожності $sin\,3x=3\,sin\,x-4\,sin^3 x$ одержимо

$$sin^3 x=\frac{1}{4}(3\,sin\,x-sin\,3x).$$

Застосуємо розвинення

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

Замінюючи x на $3x$, маємо:

$$sin\,3x=(3x)-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

Отже,

$$sin^3 x=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3-3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(+\frac{24}{3!}x^3-\frac{240}{5!}x^5+\frac{2184}{7!}x^7-\ldots+\frac{(-1)^n\left(3-3^{2n+1}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots\right),$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

<u>Приклад 2</u>. Розкласти задані функції в ряд Маклорена

а) $f(x)=chx$; б) $f(x)=shx$; в) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

<u>Розв'язання</u>. Оскільки

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in R,$$

то

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\ldots,x\in R.$$

Враховуючи, що обидва ряди збігаються при $-\infty<x<+\infty$, то в інтервалі збіжності $(-\infty,+\infty)$ їх можна почленно додавати та почленно віднімати. Після простих перетворень отримуємо:

а) $chx=\frac{1}{2}\left(\ell^x+\ell^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!};\ -\infty<x<+\infty.$$

б) $shx=\frac{1}{2}\left(\ell^x-\ell^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right.\right.$

$$\left.\left.+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots\right]=\frac{1}{2}\left(2x+2\frac{x^3}{3!}+\ldots+2\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};\ -\infty<x<+\infty.$$

в) $f(x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left[ln(1+x)-ln(1-x)\right].$

Скористаємося розкладом

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ -1<x\le 1.$$

Замінюючи x на $(-x)$, маємо:

$$ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots,\ -1\le x<1.$$

Обидва ряди збігаються при $|x|<1$, тобто в інтервалі $(-1,1)$ їх можна почленно віднімати. Одержуємо:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\left[ln\left(1+x\right)-ln\left(1-x\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{\left(-1\right)^n}{n}x^n+...\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-...-\frac{x^n}{n}-...\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+2\frac{x^7}{7}+...\cdot 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...\right)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad -1<x<1.$$

Примітка. Відзначимо цікаві аналогії між рядами Маклорена, здавалось би, зовсім різних функцій:

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...,\qquad shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...,\qquad x\in\left(-\infty,+\infty\right)$$

$$cos\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...,\quad chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...,\quad x\in\left(-\infty,+\infty\right)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...,\quad \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...,\qquad \left|x\right|<1$$

Приклад 3. Розкласти задані функції в ряд Маклорена

а) $f\left(x\right)=\dfrac{6}{1+x-2x^2}$; б) $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) Розкладемо раціональну функцію $f\left(x\right)=\dfrac{6}{1+x-2x^2}$ на суму найпростіших дробів:

$$1+x-2x^2=-2\left(x-1\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(1-x\right)\left(2x+1\right);$$

$$\frac{6}{\left(1-x\right)\left(1+2x\right)}=\frac{6}{\left(1-x\right)\left(1+2x\right)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+2x},\qquad A=2;\qquad B=4.$$

Тобто $f\left(x\right)=\dfrac{6}{\left(1-x\right)\left(1+2x\right)}=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{4}{1+2x}$.

Маємо $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...,=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ -1<x<1.$ (1)

Замінимо x на $-2x$ і отримаємо:

$$\frac{1}{1+2x}=1-\left(2x\right)+\left(2x\right)^2-\left(2x\right)^3+\left(2x\right)^4+...+\left(-1\right)^n\left(2x\right)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2x\right)^n.\ (2)$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (2): $|2x|<1$ або $|x|<\frac{1}{2}$.

Отримані ряди (1) і (2) множимо на сталі множники і додаємо. У результаті маємо $\frac{6}{(1-x)(1+2x)}=\frac{2}{1-x}+\frac{4}{1+2x}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n+4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+4\cdot(-1)^n\cdot 2^n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+(-1)^n\cdot 2^{n+2}\right)x^n,\ |x|<\frac{1}{2}.$$

Інтервал збіжності останнього ряду $|x|<\frac{1}{2}$, бо інтервал збіжності ряду (1) $|x|<1$, а ряду (2) $|x|<\frac{1}{2}$, тобто для $|x|<\frac{1}{2}$ збігаються обидва ряди.

б) Подамо раціональну функцію $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}$$

Застосуємо розклад $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1, \qquad (3)$$

де замінимо x на $x/2$ і отримаємо

$$\frac{1}{1-x/2}=\sum_{n=0}^{\infty}(x/2)^n,\ \left|\frac{x}{2}\right|<1 \quad \text{або } |x|<2. \qquad (4)$$

Враховуючи, що ряд (3) збігається для $|x|<1$, а ряд (4) – для $|x|<2$, маємо, що обидва ряди збігаються для $|x|<1$, тобто в інтервалі $|x|<1$ їх можна почленно додавати зі сталими множниками:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n,\ |x|<1.$$

<u>Приклад 4</u>. Розкласти задані функції в ряд Маклорена:

а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$; в) $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

<u>Розв'язання</u>. Для розвинення заданих функцій в ряд Маклорена скористаємося біноміальним рядом:

$$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot\left[m-(n-1)\right]}{n!}x^n+\ldots,\quad |x|<1.$$

а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[1+\left(-x^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$

Покладемо $m=-\dfrac{1}{2}$ і замість x підставимо $-x^2$;

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}x^4+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{3!}x^6+\ldots+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{1}{n!}x^{2n}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n}+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad -1<x<1.$$

б) Перетворимо задану функцію до такого вигляду, що дозволяє застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{8-x^3}=\sqrt[3]{8\left(1-\frac{x^3}{8}\right)}=2\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}=2\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}=\frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}.$$

Покладемо $m=-\dfrac{1}{3}$ і замість x запишемо $\left(-\dfrac{x}{2}\right)^3$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{x^3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^2+\right.$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{x^3}{8}\right)^3\frac{1}{3!}+\ldots$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)\cdot\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^n+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{8}+\frac{4}{3^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\quad 3!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^3+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n n!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^n+\ldots\right),\text{ де }\left|\frac{x}{2}\right|<1,\text{ тобто }|x|<2.$$

в) Запишемо функцію як $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}=(1+x)\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Розкладемо дріб $\dfrac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$ у біноміальний ряд, покладаючи $m=-2$ та замість x підставляючи $(-x)$:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+(-2)(-x)+(-2)(-3)\cdot\frac{1}{2!}(-x)^2+(-2)(-3)(-4)\cdot\frac{1}{3!}(-x)^3+\ldots+$$

$$+(-2)(-3)(-4)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)\cdot\frac{1}{n!}(-x)^n+\ldots=$$

$$=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\ldots,\quad |x|<1.$$

Цей ряд помножимо на $(1+x)$ і отримаємо шуканий розклад:

$$f(x)=(1+x)\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n+\ldots\right)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+$$

$$+(n+1)x^n+\ldots+x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+(n+1)x^{n+1}+\ldots=$$

$$=1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\ldots+(2n+1)x^n+\ldots,\ |x|<1.$$

<u>Приклад 5</u>. Розкласти в ряд Маклорена функції:

а) $f(x)=a^x\ (a>0)$; б) $f(x)=sin\left(\dfrac{1}{1-x^2}-1\right)$; в) $f(x)=\ell^{\frac{x}{2}}\,sin2x$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

<u>Розв’язання</u>. а) Запишемо задану функцію так:

$$f(x)=a^x=e^{x\ln a}.$$

У розкладі

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty$$

замість x запишемо $x\,ln\,a$ і одержимо:

$$a^x=1+x\,ln\,a+\frac{(x\,ln\,a)^2}{2!}+\frac{(x\,ln\,a)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x\,ln\,a)^n}{n!}+\ldots,\quad -\infty<x<+\infty.$$

б) Спочатку розкладемо в ряд Маклорена функцію $\dfrac{1}{1-x^2}-1=\left(1-x^2\right)^{-1}-1$. Для цього скористаємося біноміальним рядом, поклавши $m=-1$ і замість x підставивши $-x^2$. Дістанемо:

$$\frac{1}{1-x^2}-1=1+(-1)\left(-x^2\right)+(-1)(-2)\frac{\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}\left(-x^2\right)^3+\ldots-1=$$

$$=x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots,\qquad |x|<1.$$

Далі застосуємо розклад для синуса, в який замість x запишемо $x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots$, тобто виконаємо підстановку ряду в ряд:

$$sin\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)=\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}\ldots\right)-\frac{\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}\ldots\right)^3}{3!}+$$

$$+\frac{\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}\ldots\right)^5}{5!}+\ldots=x^2+x^4+x^6-x^6\frac{1}{6}+x^8-\frac{3}{6}x^8+x^{10}-$$

$$-\frac{6}{6}x^{10}+\frac{x^{10}}{120}+\ldots=x^2+x^4+\frac{5}{6}x^6+\frac{1}{2}x^8+\frac{x^{10}}{120}+\ldots,\ |x|<1.$$

в) Для розвинення даної функції в ряд Маклорена необхідно розкласти в ряд Маклорена функції $e^{x/2}$ і $sin\,2x$:

$$\ell^{\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!},\quad -\infty<x<+\infty;\ \ sin\ 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ -\infty<x<+\infty$$

і отримані ряди перемножити за наступним правилом:

якщо $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ *для* $|x|<R_1$ *і* $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_nx^n+\ldots$ *для* $|x|<R_2$, *тоді*

$$f(x)\cdot g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+$$

$$+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+(a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0)x^4+\ldots$$

для $|x|<r$, *де* r *– менше з чисел* R_1 *і* R_2.

Тоді $\ell^{\frac{x}{2}}sin\,2x=\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}+\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}+\ldots\right)\times$

$$\times\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+\ldots\right)=2x+x^2-\frac{13}{12}x^3-\frac{5}{8}x^4+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

Приклад 6. Розкласти в ряд Маклорена функції

а) $f(x)=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; б) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) Відомо, що $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Розкладемо в ряд Маклорена функцію $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ скориставшись біноміальним рядом, в якому покладемо $m=-\frac{1}{2}$ і замість x запишемо x^2:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\ldots,\qquad |x|<1.$$

Проінтегруємо цей ряд почленно в межах від 0 до x і отримаємо ряд

$$ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

який збігається при $|x|<1$.

б) Функцію $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ розкладемо в ряд за степенями x, використовуючи біноміальний ряд, в якому покласти $m=-2$ і замість x взяти $-x$.

Спочатку одержимо степеневий ряд :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,\qquad (-1<x<1).$$

Диференціюючи цей ряд почленно, маємо

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots.$$

Але $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, тоді шуканий розклад $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

Інтервал збіжності отриманого ряду так само $(-1,1)$.

<u>Приклад 7</u>. Розкласти в ряд Тейлора функції:

а) $f(x)=sin\dfrac{\pi x}{4}$ за степенями $(x-2)$;

б) $f(x)=1/x$ за степенями $(x-3)$

та знайти області, в яких ряд збігається до відповідної функції.

<u>Розв'язання</u>. а) **Спосіб І**. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ та їх значення $f^{(n)}(a)$, $n=0,1,2,\ldots$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,\ \text{де}\ \ a=2,$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f^{I}(x)=cos\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot1\right),$$

$$f^{II}(x)=-\frac{\pi^2}{4^2}\,sin\frac{\pi x}{4}=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$f^{III}(x)=-\frac{\pi^3}{4^3}\,cos\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$f^{IV}(x)=\frac{\pi^4}{4}\,sin\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

$$f^{V}(x)=-\frac{\pi^5}{4^5}\,cos\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right),$$

....

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n\right),$$

....

$$f(2)=sin\frac{\pi\cdot 2}{4}=sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$f^{I}(2)=\frac{\pi}{4}sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}sin\,\pi=0,$$

$$f^{II}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 sin\frac{3}{2}\pi=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

$$f^{III}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 sin\,2\pi=0,$$

$$f^{IV}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4,$$

$$f^{V}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

....

$$f^{(2k)}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 2k\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\cdot(-1)^k,$$

$$f^{(2k+1)}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k=1} sin\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Підставляємо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і маємо:

$$sin\frac{\pi x}{4}=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}+....$$

Оскільки $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\left(\frac{\pi}{4}\right)^n sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right|\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^n<1$, то похідні функції $f(x)$ обмеженні в сукупності на всій числовій осі. Тому ряд Тейлора збігається до $f(x)$ на всій осі.

Отже, розвинення в ряд $sin\frac{\pi x}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}$ справедливе при $-\infty<x<+\infty$.

Спосіб II. Спочатку подамо функцію $f(x)$ через нову змінну $z=x-2$:

$$sin\frac{\pi x}{4}=sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right]=cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right].$$

Потім скористаємося розкладом $cos\,x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)'}$, $-\infty<x<+\infty$, в який замість x запишемо $(x-2)\cdot\frac{\pi}{4}$. Дістанемо:

$$cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}+...$$

Цей ряд збігається до $f(x)=sin\frac{\pi x}{4}$ при $-\infty<\frac{\pi}{4}(x-2)<+\infty$, тобто при $-\infty<x<+\infty$. Отже,

$$sin\frac{\pi}{4}x=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}+...,$$

$-\infty<x<+\infty$.

б) **Спосіб І**. Знаходимо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(a)$ при $a=3$:

$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $\quad f(3)=\frac{1}{3}$,

$f^{I}(x)=-\frac{1}{x^2}=-1\cdot x^{-2}$, $\quad f^{I}(3)=-\frac{1}{3^2}$,

$f^{II}(x)=2\cdot x^{-3}=\frac{2}{x^3}=\frac{1\cdot 2}{x^3}$, $\quad f^{II}(3)=\frac{1\cdot 2}{3^3}$,

$f^{III}(x)=-6x^{-4}=-\frac{6}{x^4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, $\quad f^{III}(3)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^4}$,

$f^{IV}(x)=24x^{-5}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$, $\quad f^{IV}(3)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3^5}$,

… … … … … … … … … … … … …

$f^{(n)}(x)=(-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}},$ $\qquad\qquad$ $f^{(n)}(3)=\dfrac{n!(-1)^n}{3^{n+1}},$

… … … … … … … … … … … … ….

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ a=3$$

і дістанемо: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}-\cdot\dfrac{1}{3^2\cdot 1!}(x-3)+\dfrac{1\cdot 2}{2!3^3}(x-3)^2-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3!3^4}(x-3)^3+$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4!3^5}(x-3)^4+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!3^{n+1}}(x-3)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{3^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження останнього ряду на збіжність:

$$|U_n|=\left|\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\right| \quad |U_{n+1}|=\frac{\left|(x-3)^{n+1}\right|}{3^{n+2}};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}3^{n+1}}{3^{n+2}(x-3)^n}\right|=$$

$=\dfrac{|x-3|}{3}<1;\quad |x-3|<3;\quad -3<x-3<3;\quad 0<x<6$ – інтервал збіжності.

Дослідимо збіжність на кінцях цього інтервалу.

При $x=0$ отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3}+\ldots$$

При $x=6$ маємо числовий ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ldots$

Обидва ряди розбіжні, тому що не виконується необхідна ознака збіжності $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Отже, областю збіжності останнього ряду є інтервал $(0,6)$.

Спосіб II. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{(x-3)+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}$. Скористаємося рядом

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \quad |x|<1,$$

в який замість x запишемо $\dfrac{x-3}{3}$. Маємо:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-3}{3}+\left(\frac{x-3}{3}\right)^2-\left(\frac{x-3}{3}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n+\ldots\right)=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+$$
$$+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\frac{(x-3)^3}{3^4}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}+\ldots$$

Інтервал збіжності: $\left|\frac{x-3}{3}\right|<1;\quad |x-3|<3\quad -3<x-3<3\quad 0<x<6$.

Бачимо, що відповіді однакові.

Приклад 8. Розкласти задану функцію $f(x)=\frac{1}{4-x}$ в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$ та знайти його інтервал збіжності.

Розв'язання. Перетворимо задану функцію так, щоб можна було застосувати формулу: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$; $-1<x<1$. (1)

Перетворимо задану функцію: $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}$; замінимо x на $\frac{x-2}{2}$ у формулі (1), тоді дістанемо:

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{x-2}{2}\right|<1.$$

Отриманий ряд збігається при $|x-2|<2$. Звідки $0<x<4$.

Приклад 9. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=sec\,x$ та знайти його область збіжності.

Розв'язання. Запишемо $sec\,x=\frac{1}{cos\,x}$, тоді $sec\,x\cdot cos\,x=1$

Нехай $sec\,x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$.

За правилом множення збіжних рядів маємо:

$$1=sec\,x\cdot cos\,x=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)=a_0\cdot 1+a_1\cdot 1\cdot x+\left(a_2+a_0\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^2+$$
$$+\left(a_3\cdot 1+a_1\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^3+\left(a_4\cdot 1+a_0\cdot\frac{1}{4!}+a_2\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^4+$$
$$+\left(a_5\cdot 1+a_3\left(-\frac{1}{2!}\right)+a_4\cdot\frac{1}{4!}\right)x^5+\left(a_6\cdot 1+a_2\cdot\frac{1}{4!}+a_4\left(-\frac{1}{2!}\right)+a_0\left(-\frac{1}{6!}\right)\right)x^6+\ldots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях:

x^0	$a_0 \cdot 1 = 1,$	звідки $a_0 = 1$
x^1	$a_1 \cdot 1 = 0,$	звідки $a_1 = 0$
x^2	$a_0 \cdot \left(\dfrac{-1}{2!}\right) + a_2 \cdot 1 = 0$	звідки $a_2 = \dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2}$
x^3	$a_3 \cdot 1 + a_1 \left(-\dfrac{1}{2!}\right) = 0$	звідки $a_3 = 0$
x^4	$a_4 \cdot 1 + a_0 \dfrac{1}{4!} + a_2 \left(-\dfrac{1}{2!}\right) = 0$	звідки $a_4 = -\dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2!} = \dfrac{5}{2!} = \dfrac{5}{4!}$
x^5	$a_5 \cdot 1 + a_1 \dfrac{1}{4!} + a_3 \left(-\dfrac{1}{2!}\right) = 0$	звідки $a_5 = 0$
x^6	$a_6 \cdot 1 + a_2 \dfrac{1}{4!} + a_4 \left(-\dfrac{1}{2!}\right) + a_0 \left(-\dfrac{1}{6}\right) = 0$	звідки $a_6 = 1 \cdot \dfrac{1}{6!} + \dfrac{5}{24} \cdot \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = = \dfrac{61}{720} = \dfrac{61}{6!}$
…	… … … … … … … … … … … …	… … … … … … … … … …

Тоді шукане розвинення

$$sec\, x = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{5}{4!} x^4 + \frac{61}{6!} x^6 + ..., \ x \in R, \ x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \ n \in Z.$$

2.1.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Розкласти задані функції за степенями x (варіанти №1–№14) чи за степенями $x-a$ (варіанти №15 – №25), використовуючи відомі розклади функцій e^x, $sin\, x$, $cos\, x$, $(1+x)^m$; $ln(1+x)$, $arctgx$ в ряд Маклорена:

№	Завдання	Відповідь
1	$f(x) = xe^{-2x}$	$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$
2	$f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$	$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$
3	$f(x) = e^{-x}(1+x)$	$f(x) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n!} x^n, \quad x(-\infty; +\infty)$

4	$f(x)=sin\frac{x}{2}$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
5	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$	$f(x)=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}x^{2n},$ $x\in(-1;1)$
6	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^{2n+1}n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},\ x\in(-2;2)$
7	$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2n-1}{2^n n!}x^{2n+2},\ x\in(-1;1)$
8	$f(x)=ln(1+2x)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
9	$f(x)=(1+x)\,arctgx$	$f(x)=x+x^2-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{5}-\ldots,\ x\in[-1;1]$
10	$f(x)=\frac{arctgx}{x}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1},\quad x\in[-1;1]$
11	$f(x)=cos^2 x$	$f(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
12	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$f(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n n!}x^{3n},$ $x\in(-1;1)$
13	$f(x)=sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$	$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+x-\frac{\sqrt{3}}{2!}x^2-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sqrt{3}}{4!}x^4+\frac{x^5}{5}-\ldots\right),$ $x\in(-\infty;+\infty)$
14	$f(x)=sin(x^2)$	$f(x)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\ldots$ $x\in(-\infty;+\infty)$
15	$f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $(x+6)$	$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{6^{n+1}},\ x\in(-12;0)$
16	$f(x)=ln\,x$ за степенями $(x-1)$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0<x\le2$

17	$f(x)=\frac{6}{8+2x-x^2}$ за степенями $(x-1)$	$\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{3}$, $x\in(-2;4)$
18	$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}$ за степенями $(x+2)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$, $x\left(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$
19	$f(x)=\frac{1}{5+2x}$ за степенями $(x-3)$	$\frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{\frac{11}{2}}\right)^n$, $\frac{5}{2}<x<\frac{17}{2}$
20	$f(x)=\frac{1}{4+3x}$ за степенями $(x+2)$	$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{\frac{2}{3}}\right)^n$, $-\frac{8}{3}<x<-\frac{4}{3}$
21	$f(x)=cos^2 x$ за степенями $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$, $x\in(-\infty;+\infty)$
22	$f(x)=ln\frac{1}{x^2-2x+2}$ за степенями $(x-1)$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{2n}}{n}$, $0<x\le 2$
23	$f(x)=ln(5x+3)$ за степенями $(x-1)$	$ln\,8+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{5}{8}\right)^n(x-1)^n$, $-\frac{3}{5}<x\le\frac{13}{5}$
24	$f(x)=\sqrt[3]{x}$ за степенями $(x-1)$	$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n$, $0<x\le 2$
25	$f(x)=e^x$ за степенями $(x+2)$	$e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$, $x\in(-\infty;+\infty)$

2.2. Застосування степеневих рядів

2.2.1. Знаходження границі функції. Приклади розв'язання задач

Приклад. Обчислити границі, використовуючи розклади функцій в ряд Маклорена:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ell^x-3-3x-\frac{3}{2}x^2}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)x^3}{x^5}$.

Розв'язання. а) Використаємо розклади функцій e^x та $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ell^x-3-3x-\frac{3}{2}x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)-3-3x-\frac{3}{2}x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3+3x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4!}x^4+\ldots-3-3x-x^2\cdot\frac{3}{2}}{x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4!}x^4+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x^3\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4!}x+..\right)}{x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4!}x}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3!}}=3.$$

б) Використаємо розклади функцій $\sin x$ та $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\right)}{x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots}{x^3}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{5}\right)x^5+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)x^7}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{5}\right)x^2+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)x^4+\ldots\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

в) Використаємо розклади функцій $\sin x$ та tgx в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to0}\frac{2\left(tgx-\sin x\right)-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left[\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\ldots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)\right]-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\ldots-x+\frac{1}{3!}x^3-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots\right)-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{5!}\right)x^5+\left(\frac{17}{315}+\frac{1}{7!}\right)x^7\right]-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5+\frac{91}{1680}x^7+\ldots\right)-x^3}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+\frac{1}{4}x^5+\frac{91}{840}x^7+\ldots-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{x^5\left(\frac{1}{4}+\frac{91}{840}x^2+\ldots\right)}{x^5}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{4}+\frac{91}{840}x^2\right)=\frac{1}{4}.$$

2.2.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Обчислити границі, використовуючи розклади функцій в ряд Маклорена:

№	Завдання	Відповідь	№	Завдання	Відповідь
1	$\lim_{x\to0}\frac{4\left(tgx-\sin x\right)-2x^3}{x^5}$	$\frac{1}{2}$	6	$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{4\cos x-4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-1\cos x}{3x^2}$	$-\frac{1}{6}$	7	$\lim_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right)$	0	8	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$	1
4	$\lim_{x\to0}\frac{2e^{-x}-2}{\ln\left(l+x\right)-1}$	$-2e$	9	$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right)$	$\frac{1}{60}$
5	$\lim_{x\to0}\frac{arctgx}{\ln\left(1-x\right)}$	-1	10	$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{ctgx}{x}\right)$	$\frac{1}{3}$

2.2.3. Наближене обчислення значень функцій. Приклади розв'язання задач

Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R, R)$ і $x_0 \in (-R, R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$.

Тобто, якщо $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

то $$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots.$$

Наближене значення $f(x_0)$ дорівнює частковій сумі $S_n(x_0)$:

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) = a_1 + a_2 x_0{}^2 + a_3 x_0{}^3 + \ldots + a_n x_0{}^n.$$

Похибка дорівнює залишку ряду

$$r_n(x_0) = a_{n+1} x_0^{n+1} + a_{n+2} x_0^{n+2} + a_{n+3} x_0^{n+3} + \ldots.$$

Тому треба вміти оцінювати залишок $r_n(x_0)$.

Якщо ряд $f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + \ldots + a_n x_0{}^n + \ldots$ – знакопочерговий, то за теоремою Лейбниця залишок $r_n(x_0)$ має знак свого першого члена і за абсолютною величиною не перевищує його:

$$|r_n(x_0)| = \left| a_{n+1} x_0^{n+1} + a_{n+2} x_0^{n+2} + \ldots \right| \le \left| a_{n+1} x_0^{n+1} \right|.$$

Для довільних знакозмінних і знакододатних рядів величину залишку ряду $r_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$|r_n(x_0)| \le \left|a_{n+1} x_0^{n+1}\right| + \left|a_{n+2} x_0^{n+2}\right| + \left|a_{n+3} x_0^{n+3}\right| + \ldots < U_1 + U_2 + U_3 + \ldots = S,$$

де $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$ певний знакододатний збіжний ряд, сума якого S легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія), причому

$$\left|a_{n+1} x_0^{n+1}\right| \le U_1, \quad \left|a_{n+2} x_0^{n+2}\right| \le U_2, \quad \left|a_{n+3} x_0^{n+3}\right| \le U_3, \ldots.$$

Треба також враховувати похибки округлення при обчисленні самих членів ряду.

Приклад 1. Обчислити $\sqrt[4]{650}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Знаємо, що $5^4 = 625$, тому запишемо:

$$\sqrt[4]{650} = \sqrt[4]{625 + 25} = \sqrt[4]{625\left(1 + \frac{25}{625}\right)} = 5\sqrt[4]{1 + \frac{1}{25}} = 5\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Скористаємося біноміальним рядом, де покладемо $m = \dfrac{1}{4}$, $x = \dfrac{1}{25}$ (зазначимо, що $\dfrac{1}{25} \in (-1, 1)$) і дістанемо:

$$\sqrt[4]{650}=5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}}=5\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{25}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{1}{25}\right)^n+\ldots\right]=$$

$$=5\left(1+\frac{1}{100}-\frac{3}{16\cdot 2!}\cdot\frac{1}{625}+\frac{21}{64\cdot 3!}\cdot\frac{1}{15625}-\frac{231}{256\cdot 4!}\cdot\frac{1}{390}+\ldots\right)=$$

$$=5+\frac{1}{20}-\frac{3}{4000}+\frac{7}{2000000}-\frac{77}{800000000}+\ldots.$$

Далі маємо: $\sqrt[4]{650}=5+0{,}05-0{,}00075+0{,}0000035-0{,}000000096+\ldots$.

Це збіжний знакопочерговий ряд. Бачимо, що його третій член $a_3=-0{,}00075$ за абсолютною величиною $|a_3|=0{,}00075<0{,}001$; Отже, $|r_2|\le 0{,}00075$ і достатньо зберегти тільки два перших члени, щоб знайти $\sqrt[4]{650}$ з точністю до $0{,}001$: $\sqrt[4]{650}\approx 5+0{,}05=5{,}05$.

Приклад 2. Обчислити з точністю до $0{,}0001$ значення $cos18^0$.

Розв'язання. Скористаємося розкладом $cos\,x$ в ряд Маклорена, де покладемо $x=18^0$, тобто $x=\frac{\pi}{10}$, тоді:

$$cos18^\circ=cos\frac{\pi}{10}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n}}{(2n)!}=1-\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{\pi}{10}\right)^4\frac{1}{4!}-\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\frac{1}{6!}+\ldots.$$

Маємо збіжний знакопочерговий ряд. При цьому

$\frac{\pi}{10}=\frac{3{,}14159}{10}=0{,}31415,$ $\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}=0{,}049348>0{,}00005,$

$\left(\frac{\pi}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}=0{,}000405>0{,}00005,$ $\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\cdot\frac{1}{6!}=0{,}0000013<0{,}00005.$

Оскільки $|r_3|\le 0{,}0000013$, то достатньо зберегти тільки три перших члени. Тоді $\left(cos18^\circ\approx 1-0{,}049348+0{,}000405\right)$.

Знайдемо похибки округлення при обчисленні членів ряду.

При округленні десяткових дробів застосовується правило:

якщо крайня ліва з відкинутих цифр менша за п'ять, то крайня права значуща цифра не змінюється; якщо цифра, яку відкидають, більша або дорівнює п'яти, то остання значуща цифра збільшується на одиницю.

Наприклад: якщо $a=7{,}038165$, то наближення з трьома десятковими цифрами $a = 7{,}038$, а з чотирма десятковими цифрами $a = 7{,}0382$.

Похибка першого наближення дорівнює $0{,}000165 < 0{,}0005$, тобто менше половини одиниці розряду останньої утриманої цифри $\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}001 = 0{,}0005\right)$. Похибка другого наближення дорівнює $0{,}000035 < 0{,}00005$, що також менше половини одиниці розряду останньої утриманої цифри $\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}0001 = 0{,}00005\right)$.

Вважають, що *наближене число має* k *вірних десяткових знаків, якщо його похибка менше половини одиниці розряду останньої утриманої цифри:* $\frac{1}{2}\cdot 10^{-k} = \frac{5}{10^{k+1}}$.

Повернемося до нашого прикладу. Точність обчислення $\varepsilon = 0{,}001$ задає граничну загальну абсолютну похибку $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, яка складається з абсолютної похибки округлення при обчисленні членів ряду (ε_2) та величини модуля залишку ряду $r_n(x_0)$ (ε_1). Звичайно беруть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$.

Маємо $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}001 = 0{,}0005 = \varepsilon_2$.

Тепер визначимо кількість вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність обчислення $\varepsilon_2 = 0{,}0005$. Маємо $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot n \le \varepsilon_2$, де $n = 3$, тоді $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot 3 \le 0{,}0005$; $10^{-k} < 0{,}0003$. Бачимо, що $10^{-k} < 0{,}0003$, якщо $k = 4$. Тому члени ряду округляємо до чотирьох знаків після коми:

$$cos 18^\circ = cos\frac{\pi}{10} \approx 1 - \left(\frac{\pi}{10}\right)^2\frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{10}\right)^4\frac{1}{4!} \approx 1 - 0{,}0493 + 0{,}0004 = 0{,}9511.$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити з трьома вірними знаками число Ейлера e.

<u>Розв'язання</u>. Скористаємося рядом Маклорена для експоненти e^x, підставивши в цей ряд $x = 1$. Отримаємо знакододатній ряд

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right].$$

Замінимо у знаменниках множник $(n+3)$ на множник $(n+2)$, множник $(n+4)$ на $(n+2)$ і т.д., від чого кожна дріб тільки збільшиться, тому маємо:

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+...\right]$$

У квадратних дужках стоїть збіжна геометрична прогресія, сума якої $S=\frac{a_1}{1-q}$, де $a_1=1$, $q=\frac{1}{n+2}$. Тоді

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{\frac{n+2-1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}.$$

Тепер треба підібрати n і число вірних десяткових цифр при обчисленні кожного доданка так, щоб загальна похибка була б менша ніж $0{,}0005$, тому що треба знайти число e з трьома вірними знаками. Тобто $\varepsilon = 0{,}0005$.

Пригадаємо, що $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Тоді $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{0{,}0005}{2}=0{,}00025$.

Спочатку підбором знайдемо n. Візьмемо, наприклад, $n=5$, тоді $r_5<\frac{7}{6!6}=\frac{7}{720\cdot 6}=\frac{7}{4320}=0{,}0016>0{,}00025$; беремо $n=6$, тоді $r_6<\frac{8}{7!7}=\frac{8}{35280}=\frac{1}{4410}=0{,}0001<0{,}00025$. Тобто $n=6$:

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{6!}.$$

Визначимо кількість вірних десяткових знаків при округленні так, щоб $\varepsilon_2<0{,}00025: \frac{1}{2}10^{-k}\cdot 6\le 0{,}00025$ або $10^{-k}\cdot 3<0{,}00025$. Звідси $k\ge 5$. Тому члени ряду округляємо до 5 знаків:

$$e\approx 2+0{,}5+0{,}16667+0{,}0416+0{,}00833+0{,}0013=2{,}71806.$$

Остаточно $e\approx 2{,}718$ з трьома вірними знаками.

<u>Приклад 4</u>. Обчислити з точністю до $0{,}001$ значення функції

$$arctg(\pi/10).$$

<u>Розв'язання</u>. Використаємо ряд Маклорена для $arctg\,x$, в якому покладемо $x=\pi/10$, де $x=\pi/10\in[-1;1]$. Тоді

$$arctg\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\frac{1}{3}+\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7+...=0{,}314159-\frac{1}{3}\cdot 0{,}031006+$$

$$+\frac{1}{5}\cdot 0{,}003060-\frac{1}{7}0{,}000030+...=0{,}314159-0{,}010335+0{,}000612-0{,}000043+...$$

Маємо збіжний знакопочерговий ряд. Оскільки загальна точність $\varepsilon=0{,}001$ і $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, де ε_1 – похибка, що відповідає залишку, $|r_n|\le|U_{n+1}|<\varepsilon_1$, ε_2 – похибка округлення обчислення членів ряду і $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{0{,}001}{2}=0{,}0005$.

Знайдемо n. Оскільки $|u_3|=|-0{,}000043|=0{,}000043<0{,}0005$, то $n=3$.

Тоді $\quad arctg\frac{\pi}{10}\approx 0{,}314159-0{,}010335+0{,}000612$;

Визначимо кількість вірних десяткових знаків при округленні так, щоб $\varepsilon_2<0{,}0005$: $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot 3<0{,}0005$; $\quad 10^{-k}<\frac{0{,}0005\cdot 2}{3}=\frac{0{,}001}{3}=0{,}0003$, тобто $10^{-k}<0{,}0003$. Ця нерівність виконується при $k=4$: $10^{-4}=0{,}0001<0{,}0003$. Тому члени ряду округляємо до чотирьох знаків. Тоді маємо:

$$arctg\frac{\pi}{10}\approx 0{,}3142-0{,}0103+0{,}0006=0{,}3045.$$

Остаточно $arctg\frac{\pi}{10}\approx 0{,}305$ з трьома вірними знаками.

<u>Приклад 5</u>. Обчислити з точністю до 10^{-4} значення $ln1{,}2$.

<u>Розв'язання</u>. Використаємо ряд для $ln(1+x)$. Маємо $ln1{,}2=ln(1+0{,}2)$. Звідси $x=0{,}2$. Це значення належить області збіжності $(-1{,}1]$, тому

$$ln1{,}2=ln(1+0{,}2)=0{,}2-\frac{(0{,}2)^2}{2}+\frac{(0{,}2)^3}{3}-\frac{(0{,}2)^4}{4}+\frac{(0{,}2)^5}{5}-...=$$
$$=0{,}2-\frac{0{,}04}{2}+\frac{0{,}008}{3}-\frac{0{,}0016}{4}+\frac{0{,}00032}{5}-...=$$
$$=0{,}2-0{,}02+0{,}00266-0{,}0004+0{,}000064-....$$

Одержаний ряд – збіжний знакопочерговий.

Оскільки загальна похибка $\varepsilon=0{,}0001$ і $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, де ε_1 – залишкова похибка, $|r_n|<\varepsilon_1$, і ε_2 – похибка округлення. Враховуючи, що $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, маємо $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{0{,}0001}{2}=0{,}00005$. Знайдемо підбором n з умови $|r_n|\le|u_{n+1}|<0{,}00005$. Оскільки $0{,}2>0{,}0005$; $|-0{,}02|=0{,}02>0{,}00005$;

$$0{,}002666>0{,}00005;\ |-0{,}0004|=0{,}0004>0{,}00005;\ 0{,}000064<0{,}00005,$$

то починаючи з u_4 всі наступні члени відкидаємо, тобто $n=4$. Тоді

$$ln1{,}2\approx 0{,}2-0{,}02+0{,}002666-0{,}0004 \quad .$$

Визначимо кількість десяткових знаків після коми при округленні членів ряду: $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot 4<0{,}00005$; $10^{-k}<0{,}000025$, $k=5$. Тому округляємо до п’яти знаків після коми: $ln1{,}2 = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00267 - 0{,}0004 = 0{,}18227$.

Остаточно $ln1{,}2 = 0{,}1823$ з чотирма вірними знаками.

2.2.4. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Обчислити вказані вирази з заданою точністю, використовуючи відомі розклади відповідних функцій в ряд Маклорена:

№	Завдання	Відповідь	№	Завдання	Відповідь
1	$sin10^{\circ}$ з точністю до $0{,}0001$	0,1736	13	$\sqrt[3]{68}$ з точністю до $0{,}001$	4,082
2	$cos10^{\circ}$ з точністю до $0{,}0001$	0,9848	14	$\sqrt[3]{30}$ з точністю до $0{,}001$	3,107
3	$sin1$ з точністю до $0{,}00001$	0,84146	15	$\sqrt[3]{500}$ з точністю до $0{,}001$	7,937
4	$cos1$ з точністю до $0{,}0001$	0,5403	16	$\sqrt[5]{250}$ з точністю до $0{,}0001$	3,0173
5	$sin1^{\circ}$ з точністю до $0{,}0001$	0,0175	17	$\sqrt[3]{130}$ з точністю до $0{,}0001$	5,0658
6	$cos1^{\circ}$ з точністю до $0{,}001$	1,000	18	$\frac{1}{e}$ з точністю до $0{,}0001$	0,3679
7	$sh1$ з точністю до $0{,}0001$	0,175	19	$\sqrt{e}$ з точністю до $0{,}001$	1,649
8	$ln1{,}1$ з точністю до $0{,}0001$	0,0953	20	e^2 з точністю до $0{,}001$	7,389
9	$ln1{,}3$ з точністю до $0{,}0001$	0,2624	21	$\sqrt[3]{751}$ з точністю до $0{,}0001$	9,0896
10	$arctg\frac{1}{2}$ з точністю до $0{,}0001$	0,4636	22	$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ з точністю до $0{,}0001$	0,7788
11	$arcsin\frac{1}{3}$ з точністю до $0{,}001$	0,340	23	$arcsin1$ з точністю до $0{,}0001$	1,5708
12	$\sqrt[4]{17}$ з точністю до $0{,}0001$	2,0305	24	$sin0{,}5$ з точністю до $0{,}0001$	0,4794

2.2.5. Наближене обчислення інтегралів. Приклади розв'язання задач

Багато інтегралів, що зустрічаються на практиці, не беруться в елементарних функціях або складні й незручні для обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію можна розкласти в степеневий ряд. Такий ряд можна почленно проінтегрувати, використавши відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибку обчислень визначають так само, як і при знаходженні значень функцій.

Приклад 1. Обчислити інтеграли, розклавши підінтегральну функцію в ряд Маклорена:

а) $\int x^3 arctgx dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; в) $\int \frac{arctg\, x}{x} dx$; г) $\int_0^x \sqrt{1+x^3} dx$; д) $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx$.

Розв'язання. а) Помножимо почленно на x^3 розклад $arctg\, x$ в ряд Маклорена і отриманий ряд для підінтегральної функції почленно проінтегруємо:

$$\int x^3 arctgx dx = \int x^3 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... \right) dx =$$

$$\int \left(x^4 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{5} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+2}}{2n-1} + ... \right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{3\cdot 7} + \frac{x^9}{5\cdot 9} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+3}}{(2n-1)\cdot(2n+3)} + ... \quad + C \text{ для } -1 \le x \le 1.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \left(1-x^4\right)^{-1/2} dx$. Використаємо біноміальний ряд, в якому покладемо $m = -\frac{1}{2}$ і замість x підставимо $\left(-x^4\right)$. Одержаний степеневий ряд для підінтегральної функції почленно проінтегруємо:

$$\int \left(1-x^4\right)^{-1/2} dx = \int \left(1 + (1/2)x^4 + (-1/2)(-1/2-1)x^4/2! + \right.$$

$$\left. + (-1/2)(-1/2-1)\ (-1/2-2)\left(-x^{12}/3!\right) + ...\right)\ dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{x^8}{2!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{x^{12}}{3!} + ... \right) dx = x + \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3x^9}{2\cdot 4\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{13}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13} +$$

$$+ ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2n-1)x^{4n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \ 2n\ \ \ (4n+1)} + ... + C = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)} + C.$$

в) $\int \frac{arctgx}{x} dx = \int \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... \right) dx =$

$$=\int\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{2n-1}+...\right)dx=x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-...+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+...+C.$$

Тут використано степеневий ряд для функції $arctg\,x$.

г) $\int\limits_0^x\sqrt{1+x^3}\,dx=\int\limits_0^x\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}dx=$

$$\int\limits_0^x\left(1+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{\left(x^3\right)^2}{2!}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{\left(x^3\right)^3}{3!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\frac{\left(x^3\right)^4}{4!}+...\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^x\left(1+\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^6}{2!}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^9}{3!}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^{12}}{4!}+...\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^4}{2\cdot4}-\frac{1\cdot x^7}{2^2\cdot2!\cdot7}+\frac{1\cdot3\cdot x^{10}}{2^3\cdot3!\cdot10}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot x^{13}}{2^4\cdot4!\cdot13}+...\right)\Bigg|_0^x=$$

$$=x+\frac{x^4}{2\cdot4}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-3)}{2^n\,n!}\frac{x^{3n+1}}{3n+1},\ |x|<1.$$

Тут використано біноміальний ряд, де покладено $m=\frac{1}{2}$, а замість x взято x^3.

д) $\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^x\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...\right)dx.$

Тут використано ряд Маклорена для $\sin x$. Далі інтегруємо почленно:

$$\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+...\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\frac{x^7}{7!7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}+...;\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Зауваження. Функція $Si\,x=\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx,\quad x\in(-\infty,+\infty)$ називається *інтегральним синусом* і служить прикладом функцій, що не беруться в елементарних функціях.

Приклад 2. Обчислити з точністю до 0,001 визначений інтеграл $\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx$.

Розв'язання. Через те, що первісна функції e^{-x^2} не виражається через елементарні, розвинемо цю функцію в степеневий ряд , використовуючи ряд Маклорена для експоненти e^x, де замість x підставимо $-x^2$:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

Відрізок $[0;1/2]\subset(-\infty;+\infty)$, тому цей степеневий ряд можна інтегрувати почленно на $[0;1/2]$. Маємо:

$$\int_0^{1/2}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+\frac{x^9}{4!9}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{3!\cdot 7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{4!\cdot 9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9-\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)}+\ldots.$$

Одержано збіжний знакопочерговий ряд. Знайдемо значення членів ряду і порівняємо їх з необхідною точністю обчислення до $\varepsilon_2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}001=0{,}0005$.

$$|a_1|=\frac{1}{2}=0{,}5>0{,}0005;\quad |a_2|=\left|-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right|=\frac{1}{24}=0{,}041667>0{,}0005;$$

$$|a_3|=\left|\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\right|=0{,}003125;$$

$$|a_4|=\left|-\frac{1}{3!}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\right|=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{128}=\frac{1}{5376}=0{,}000186<0{,}0005.$$

Тоді $|r_3|\le|a_4|=0{,}000186$ і залишаємо тільки три перших члени ряду:

$$\int_0^{1/2}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=0{,}5-0{,}041667+0{,}003125.$$

Тепер знаходимо необхідну кількість десяткових знаків при обчисленні цих членів. Загальна похибка подається як сума $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$. де ε_1 –

похибка залишкова, ε_2 – похибка округлення. За умовою $\varepsilon = 0{,}001$. Якщо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}0005$. З нерівності $(1/2)\cdot 10^{-k}\cdot 3 < 0{,}0005$ маємо: $10^{-k} < 0{,}0003$, $k \ge 4$.

Беремо $k = 4$. Тобто, обчислюємо десяткові дроби з чотирма десятковими знаками. Маємо: $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx \approx 0{,}5 - 0{,}0417 + 0{,}0031 = 0{,}4614$.

Округляючи до трьох знаків, отримуємо $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx \approx 0{,}461$ з точністю до 0,001.

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{0,5} x\,ln(1-x)\,dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Скористаємося рядом Маклорена для $ln(1+x)$, де x заміняємо на $-x$: $ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$, де $|x| < 1$.

Помножимо всі члени ряду на x:

$$x\,ln(1-x) = -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n} - \ldots, \text{ де } |x| < 1.$$

Як відомо, степеневий ряд можна почленно інтегрувати на проміжку, що повністю знаходиться в інтервалі збіжності. Оскільки відрізок $[0; 0,5]$ належить до інтервалу збіжності $(-1,1)$, то маємо:

$$\int\limits_0^{0,5} x\,ln(1-x)\,dx = \int\limits_0^{0,5}\left(-x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n} - \ldots\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^6}{4\cdot 6} - \ldots - \frac{x^{n+2}}{n(n+2)} - \ldots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= -\frac{(0,5)^3}{3} - \frac{(0,5)^4}{8} - \frac{(0,5)^5}{15} - \frac{(0,5)^6}{24} - \ldots - \frac{(0,5)^{n+2}}{n(n+2)} - \ldots =$$

$$= -\left(\frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 8} + \frac{1}{2^5\cdot 15} + \frac{1}{2^6\cdot 24} + \ldots + \frac{1}{2^{n+2}n(n+2)} + \ldots\right).$$

З'ясуємо, скільки членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася точність обчислень $\varepsilon = 0{,}001$. Для цього оцінимо n-й залишок:

$$|r_n| = \frac{1}{2^{n+3}(n+1)(n+3)} + \frac{1}{2^{n+4}(n+2)(n+4)} + \frac{1}{2^{n+5}(n+3)(n+5)} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{2^{n+3}(n+1)(n+3)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right).$$

Добутки $(n+2)(n+4)$; $(n+3)(n+5)$; $(n+4)(n+6)\ldots$, які стоять в знаменниках дробів, замінили на добуток $(n+1)(n+3)$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=\frac{1}{2}<1$. Її сума $S=\frac{1}{1-1/2}=2$. Тоді

$$|r_n| < \frac{1}{2^{n+3}(n+1)(n+3)}\cdot 2 = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)(n+3)}.$$

Треба підібрати n так, щоб $|r_n|<0{,}0005$:

$n=2$: $|r_2| < \frac{1}{2^4\cdot 3\cdot 5} = \frac{1}{240} = 0{,}00417 > 0{,}0005$;

$n=3$: $|r_3| < \frac{1}{2^5\cdot 4\cdot 6} = \frac{1}{768} = 0{,}001302 > 0{,}0005$;

$n=4$: $|r_4| < \frac{1}{2^6\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{2240} = 0{,}0004 < 0{,}0005$.

Отже, досить взяти чотири перших члени ряду:

$$\int_0^{0,5} x\,ln(1-x)\,dx \approx -\left(\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 8}+\frac{1}{2^5\cdot 15}+\frac{1}{2^6\cdot 24}\right) = -\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{128}+\frac{1}{480}+\frac{1}{1535}\right) =$$
$$= -(0{,}04166+0{,}00781+0{,}00208+0{,}00065).$$

Якщо кожний доданок обчисляти з чотирма десятковими знаками, то похибка округлення буде не більше $4\cdot 0{,}00005 = 0{,}0002$, а загальна похибка від відкидання членів ряду і від округлення буде за абсолютним значенням менша $0{,}0002+0{,}0004=0{,}0006<0{,}001$.

Таким чином, $\int_0^{0,5} x\,ln(1-x)\,dx \approx -(0{,}0417+0{,}0078+0{,}0021+0{,}0007) =$

$= -0{,}0523 \approx -0{,}052$ з точністю до 0,001.

<u>Приклад 4</u>. Обчислити наближене значення інтеграла $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 arctg\, x\, dx$, взявши три перших члени розкладу підінтегральної функції в ряд Маклорена. Вказати похибку.

<u>Розв'язання</u>. Скористаємося рядом Маклорена для $arctg\, x$, тоді

$$x^3 arctg x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2n+1},\ -1\le x\le 1.$$

Відрізок $\left[0;\sqrt{3}/3\right]$ належить області збіжності $[-1;1]$, тому отриманий степеневий ряд можна почленно інтегрувати на ньому:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 arctgx dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2n+1} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(x^4 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{5} - \frac{x^{10}}{7} + ... \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{3\cdot 7} + \frac{x^9}{5\cdot 9} - \frac{x^{11}}{7\cdot 11} + ... \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7 \frac{1}{3\cdot 7} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9 \frac{1}{5\cdot 9} -$$

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{11} \frac{1}{7\cdot 11} + ... = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 21} + \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 45} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{11}} \cdot \frac{1}{77} + ...$$

Маємо збіжний знакопочерговий ряд.

Обчислимо перші три його члени:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 9\cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{135} \approx \frac{1,73205}{135} = 0,01283;$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 21} = \frac{1}{3^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 21} = \frac{\sqrt{3}}{3^4 \cdot 21} \approx \frac{1,73205}{1701} = 0,00102;$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 45} = \frac{\sqrt{3}}{3^5 \cdot 45} \approx \frac{1,73205}{10935} = 0,00016;$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{11} \cdot 77} = \frac{\sqrt{3}}{3^6 \cdot 77} \approx \frac{1,73205}{56133} = 0,000031.$$

За теоремою Лейбниця $|r_3| \le |u_4| = 0,000031$. Тоді

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 arctgx dx \approx \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 3\cdot 7} + \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 9\cdot 5} =$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 arctgx dx \approx \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 3\cdot 7} + \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 9\cdot 5} =$$

$$= 0,01283 - 0,00102 + 0,00016 = 0,01197.$$

Члени ряду обчислені з п’ятьма знаками, тому похибка округлення: $0,000005 \cdot 3 = 0,000015$, а загальна похибка $0,000031 + 0,000015 = 0,000048$.

Отже, $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 arctg\, x\ dx \approx 0,01197$ з точністю до $0,00005$.

Приклад 5. Обчислити з точністю до $0{,}0001$ інтеграл $\int\limits_{0{,}1}^{0{,}2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$.

Розв'язання. Спираючись на розклад в ряд Маклорена експоненти, розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\frac{\ell^{-x}}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \frac{(-x)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots\right) = x^{-3} - x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1}{6} +$$

$$+ \frac{x}{24} - \frac{x^2}{120} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{n-3}}{n!} + \ldots .$$

Тоді $\int\limits_{0{,}1}^{0{,}2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx: = \int\limits_{0{,}1}^{0{,}2}\left(x^{-3} - x^{-2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{x} - \frac{1}{3!} + \frac{x}{4!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^3}{6!} + \ldots\right)dx =$

$$= \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\ln x - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!\,2} - \frac{x^3}{5!\,3} + \frac{x^4}{6!\,4} - \ldots\right)\Bigg|_{0{,}1}^{0{,}2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{0{,}08} - \frac{1}{0{,}02}\right) + (5 - 10) + \frac{1}{2}(\ln 0{,}2 - \ln 0{,}1) - \frac{1}{6}(0{,}2 - 0{,}1) + \frac{1}{48}(0{,}04 - 0{,}01) -$$

$$- \frac{1}{360}(0{,}008 - 0{,}001) + \frac{1}{2880}(0{,}0016 - 0{,}0001) - \ldots = 37{,}5 - 5 + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{60} +$$

$$+ \frac{1}{1600} - \frac{7}{360000} + \frac{1}{1920000} - \ldots = 37{,}5 - 5 + 0{,}346573 - 0{,}016667 +$$

$$+ 0{,}000625 - 0{,}0000194 + 0{,}0000005 - \ldots .$$

Значення абсолютної похибки від заміни суми збіжного знакопочергового ряду n-ю частковою сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів: $|S - S_n| = |r_n| \le |u_{n+1}|$. Оскільки $|u_5| = |-0{,}0000194| < 0{,}0001$, то починаючи з u_5 всі наступні члени відкидаємо. Тоді маємо:

$$\int\limits_{0{,}1}^{0{,}2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx \approx 32{,}5 + 0{,}346573 - 0{,}016667 + 0{,}000625.$$

Якщо кожний додаток обчислити з чотирма десятковими знаками, то похибка округлення буде не більше $3 \cdot 0{,}00005 = 0{,}00015$, а загальна похибка від відкидання членів ряду і від округлення буде не більше $0{,}00015 + 0{,}0000194 = 0{,}0001694 > 0{,}0001$, тобто більше точності обчислення $0{,}0001$.

Якщо кожний додаток обчислити з п'ятьма десятковими знаками, то похибка округлення буде не більше $3 \cdot 0{,}000005 = 0{,}000015$, а загальна похибка $0{,}000015 + 0{,}0000194 = 0{,}0000344 < 0{,}0001$, тобто менша заданої граничної похибки.

Отже, $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx \approx 32,5 + 0,34657 - 0,01667 + 0,00063 = 32,83053$.

Відповідь: $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx \approx 32,8305$ з точністю до $0,0001$.

2.2.6. Задачі для самостійної роботи

Завдання 1. Виразити у формі ряду задані невизначені інтеграли, використовуючи розклади в степеневий ряд підінтегральних функцій:

№	Завдання	Відповідь
1	$\int \frac{cos\,x}{x}dx$	$ln\lvert x\rvert + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!\,2n} + C;\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2	$\int \frac{e^x}{x}dx$	$ln\lvert x\rvert + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,n} + C;\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3	$\int \frac{e^x}{x^2}dx$	$-\frac{1}{x^2} + ln\lvert x\rvert + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)!} + C;$ $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
4	$\int_0^x t^2 sht dt$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n-1)!(2n+2)};\ x \in (-\infty, +\infty)$
5	$\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{t+t^4}}$	$\frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)},\ x \in (-1;1)$
6	$\int_0^x \frac{ln(1+4t)}{t}dt$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cdot 4^n x^n,\ x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$
7	$\int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}}$	$\frac{x^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+3}}{2n+3},\ x \in (-1;1)$
8	$\int_0^x \sqrt{1+x^3}dt$	$x + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)},\ x \in (-1;1)$
9	$\int_0^x sin(t^2)dt$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)},\ x \in (-\infty, +\infty)$
10	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$	$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)},\ x \in (-1;1)$

Завдання 2. Обчислити з точністю до 0,001 задані визначені інтеграли:

№	Завдання	Відповідь	№	Завдання	Відповідь
1	$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$	0,608	11	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$	0,494
2	$\int_0^1 \sin\left(x^2\right)dx$	0,3103	12	$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$	0,098
3	$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$	0,337	13	$\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx$	0,905
4	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$	0,507	14	$\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$	0,072
5	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$	0,497	15	$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\sin x\,dx$	0,608
6	$\int_0^{0,8} x^{10}\sin x dx$	0,006	16	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$	0,927
7	$\int_0^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x}\cos^2 x dx$	0,047	17	$\int_0^{10} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$	0,384
8	$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x dx$	0,0258	18	$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$	2,835
9	$\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{4}}dx$	0,923	19	$\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx$	3,057
10	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$	0,488	20	$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$	0,622

2.2.7. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. Приклади розв'язання задач

Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається, його розв'язок можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв'язуванні задачі Коші:

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)(n = 2, 3, ...)$ знаходяться шляхом послідовного диференціювання вказаного диференціального рівняння та підстановки даних у вирази цих похідних.

<u>Приклад 1</u>. Знайти у вигляді степеневого ряду (до перших чотирьох членів включно) частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y - x^2$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

<u>Розв'язання</u>. Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = y(1) + \frac{y^{I}(1)}{1!}(x-1) + \frac{y^{II}(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots.$$

За умовою $y(1) = 2$. З диференціального рівняння $y^{I} = y - x^2$ знаходимо $y^{I}(1) = y(1) - 1^2 = 2 - 1 = 1$. Далі диференціюємо послідовно і одержуємо:

$$y^{II}(x) = y^{I} - 2x; \qquad y^{II}(1) = y^{I}(1) - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1;$$

$$y^{III}(x) = y^{II} - 2; \qquad y^{III}(1) = -1 - 2 = -3.$$

Отже, $y(x) = 2 + (x-1) + \dfrac{(-1)}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{-3}{3!}(x-1)^3 + \ldots =$

$$= 2 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 + \ldots.$$

Цим же *методом послідовного диференціювання* можна розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків.

<u>Приклад 2</u>. Знайти чотири перші, відмінні від нуля, члени розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку диференціального рівняння

$y^{II}+xy^{I}+y=0$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=1,\ y^{I}(0)=0$.

Розв'язання. Оскільки початкова точка $x=0$, то шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n=y(0)+\frac{y^{I}(0)}{1!}x+\frac{y^{II}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Для визначення коефіцієнтів ряду використовуємо розглянутий вище метод послідовного диференціювання даного рівняння, виходячи з умов $y(0)=1,\ y^{I}(0)=0$ і враховуючи, що число обчислених ненульових коефіцієнтів повинно дорівнювати чотирьом:

$y^{II}=-xy^{I}-y$; $\qquad y^{II}(0)=0\cdot 0-1=-1$;

$y^{III}=-y^{I}-xy^{II}-y^{I}=-2y^{I}-xy^{II}$; $\qquad y^{III}(0)=0$;

$y^{IV}=-2y^{II}-y^{II}-xy^{III}$; $\qquad y^{IV}(0)=(-3)(-1)-0=3$;

$y^{V}=-3y^{III}-y^{III}-xy^{IV}$; $\qquad y^{V}(0)=-4\cdot 0-0=0$;

$y^{VI}=-4y^{IV}-y^{IV}-xy^{V}$; $\qquad y^{VI}(0)=-5\cdot 3-0=-15$.

Підставляємо знайдені значення похідних у ряд Маклорена:

$$y(x)=1-1\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{3}{4!}x^4-15\cdot\frac{1}{6!}x^6+\ldots.$$

Отже, $\quad y(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{48}x^6+\ldots.$

Приклад 3. Знайти у вигляді степеневого ряду частинний розв'язок диференціального рівняння $y^{II}-xy^{I}+y=1$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=0;\ y^{I}(0)=0$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді степеневого ряду:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots.$$

Тоді $y^{I}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

Враховуючи початкові умови $y(0)=y^{I}(0)=0$, маємо $a_0=a_1=0$.

Тепер розв'язок $y(x)$ має вигляд:

$$y(x)=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n.$$

Далі знаходимо похідні, що входять у дане диференціальне рівняння:

$$y^{I}=2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1};$$

$$y^{II}=2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot na_nx^{n-2}.$$

Підставляємо ці вирази в диференціальне рівняння:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=2}^{\infty}a_nnx^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot x^n=1$$

або $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=1.$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

x^0	$2\cdot 1a_2=1$ звідки маємо	$a_2=\frac{1}{2}$
x^1	$3\cdot 2a_3=0$ звідки маємо	$a_3=0$
x^2	$4\cdot 3a_4-2a_2+a_2=0$	$a_4=\frac{a_2}{12}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$
x^3	$5\cdot 4a_5-3a_3+a_3=0$	$a_5=\frac{2a_3}{4\cdot 5}=\frac{0}{20}=0$
x^4	$6\cdot 5a_6-4a_4+a_4=0$	$a_6=\frac{3a_4}{5\cdot 6}=\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$
x^5	$7\cdot 6a_7-5a_5+a_5=0$	$a_7=\frac{4a_5}{7\cdot 6}=\frac{0}{7\cdot 6}=0$
x^6	$8\cdot 7a_8-6a_6+a_6=0$	$a_8=\frac{5a_6}{7\cdot 8}=\frac{3\cdot 5}{6!\cdot 7\cdot 8}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8!}$
…	… … … … … … ... …	… … … … … … … … … …

Отримуємо, що $a_{2m+1}=0,\ m=1,2,3,\ldots;\ a_2=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2!};$

$$a_4=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{4!};\quad a_6=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{1\cdot 3}{6!};\quad a_8=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8!};\quad \ldots .$$

Враховуючи, що $a_0=a_1=0$, підставимо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістанемо:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1\cdot 3}{6!}\cdot x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8!}x^8+\ldots=\frac{x^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!}x^{2k+2}.$$

Знайдемо інтервал збіжності цього ряду за ознакою Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)!!\,x^{2k+4}(2k+2)!}{(2k+4)!(2k-1)!!\,x^{2k+2}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{(2k+3)(2k+4)}\cdot x^2=0<1$$

при $x\in R$.

У цьому прикладі використано *метод невизначених коефіцієнтів*.

Приклад 4. Знайти у вигляді степеневого ряду (до перших п’яти членів включно) частинний розв’язок диференціального рівняння $y^{II}+3y^{I}+y=\ell^{x}$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=1;\ y^{I}(0)=0$.

Розв’язання. Будемо шукати розв’язок у вигляді ряду:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Для знаходження значень $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ використовуємо розглянутий вище метод невизначених коефіцієнтів.

Продиференціюємо цей ряд:

$$y^{I}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

Враховуючи початкові умови $y(0)=1;\ y^{I}(0)=0$, знаходимо a_0 та a_1:

$1=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+\ldots+a_n\cdot 0+\ldots;\qquad a_0=1;$

$0=a_1+2a_2\cdot 0+3a_3\cdot 0+\ldots+na_n\cdot 0+\ldots;\ \ a_1=0.$

Отже, маємо $y(x)=1+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$. Тоді

$$y^{I}(x)=2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots;$$

$$y^{II}(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots,$$

Підставимо ці вирази та розклад в ряд Маклорена експоненти e^x в дане диференціальне рівняння. Дістанемо:

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots$$

$$+3\left(2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+na_nx^{n-1}+\ldots\right)+1+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n=1+x+$$

$$+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Для знаходження значень $a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч та праворуч у цій тотожності:

x^0	$2a_2+1=1$	звідки маємо	$a_2=0$.
x^1	$6a_3+6a_2=1$	звідки маємо	$a_3=\frac{1}{6}(1-6\cdot 0)=\frac{1}{6}$.
x^2	$12a_4+9a_3+a_2=\frac{1}{2!}$	звідки маємо	$a_4=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}-9\cdot\frac{1}{6}-0\right)=-\frac{1}{12}$.
x^3	$20a_5+12a_4+a_3=\frac{1}{3!}$	звідки маємо	$a_5=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{6}-12\left(-\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{20}$.
…	… … … … … …	… … … …	… … … … … … … … … …

Підставимо отримані значення коефіцієнтів у шуканий ряд і отримаємо: $y(x)=1+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{20}x^5-\ldots$.

2.2.8. Задачі для самостійної роботи

Завдання. У варіантах №1 – №9 знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд частинного розв’язку диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам.

У варіантах №10 – №25 знайти п’ять перших членів розкладу в степеневий ряд частинного розв’язку диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам (нульові члени у відповідь не записувати):

№	Завдання	Відповідь
1	$y''+(2+x^2)y=0$; $y(0)=0,\ y'(0)=2$	$y=2x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+\ldots$
2	$y''=x^2y-y'$; $y(0)=1,\ y'(0)=0$	$y=1+\frac{2}{4!}x^4-\frac{2}{5!}x^5+\ldots$
3	$y''-xy'+y-1=0$; $y(0)=0,\ y'(0)=0$	$y=\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4++\frac{3}{6!}x^6+\ldots$
4	$y'=xy+ln(x+y)$; $y(1)=0$	$y=\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{6}-\frac{(x-1)^4}{6}+\ldots$
5	$y'=2x+cos\,y$; $y(0)=0$	$y=x+x^2-\frac{x^3}{6}+\ldots$
6	$2y'-(x+y)y-e^x=0$; $y(0)=2$	$y=2+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\ldots$
7	$y''=x^2+y^2$; $y(-1)=0,\ y'(-1)=0$	$y=\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x+1)^3}{3}+\frac{(x+1)^4}{12}+\ldots$
8	$y''=(y')^2+xy-2x$; $y(2)=0,\ y'(2)=2$	$y=2(x-2)+\frac{(x-2)^3}{3}+\frac{(x-2)^4}{2}+\ldots$
9	$y'''=y''+(y')^2+y^3-2x$; $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0$	$y=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\ldots$
10	$y'=2\cos x-xy^2$; $y(0)=1$	$y=1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\ldots$

11	$y' = x^2 + y^2;\ y(0) = 1$	$y = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \ldots$
12	$y' = 2x - y;\ y(0) = 2$	$y = 4\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$
13	$y'' = -2xy;\ y(0) = y'(0) = 1$	$y = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \ldots$
14	$y'' = y\cos x + x;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
15	$y'' + y' = x^2 y;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^4}{12} + \ldots$
16	$y'' - xy = 0;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \ldots$
17	$y'' - xy = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	$y = x + \frac{x^4}{12} + \ldots$
18	$y'' = x^2 y;$ $y(0) = y'(0) = 1$	$y = 1 + x + \frac{x^4}{12} + \ldots$
19	$y'' + y\cos x = 0;$ $y(0) = 3,\ y'(0) = 0$	$y = 3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$
20	$y'' = \sqrt{y'} + xy;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{12} + \ldots$
21	$y' - 2xy = 0;\ y(0) = 1$	$y = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots$
22	$y'' = x\,y' + y^2;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots$
23	$y'' = y\sin x + (y')^2;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \ldots$
24	$y' = e^y + xy;\ y(0) = 0$	$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} + \ldots$
25	$y'' = e^{xy};$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Розділ 3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Ряд Фур'є періодичної функції з періодом $T=2\pi$

3.1.1. Короткі теоретичні відомості

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ називається тригонометричний ряд вигляду
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos\, nx + b\, sin\, nx, \qquad (1)$$
де a_0, a_n, b_n $(n=1,2,3,...)$ – ***коефіцієнти Фур'є***, що знаходяться за формулами:
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\, nxdx;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin\, nxdx$$
$$(n=1,2,3,...).$$

Якщо ряд (1) збігається, то його сума $S(x)$ є періодичною функцією з періодом $T=2\pi$, тобто $S(x+2\pi)=S(x)$.

Примітка. Для скорочення запису за знаком підсумовування $\sum$ зовнішні дужки часто опускають.

Для обчислення коефіцієнтів a_n та b_n часто застосовується інтегрування частинами та різні довідкові таблиці інтегралів.

Теорема Діріхле (***достатня умова розкладання*** періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ ***в ряд Фур'є***). *Якщо функція $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ є кусково-гладкою на відрізку $[-\pi,\pi]$, то її ряд Фур'є збігається в кожній точці $x\in[-\pi,\pi]$, причому сума ряду $S(x)$ задовольняє наступні умови*:

1) $S(x)=f(x)$, *якщо x є точкою неперервності функції $f(x)$*;

2) $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *якщо x є точкою розриву першого роду функції $f(x)$*;

3) $S(\pi)=S(-\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Нагадаємо, що ***кусково-гладкою*** на відрізку $[a,b]$ називається функція, що неперервна разом з першою похідною в усіх точках $x\in(a,b)$ за винятком скінченного числа точок розриву першого роду.

Якщо функція $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ є парною, то її ряд Фур'є не містить синусів і є ***рядом косинусів***:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ \text{де}\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx;\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx. \quad (2)$$

Якщо функція $f(x)$ є непарною, то її ряд Фур'є не містить вільного члена та косинусів і є ***рядом синусів***:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\quad \text{де}\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx;\ a_0=0,\ a_n=0. \qquad (3)$$

Якщо функція $f(x)$ задана на $[0,\pi]$, то для розкладання в ряд Фур'є її довизначають на відрізок $[-\pi,0]$ довільним чином, а потім продовжують періодично з періодом $T=2\pi$ на всю числову пряму $(-\infty;+\infty)$. Одержану продовжену функцію розкладають в ряд Фур'є. Найчастіше довизначають функцію $f(x)$ так, щоб виконувалась одна з двох умов:

а) $f(-x)=f(x)$. У цьому випадку функція $f(x)$ довизначена парним способом і розкладається в ряд косинусів (2).

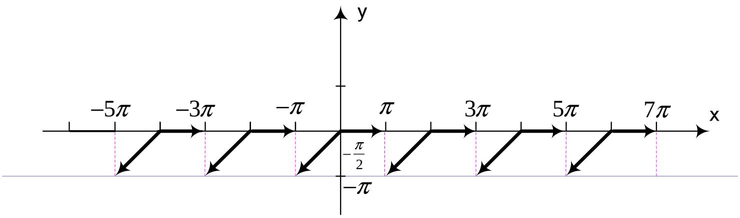
б) $f(-x)=-f(x)$. У цьому випадку функція $f(x)$ довизначена непарним способом і розкладається в ряд синусів (3).

3.1.2. Приклади розв'язання задач

<u>Приклад 1</u>. Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{якщо}\ -\pi<x<0\\ 0, & \text{якщо}\ 0\le x<\pi\end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>. Побудуємо графік функції $f(x)$:



Функція $f(x)$ – неперервна на $(-\pi,\pi)$ та має кусково-неперервну першу похідну. Тому її можна розкласти в ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Знаходимо коефіцієнти a_0 і a_n цього ряду:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_0^{\pi}0dx+\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 0\cos nx dx\right].$$

Другий інтеграл у дужках дорівнює нулю, а для обчислення першого використовуємо інтегрування частинами: $\int_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Нехай $u = x$, $du = dx$, тоді $dv = \cos nx dx$, $v = \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\sin nx$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right).$$

Маємо: $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)^2\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Знайдемо коефіцієнти b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\sin nx dx + \int_{-\pi}^{0} 0\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\cos nx\, dx\right) = -\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{n}\cos n\pi = -\frac{1}{n}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x + \frac{2}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{\pi\cdot 5^2}\cos 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots.$$

Ця рівність справедлива у точках неперервності $f(x)$.

У точках $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, …, де функція має розрив першого роду, сума ряду $S(x)$ приймає значення:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+0}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

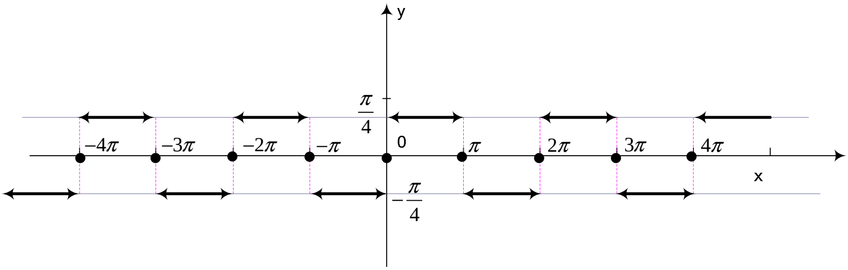
і $S(\pm 3\pi) = S(\pm 5\pi) = \ldots = -\frac{\pi}{2}$.

Графік функції $S(x)$ – суми ряду Фур'є – відрізняється від графіка функції $f(x)$ точками $\left(\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(3\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$... .

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad -\pi<x<0\\ 0, & \text{якщо} \quad x=0, \quad \pi,-\pi\\ +\dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f\left(x\right)$:



Ця функція непарна, оскільки її графік симетричний відносно початку координат, і задовольняє умови теореми Діріхле. Тому її можна розкласти в ряд синусів $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n \sin nx$. Знайдемо коефіцієнти b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f\left(x\right)\sin nx:$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nxdx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nxdx=\frac{1}{2n}\left(-\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{-1}{2n}\left(\cos n\pi-\cos 0\right);$$

$$b_n=-\frac{1}{2n}\left[\left(-1\right)^n-1\right]=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad n=2k\\ \dfrac{1}{n}, & \text{якщо} \quad n=2k-1\end{cases}$$

Записуємо шуканий ряд:

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left(2k-1\right)x=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...+$$

$$...+\frac{1}{2k-1}\sin\left(2k-1\right)x+..., \quad x\in\left(-\infty;+\infty\right).$$

У точках неперервності функції $f\left(x\right)$ цей ряд збігається саме до неї $S\left(x\right)=f\left(x\right)$, а в її точках розриву першого роду $\pm 2m\pi$, $\pm\left(2m+1\right)\pi$ $\left(m=0,1,2,...\right)$ сума ряду $S\left(x\right)$ приймає значення:

$$S\left(\pm 2m\pi\right)=S\left(0\right)=\frac{1}{2}\left(f\left(0-0\right)+f\left(0+0\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0=f\left(\pm 2m\pi\right);$$

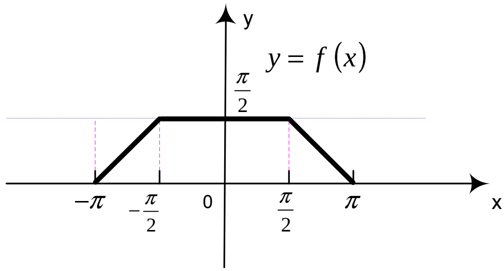
$$S(\pm(2m+1)\pi)=S(\pm\pi)=\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0=f(\pm(2m+1)\pi).$$

Отже, ряд збігається до функції $f(x)$ при всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур'є функцію

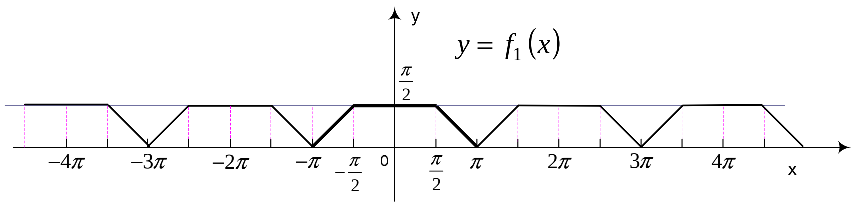
$$f(x)=\begin{cases} x+\pi, & \text{якщо } -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ -x+\pi, & \text{якщо } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f(x)$:



Бачимо, що функція $f(x)$ є парною на $(-\pi,\pi)$, оскільки її графік симетричний відносно осі ординат. Зрозуміло, що вона неперіодична. Тому треба побудувати періодичне продовження цієї функції на всю числову вісь – утворити допоміжну функцію $f_1(x)$, яка періодична з періодом $T=2\pi$ і така, що $f_i(x)=f(x)$ на інтервалі $(-\pi,\pi)$ і $f_i(-\pi)=f_i(\pi)$.

Покладемо $f_1(-\pi)=f_1(\pi)=0$. Побудуємо графік функції $f_i(x)$:



Так побудовану парну періодичну функцію $f_i(x)$ з періодом $T=2\pi$ розкладаємо в ряд косинусів: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

Оскільки на $(-\pi,\pi)$ виконується умова $f_i(x)=f(x)$, то маємо:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Проведемо обчислення коефіцієнтів a_0 і a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right) = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx\right) = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi - x}{n}\sin nx\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{\pi n^2}\cos n\pi + \frac{2}{\pi n^2}\cos\frac{n\pi}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Задана функція неперервна в $(-\pi,\pi)$, тому маємо:

$$f(x) = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos nx \quad \text{або}$$

$$f(x) = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{2\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{1}{5^2}\cos 5x - \frac{2}{6^2}\cos 6x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7^2}\cos 7x + \ldots\right),\ \text{якщо}\ x \in (-\pi,\pi).$$

На кінцях інтервалу $(-\pi,\pi)$ справедливо:

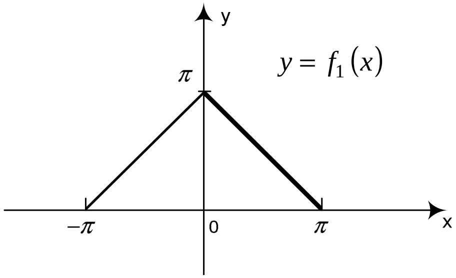
$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0.$$

Приклад 4. Розкласти функцію $f(x) = \pi - x$ на відрізку $0 \le x \le \pi$ в ряд Фур'є: а) за косинусами; б) за синусами.

Розв'язання. Задана функція при її парному або непарному продовженні на відрізок $[-\pi; 0]$ буде кусково-гладкою, тобто задовольнятиме умови теореми Діріхле. Розглянемо ці два способи продовження функції. Тоді матимемо відповідно розвинення в ряд косинусів та ряд синусів.

а) Розкладання даної функції в ряд за косинусами.

Продовжимо функцію $f(x)=\pi-x$ на відрізок $[-\pi;0]$ парним чином. Дістанемо парну функцію $f_i(x)$ таку, що $f_1(x)=f(x)$ на $[0;\pi]$:



Побудовану функцію $f_i(x)$ продовжимо періодично з періодом $T=2\pi$ на всю числову вісь. Одержимо другу допоміжну функцію $f_2(x)$ таку, що $f_2(x)=f_1(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$ та $f_2(x)=f(x)$, $x\in[0;\pi]$. Ця функція $f_2(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле. Розкладемо її в ряд косинусів $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, де коефіцієнти Фур'є визначаються так:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_2(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi;\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_2(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx.$$

Використовуємо інтегрування частинами. Нехай $u=\pi-x$; $du=-dx$; $dv=\cos nxdx$; $v=\int\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx$, тоді:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left((\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=$$

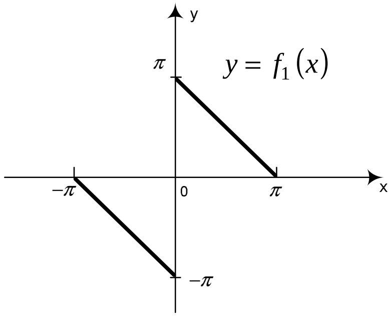
$$=-\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{якщо } n=2k-1\\ 0, & \text{якщо } n=2k.\end{cases}$$

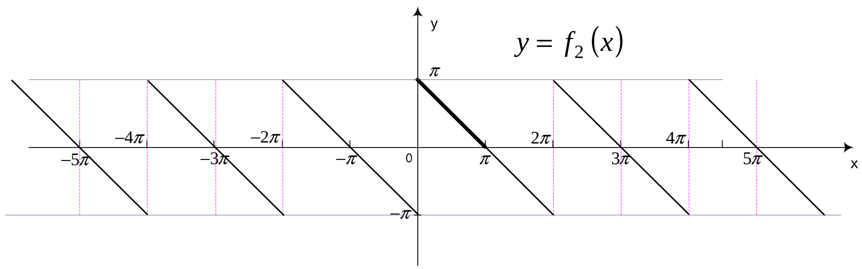
Отже, $a_{2k-1}=\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$ та $f_2(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, якщо $x\in(-\infty;+\infty)$ і $f(x)=\pi-x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, якщо $x\in[0,\pi]$.

б) Розкладання даної функції в ряд Фур'є за синусами.

Спочатку продовжимо функцію $f(x)=\pi-x$ на відрізок $[-\pi,0]$ непарним чином. Дістанемо непарну функцію $f_i(x)$ таку, що $f_1(x)=f(x)$ на $[0;\pi]$:



Далі функцію $f_1(x)$ продовжимо періодично з періодом $T=2\pi$ на всю числову вісь і отримаємо функцію $f_2(x)$ таку, що $f_2(x)=f_1(x)$ на $(-\pi,\pi)$.



Утворену непарну функцію $f_2(x)$ розкладемо в ряд синусів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, пам'ятаючи, що на відрізку $[0,\pi]$ $f_2(x)=f(x)$:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_2(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx.$$

Використовуємо інтегрування частинами:

$$u=\pi-x,\ du=-dx,\ \sin nx dx=dv,\ v=\int \sin nx dx=-\frac{1}{n}\cos nx.$$

Маємо: $b_n=\dfrac{2}{\pi}\left[(\pi-x)\left(-\dfrac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]=$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos 0-\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{2}{n},\quad n=1,2,3,\ldots .$$

Отже, $f_2(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ або $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$,

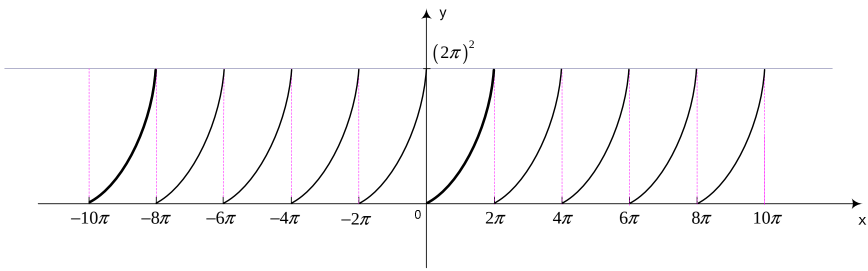
$$\pi-x=2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...+\frac{\sin x}{n}+...\right),\ \ 0<x\le\pi.$$

При $x=0$ сума ряду $S(x)$така:

$$S(0)=\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0.$$

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$, визначену на проміжку $(0,2\pi)$.

Розв'язання. Наведемо графік заданої функції $f(x)=x^2$ на $(0,2\pi)$ та її періодичного продовження на всю числову вісь, тобто будуємо функцію $f_1(x)$, яка періодична з періодом $T=2\pi$ і така, що $f_1(x)=f(x)=x^2$ на проміжку $(0,2\pi)$ і в точках $x_k=2k\pi$, $k\in Z$: $f_1(x_k)=(2\pi)^2$.



Функцію $f_1(x)$ розкладемо в ряд Фур'є. При знаходженні коефіцієнтів a_0, a_n і b_n використаємо наступну властивість: *визначений інтеграл від періодичної функції $f(x)$ по будь-якому відрізку довжиною в період T має одне й те саме значення*: $\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_b^{b+T} f(x)\,dx$. Тоді:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx.$$

Скористаємось двічі інтегруванням частинами:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0\ -\frac{2}{n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\times\right.\right.$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi} \cos nx\,dx\Bigg)\Bigg) = -\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos 2n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{4}{n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\sin nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x^2\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int\limits_0^{2\pi} x\cos nxdx\right) = \frac{1}{\pi}\Bigg(-\frac{4\pi^2}{n}\cos n2\pi + 0 +$$

$$+\frac{2}{n}\left(x\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)\Bigg) = -\frac{4\pi}{n}\cos 2n\pi + \frac{2}{\pi n}\Big(0 +$$

$$+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi}\Big) = -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}(\cos 2n\pi - \cos 0) = -\frac{4\pi}{n}.$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти a_0, a_n і b_n у ряд Фур’є та дістаємо:

$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\Bigg(\cos x - \pi\sin x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi}{n}\sin nx + \ldots$$

або $\quad x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx - 4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, \quad x \in (0, 2\pi).$

Тому що функція $f(x) = x^2$ неперервна на $(0, 2\pi)$, одержаний ряд збігається до $f(x) = x^2$ при будь-якому $x \in (0, 2\pi)$. У точках $x = 2\pi n$ $(n = 0,1,2\ldots)$ сума ряду дорівнює:

$$S(2\pi) = \frac{f_1(2\pi - 0) + f_1(2\pi + 0)}{2} = \frac{4\pi^2 + 0}{2} = 2\pi^2.$$

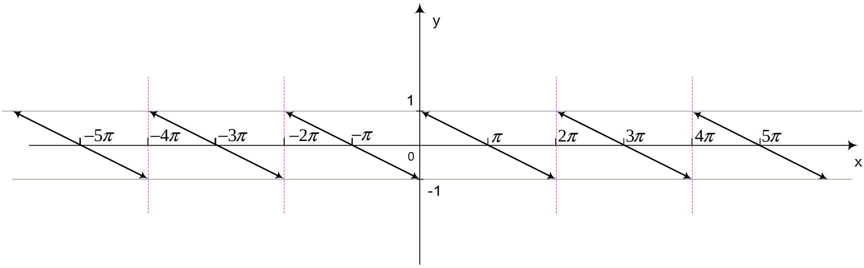
Безпосередньо підставимо в ряд $x = 2\pi$ і , враховуючи $\cos 2n\pi = 1$ і $\sin 2\pi n = 0$, отримаємо

$$2\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2\pi n = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right).$$

Звідси $\; 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\pi^2 - \frac{4}{3}\pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2$, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Одержано суму збіжного узагальненого гармонічного ряду.

<u>Приклад 6</u>. Розкласти в ряд Фур’є функцію $f(x) = \frac{1}{\pi}(\pi - x)$, визначену на проміжку $(0, 2\pi)$.

<u>Розв’язання</u>. Продовжимо задану функцію $f(x)$ періодично з періодом $T = 2\pi$ на всю числову вісь так, що на $(0, 2\pi)$ справедливо $f_1(x) = f(x)$. Наведемо графік функції $f(x)$ на $(0, 2\pi)$ та її періодичного продовження $f_1(x)$:



Утворена функція $f_1(x)$ непарна, оскільки її графік симетричний відносно початку координат, і задовольняє умови теореми Діріхле. Тому розкладемо її в ряд синусів. Знайдемо коефіцієнти b_n, застосовуючи інтегрування частинами:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{\pi}\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi^2}\left[(\pi - x)\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\cos 2\pi n + \frac{\pi}{n}\cos 0 - \frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2\pi}{n} - 0\right) = \frac{2}{\pi n}.$$

Підставимо одержані коефіцієнти та отримаємо ряд синусів, сума якого:

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx = \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots\right).$$

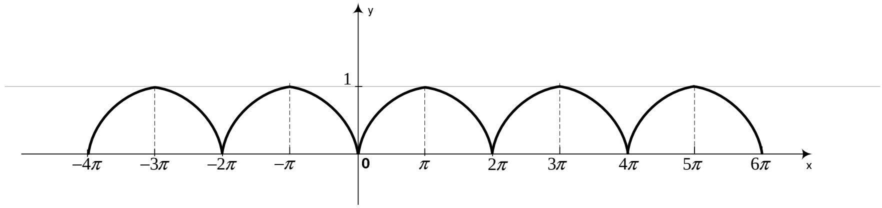
Згідно з теоремою Діріхле $S(x) = f(x) = \frac{1}{\pi}(\pi - x)$, якщо $x \in (0, 2\pi)$ та

$$S(0) = S(2\pi) = \frac{f(0+0) + f(2\pi - 0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0.$$

Отже, $\quad \frac{1}{\pi}(\pi - x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}, \; x \in (0, 2\pi).$

<u>Приклад 7</u>. Розкласти функцію $f(x) = 1 - \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$, що визначена на відрізку $[0, 2\pi]$, в ряд Фур'є.

<u>Розв'язання</u>. Продовжимо задану функцію $f(x)$ періодично з періодом $T = 2\pi$ на всю числову вісь так, що на $[0, 2\pi]$ справедливо $f_1(x) = f(x)$. Наведемо графік функції $f(x)$ на $[0, 2\pi]$ та її періодичного продовження $f_1(x)$:



Одержана функція $f_1(x)$ парна, оскільки її графік симетричний відносно осі ординат, і задовольняє умови теореми Діріхле. Тому розкладемо її в ряд косинусів. Знайдемо коефіцієнти a_0 і a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}(\pi-x)^2\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(x-\frac{1}{\pi^2}\frac{(x-\pi)^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(2\pi-\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^3}{3}\right)+\frac{1}{\pi^2}\frac{(-\pi)^3}{3}\right] = 2-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2\right)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi 3}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos nx\,dx = 0-\frac{1}{\pi^3}I\text{, де } I = \int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos nx\,dx$$

знайдемо інтегруванням частинами двічі:

$$I = (x-\pi)^2\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\cdot(x-\pi)\,dx =$$

$$= 0-\frac{2}{n}\left(-\frac{x-\pi}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right) = \frac{2}{n^2}2\pi-\frac{2}{n^3}\sin nx\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{n^2}.$$

Маємо: $a_n = 0-\frac{1}{\pi^3}\cdot\frac{4\pi}{n^2} = -\frac{4}{n^2\pi^2}$.

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд косинусів і одержимо:

$$1-\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2 = \frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+...+\frac{1}{n^2}\cos nx+...\right),$$
$$x\in[0,2\pi].$$

<u>Зауваження</u>. Аналіз розв'язання двох останніх прикладів показує:

1) Коли графік функції $f(x)$, $x\in(0,2\pi)$, що розкладається в ряд Фур'є, має на осі Ox центр симетрії – точку O_1 (рис. 1), то, беручи точку O_1 за новий початок координат, маємо $f(-x_1) = -f(x_1)$. Одержана функція $f(x_1)$ – непарна і розкладається в ряд синусів.

2) Коли графік функції $f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$, що розкладається в ряд Фур'є, має вісь симетрії (рис. 2), то, взявши цю пряму за нову вісь ординат, а точку O_1 її перетину з Ox за новий початок координат, маємо $f(-x_1) = f(x_1)$. Одержана функція $f(x_1)$ – парна і розкладається в ряд косинусів.

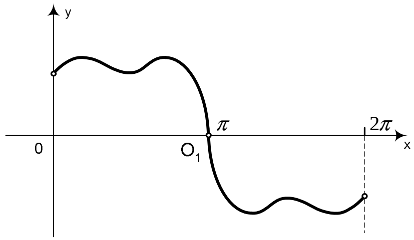


Рис. 1

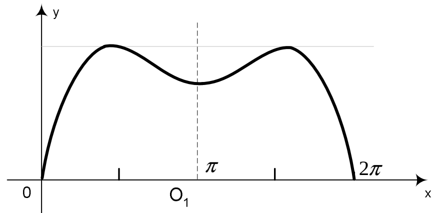
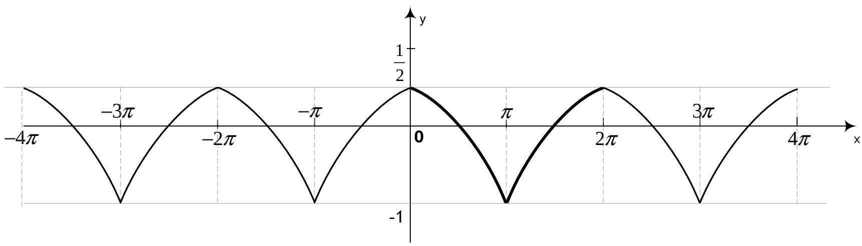


Рис. 2

<u>Приклад 8</u>. Розкласти в ряд Фур'є функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}x^2\right), & \textit{якщо} \quad 0 \le x \le \pi, \\ \frac{1}{2}\left[1 - \frac{3}{\pi^2}(x - 2\pi)^2\right., & \textit{якщо} \quad \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>. Побудуємо графік функції $f(x)$ на $[0; 2\pi]$ та її періодичного продовження.



Графік заданої функції $f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$, що розкладається в ряд Фур'є, має вісь симетрії. Спираючись на зауваження, запишемо її ряд косинусів $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Знайдемо коефіцієнти a_0 і a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}x^2\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}(x - 2\pi)^2\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{3}{\pi^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{3}{\pi^2}\frac{(x-2\pi)^3}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\pi-\frac{\pi^3}{\pi^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(2\pi-\frac{\pi^3}{\pi^2}-\pi+0\right)=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\pi^2}x^2\right)\cos nxdx+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\pi^2}(x-2\pi)^2\right)\cos nxdx\right]=\frac{1}{2\pi}[I_1+I_2].$$

Знайдемо I_1 та I_2 окремо, використовуючи інтегрування частинами двічі:

$$I_1=\int_0^{\pi}\left(1-\frac{3}{\pi^2}x^2\right)\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx\cdot\left(1-\frac{3}{\pi^2}x^2\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{6}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sin\pi n\cdot\left(1-3\frac{1}{\pi^2}\pi^2\right)-\sin 0\cdot 1\right)+\frac{6}{\pi^2 n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\cdot dx\right)=$$

$$=-\frac{6}{\pi^2 n^2}\left((\pi\cos n\pi-0)-\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=-\frac{6}{\pi n^2}\cos n\pi+0=-6\cdot\frac{1}{\pi n^2}(-1)^n=$$

$$=\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1};\text{ так само }I_2=\int_{\pi}^{2\pi}\left(1-\frac{3}{\pi^2}(x-2\pi)^2\right)\cos nx\cdot dx=\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1}.$$

Тоді

$$a_n=\frac{1}{2\pi}(I_1+I_2)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1}+\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1}\right)=\frac{1}{\pi^2 n^2}6(-1)^{n+1}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}\cos nx=\frac{6}{\pi^2}\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx+\ldots\right),\text{ де }x\in[0,2\pi]$$

Якщо в отриманому ряді косинусів покласти $x=0$, то дістанемо:

$$\frac{1}{2}=\frac{6}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots\right).$$

Звідси $$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots\ .$$

3.2. Ряд Фур'є періодичної функції з періодом $T = 2l$

3.2.1. Короткі теоретичні відомості

Задачу розвинення періодичної функції $f(x)$ з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$ в ряд Фур'є заміною $x_1 = \pi x / l$ можна звести до розглянутого випадку періодичної функції $f(x_1)$ з періодом $T = 2\pi$.

Ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T = 2l$ має вигляд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right),$$

де a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ – коефіцієнти Фур'є, що знаходяться за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx;\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$.

Згідно з теоремою Діріхле, що поширюється на цей випадок, у точках неперервності функції $f(x)$ маємо:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right).$$

Якщо функція $f(x)$ – парна, то її ряд Фур'є набуває вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$ – ряд косинусів,

де $$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ – непарна, то її ряд Фур'є спрощується до вигляду:

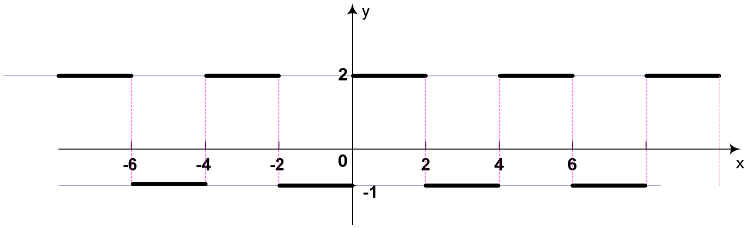
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$ – ряд синусів, де $$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, l]$, то для розвинення в ряд Фур'є цю функцію довизначають на відрізок $[-l, 0]$ довільним чином, а потім поширюють на всю числову пряму. Як правило, $f(x)$ продовжують парним або непарним способом і розкладають відповідно в ряд косинусів або в ряд синусів.

3.2.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом $T = 2l = 4$, задану на відрізку $[-2,2]$: $f(x)=\begin{cases} -1, & якщо \quad -2 \le x \le 0, \\ 2, & якщо \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f(x)$



Задана функція – кусково-гладка, тому задовольняє умови теореми Діріхле. Розкладемо її в ряд Фур'є: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є, враховуючи що $l=2$:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{2}2dx\right)=\frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0}+2x\Big|_{0}^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-2+4)=1;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_{0}^{2}2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin 0-\frac{2}{n\pi}\sin n\pi+\frac{4}{\pi n}\sin n\pi-\frac{4}{\pi n}\sin 0\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_{0}^{2}2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{4}{n\pi}(\cos n\pi-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{n\pi}-\frac{6}{n\pi}\cos n\pi\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{3}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=$$

$$=\begin{cases} 0, & якщо \quad n-парне, \\ \dfrac{6}{n\pi}, & якщо \quad n-непарне. \end{cases}$$

Отже, $b_{2k-1}=\dfrac{6}{(2k-1)\pi}$ та $b_{2k}=0$ $(k=1,2,\ldots)$.

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд Фур'є

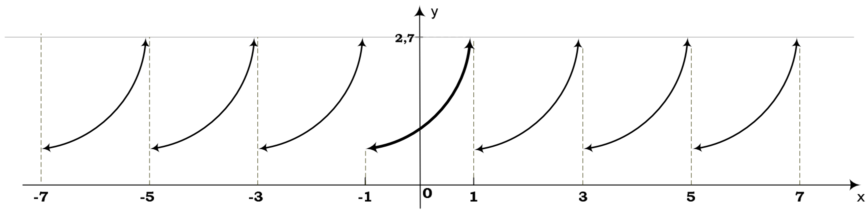
$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{\pi(2k-1)}{2}x.$$

Ця рівність справедлива в точках неперервності функції $f(x)$. У точках розриву першого роду 0; ± 2; ± 4; ± 6,... сума ряду $S(x)$ така:

$$S(0)=S(\pm 2)=S(\pm 4)=\ldots=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=e^x$ в інтервалі $(-1,1)$.

Розв'язання. Функція $f(x)=e^x$ на проміжку $(-1;1)$ неперервна і монотонна. Продовжимо її періодично на всю вісь, тобто розглянемо допоміжну функцію $f_1(x)$ періодичну з періодом $T=2$, значення якої на $(-1;1)$ збігаються зі значеннями функції $f(x)$: $f_1(x)=f(x)$. Одержана функція $f_1(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле. Побудуємо графік функції $f_1(x)$:



Розвинемо функцію $f_1(x)$ в ряд Фур'є. Знайдемо коефіцієнти ряду, враховуючи, що $f_1(x)=f(x)$ на проміжку $(-1,1)$ і $l=1$:

$$a_0=\int_{-1}^{1}f_1(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}e^x dx=e^x\Big|_{-1}^{1}=e^1-e^{-1}.$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f_1(x)\cos n\pi x dx=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x dx=\int_{-1}^{1}e^x\cos n\pi x dx=$$

$$=\frac{\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e^1-e^{-1}\right)=\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\left(e-e^{-1}\right);$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f_1(x)\sin n\pi x dx=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x dx=\int_{-1}^{1}e^x\sin n\pi x dx=$$

$$=-\frac{n\pi\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e^1-e^{-1}\right)=\frac{(-1)^n n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e-e^{-1}\right).$$

Тут використано інтегрування частинами.

Підставимо знайдені коефіцієнти a_n та b_n в ряд Фур'є і дістанемо:

$$S(x)=\frac{e^1-e^{-1}}{2}+\left(e^1-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x}{1+n^2\pi^2}\right),$$

$S(x)=f(x)=e^x$ на проміжку $(-1,1)$, де $f(x)=e^x$ неперервна.

На кінцях інтервалу $S(\pm 1)=\dfrac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\dfrac{e^1-e^{-1}}{2}$

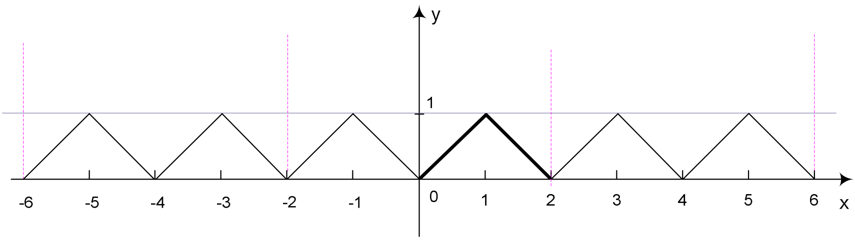
Отже, маємо: $e^x=\left(e^1-e^{-1}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\cos n\pi x-\sin n\pi x)\right)$, $-1<x<1$.

<u>Приклад 3</u>. Розкласти функцію $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1] \\ 2-x, & x\in(1,2)\end{cases}$ в ряд Фур'є на проміжку $(0;2)$: а) за косинусами; б) за синусами.

<u>Розв'язання</u>. а) Розкладання в ряд косинусів.

Продовжимо функцію $f(x)$ на проміжок $(-2;0)$ парним чином. Одержану функцію продовжимо на всю числову вісь з періодом $T=2l=4$.

Побудуємо функцію $f(x)$ та її продовження:



При $l=2$ ряд косинусів має вигляд: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{2}$.

Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}+4-2-2+\frac{1}{2}=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Знайдемо кожний інтеграл окремо, використовуючи інтегрування частинами:

$$\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} +$$

$$+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2 n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos 0\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2 n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right);$$

$$\int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = (2-x)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 + \frac{2}{\pi n}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Тоді:

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos n\pi +$$

$$+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi + 1).$$

Оскільки $\cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{непарне число} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{якщо } n - \text{парне число} \end{cases}$

і $\qquad \cos n\pi + 1 = (-1)^n + 1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{непарне число} \\ 2, & \text{якщо } n - \text{парне число} \end{cases}$

то

$$a_{2k} = \frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k)^2} - \frac{8}{\pi^2(2k)^2} = \frac{8}{\pi^2(2k)^2}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } k = 2m \\ -\dfrac{4}{\pi^2(2m-1)^2}, & \text{якщо } k = 2m-1 \end{cases}$$

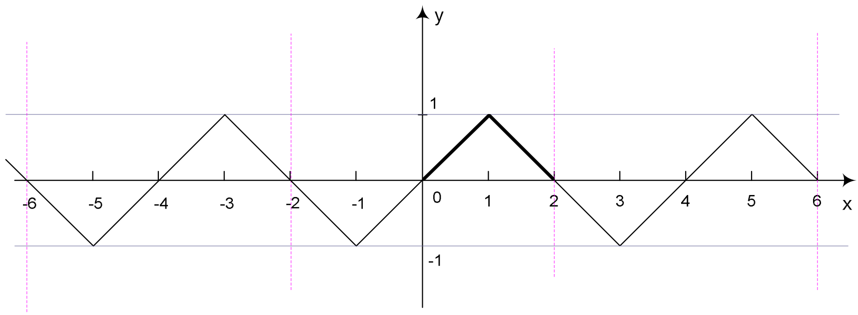
Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)\pi x, \quad x\in(0,2).$$

б) Розкладання в ряд синусів.

Продовжимо функцію $f(x)$ на проміжок $(-2,0)$ непарним чином. Одержану функцію продовжимо періодично на всю числову вісь з періодом

$T = 2l = 4$. Побудуємо функцію $f(x)$ та її періодичне продовження.



При $l = 2$ ряд синусів має вигляд: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$.

Обчислимо коефіцієнти:

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Знайдемо кожний інтеграл окремо, використовуючи інтегрування частинами:

$$\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = x\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$\int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = (2-x)\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin n\pi + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}..$$

Тоді

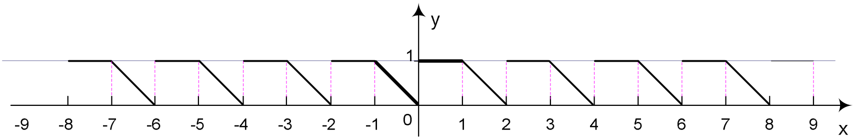
$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin n\pi + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2} =$$

$= \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$. Оскільки $\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & якщо \quad n = 2k \\ (-1)^{k-1}, & якщо \quad n = 2k-1 \end{cases}$, то

$b_{2k} = 0$ і $b_{2k-1} = \frac{8(-1)^{k-1}}{\pi^2(2k-1)^2}$. Отже,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad x \in (0,2).$$

<u>Приклад 4</u>. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f\left(x\right)$, задану графічно



<u>Розв'язання</u>. Перейдемо до аналітичного задання функції $f\left(x\right)$:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-x, \ \textit{якщо} \quad -1\le x\le 0\\ 1, \ \textit{якщо} \quad 0<x\le 1\end{cases}$$

Функція $f\left(x\right)$ періодична з періодом $T=2l=2$, тобто $l=1$. Її ряд Фур'є має вигляд: $f\left(x\right)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\, cos\, n\pi x+b_n\, sin\, n\pi x\right)$.

Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx=\int\limits_{-l}^{0}(-x)dx+\int\limits_{0}^{1}1\cdot dx=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}+x\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f\left(x\right)cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(-x\right)cos\frac{n\pi x}{1}dx+\int\limits_{0}^{1}1\cdot cos\frac{n\pi x}{1}dx=$$

$$=-\left(\frac{x}{n\pi}sin\, n\pi x\Bigg|_{-1}^{0}-\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{n\pi}sin\, n\pi xdx\right)+\frac{1}{n\pi}sin\, n\pi x\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=-\left(\frac{1}{n\pi}sin\left(-n\pi\right)+\frac{1}{n^2\pi^2}cos\, n\pi x\Bigg|_{-1}^{0}\right)+\frac{1}{n\pi}sin\, n\pi-\frac{1}{n\pi}sin\, 0=$$

$$=-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(cos\, 0-cos\, n\pi\right)=-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-\left(-1\right)^n\right);$$

$$\text{оскільки}\quad 1-\left(-1\right)^n=\begin{cases}0, \quad \textit{якщо} \quad n-\textit{парне число}\\ 2, \quad \textit{якщо} \quad n-\textit{непарне число}\end{cases}$$

$$\text{то } a_{2k}=0 \quad \text{і} \quad a_{2k-1}=\frac{-2}{\pi^2(2k-1)^2};$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f\left(x\right)sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(-x\right)sin\, n\pi xdx+\int\limits_{0}^{1}1\, sin\, n\pi xdx=$$

$$=-\left(x\cdot\frac{-1}{n\pi}cos\, \pi nx\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-1}^{0}cos\, n\pi xdx\right)-\frac{1}{n\pi}cos\, n\pi x\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=-\left(0-\frac{1}{n\pi}cos\, \pi n+\frac{1}{n^2\pi^2}sin\, n\pi x\Bigg|_{-1}^{0}\right)-\frac{1}{n\pi}cos\, n\pi+\frac{1}{n\pi}cos\, 0=$$

$$=+\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+0-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}=\frac{1}{n\pi}.$$

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд Фур'є і дістанемо:

$$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos n\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Сума ряду співпадає з функцією $f(x)$ у всіх точках неперервності. У точках розриву сума ряду така: $S(0)=S(\pm 2)=\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

3.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. У варіантах №1 – №9 розкласти в ряд Фур'є задані періодичні з періодом 2π функції. Навести графіки цих функцій.

У варіантах №10 – №14 розкласти в ряд косинусів функції, задані на вказаних проміжках. Навести графіки продовжених періодичних функцій.

У варіантах №15– №20 розкласти в ряд синусів функції, задані на вказаних проміжках. Навести графіки продовжених періодичних функцій.

У варіантах №21 – №26 розкласти в ряд Фур'є задані періодичні з періодом $T=2l$ функції. Навести графіки цих функцій.

№	Завдання	Відповідь
1	$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0)\\ 1, & x\in(0,\pi)\end{cases}$	$f(x)=\frac{4}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$
2	$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0)\\ 3, & x\in(0,\pi)\end{cases}$	$f(x)=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$
3	$f(x)=x-\pi,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=-\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$
4	$f(x)=x+\pi,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$
5	$f(x)=\lvert x\rvert,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n-1)^2}$
6	$f(x)=\begin{cases}\pi, & x\in(-\pi,0)\\ \pi-x, & x\in(0,\pi)\end{cases}$	$f(x)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$

7	$f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ x\in(0,2\pi)$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$
8	$f(x)=x^3,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{12}{n^3}-\dfrac{2\pi}{n}\right)\sin nx$
9	$f(x)=e^x-1,\ x\in(0,2\pi)$	$f(x)=\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{1+n^2}-\dfrac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]-1$
10	$f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$
11	$f(x)=\begin{cases}x,\ x\in(0;\pi/2)\\ \pi-x,\ x\in(\pi/2;\pi)\end{cases}$	$f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$
12	$f(x)=\sin\dfrac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\ f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{4n^2-1}$
13	$f(x)=1-x,\ x\in(0,1)$	$f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$
14	$f(x)=x,\ \ x\in(0,2)$	$f(x)=\dfrac{2}{2}-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}$
15	$f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{2n}$
16	$f(x)=x^2,\ \ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\dfrac{\pi^2}{n}+\dfrac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)\right]\sin nx$
17	$f(x)=x(\pi-x),\ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$
18	$f(x)=x(2-x),\ x\in(0,2)$	$f(x)=\dfrac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\sin\dfrac{\pi(2n+1)x}{2}$
19	$f(x)=x^2,\ \ x\in(0,1)$	$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^2}\right)\sin\pi nx$
20	$f(x)=x,\ \ x\in(0,2)$	$f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$
21	$f(x)=\begin{cases}0,\ x\in(-2,0)\\ 2,\ x\in[0,2)\end{cases}\quad l=2$	$f(x)=1-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{\pi(2n-1)x}{2}$
22	$f(x)=x,\ x\in(-1,1),\ l=1$	$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$

23	$f(x)=\|x\|,\ x\in(-2,2),\ l=2$	$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}$
24	$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in(-2,0)\\ 0, & x\in[0,2)\end{cases}$ $l=2$	$f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}sin\frac{n\pi x}{2}-$ $-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}$
25	$f(x)=4-x^2,\ x\in(-2,2),$ $l=2$	$f(x)=\frac{8}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}cos\frac{n\pi x}{2}$
26	$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-1,0)\\ 1-x, & x\in[0,1)\end{cases}$ $l=1$	$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\,\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}+$ $+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n sin\,n\pi x}{n}$

Список літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического ана¬лиза. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс матема¬ти¬чес¬кого ана¬лиза. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.

3. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2003. – 479 с.

4. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. / За заг. ред. П.П. Овчинников. – К.: Техніка, 2003. Ч.2 / П.П. Овчин¬ников, П.С. Кропив’янський, С.П. Полушкін та ін. – 2003. – 375 с.

5. Вища математика. Практикум / В.Г. Кривуца, В.В. Бар¬ковсь¬кий, Н.В. Барковська. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая мате¬матика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Наука, 1997. Ч.2 – 415 с.

7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1994. – 206 с.

9. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Стал¬кер, 2003. – 495 с.

10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчис¬ление. В 2 т. Т.2 – М.: Наука, 1985. – 560 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Методичні рекомендації та дидактичні матеріали до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології” спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”

Укладачі:
Степан Олександрович Станішевський,
Сергій Михайлович Мордовцев,
Анатолій Вікторович Якунін,
Людмила Олександрівна Бистрова,
Валентина Семенівна Ситникова

Відповідальний за випуск: М.Й. Кадець

Редактор: М.З. Аляб’єв

План 2009, поз. 190 М

Підп. до друку 25.12.2009 р.	Формат 60x84 1/16
Папір офісний	Друк на ризографі
Умовн.-друк.арк. 7,4	Обл.-вид.арк. 8,1
Тираж 100 прим.	Замовл. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12