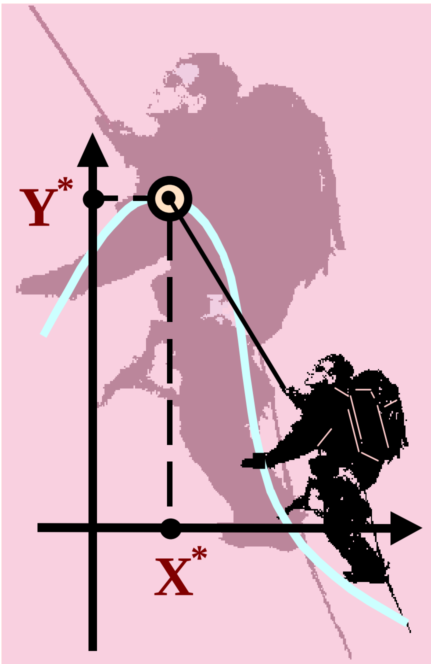
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Г.В. Білогурова, М.І. Самойленко

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

(*для студентів денної і заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»*)



Харків – ХНАМГ – 2009

УДК 519.85 (042.4)

ББК 22.18

Б 43

Білогурова Г.В., Самойленко М.І. Математичне програмування: Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»). – Х.: ХНАМГ, 2009. – 72 с.

Автори: к.т.н., доцент Г.В. Білогурова,
д.т.н., проф. М.І. Самойленко.

Конспект лекцій побудовано за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу (КМСОНП).

Рекомендовано для студентів за напрямом підготовки «Менеджмент».

Рецензент: зав. кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, д. ф-м., н., проф. Колосов А. І.

Рекомендовано кафедрою прикладної математики і інформаційних технологій, протокол №1 від 28.08.2009 р.

МОДУЛЬ «МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»
Змістовний модуль 1. Лінійне програмування

1.1. Предмет «Математичне програмування»

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, яка досліджує *екстремальні задачі* (задачі пошуку *максимуму* або *мінімуму*) і розробляє *методи їх розв'язання*. Такі задачі ще називають оптимізаційними.

Математичне програмування відіграє дуже важливу роль як в подальшій математичній освіті студентів менеджерського профілю, так і в їх майбутній професійній діяльності, оскільки дозволяє вирішувати багато *управлінських* і *організаційних* задач *оптимальним чином*. Прикладом використання знань з математичного програмування може бути розв'язання таких виробничих задач:

- отримання *максимального прибутку* або випуску *максимального об'єму* продукції при заданих матеріальних, трудових, енергетичних або часових витратах;
- забезпечення планових показників підприємства при *мінімальному розмірі фінансових вкладень*;
- досягнення *максимально короткого терміну* виготовлення продукції, будівництва об'єкту, товарообігу, виробничого циклу і тому подібного при існуючих або заданих виробничих ресурсах;
- вибір параметрів об'єкту або процесу, при яких забезпечується його максимальна корисність.

В наведених прикладах *максимальний випуск* продукції, *максимальний прибуток*, *мінімальний розмір фінансових вкладень*, *максимально короткий термін*, *максимальна корисність* – це є шукані *оптимуми* (*максимуми* або *мінімуми*), тобто результати, які при заданих умовах задачі неможливо перевершити.

В свою чергу, умови, які накладаються на можливі рішення задач (*задані матеріальні, трудові і часові витрати; виробничі ресурси; можливі діапазони значень параметрів або планових показників)*, називають *обмеженнями* задачі.

Оптимальне рішення задачі – це рішення, що обов'язково задовольняє обмеженням задачі.

1.1.1. Способи подання оптимізаційної задачі

Задачу математичного програмування можна подати в *змістовній (вербальній)* або *формальній постановці*.

Оптимізаційна задача в змістовній постановці

Змістовна постановка задачі – це її словесний опис. Розглянемо приклад оптимізаційної задачі в змістовній постановці.

Приклад 1.1. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує деревину. Виготовлення одного столу потребує 2 *м*^{2} деревини, однієї шафи – 4 *м*^{2}. Трудомісткість виробу складає: одного столу – 4 чол.-год, однієї шафи – 3 *чол-год*. Прибуток від реалізації становить: одного столу – 80 *грн*, однієї шафи – 100 грн. Підприємство для виготовлення столів і шаф у своєму розпорядженні має 200 *м*^{2} деревини та 600 *чол-год* фонду робочого часу. Визначити, скільки столів і шаф треба виготовити, щоб прибуток від реалізації всіх виробів був максимальним.

Вихідні дані задачі доцільно звести в таблицю (табл. 1.1), що є зручним та наочним при розподілі чи групуванні початкових даних, а в подальшому полегшує формування математичної моделі задачі.

Таблиця 1.1

Вид сировини	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	Стіл	Шафа	
Деревина виду, *м*^{2}	*2*	*4*	400
Трудомісткість, *чол-год.*	*4*	*3*	600
Прибуток від реалізації одного виробу, *грн.*	**80**	**100**	

Оптимізаційна задача в формальній постановці

Змістовна постановка задачі повинна дозволяти переходити до строгої *математичної моделі*. У протилежному випадку необхідно пройти досить трудомісткій кропіткий процеси математичного моделювання й ідентифікації, які в цьому курсі не розглядаються.

Розглянемо на прикладі 1 поетапний *процес побудови математичної моделі* задачі.

1. Визначимо *невідомі* задачі. Як правило, у якості невідомих виступають ті величини, які треба визначити за умовами задачі. В прикладі 1 такими величинами є *кількість столів* і *кількість шаф*. Позначимо ці кількості як x_1 і x_2 відповідно.

2. Сформуємо *цільову функцію* Y, тобто функцію, оптимум якої треба встановити за вимогами задачі. Цільова функція це *критерій*, за яким визначається найкраще рішення. У даному випадку критерієм є функція, що виражає прибуток від виготовлення x_1 столів та x_2 шаф. Цільова функція для даного прикладу має вигляд

$$Y(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2. \tag{1.1}$$

Функція (1.1) визначає прибуток меблевої фабрики від реалізації всіх виробів.

3. Сформуємо математичну модель задачі без урахування обмежень задачі, так званої задачі безумовної оптимізації:

$$Y(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 \to \max. \tag{1.2}$$

Тут символи «$\to \max$» говорять, що треба знайти не абиякі значення змінних x_1 і x_2, а саме ті, що забезпечують оптимум цільової функції. У даному разі – її максимум. При цьому рішенням задачі безумовної оптимізації (1.2) може бути будь-яка точка двовимірного евклідового простору $\mathbf{R}^2$ (безмежної площини). Тому повний запис задачі (1.2) має вигляд

$$Y(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 \to \max_{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2}.$$

4. Визначимо *обмеження* задачі Ω, тобто область припустимих рішень.

По-перше, загальні витрати деревини на виробництво всіх виробів не можуть перевершувати 400 *м*^{2}:

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \le 400. \qquad (1.3)$$

По друге, загальні витрати робочого часу на виробництво всіх виробів не можуть перевершувати 600 *чол-год*:

$$f_2(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \le 600. \qquad (1.4)$$

Крім того, кількості виробів кожного виду не можуть бути від'ємними, тобто

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (1.5)$$

До того ж невідомі (змінні) задачі за своєю суттю є цілочисловими величинами:

$$x_1, x_2 = \text{int}. \qquad (1.6)$$

Вирази (1.3) – (1.6) враховують всі обмеження задачі, тому область припустимих рішень задачі визначається як

$$\begin{aligned}\Omega: \quad & f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \le 400; \\ & f_2(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \le 600; \\ & x_1, x_2 \ge 0; \\ & x_1, x_2 = \text{int}.\end{aligned}$$

Тут запис «Ω:» говорить, що далі (після символу «:») ідуть вирази, які визначають властивості кожного елементу (кожної точки) множини Ω. Безумовно, множина точок Ω належить евклідовому простору $\mathbf{R}^2$ і складає тільки частину всіх точок простору: $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

5. Нарешті, сформуємо завершальну математичну модель задачі (з урахуванням обмежень):

$$Y(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 \to \max_{x \in \Omega}, \qquad (1.7)$$

$$\Omega: \quad f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \le 400; \tag{1.8}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \le 600; \tag{1.9}$$

$$x_1, x_2 \ge 0; \tag{1.10}$$

$$x_1, x_2 = \text{int}. \tag{1.11}$$

Задача (1.7) – (1.11) є задачею цілочислового лінійного програмування. Процес рішення таких задач ми розглянемо пізніше, а поки дамо лише відповідь. Шукане рішення: $x_1 = 50, \quad x_2 = 150$. Якщо меблева фабрика виготовить 50 столів і 150 шаф, то вона отримує максимальний прибуток у розмірі $Y = 6 \cdot 50 + 8 \cdot 150 = 1500$ *грн*.

В задачі (1.7) – (1.11) пошук оптимального рішення здійснюється серед точок множини Ω, що є меншою в порівнянні з множиною $\mathbf{R}^2$. Цю задачу, завдяки її малій вимірності та цілочислових змінних, можна вирішити шляхом *прямого перебору*: визначити усі точки простору Ω, знайти значення цільової функції в усіх точках простору Ω, порівняти їх та визначити найкраще значення цільової функції (у даному випадку максимум) і відповідну точку простору Ω.

Задача (1.7) – (1.11) в порівнянні з іншими задачами математичного програмування, що зустрічаються в інженерній практиці, має незначну складність. Але навіть для такої задачі пошук оптимального рішення методом повного перебору потребує багато зусиль і часу.

Предметом математичного програмування є способи математичного моделювання оптимізаційних задач, визначення необхідних і достатніх умов наявності екстремумів (оптимумів), розробка і дослідження методів визначення оптимальних рішень, які обминають пошук екстремальних рішень прямим перебором.

В загальному випадку математична постановка задачі екстремальної задачі полягає в визначенні найменшого або найбільшого значення цільової функції $y(x_1, x_2, ..., x_n)$ при умовах $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right)$, $x_j^+ \le x_j \le x_j^{++}$, де $y(\bar{x})$ і $f_i(\bar{x})$ – задані функції, а b_i, x_j^+, x_j^{++} – деякі дійсні числа.

1.1.2. Класифікація задач математичного програмування

Залежно від властивостей функцій y і f_i математичне програмування розпадається на декілька самостійних дисциплін, що займаються дослідженням і розробкою методів розв’язання окремих класів задач. На рис. 1.1 подана класифікація задач математичного програмування.

Рис. 1.1 – Класифікація задач математичного програмування

Перед усім задачі математичного програмування поділяються на детерміновані задачі та задачі стохастичного або динамічного програмування.

Динамічне програмування – це розділ математичного програмування, що пов'язаний з вирішенням екстремальних задач спеціальної структури, а саме задач, в яких процес пошуку оптимального рішення є багатоетапним.

Стохастичне програмування має справу з екстремальними задачами, в постановці яких присутні випадкові величини.

Детерміновані задачі – це найбільш поширений клас задач математичного програмування. Вихідна інформація в таких задачах є повністю визначеною. Всі детерміновані задачі поділяються на задачі лінійного чи нелінійного програмування.

Нелінійне програмування. В задачах цього класу цільова функція й (або) обмеження є нелінійними функціями. В нелінійному програмуванні виділяють клас багатоекстремальних задач та клас задач опуклого програмування.

В *багатоекстремальних задачах* цільова функція має декілька екстремумів. В задачах *опуклого програмування* – тільки один.

Опукле програмування об'єднує три підкласи екстремальних задач:

– задачі при *двобічних обмеженнях змінних* і відсутності обмежень у вигляді рівнянь;

– задачі *квадратичного програмування*, які пов'язані з пошуком екстремуму квадратичної функції при лінійних обмеженнях;

– задачі в *загальній* постановці, тобто ті, що не належать до двох попередніх підкласів.

Лінійне програмування. В задачах цього класу цільова функція та всі обмеження є лінійними функціями. Лінійне програмування об'єднує:

– підклас задач дискретного програмування;
– підклас задач дрібно-лінійного програмування;
– підклас задач параметричного програмування;
– підклас транспортних задач.

В задачах *дискретного* (цілочислового) програмування невідомі (змінні) можуть приймати тільки цілочислові значення. У задачах *дрібно-лінійного* програмування цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область припустимих рішень, є звичайними лінійними функціями. У задачах *параметричного* програмування цільова функція або функції обмежень, або й те й інше залежать від деяких параметрів (коефіцієнти можуть змінюватися в деяких межах). Окремим класом лінійних задач являють собою *транспортні задачі*, в яких змінні подаються у вигляді матриці.

1.1.3. Застосування задач математичного програмування в економіці й менеджменті

До оптимізаційних задач, що притаманні професійній діяльності економістів і менеджерів, можна віднести наступні класи задач:

– *задачі планування* виробництва (планування випуску продукції, завантаження встаткування, фінансування проектів, розподіл парку машин, календарне планування, сіткове планування);

– *задачі організації* виробництва (формування парку встаткування, про призначення, про реконструкцію підприємства, про розташування виробничих одиниць, про закриття заводу);

– *транспортні задачі* (перевезення вантажів з максимальним завантаженням транспорту й з максимальним об'ємом перевезень, розподіл транспортних засобів, розміщення вантажного флоту);

– *комбінаторні задачі* (про ранець, про лінійний розкрій, про розподіл пам'яті ЕОМ, про комівояжера).

1.1.4. Аксіоматичні поняття математичного програмування

Найбільш поширені поняття та визначення дисципліни:

– *цільова функція, цільова квадратична форма, функція плану, критерій оптимізації* – функція, для якої треба визначити оптимальне рішення або знайти екстремальне значення; позначення:

$$y, \quad y(x_1, x_2, ..., x_n), \quad y(\bar{x}) \text{ або } y(\mathbf{x});$$

– *оптимум (максимум або мінімум)* – *найбільше* (при максимізації) або *найменше* (при мінімізації) значення цільової функції *y*, позначення: $\operatorname{opt} y$, y^*, $y(\bar{x}^*)$ або $y(\mathbf{x}^*)$;

– *оптимальне рішення, оптимальний план, оптимальна точка* – значення змінних оптимізаційної задачі, при яких цільова функція набуває екстремального значення; позначення: $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$, $\bar{x}^*$, $\mathbf{x}^*$, $\arg(y^*)$ або $\arg(y \to \operatorname{opt})$;

– *область припустимих рішень* – множина точок, серед яких шукається оптимальне рішення; позначення: $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{\Omega}$;

– *обмеження задачі у вигляді рівностей* – система рівностей або нерівностей, можливі рішення якої формують область $\mathbf{\Omega}$; позначення: $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, де $i = \overline{1, n}$; $f_i(\bar{x}) = 0$, де $i = \overline{1, n}$; $f_i(\mathbf{x}) = 0$, де $i = \overline{1, n}$ $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ або $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$;

– *двобічна обмеженість змінних* – вираз, що визначає відрізок можливих значень змінних; позначення: $\bar{x}^+ \le \bar{x} \le \bar{x}^{++}$.

– *загальна задача математичного програмування* – задача пошуку оптимального рішення або оптимуму нелінійної цільової функції; позначення:

$$y(\bar{x}) \to \underset{\bar{x} \in \Omega}{\operatorname{opt}},$$

$$\Omega: \quad \bar{f}(\bar{x}) = 0; \quad \bar{x}^+ \le \bar{x} \le \bar{x}^{++}.$$

1.2. Лінійне програмування

Лінійне програмування є найбільш розробленим розділом математичного програмування, пріоритет у якому належить радянському математикові Л.В.Канторовичу, який в 1937 році розглянув спеціальний клас задач лінійного програмування й запропонував метод їх розв'язання.

1.2.1. Математична постановка

Загальна задача лінійного програмування (ЗЛП) формулюється в такий спосіб: знайти *оптимум лінійної функції цілі* $y(\overline{x})$, якщо *обмеження* $f_i(\overline{x})$ *лінійні* й *вектор змінних* $\overline{x}$ *невід'ємний.*

Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\overline{x}) = \overline{c}^{\mathrm{т}}\overline{x} + c_0 \to \underset{\overline{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{1.12}$$

$$\Omega: \begin{cases} A_1\overline{x} \le \overline{b}_1; & (1.13) \\ A_2\overline{x} = \overline{b}_2; & (1.14) \\ A_3\overline{x} \ge \overline{b}_3; & (1.15) \\ \overline{x} \ge 0, & (1.16) \end{cases}$$

де $\overline{x}$ – n-вимірний вектор-стовпець дійсних змінних $\overline{x} \in R^n$; $\overline{c}^{\mathrm{т}}$ – n-вимірний вектор-рядок коефіцієнтів функції цілі; c_0 – вільний член функції цілі; A_1, A_2, A_3 – матриці коефіцієнтів систем лінійних рівнянь розмірності $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$ відповідно; $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ – вектори-стовпці вільних членів систем обмежень розмірності $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $m_3 \times 1$ відповідно.

Задачу (1.13) – (1.16) подано у векторно-матричній формі, що значно спрощує її запис і розгляд.

Задачу, що складається з (1.12), (1.13) і (1.16), називають *стандартною* ЗЛП.

Якщо обмеження ЗЛП записані у вигляді *рівностей*, то говорять про *канонічну* ЗЛП. Канонічна ЗЛП у векторно-матричній формі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}} \bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{1.17}$$

$$\Omega : \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}; & (1.18) \\ \bar{x} \geq 0, & (1.19) \end{cases}$$

де A – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\bar{b}$ – вектор вільних членів розмірності $m \times 1$.

Канонічна, або *основна* ЗЛП в алгебраїчному записі має вигляд:

$$y(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \underset{\Omega}{\mathrm{opt}}, \tag{1.20}$$

$$\Omega : \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; & (1.21) \\ \cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}), & (1.22) \end{cases}$$

Перетворення стандартної ЗЛП в канонічну виконують в такий спосіб:

1. Обмеження-нерівність типу "≤" перетворюють в обмеження-рівність додаванням до її лівої частини додаткової невід’ємної змінної. Наприклад, нерівність $\{x_1 - x_3 + x_5 \leq 3\}$ перетворюється в рівність $\{x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3\}$.
2. Обмеження-нерівність типу "≥" перетворюють в обмеження-рівність *додаванням до її лівої частини додаткової невід’ємної змінної з* негативним знаком. Наприклад, нерівність $\{x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8\}$ перетворюється в рівність $\{x_1 + x_4 - 5x_5 - x_6 = 8\}$.
3. Задача мінімізації зводиться до задачі максимізації і навпаки шляхом множення цільової функції $y(\bar{x})$ на –1 (мінус одиницю).

Наприклад, задача мінімізації $y(\bar{x}) \to \min$ еквівалентна задачі максимізації $\left[-y(\bar{x}) \to \max\right]$.

Таким чином, задачу лінійної оптимізації (1.12) – (1.16) завжди можна перетворити в задачу (1.17) – (1.19) і навпаки.

Приклад 1.2. Записати задачу

$$y = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2; \\ f_2 = x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3; \\ f_3 = 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6; \\ f_4 = x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1{,}5} \end{cases}$$

в канонічну задачу у векторно-матричній формі та привести до задачі максимізації.

Розв'язання:

1. Нерівності типу "≤" (f_1, f_2, f_3) перетворимо в рівності шляхом додавання до їх лівих частин додаткових змінних x_6, x_7, x_8 відповідно: $f_1 = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2$; $f_2 = x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3$; $f_3 = 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6$.

2. Нерівність типу "≥" (f_4) перетворимо в рівність шляхом додавання до її лівої частини додаткової змінної x_9 з негативним знаком: $f_4 = ax_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8$;

3. Зведемо задачу мінімізації до задачі максимізації: $y = -3x_1 + 2x_2 + 5x_4 - x_5 \to \max_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$.

4. Запис канонічної ЗЛП за умовами прикладу в алгебраїчній формі має вигляд:

$$y = -3x_1 + 2x_2 + 5x_4 - x_5 \to \max_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2; \\ f_2 = x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3; \\ f_3 = 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6; \\ f_4 = x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,9}. \end{cases}$$

5. Запис цієї задачі в векторно-матричній формі має вигляд:

$$y = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{x} \to \max_{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^9},$$

$$\Omega: \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}; \\ \overline{x} \geq 0. \end{cases}$$

1.2.2. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Графічний метод є найбільш простим і наочним методом вирішення ЗЛП. Він застосовується для розв'язання задач з двома змінними, що подані в стандартній формі, або для задач з $m+2$ змінними, що подані в канонічній формі, де m – число лінійно незалежних обмежень-рівностей.

Припустима множина рішень задачі лінійного програмування Ω утворює опуклий многокутник, на границі якого знаходиться оптимум функції цілі y^*. На цій множині можна розташувати безліч рівнів цільової функції, тобто ліній, в кожній точці яких цільова функція набуває однакових значень. Для лінійної цільової функції рівні утворюють множину паралельних прямих.

З геометричної точки зору при розв’язанні ЗЛП шукають таку кутову точку області Ω, в якій лінія рівня з найменшим (при мінімізації) або з найбільшим (при максимізації) значенням цільової функції торкається цієї області Ω.

Для знаходження екстремального значення цільової функції використовують вектор-градієнт $\bar{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y}{\partial x_2} \end{bmatrix}$, який показує напрям найшвидшого зростання цільової функції. Компонентами вектора $\bar{c}$ є коефіцієнти цільової функції $y(\bar{x})$.

Для розв’язання задачі графічним методом, її необхідно попередньо привести до стандартної форми з двома змінними:

$$y(\bar{x}) = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \underset{\mathbf{x} \in \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbf{R}^2}{\mathrm{opt}}, \tag{1.23}$$

$$\Omega: \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \boxed{\neq} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}; \tag{1.24}$$

$$\bar{x} \geq 0, \tag{1.25}$$

де $\boxed{\neq}$ – знак відношення «$\leq$» чи «$\geq$».

Алгоритм розв’язання задачі лінійного програмування *графічним методом* у загальному випадку складається з таких етапів:

1. Приведення математичної моделі задачі до вигляду (1.23) – (1.25).

2. Побудова прямих, визначених рівняннями $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1, m}$; $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

Для побудови i-ої прямої $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ знаходять пару точок $\left(0; \;\; {b_i}\big/{a_{i2}}\right)$ і $\left({b_i}\big/{a_{i1}}; \;\; 0\right)$.

3. Знаходження напівплощин, обумовлених кожним з обмежень задачі (1.24), (1.25).

Для кожної напівплощини беремо яку-небудь крапку $\overline{x}_0^{\mathrm{т}}$, наприклад $\overline{x}_0^{\mathrm{т}} = [0 \quad 0]$, і перевіряємо відповідну нерівність $a_{i1}x_{01} + a_{i2}x_{02} \le b_i$. Якщо нерівність виконується, виходить, крапка $\overline{x}_0^{\mathrm{т}}$ належить шуканій напівплощині, інакше – не належить. Знайдені напівплощини виділяємо будь-яким зручним способом.

4. Виділення многокутника рішень.

Перетинання виділених напівплощин утворює многокутник рішень, тобто область припустимих рішень $\boldsymbol{\Omega}$.

5. Побудова прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$, що проходить через многокутник рішень. Тут y_0 – константа, яка обирається довільно.

6. Побудова вектора $\overline{c}^{\mathrm{т}} = [c_1 \quad c_2]$.

7. Переміщення прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ в напрямку вектора $\overline{c}$ до границі області Ω (задача максимізації) або у зворотному напрямку вектора $\overline{c}$ (задача мінімізації);

8. Визначення координат граничної точки шляхом розв’язання системи двох рівнянь. Рівняння системи визначають прямі, що перетинаються в точці $\overline{x}^*$.

9. Обчислення значення цільової функції y^* в точці $\overline{x}^*$.

При розв’язанні ЗЛП можливі чотири випадки щодо кількості та існування шуканих рішень: єдине рішення (рис. 1.2); незліченна множина рішень (відрізок *AB* на рис. 1.3); необмежена область припустимих рішень (рис. 1.4) і відсутність рішення через несумісність системи обмежень (рис. 1.5).

На рис. 1.2 – 1.5 показано можливі випадки при пошуку максимуму цільової функції, аналогічні ситуації можуть виникати й при пошуку мінімуму.

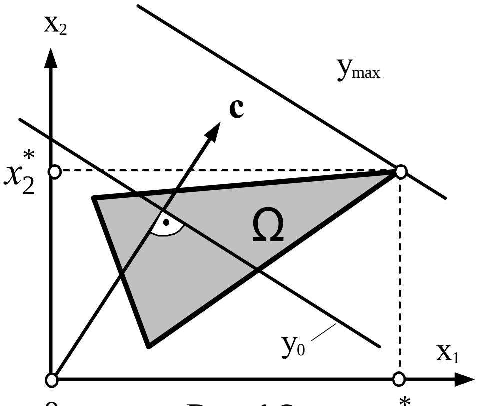


Рис. 1.2

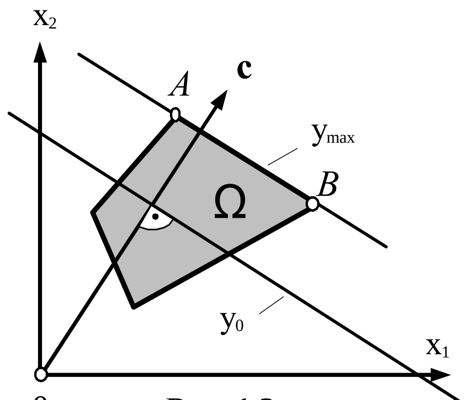


Рис. 1.3

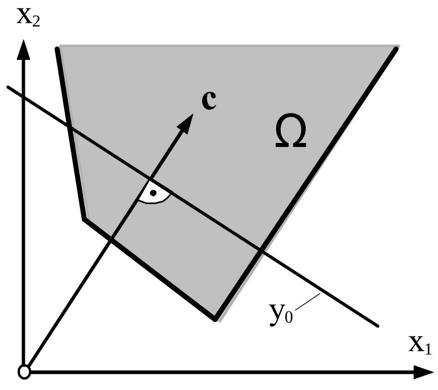


Рис. 1.4

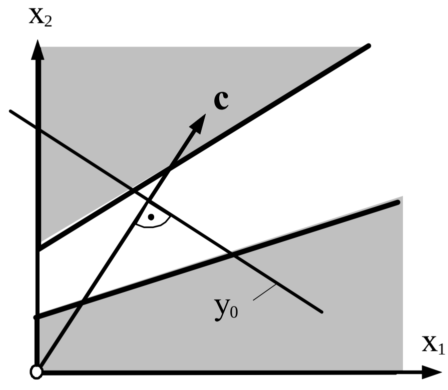


Рис. 1.5

Розглянемо графічний метод розв’язання ЗЛП на конкретному прикладі.

Приклад 1.3. Знайти максимум і мінімум функції $y = x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$2x_1 + 4x_2 \le 16;$$

$$-4x_1 + 2x_2 \le 8;$$

$$x_1 + 3x_2 \ge 9;$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв’язання

1. Задача подана в стандартній формі: всі обмеження задачі є нерівностями. Тому ніяких попередніх перетворень робити непотрібно. Задача залишається без змін.

2. Будуємо прямі, що відповідають обмеженням задачі, а саме (див. рис. 1.6): пряму $2x_1 + 4x_2 = 16$, що проходить через точки $(8;\ \ 0)$ і $(0;\ \ 4)$; пряму $-4x_1 + 2x_2 = 8$, що проходить через точки $(-2;\ \ 0)$ і $(0;\ \ 4)$; пряму $x_1 + 3x_2 = 9$, що проходить через точки $(9;\ \ 0)$ і $(0;\ \ 3)$; прямі $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

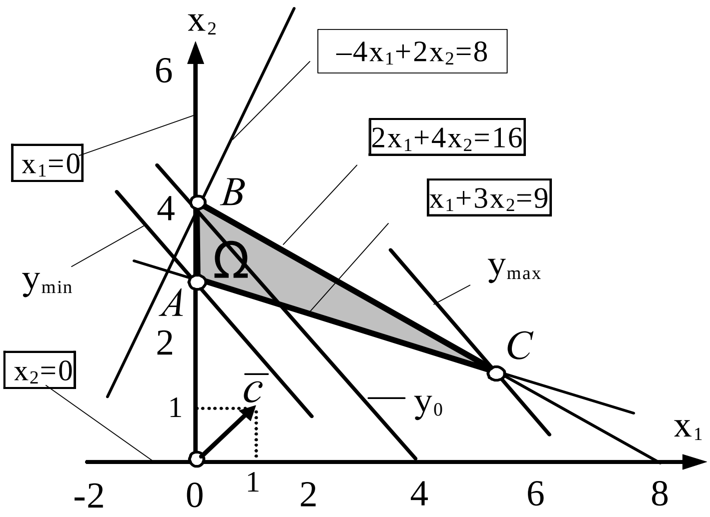


Рис. 1.6

3. Знаходимо напівплощини, що формують многокутник рішень. У точці $\overline{x}_0^{\,\mathrm{T}} = [0\quad 0]$ виконується перша й друга нерівність і не виконується третя нерівність. Тому дві шукані напівплощини розміщуються нижче перших двох прямих, а остання напівплощина вище третьої прямої.

4. З урахуванням прямої $x_1 = 0$ многокутник рішень Ω являє собою трикутник *ABC* на рис. 1.6.

5. Будуємо пряму $y_0 = x_1 + x_2$, що проходить через многокутник рішень. Нехай $y_0 = 4$, тоді пряма проходить через точки $(4;\ \ 0)$ і $(0;\ \ 4)$ на рис. 1.6.

6. Будуємо вектор $\overline{c}^{\,\mathrm{T}} = [1\quad 1]$, який виходить з початку координат.

7. Зміщуємо пряму y_0 паралельно до себе спочатку в напряму вектора $\overline{c}$, до кутової точці торкання, а потім в зворотному напряму до кутової точці *A* (рис. 1.6). В точці *C* цільова функція набуває максимального значення, а в точці *A* – мінімального.

8. Знайдемо координати цих точок з розв'язання відповідних систем рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Вирішивши по черзі кожну систему, знайдемо шукані рішення: $\bar{x}_C^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\bar{x}_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

9. Після підстановки знайдених значень змінних у функцію цілі остаточно одержимо оптимальні значення цільової функції, а саме: $y_{\max} = y_C^* = 6+1=7$, $y_{\min} = y_A^* = 0+3=3$.

1.2.3. Подвійність у лінійному програмуванні

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, що називають *двоїстою* стосовно вихідної (початкової) задачі. Вихідна та двоїста задачі тісно зв'язані між собою й утворять єдину пару двоїстих задач, причому задача, двоїста стосовно двоїстої задачі, збігається з вихідної. Залежно від структури моделі вихідної задачі розрізняють *симетричні*, *несиметричні* й *змішані двоїсті задачі*.

Економічний зміст двоїстої задачі

Розглянемо задачу *виробничого планування*. У розпорядженні підприємства є m видів ресурсів в кількостях, що відповідно дорівнюють b_1, b_2, …, b_m... Ці ресурси повинні бути використані для виробництва n видів продукції, вартість одиниці якої відома й дорівнює c_j ($j=1,2,\ldots,n$). Крім того, відомі норми споживання a_{ij} кожного з ресурсів на виробництво одиниці всіх видів продукції. План виробництва $\bar{x}^{T} = (x_, x_2, \ldots, x_n)$ варто скласти з умови максимізації загальної вартості продукції (прибутку) $y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow max$, при обмеженнях на використання ресурсів

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=\overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

За вихідним даними цієї задачі сформулюємо *іншу економічну задачу*. Для цього припустимо, що підприємству дозволено на його розсуд реалізовувати (продавати) всі зазначені ресурси. У зв'язку із цим виникає необхідність установити оптимальні ціни z_1, z_2, ..., z_m на ці ресурси, користуючись наступними міркуваннями:

1) покупець ресурсів прагне мінімізувати їхню загальну вартість $d(\bar{z}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$;

2) з іншого боку, підприємство за кожен вид ресурсів бажає виручити суму, не меншу тієї, котру воно може одержати в результаті використання цих ресурсів $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j$. Це пояснюється тим, що в протилежному випадку йому вигідніше організувати перепродаж існуючих ресурсів.

Наведене формулювання дозволяє одержати наступну математичну модель: мінімізувати загальну вартість всіх ресурсів $d(\bar{z}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i z_i$ при умовах: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j$, $j=\overline{1,n}$, де $z_i \ge 0, i=\overline{1,m}$.

Сформульована задача є двоїстою до вихідної задачі. Ми отримали симетричну пару двоїстих задач.

Вихідна задача	***Двоїста задача***
$y(\bar{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$	$d(\bar{z}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$
$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=\overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, j=\overline{1,n}. \end{cases}$	$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j, j=\overline{1,n}; \\ z_i \ge 0, i=\overline{1,m}. \end{cases}$

Загальні правила побудови двоїстих пар задач

1. Спочатку ЗЛП необхідно привести у відповідність до вимоги: при максимізації цільової функції обмеження-нерівності повинні бути записані зі знаком відношення "$\le$ ", а при мінімізації – зі знаком "$\ge$ ".

2. Кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень вихідної задачі (кожному *i*-му обмеженню вихідної задачі відповідає змінна z_i двоїстої задачі), а кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних вихідної задачі (кожній *j*-й змінній вихідної задачі відповідає *j*-е обмеження двоїстої задачі).

3. Кожному *i*-му обмеженню-нерівності вихідної задачі відповідає у двоїстій задачі умова невід'ємності змінної $(z_i \ge 0)$, а рівності – змінна z_i без обмежень на знак (будь-якого знака). Навпаки, позитивній змінній $x_j \ge 0$ відповідає у двоїстій задачі *j*-е обмеження-нерівність, а змінній довільного знака – рівність.

4. Матриці систем обмежень двоїстої пари задач взаємно транспоновані. Отже, рядок коефіцієнтів a_{ij} в *j*-м обмеженні двоїстої задачі є стовпець коефіцієнтів при x_j в обмеженнях вихідної задачі й навпаки.

5. Вільні члени обмежень однієї із задач є коефіцієнтами при відповідних змінних у цільовій функції іншої задачі. При цьому максимум цільової функції вихідної задачі переходить у мінімум цільової функції двоїстої задачі і навпаки, мінімум цільової функції вихідної задачі – у максимум цільової функції двоїстої задачі.

Приклад 1.4. Побудувати двоїсту задачу до вихідної задачі:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max_{x\in\Omega};$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 \le 6; \\ f_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10; \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Двоїста задача згідно з правилами побудови двоїстих задач має вигляд має таку математичну модель:

$$d(\bar{z}) = 6z_1 + 10z_2 \to \min_{z\in P};$$

$$P: \begin{cases} g_1 = z_1 + 2z_2 \ge 2; \\ g_2 = 2z_1 + z_2 \ge 3; \\ g_3 = -z_1 + 3z_2 \ge 1; \\ z_1 \ge 0, \quad z_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ця задача є симетричною до вихідної задачі.

Несиметрична пара двоїстих задач має вигляд:

Вихідна задача	*Двоїста задача*
1. $y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$	1. $d(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m};$	2. $z_i \gtrless 0, \quad i = \overline{1,m};$
3. $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$	3. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n};$

Приклад 1.5. Побудувати двоїсту задачу до вихідної задачі:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max;$$

$$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le 11; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 9; \\ x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки вихідна задача є задачею максимізації, то згідно з правилами побудови двоїстих задач третю нерівність обмежень треба привести до нерівності типу «$\le$», для чого помножимо її на –1 (мінус одиницю). Одержимо: $-4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \le -9$. Двоїста задача має таку математичну модель:

$$d(\bar{z}) = 12z_1 + 11z_2 - 9z_3 \to \min;$$

$$\mathbf{P}: \begin{cases} 3z_1 + 2z_2 - 4z_3 \ge 1; \\ z_1 + 2z_2 - z_3 = 4; \\ 2z_1 - z_2 - 3z_3 \ge 3; \\ z_1 + 2z_2 + z_3 \ge 2; \\ z_2 \ge 0, \quad z_3 \ge 0. \end{cases}$$

Друге обмеження двоїстої задачі записано у вигляді рівності, тому що відповідна їй змінна у вихідній задачі x_2 може набувати будь-якого значення. На змінну z_1 не накладається обмеження невід'ємності, тому що відповідне їй перше обмеження у вихідній задачі має вигляд строгої рівності.

1.2.4. Симплекс-метод

Симплекс-метод розв'язання ЗЛП вважається найбільш поширеним методом у лінійному програмуванні. Метод був розроблений Данцигом в 1947 році.

Симплекс-метод дозволяє знайти оптимальне рішення (якщо воно існує) за кінцеве число кроків. Існує велика множина модифікацій симплекс-методу, тут приводиться симплекс-метод, що дозволяє водночас вирішувати вихідну й двоїсту задачі.

Якщо або вихідна, або двоїста, або обидві задачі лінійного програмування записані в стандартній формі, то їх треба привести до канонічної форми, шляхом введення додаткових змінних $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ у вихідну та $z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+n}$ у двоїсту задачі. В наслідок приведення одержимо вихідну задачу

$$y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{\bar{x} \in \Omega}, \tag{1.26}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad \left(i = \overline{1, m}\right); \\ x_j \geq 0, \quad \left(j = \overline{1, n+m}\right) \end{cases} \tag{1.27}$$

і двоїсту задачу

$$d\left(\bar{z}\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot z_i \to \min_{\bar{z} \in \mathrm{P}}, \tag{1.28}$$

$$\mathbf{P}: \quad \begin{cases} g_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot z_i - z_{m+j} = c_j, \left(j = \overline{1, n}\right); \\ z_i \geq 0, \left(i = \overline{1, m+n}\right). \end{cases} \tag{1.29}$$

У цьому випадку, змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ вихідної задачі та змінні $z_{m+1}, z_{m+2}, \cdots, z_{m+n}$ двоїстої задачі вибираються в якості *залежних* (*Б базисних*), а інші змінні $x_1, x_2, \cdots, x_n$ вихідної задачі і $z_1, z_2, \cdots, z_m$ двоїстої задачі є *незалежними* (*В вільними*) і прирівнюються до нуля. Тоді перше опорне (базисне) рішення вихідної задачі буде:

$$\bar{x}_0^{\mathrm{T}} = \left(x_1 = 0 \quad \ldots \quad x_n = 0 \quad x_{n+1} = b_1 \quad x_{n+2} = b_2 \quad \ldots \quad x_{n+m} = b_m\right),$$

а перше опорне (базисне) рішення двоїстої задачі буде:

$$\bar{z}_0^{\mathrm{T}} = \left(z_1 = 0 \quad \ldots \quad z_m = 0 \quad x_{m+1} = -c_1 \quad x_{m+2} = -c_2 \quad \ldots \quad x_{m+n} = -c_n \right)$$

Після визначення першого опорного рішення, перевіряють, чи є воно оптимальним. Якщо оптимум не досягнуто, то переходять до нового опорного рішення. Для цього потрібно визначити вільну змінну, котру потрібно ввести в базис, і базисну змінну, котру потрібно вивести з числа базисних змінних. Після одержання нового опорного рішення, його також перевіряють на оптимальність. Якщо критерій оптимуму досягнуто, то оптимальним рішенням задачі є останній опорний план (опорне рішення).

Всі розрахунки за симплекс-методом зручно виконувати за допомогою спеціальної симплекс-таблиці (табл. 1.2).

Критерієм оптимальності при мінімізації цільової функції є негативне значення всіх оцінок ($t_{m+1,j} \le 0$, $j = \overline{1,n}$); при максимізації – невід'ємність всіх оцінок ($t_{m+1,j} \ge 0$, $j = \overline{1,n}$).

Таблиця 1.2

	$Б$ (залежні)	z_{m+1}	z_{m+2}	$\ldots$	z_{m+n}	$d(\bar{z}) \to \min$	Симпл. відн. θ
$В$ (незалежні)	(незал.) Б \ $В$ (залежні)	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	Вільні	
$-z_1$	x_{n+1}	$t_{11} = a_{11}$	$t_{12} = a_{12}$	$\ldots$	$t_{1n} = a_{1n}$	$t_{1,n+1} = b_1$	θ_1
$-z_2$	x_{n+2}	$t_{21} = a_{21}$	$t_{22} = a_{22}$	$\ldots$	$t_{2n} = a_{2n}$	$t_{2,n+1} = b_2$	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-z_m$	x_{n+m}	$t_{m1} = a_{m1}$	$t_{m2} = a_{m2}$	$\ldots$	$t_{mn} = a_{mn}$	$t_{m,n+1} = b_m$	θ_m
Вільні	$y(\bar{x}) \to \max$	$t_{m+1,1} = -c_1$	$t_{m+1,2} = -c_2$	$\ldots$	$t_{m+1,n} = -c_n$	$t_{m+1,n+1} = 0$	

Алгоритм симплекс-методу

Будемо вважати, що початкову таблицю симплекс-методу сформовано. Тоді послідовність розв'язання задачі симплекс-методом така:

1. Перевіряють, чи виконується умова оптимуму (критерій оптимальності). Якщо виконується, то отримане опорне рішення є оптимальним. Якщо не виконується, переходять до наступного пункту.

2. Знаходять *напрямний стовпець* (r-й стовпець). Серед «невірних» оцінок ($t_{m+1,j} > 0$ – для задачі мінімізації, $t_{m+1,j} < 0$ – для задачі максимізації) обирають максимальну по модулю, тобто оцінку $t_{m+1,r} = \max_j \left| t_{m+1,j} \right|$, $\left(j = \overline{1,n} \right)$.

3. Знаходять *напрямний рядок* (k-тий рядок). Для всіх $a_{ir} > 0$ визначають симплексні відносини $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ir}}$. Напрямним буде той рядок k, для якого θ_i буде мінімальним $\theta_k = \min\limits_{i, a_{ir} > 0} \left\{ \theta_i \right\}$. На перетинанні r-го стовпця й k-го рядка знаходиться *розв'язний елемент* t_{kr}.

Якщо всі компоненти напрямного стовпця t_{ir} непозитивні ($t_{ir} \le 0$, $i = \overline{1,m}$), лінійна форма задачі необмежена на многокутнику рішень і розрахунки на цьому закінчуються. Задача немає рішення.

4. Виконують транспозицію змінних x_r і z_{m+r}, тобто міняють їх місцями, отримуючи нову пару змінних x_{n+k} і z_k. Формують нове опорне рішення з урахуванням транспозиції змінних. Потім елементи таблиці t_{ij} $\left(i = \overline{1, m+1}, \quad j = \overline{1, n+1} \right)$ перераховують в елементи нової таблиці $t_{ij}^{н}$ $\left(i = \overline{1, m+1}, \quad j = \overline{1, n+1} \right)$ за наступними правилами:

– розв'язний елемент $t_{kr}^{н} = \dfrac{1}{t_{kr}}$;

– елементи напрямного рядка $\underset{j \ne r}{t_{kj}^{н}} = \dfrac{t_{kj}}{t_{kr}}$;

– елементи напрямного стовпця $\underset{i \ne k}{t_{ir}^{н}} = -\dfrac{t_{ir}}{t_{kr}}$;

– інші елементи таблиці $\underset{\substack{i \ne k \\ j \ne r}}{t_{ij}^{н}} = t_{ij} - \dfrac{t_{ir} \cdot t_{kj}}{t_{kr}}$.

5. Циклічно переходять до початкового пункту 1.

Сформулюємо ознаки оптимальності двоїстої пари задач:

- План $\bar{x}^*$ й $\bar{z}^*$ є оптимальними, якщо $y^* = d^*$;
- План $\bar{x}^*$ й $\bar{z}^*$ є оптимальними, якщо всі добутки сполучених умов для цих рішень рівні 0.

Запишемо сполучені умови:

– 1 група: $[b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)] \cdot z_i = 0, \quad i = \overline{1, m}$;,

– 2 група $[-c_j - (-a_{1j}z_1 - a_{2j}z_2 - \ldots - a_{nj}x_n)] \cdot x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}$..

Розглянемо симплекс-метод на наступному прикладі.

Приклад 1.6. Нехай деяке підприємство робить продукцію трьох типів I, II й III у кількостях x_1, x_2 і x_3 відповідно. Для виробництва кожного типу продукції підприємство споживає два види сировини: B_1 і B_2, запаси яких становлять відповідно 5 і 6 одиниць. Технологічні коефіцієнти (витрати сировини кожного виду на одиницю продукту кожного типу) задані матрицею $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Прибуток від реалізації виробленої продукції становить 3 та 4 гр. од. за одиницю продукту відповідно. Потрібно *організувати виробництво* таким чином, щоб підприємству був забезпечений *максимальний прибуток*. *Побудувати математичну модель вихідної й двоїстої задачі*. *Дати економічну інтерпретацію двоїстій задачі*. *Вирішити обидві задачі симплекс-методом*.

Розв'язання

Математична модель вихідної задачі:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} f_1 = 3x_1 + x_2 - x_3 \le 5 \\ f_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

Математична модель двоїстої задачі:

$$d(\bar{z}) = 5z_1 + 6z_2 \to \min_{\bar{z} \in P}$$

$$P: \begin{cases} g_1 = 3z_1 + z_2 \geq 3 \\ g_2 = z_1 + 2z_2 \geq 4 \\ g_3 = -z_1 + z_2 \geq 1 \\ z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{cases}$$

Тут змінні z_1 і z_2 – це ціни на сировину B_1 і B_2.

В двоїстій задачі потрібно визначити мінімальну рентабельну загальну вартість ресурсів $5z_1 + 6z_2$, що може виручити підприємство від їх продажу. При продажі ресурсів, необхідних для виробництва однієї одиниці продукту I, підприємство повинне виручити суму, не меншу тієї, котру воно виручає від продажу одиниці продукту I, і так для кожного продукту. Таким чином, для продукту I виручка становить $g_1 = 3z_1 + z_2 \geq 3$, для продукту II й III – $g_2 = z_1 + 2z_2 \geq 4$ і $g_3 = -z_1 + z_2 \geq 1$ відповідно. Природно, що ціни негативними бути не можуть $z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0$.

Тепер вирішимо обидві задачі симплексом-методом. Приведемо обидві задачі до канонічної форми за допомогою введення додаткових змінних x_4, x_5 (для вихідної задачі) і z_3, z_4, z_5 (для двоїстої задачі), одержимо:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ f_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

$$d(\bar{z}) = 5z_1 + 6z_2 \to \min_{\bar{z} \in P}$$

$$P: \begin{cases} g_1 = 3z_1 + z_2 - z_3 = 3 \\ g_2 = z_1 + 2z_2 - z_4 = 4 \\ g_3 = -z_1 + z_2 - z_5 = 1 \\ z_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,5 \end{cases}$$

В якості базисних (залежних) змінних вихідної задачі виберемо x_4, x_5, а двоїстої – $(-z_3)$, $(-z_4)$ і $(-z_5)$. Далі сформуємо симплекс-таблицю (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

	Б (залежні)	z_3	z_4	z_5	$d(\bar{z}) \to \min$	Симпл. відн. θ
В (незалежні)	(незал.) Б \ *В* (залежні)	x_1	x_2	x_3	Вільні	
$-z_1$	x_4	3	1	-1	5	5
$-z_2$	x_5	1	2	1	6	3
Вільні	$y(\bar{x}) \to max$	-3	-4	-1	0	

Перше опорне рішення $\bar{x}^{\text{т}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad 6)$ не є оптимальним, оскільки $t_{31} = -3 < 0$, $t_{32} = -4 < 0$ і $t_{33} = -1 < 0$.

Виберемо напрямний стовпець. Оскільки розглянута задача є задачею максимізації, то для поліпшення рішення потрібно вибрати саму негативну оцінку. В даному випадку це $t_{32} = -4$. Отже, $r = 2$. Виділимо напрямний стовпець подвійною рамкою (табл. 1.3).

Знайдемо напрямний рядок. Для цього підрахуємо симплекс-відносини θ_i. Вибираємо другий рядок k=2, оскільки $\theta_k = \min\left\{5/1; 6/2\right\} = 6/2$. Напрямний рядок виділимо подвійною рамкою на табл. 1.3.

Виконаємо транспозицію змінних x_2 і z_4. Заповнимо нову симплекс-таблицю (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

	Б (залежні)	z_3	z_2	z_5	$d(\bar{z}) \to \min$	Симпл. відн. θ
В (незалежні)	(незал.) Б \ *В* (залежні)	x_1	x_5	x_3	Вільні	
$-z_1$	x_4	5/2	-1/2	-3/2	2	4/5
$-z_4$	x_2	1/2	1/2	1/2	3	6
Вільні	$y(\bar{x}) \to max$	-1	2	1	12	

Друге опорне рішення $\bar{x}^{\text{т}} = (0 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad 0)$ також не є оптимальним, оскільки $t_{31} = -1 < 0$.

Знову виберемо напрямний стовпець: $r = 1$.

Знайдемо напрямний рядок. Оскільки $\theta_k = \min\{4/5;6\} = 4/5$, то k=1. Виділяємо рядок і стовпець сірими кольорами.

Виконаємо транспозицію змінних x_1 і z_3. Заповнимо нову симплекс-таблицю (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

	Б (залежні)	z_1	z_2	z_5	$d(\bar{z}) \to \min$
В (незалежні)	(незал.) Б *В* (залежні)	x_4	x_5	x_3	Вільні
$-z_3$	x_1	2/5	-1/5	-3/5	4/5
$-z_4$	x_2	–1/5	3/5	4/5	19/5
Вільні	$y(\bar{x}) \to max$	2/5	9/52	2/5	64/5

Отримане рішення є оптимальним, оскільки $t_{3,j} > 0$, $(j = 1,2,3)$. Згідно з табл. 1.5 $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 19/5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $y(\bar{x}^*) = 64/5 = d(\bar{z}^*) = 12{,}8$, $\bar{z}^* = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$.

Таким чином, максимальний прибуток від реалізації виробленої продукції або мінімальний виторг від продажу ресурсів становить 12,8 гр. Оптимальна кількість виготовленої продукції I, II та III виду становить $0{,}8$, $3{,}8$ і 0 відповідно. Оптимальна ціна при продажі ресурсів становить для *А* – 0,4 гр. за одиницю, для *В* – 1,8 гр. за одиницю.

Зауваження. Якщо серед додаткових змінних є хоча б одна змінна, для якої вільна складова негативна, то її неможна використати як початкову базисну. У цьому випадку застосовують *метод штучних змінних*. Штучні змінні вводяться для всіх $b_i < 0$ $\left(i \in \{\overline{1,m}\}\right)$, і їх треба якнайшвидше вивести з базису. Тому, в цільову функцію вони вводяться з коефіцієнтом М, який означає дуже велике число, наприклад, $+Mx_8$ при мінімізації або $-Mx_8$ при максимізації. Далі застосовують звичайний симплекс-метод. Якщо доведено, що від штучних змінних позбутися неможна, то це свідчить про те, що задача не має рішення, тому що її обмеження суперечливі.

1.2.5. Економіко-математичний аналіз оптимальних рішень

Аналіз на чутливість оптимального рішення базується на наступних властивостях двоїстих оцінок.

1. Двоїсті оцінки характеризують дефіцитність ресурсів. Величини z_i в оптимальному рішенні двоїстої задачі є оцінкою *i*-го ресурсу: чим більше значення оцінки z_i, тим вище дефіцитність ресурсу. Для недефіцитного ресурсу $z_i = 0$.

2. Двоїсті оцінки показують, як впливають зміни правої частини обмежень (запасів ресурсів) на значення цільової функції. При цьому практичний інтерес становлять границі (нижня й верхня) зміни ресурсів, у яких величини оцінок залишаються незмінними.

3. Двоїсті оцінки є показником ефективності виробництва окремих видів продукції з позиції критерію оптимальності. З цього погляду в оптимальний план може бути включена лише та продукція *j*-го виду, для якої виконується умова $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \le c_j$.

4. Двоїсті оцінки дозволяють провести порівняння сумарних умовних витрат і результатів. Рівність $y^* = d^*$ означає, що оцінка всіх витрат виробництва повинна дорівнювати оцінці зробленого продукту.

Таким чином, двоїсті оцінки дозволяють оцінити вплив на оптимальне рішення наступних економічних ситуацій:

- зміна запасів ресурсів;
- впровадження нового технологічного способу виробництва, що дозволяє знизити витрата сировини;
- зміни, що відбулися у ціновій політиці на підприємстві;
- випуск нового виду продукції.

1.2.6. Диференціальний алгоритм рішення ЗЛП

Диференціальний алгоритм (ДА) був розроблений для розв’язання загальної задачі математичного програмування, що має вигляд

$$y(\overline{x}) \to \min_{\overline{x} \in \Omega},$$

$$\Omega : \begin{cases} \overline{f}(\overline{x}) = 0 \ ; \\ \overline{x}^{+} \le \overline{x} \le \overline{x}^{++} \ . \end{cases}$$

де цільова функція $y(\overline{x})$ та функції обмежень $\overline{f}(\overline{x})$ в загальному випадку є нелінійними функціями, а вектор змінних $\overline{x}$ має двобічну обмеженість.

Однак ДА з успіхом застосовується й для рішення задач лінійного програмування, причому в цьому випадку він значно спрощується.

ДА розв’язання ЗЛП складається з трьох етапів:

1. Пошук опорного рішення
2. Пошук припустимого опорного рішення
3. Пошук оптимального рішення

Всі етапи ДА базуються на жорданових виключеннях, які дозволяють здійснювати операцію транспозиції залежної та незалежної змінних.

Спочатку, слід привести ЗЛП до вигляду

$$y(\overline{x}) \to \min_{\overline{x} \in \Omega}, \tag{1.30}$$

$$\Omega : \begin{cases} \overline{f}(\overline{x}) = 0 \, ; & (1.31) \\ \overline{x} \ge 0 \, . & (1.32) \end{cases},$$

Якщо вектор $\overline{x}$ розбити на дві складові: $\overline{x} = \begin{bmatrix} \overline{t} \\ \overline{s} \end{bmatrix}$, де $\overline{t}$ – вектор незалежних змінних, $\overline{s}$ – вектор залежних змінних, то задача (1.30) – (1.32) прийме вигляд

$$y(\overline{t}) = \sum_{j=1}^{n-m} k_j t_j + y_0 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}, \tag{1.33}$$

$$\Omega:\begin{cases} s_i = \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} t_j + \beta_i\ ; & (1.34)\\ s_i \ge 0, \quad t_j \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n-m}\right). & (1.35)\end{cases}$$

За теорією ДА *опорним* вважається таке рішення, для якого незалежні змінні дорівнюють нулю ($\bar{t} = 0$), а залежні змінні дорівнюють вільним складовим ($\bar{s} = \bar{\beta}$), тобто

$$\bar{x}_0^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{pmatrix}.$$

Опорне рішення задачі лінійного програмування завжди задовольняє системі обмежень (1.31).

Серед опорних рішень виділяють *припустимі опорні рішення*, в якому відсутні негативні складові $\beta_i \ge 0$, тобто виконується умова (1.32), і *оптимальне опорне рішення*, таке припустиме опорне рішення, при якому всі умовні похідні цільової функції є невід'ємними:

$$k_j = \frac{\partial y}{\partial t_j} \ge 0 \ \ (j = \overline{1,n-m}). \qquad (1.36)$$

Будь-яке опорне рішення і результати обчислень, які отримуємо в результаті чергового кроку жорданових виключень, зручно подавати у вигляді таблиці (див. табл. 1.6).

Таблиця 1.6

	t_1	t_2	…	t_n	1
$S_1=$	b_{11}	b_{12}	…	b_{1n}	β_1
$S_2=$	b_{21}	b_{22}	…	b_{2n}	β_2
…	…	…	…	…	…
$S_m=$	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{mn}	β_m
$y=$	k_1	k_2	…	k_n	y_0

Послідовність дій за диференціальним алгоритмом

В загальному випадку розв'язання ЗЛП за ДА відбувається в такій послідовності:

1. *Пошук опорного рішення*. Після розподілу вектора змінних на залежні та незалежні с подальшим виразом залежних змінних через незалежні одержуємо перше опорне рішення. Перевіряємо, чи є воно припустимим, якщо є, переходимо до пункту 3, якщо ні - до пункту 2.

2. *Пошук припустимого опорного рішення*. Для одержання нового опорного рішення необхідно вибрати r-у незалежну змінну, k-у залежну змінну та поміняти їх місцями за допомогою виконання одного кроку жорданових виключень. Крок жорданових виключень складається з наступних дій:

- Вибір *напрямного стовпця* (r-ї незалежної змінної). У рядку з будь-яким негативним β_i знаходимо будь-який позитивний b_{ij}. Відповідний j-й стовпець позначаємо як напрямний стовпець. Якщо в рядку з негативним елементом β_i немає жодного позитивного елемента b_{ij}, то задача не має жодного припустимого рішення.

- Вибір *напрямного рядка* (k-ї залежної змінної). Вибір здійснюється за критерієм $\Delta t_r = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{ir}}(i=1,2,...,m)\right] = -\frac{\beta_k}{b_{kr}}$ тільки серед рядків, для яких $\frac{\beta_i}{b_{ir}} < 0$.

- Виконання обчислень за правилами жорданових виключень, а саме:

$$b_{kr} = \frac{1}{a_{kr}}; \qquad \underset{j\neq r}{b_{kj}} = -\frac{a_{kj}}{a_{kr}}; \qquad \underset{i\neq k}{b_{ir}} = \frac{a_{ir}}{a_{kr}}; \qquad \underset{\substack{i\neq k\\ j\neq r}}{b_{ij}} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{kj}}{a_{kr}}. \tag{1.37}$$

Пункт 2 виконується доти, поки не одержимо припустиме опорне рішення. Отримане припустиме рішення ми перевіряємо на оптимальність за критерієм (1.36), якщо критерій виконується, то припиняємо пошук, якщо ні – переходимо до пункту 3.

3. *Пошук оптимального рішення*. Для одержання нового опорного рішення необхідно вибрати r-у незалежну змінну, k-у залежну змінну та поміняти їх місцями також за допомогою жорданових. Цього разу крок жорданових виключень складається з таких дій:

- Вибір напрямного стовпця (r-ї незалежної змінної). Серед стовпців з $k_j < 0$ вибираємо будь-який і позначаємо його як напрямний стовпець.

- Вибір напрямного рядка (k-ї залежної змінної) здійснюється за критерієм $\Delta t_r = \min\limits_{b_{ir}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{ir}}(i=1,2,\ldots,m)\right] = -\frac{\beta_k}{b_{kr}}$ тільки серед рядків, для яких $b_{ir} < 0$. Якщо стовпець таблиці диференціального алгоритму з негативної похідної $k_j = \frac{\partial y}{\partial t_r} < 0$ не містить жодного негативного елемента b_{ir}, задача не має рішення, оскільки нескінченне збільшення змінної t_r приводить до нескінченного зменшення функції цілі.

- Виконання обчислень за правилами жорданових виключень згідно з правилами (1.37).

Пункт 3 виконується доти, поки ми не буде виконуватися критерій оптимальності (1.36) або буде доведено, що його немає.

Розглянемо диференціальний алгоритм на прикладі.

Приклад 1.7. Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 - 2 \to \max_{x\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \end{cases}$$

Розв'язання. Приводимо задачу до виду (1.30) – (1.32). Для цього помножимо цільову функцію на (–1) й в обмеження додамо 3 змінні (x_3, x_4, x_5), одержимо:

$$y(\bar{x}) = -x_1 - 2x_2 + 2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16 \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

1-й *етап*. Пошук опорного рішення. Нехай залежними змінними будуть змінні x_3 , x_4 та x_5, а незалежними будуть x_1 і x_2. Тоді залежні змінні визначаються через незалежні як $x_3 = -4x_1 + 2x_2 + 12;$ $x_4 = x_1 - 3x_2 + 6;$ $x_5 = 2x_1 + 4x_2 - 16$.

Складемо таблицю ДА (табл. 1.7) й одержимо перше опорне рішення $\bar{x}_0^T = [0 \quad 0 \quad 12 \quad 6 \quad -16]$. Воно є неприпустимим, тому що $x_5 = -16 < 0$. При цьому цільова функція набуває значення $y(\bar{x}_0) = 2$.

Таблиця 1.7

	x_1	x_2	1	
$x_3=$	-4	2	12	3
$x_4=$	1	-3	6	
$x_5=$	**2**	4	-16	8
$y=$	-1	-2	2	

2-й *етап*. Пошук припустимого опорного рішення. Напрямним стовпцем може бути або перший, або другий, оскільки і $b_{31} > 0$, і $b_{32} > 0$. Нехай напрямним стовпцем буде перший стовпець.

Для вибору напрямного рядка застосуємо критерій

$$\Delta t_1 = \min_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \left[-\frac{12}{-4} \quad -\frac{-16}{2} \right] = 3.$$

Це означає, що напрямним рядком обрано перший рядок, залежна змінна x_3 стане незалежної, а незалежна змінна x_1 – стане залежної, головним елементом стане $b_{11} = -4$.

Після виконання кроку жорданових виключень одержимо нове опорне рішення $\overline{x}_1^T = [3 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad -10]$ (табл. 1.8). Це рішення не є припустимим. Треба знову повторити 2-й етап.

Таблиця 1.8

	x_3	x_2	1	
$x_1=$	-1/4	1/2	3	
$x_4=$	-1/4	-5/2	9	18/5
$x_5=$	-1/2	$\boxed{5}$	-10	2
$y=$	1/4	-5/2	-1	

2-й *етап* (циклічно повторний). Пошук припустимого опорного рішення. Напрямним стовпцем буде другий стовпець, оскільки в третьому рядку тільки $b_{32} > 0$. Для вибору напрямного рядка застосуємо критерій $\Delta t_2 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0}\left[-\frac{9}{-5/2} \quad -\frac{-10}{5}\right] = 2$. Це означає, що напрямним рядок обрано третій рядок, залежна змінна x_5 стане незалежної, а незалежна змінна x_2 – залежної, головним елементом стане $b_{32} = 5$.

Після виконання кроку жорданових виключень одержимо нове опорне рішення $\overline{x}_2^{\mathrm{T}} = [4 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad 0]$ (табл.1.9). Дане рішення є припустимим: всі компоненти опорного рішення мають невід'ємні значення.

Таблиця 1.9

	x_3	x_5	1
$x_1=$	-1/5	1/10	4
$x_4=$	-1/2	-1/2	4
$x_2=$	1/10	1/5	2
$y=$	0	-1/2	-6

Цільова функція в припустимій точці $y\left(\overline{x}_2^{\mathrm{T}}\right) = -6$. Це значення потрібне для контролю процесу наближення до точки мінімуму на наступному кроці.

Тепер треба перевірити, чи є рішення $\overline{x}_2^{\mathrm{T}}$ оптимальним. Оскільки $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$, то оптимум ще не досягнуто. Тому переходимо до третього етапу.

3-й *етап*. Пошук оптимального рішення. Напрямним стовпцем може бути тільки другий стовпець, оскільки саме $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$. Вибір напрямного рядка здійснюється тільки серед рядків, у яких $b_{ir} < 0$. Є тільки один такий рядок., для якого $b_{22} = -\frac{1}{2} < 0$. Тому напрямним рядком буде другий рядок, і незалежна змінна x_5 стане залежної, а залежна змінна x_4 – незалежної. Головним елементом стане $b_{22} = -\frac{1}{2}$.

Після виконання кроку жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\bar{x}_3^{\mathrm{T}} = [4{,}8 \quad 3{,}6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ (табл. 1.10). Це рішення є оптимальним, оскільки $k_1 = \frac{1}{2} > 0$ й $k_2 = 1 > 0$. Цільова функція в новій припустимій точці $y\left(\bar{x}_3^T\right) = -10$. Як бачимо, $y\left(\bar{x}_3^T\right) < y\left(\bar{x}_2^T\right)$. Це свідчить про те, що покроковий процес мінімізації відбувався в правильному напряму.

Таблиця 1.10

	x_3	x_4	1
$x_1=$	-0,3	-1/5	4,8
$x_5=$	-1	-2	8
$x_2=$	-1/10	-2/5	3,6
$y=$	1/2	1	-10

Щоб довідатися, яким є оптимальне рішення вихідної задачі, підставимо $\bar{x}_3^T = [4{,}8 \quad 3{,}6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ в цільову функцію вихідної задачі. Одержимо, $y^* = 4.8 + 2 \cdot 3.6 - 2 = 10$. Оптимальним рішенням є вектор змінних $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 3.6 \end{bmatrix}$.

Змістовний модуль 2. Спеціальні задачі математичного програмування

2.1. Цілочислове програмування

Цілочислове програмування (або дискретне програмування) є розділом математичного програмування, що вивчає задачі, в яких на значення всіх або частини змінних величин накладено вимогу цілочисловості. До нього можна віднести такі відомі задачі як: *задачі розподілу ресурсів*; *задачі сіткового планування й керування*; *задачі календарного планування* й ін.

За структурою математичної моделі задачі *дискретного програмування* розділяють на наступні класи: *задачі з неподільностями* (невідомі приймають тільки цілі значення); *екстремальні комбінаторні задачі* (цільова функція задана на кінцевій множині, елементами якого служать перестановки з n об'єктів); *задачі на незв'язаних і неопуклих областях*; *задачі з розривними цільовими функціями*.

Методи рішення задач дискретного програмування за принципом підходу до проблеми розділяють на наступні класи: методи відтинання, метод гілок і границь; методи динамічного програмування й послідовної оптимізації.

Методи відтинання. Спочатку умова цілочисловості тимчасово відкидається, і задача вирішується традиційним методом. Якщо отримане рішення не задовольняє умові цілочисловості, то вводять *правильне відтинання* (додаткове обмеження, якому свідомо задовольняє будь-який цілочисловий план і не задовольняє знайдений оптимальний не цілочисловий план) і вирішують нову задачу. Процедура повторюється доти, поки не буде знайдені цілочислове рішення або не буде встановлена неспільність обмежень задачі. Найвідоміший метод відтинань - метод Гоморри.

Метод галузей і границь (спрямоване перебирання). Спочатку умова цілочисловості відкидається, і задача вирішується традиційними методами оптимізації. У результаті одержують *нижню оцінку цільової функції*. Потім вихідна множина планів ділять на кінцеве число підмножин. Для кожного з яких визначається оцінка. План, для якого оцінка виявиться найближчої до *вихідної задачі*, вважається оптимальним.

Як що в задачі *цілочислового лінійного програмування* дві змінні, її можна вирішити графічним методом.

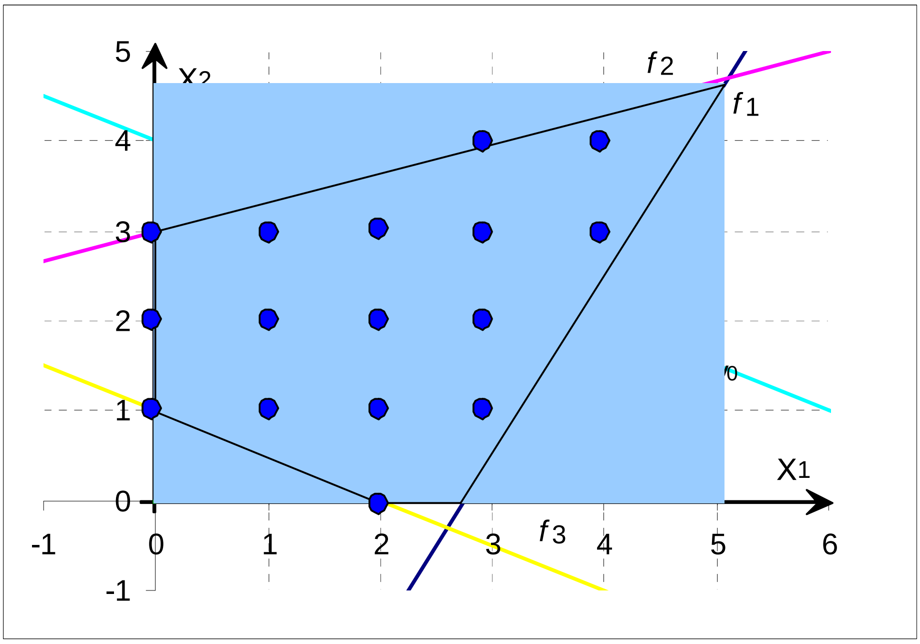
Приклад 2.1. Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = 4x_1 - 2x_2 \le 11 \\ f_2 = -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ f_3 = x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_j \ge 0, j = 1,2 \\ x_j - цілі \end{cases}$$

Рішення.

Спочатку вирішимо задачу без умови цілочисловості. Виконаємо необхідні побудови й одержимо.



Як видно з малюнка, нецілочислове рішення лежить на перетинанні прямих f_1 й f_2.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 11 \\ -x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}, \text{ звідки } \bar{x}^* = \begin{bmatrix} 5{,}1 \\ 4{,}7 \end{bmatrix}, \; y^* = 5{,}1 + 2 \cdot 4{,}7 = 14{,}5$$

Умові цілочисловості змінних задовольняють координати 16 точок, виділених синіми колами.

Переміщаючи y_0 в напрямку вектора $\bar{c}$ знайдемо цілочисловий максимум – точку В с координатами (4, 4). Для порівняння оцінимо значення цільової функції в трьох точках А, У и С.

$y_A = 3 + 2 \cdot 4 = 11$

$y_B = 4 + 2 \cdot 4 = 12$

$y_C = 4 + 2 \cdot 3 = 10$

Відповідь: цілочисловий максимум досягається в крапці

В $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \ y^* = 12$.

2.2. Транспортна задача

Транспортна задача широко використається в практиці планування. Це задача про знаходження найбільш раціонального з погляду витрат плану перевезень однорідного продукту *від постачальників до споживачів*. Для визначення оптимального плану транспортної задачі можна використати диференціальний алгоритм, симплекс-метод й інші універсальні методи. Однак через специфіку обмежень задачі, для визначення оптимального плану транспортної задачі доцільно застосовувати спеціально розроблені методи, наприклад метод потенціалів.

2.2.1. Постановка транспортної задачі. Умови існування її рішення

Однорідний продукт, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях $a_1, a_2, \ldots, a_m$ одиниць відповідно, необхідно доставити в кожний з n пунктів призначення в кількостях $b_1, b_2, \ldots, b_n$ одиниць відповідно. Вартість (відстань) перевезення одиниці продукту з *i-го* пункту відправлення в *j-й* пункт призначення дорівнює c_{ij} і відома для кожного маршруту. Нехай x_{ij} – кількість продукту, перевезеного з *i-го* пункту відправлення в *j-й* пункт призначення. Задача полягає у визначенні таких величин x_{ij} для всіх маршрутів, при яких сумарна вартість або відстань перевезень були б мінімальними.

Тоді математична модель транспортної задачі про планування перевезень має вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x_{ij}\in\Omega}, \tag{2.1}$$

$$\Omega: \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.2}$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

де

c_{ij} – тарифи (вартість, час, відстань) перевезення одиниці вантажу з ***і-го*** пункту відправлення в *j-й* пункт призначення;

a_j – запаси вантажу в *і-м* пункті відправлення;

b_i – потреба у вантажі в *j-м* пункті призначення;

x_{ij} – кількість од. вантажу, перевезеного з *і-го* пункту відправлення в *j-й* пункт призначення. Причому перевезений вантаж характеризується вагою, довгої (погонні метри), площею (квадратні метри), об'ємом і т.п.

Наприклад, перевозиться рідина, сипучий матеріал, дрібні заготівлі або дрібна із продукція.

Транспортну задачу можна представити у вигляді таблиці 2.1.:

Таблиця 2.1

				Пункти призначення					
				1	2	…	j	…	N
				Потреби					
				b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
Пункти відправлення	1	Запаси	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
	2		a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
	…		…	…	…	…	…	…	…
	i		a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
	…		…	…	…	…	…	…	…
	m		a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Теорема 2.1. Для *можливості розв'язання* транспортної задачі необхідно й достатньо, щоб *загальні запаси вантажу* в пунктах відправлення *дорівнювали загальним потребам* у вантажі в пунктах призначення, тобто щоб виконувалася рівність

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \tag{2.5}$$

Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює загальному запасу вантажу в пунктах відправлення, то модель такої транспортної задачі називається закритою. У протилежному випадку – відкритою.

2.2.2. Особливості рішення закритої транспортної задачі

Як і для всякої задачі лінійного програмування, оптимальний план транспортної задачі є й опорним планом.

Процес рішення транспортної задачі складається із двох етапів:

1. Побудови вихідного опорного плану перевезень;
2. Знаходження оптимального плану.

Побудова опорного плану

Існує кілька методів визначення вихідного опорного плану, серед яких можна відзначити метод *північно-західного кута*, метод *мінімальної вартості*, метод *подвійної переваги*.

План $X = \lfloor x_{ij} \rfloor$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ є *невиродженим* опорним планом, якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює m+n–1 , а якщо менше – те *виродженим*.

Найпростіший метод побудови опорного плану це метод північно-західного кута. Він полягає в послідовному розподілі продукції споживачам з урахуванням можливостей постачальників, починаючи з лівої верхньої клітини таблиці транспортної задачі.

Покажемо процес побудови опорного плану методом північно-західного кута на наступному прикладі.

Приклад 2.2. Методом **північно-західного кута** знайти опорне рішення транспортної задачі:

Три розчинобетонних заводи забезпечуються цементом із трьох складів. Попит заводів b_j відповідно дорівнює 80, 120 й 100 тис. т. /міс. Пропускна здатність складів a_i відповідно дорівнює 100, 50 й 150 тис. т./міс. Відстань перевезення (у км.) з i-го складу на j-й розчинобетонний завод представлена в матриці

$$C=\left[c_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пункт отправ-ления	Запасы груза	Пункты назначения		
		1	2	3
		Потребность		
		80	120	100
1	100	2 **80**	1 **20**	3 **–**
2	50	1 **–**	4 **50**	2 **–**
3	150	2 **–**	3 **50**	1 **100**

Потрібно скласти план перевезень цементу зі складів на заводи, що задовольняв би пропускної здатності складів і потребам заводів, а сумарний пробіг вантажного транспорту був би мінімальним.

Рішення.

Розподіл кількості перевезень роблять без огляду на вартість перевезення одиниці продукції. Розподіл починається з визначення x_{11}. Для цього порівнюємо a_1=100 з $в_1$=80 і вибираємо менше, тоді $x_{11}=80$. Оскільки потреби **першого пункту призначення** повністю **задоволені**, то в клітинах **21** й **31** ставимо **прочерки**. Запаси першого джерела ще не вичерпано й становлять 100-80=20 одиниць. Оскільки 20<120, тоді $x_{12}=20$. Оскільки запаси першого джерела вже вичерпані, в клітину **13** ставимо **прочерк**. Серед незаповнених клітин розглядаємо клітину 22 (запас становить 50, а потреби 120-20), отже $x_{22}=50$.

Клітина 23 – прочерк (запас вичерпаний).

Обчислимо $x_{32}=120-20-50=50$, тоді $x_{33}=150-50=100$. Даний опорний план є невиродженим, оскільки кількість відмінних від нуля компонентів складає n+m-1=3+3-1=5. При цьому значення функції мети складе 80*2+20*1+50*4+50*3+100=630.

Метод *мінімальної вартості* полягає у тому, що спочатку заповнюються клітини з мінімальними вартостями. Продемонструємо його на прикладі.

Приклад 2.3. Методом **мінімальної вартості** знайти опорне рішення задачі із приклада 9.

Рішення.

Спочатку знаходимо клітину з мінімальною вартістю, наприклад клітина12 і заповнюємо її мінімальним з 100 й 120. Тоді клітини 11 й 13 заповнимо прочерками. Знаходимо наступну мінімальну клітину, це 21 і заповнюємо її мінімальним з 50 й 80. Відповідно, клітини 22 й 23 заповнимо прочерками. Відповідно до умов (2.2)-(2.4), $x_{31} = 80 - 50 = 30$, $x_{32} = 120 - 100 = 20$, а в клітину 33 помістимо 100. Значення функції мети складе 100*1+50*1+30*2+20*3+100*1=370. Це значення менше ніж знайдене методом північно-західного кута.

Пункт отправ-ления	Запасы груза	Пункты назначения		
		1	2	3
		Потребность		
		80	120	100
1	100	2 –	1 **100**	3 –
2	50	1 **50**	4 –	2 –
3	150	2 **30**	3 **20**	1 **100**

Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі

Найбільш популярний метод знаходження оптимального плану транспортної задачі – *метод потенціалів.* Метод припускає, що відомо який-небудь опорний план. Вихідний опорний план необхідно перевірити на оптимальність.

Теорема 2.2. Якщо для деякого опорного плану $X^* = [x_{ij}^*]$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ транспортної задачі із заданими тарифами перевезень c_{ij} існують такі числа $u_i \ (i = \overline{1,m})$ й $v_j \ (j = \overline{1,n})$, що

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} > 0 \tag{2.6}$$

$$\text{і} \quad u_i + v_j \le c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} = 0 \tag{2.7}$$

для всіх $i=\overline{1,m}$ й $j=\overline{1,n}$, те $X^*=\left[x_{ij}^*\right]$ – оптимальний план.

Числа $u_i\ (i=\overline{1,m})$ й $v_j\ (j=\overline{1,n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів відправлення й пунктів призначення.

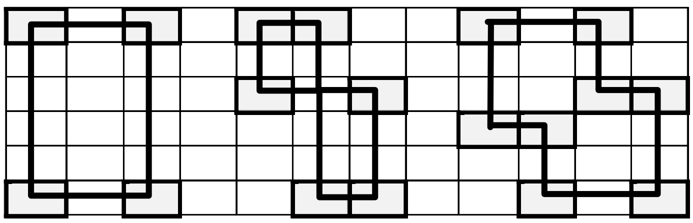
Алгоритм методу потенціалів

1-й етап. Для знайденого опорного невиродженого плану знаходять потенціали пунктів відправлення й призначення, користуючись співвідношенням (2.6). Тому що число заповнених кліток дорівнює *n*+*m*–1, те один з потенціалів дорівнюють до нуля.

2-й етап. Для кожної вільної клітки визначають числа $\boxed{\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}}$. Якщо серед них немає позитивних, то отримано оптимальний план транспортної задачі (співвідношення 2.7). Якщо ж для деякої вільної клітки $\Delta_{ij}>0$, то необхідно перейти до нового опорного плану.

3-й етап. Знаходять новий опорний план. Для цього розглядають всі вільні клітки, для яких $\Delta_{ij}>0$, і вибирають ту, для яких число Δ_{ij} максимальне. Обрану клітку варто заповнити, її позначають знаком «+» і формують *цикл*, по якому необхідно змінити об'єми перевезень.

Циклом у таблиці транспортної задачі називається *замкнута ламана лінія, вершини якої розташовані в зайнятих клітках таблиці*, а ланки – уздовж рядків і стовпів, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одне з яких перебуває в рядку, а інше – у стовпці.



При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітки можна побудувати лише один цикл. Вільна клітка позначається «+», потім знаки чергуються «–», «+», «–», «+», … У вільну клітку переносять менше із чисел x_{ij}, що коштують в «мінусових» клітках, і одночасно це число додають до чисел, що коштують в «плюсових» клітках. Клітка, що раннє була вільної, стає зайнятий, а «мінусова» клітка, у якій стояло мінімальне число x_{ij}, стає вільною. Далі переходять до 1-му етапу.

Приклад 2.4. Методом потенціалів знайти оптимальне рішення задачі із приклада 9.

<u>Рішення.</u>

1-й етап. <u>Знаходимо потенціали пунктів відправлення й призначення</u>.

Нехай $u_3 = 0$, тоді з (2.6) $v_3 = 1, v_2 = 3$.

Потім $u_2 = 4 - 3 = 1$, $u_1 = 1 - 3 = -2$, і нарешті, $v_1 = 2 + 2 = 4$.

Пункти від-прав-лення	Запаси грузу	Пункти призначення			u_i
		1	2	3	
		Потреби			
		80	**120**	**100**	
1	**100**	2 **80**	1 **20**	3 –	-2
2	**50**	1 –	4 **50**	2 –	1
3	**150**	2 –	3 **50**	1 **100**	0
v_j		4	3	1	

2-й етап. <u>Перевірка опорного рішення на оптимальність</u>. Для перевірки плану на оптимальність знайдемо Δ_{ij} для вільних осередків.

$\Delta_{13} = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$,

$\Delta_{21} = 4 + 1 - 1 = 4 > 0$,

$\Delta_{23} = 1 + 1 - 2 = 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 0 - 2 = 2 > 0$.

Рішення не є оптимальним.

Пункти від-прав-лення	Запаси грузу	Пункти призначення			u_i
		1	2	3	
		Потреби			
		80	**120**	**100**	
1	**100**	– 2 **80**	+ 1 **20**	3 –	-2
2	**50**	+ 1 –	– 4 **50**	2 –	1
3	**150**	2 –	3 **50**	1 **100**	0
v_j		4	3	1	

3-й етап. <u>Знаходження нового опорного плану</u>. Будуємо цикл. Осередок 21 позначається «+», відповідно осередку 11 й 22, як «-», і осередок

Пункти від-прав-лення	Запаси грузу	Пункти призначення			u_i
		1	2	3	
		Потреби			
		80	**120**	**100**	
1	**100**	– 2 **30**	+ 1 **70**	3 –	-2
2	**50**	1 **50**	4 –	2 –	-3
3	**150**	+ 2 –	– 3 **50**	1 **100**	0
v_j		4	3	1	

12 – як «+». Оскільки 50<80, здійснимо перекидання по циклі 50 одиниць продукції. Здійснимо перекидання по циклі й знайдемо нове опорне рішення. І повернемося до етапу номер 1. Знайдемо значення цільової функції 30*2+70*1+ +50*1+50*3+100=430. Значення цільової функції зменшилось. Одержимо нові потенціали.

Перевіримо рішення на оптимальність.

$\Delta_{13} = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$,

$\Delta_{22} = 3 - 3 - 4 = -4 < 0$,

$\Delta_{23} = 1 - 3 - 2 = -4 < 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 0 - 2 = 2 > 0$.

Пункти від-прав-лення	Запаси грузу	Пункти призначення			u_i
		1	2	3	
		Потреби			
		80	120	100	
1	100	2 –	1 100	3 –	-2
2	50	1 50	4 –	2 –	-1
3	150	2 30	3 20	1 100	0
v_j		2	3	1	

Рішення не оптимально. Знайдемо нове опорне рішення. Оселедок 31 позначимо «+». Виконаємо перекидання по циклі. 30<50. Одержимо нове опорне рішення. Знайдемо потенціали й перевіримо на оптимальність. $\Delta_{11} = 2 - 2 - 2 = -2 < 0$, $\Delta_{13} = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$, $\Delta_{22} = 3 - 1 - 4 = -2 < 0$, $\Delta_{23} = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$. Всі оцінки непозитивні, значить знайдене оптимальне рішення. Мінімум складе 100+50+60+60+100=370.

Якщо ми маємо справу із транспортною задачею відкритого типу, то вводять або фіктивного постачальника або фіктивного споживача й вирішують як закриту задачу. У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводиться фіктивний ($n$+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{i,n+1} = 0$ ($i = \overline{1,m}$).

Аналогічно, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний (m+1)-й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1,j} = 0$ ($j = \overline{1,n}$).

2.3. Нелінійне програмування

2.3.1. Причини виникнення нелінійності в економічних задачах. Класи задач нелінійного програмування

Нелінійність в економіці виникає, коли результати діяльності підприємств зростають або зменшуються непропорційно змінам масштабів використання ресурсів, наприклад, через насичення ринку товарами, коли кожну наступну одиницю товару продати складніше, ніж попередню.

Задачі нелінійного програмування можна розділити на два великих класи: *безумовна оптимізація* (областю припустимих рішень є всі евклидов простір) і *умовна оптимізація* (наявність області Ω).

Серед задач *умовної оптимізації* можна назвати: *оптимізацію функції, заданої на гіперпаралелепіпеді*; *оптимізацію функції з обмеженнями, заданими у вигляді рівнянь*; *загальну задачу математичного програмування*, що включає як обмеження, задані рівняннями, так й обмеження на змінні.

2.3.2.Безумовна оптимізація

Задача пошуку безумовного глобального оптимуму формулюється у такий спосіб: знайти оптимум функції $y(\overline{x})$, заданої в *n-мірному* евклідовому просторі R^n. Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\overline{x}) \to \underset{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n}{opt} \,. \tag{2.8}$$

Необхідні умови точки локального оптимуму мають вигляд:

$$\boxed{\left(\frac{\partial\, y}{\partial\, \bar{\bar{x}}}\right)^{*} = 0}\,, \qquad (2.9)$$

або, інакше кажучи, *у точці локального оптимуму градієнт функції дорівнює нулю*.

Геометрично умова (2.9) означає, що гіперплощина, дотична до функції в точці оптимуму, паралельна гіперплощини визначення цієї функції. Так, для функції однієї змінної це – дотична лінія, що є паралельною до осі x (для функції двох змінних – площина, паралельна площини $x_1 0 x_2$).

Точка $\bar{x}^0$, для якої виконується рівність $\left.\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{\bar{x}}}\right)\right|_{\bar{x}^0} = 0$, називається *стаціонарною* точкою функції $y(\bar{x})$.

На рис. 2.1 наведені різні приклади стаціонарних точок для функції однієї змінної. Стаціонарна точка не обов'язково повинна бути екстремальною. Прикладом такої точки може служити точка перегину функції на рис. 2.1,*б*.

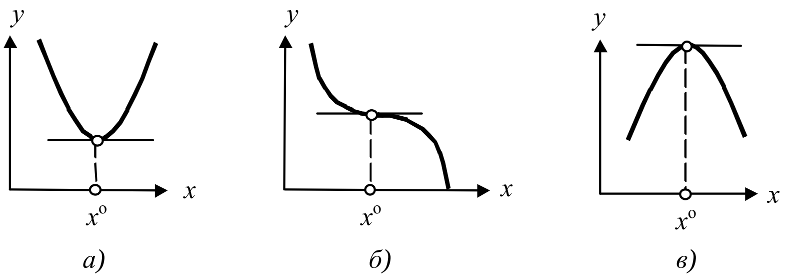


Рис.2.1 – Приклади стаціонарних крапок функції однієї змінної

Для того щоб визначити достатні умови точки локального оптимуму, розглянемо гессіан.

Матриця, що складається із других приватних і змішаних похідних мінімізуемої функції, називають матрицею Гесса (гессіаном).

$$H=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix};$$

Матриця Гесса є симетричною.

H – матриця Гесса з елементами, обчисленими в стаціонарній точці.

$\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^{\mathrm{T}} H \Delta\bar{x}$ – диференціальна квадратична форма в стаціонарній точці.

Диференціальна квадратична форма дозволяє зробити висновок про характер стаціонарної точки.

Якщо матриця H *позитивно визначена*, то диференціальна квадратична форма $\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^{\mathrm{T}} H \Delta\bar{x}$ так само позитивно визначена, а стаціонарна точка відповідає *мінімуму*.

Якщо матриця H *негативно визначена*, то диференціальна квадратична форма $\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^{\mathrm{T}} H \Delta\bar{x}$ так само негативно визначена, а стаціонарна точка відповідає *максимуму*.

Нарешті, функція не має екстремуму в стаціонарній точці, якщо матриця Гесса в цій точці є невизначеною. Це характерно для всіх сідлових точок функції.

Визначеність матриці можна встановити за *критерієм Сильвестра*:

- матриця H *позитивно визначена* в тім і тільки в тому випадку, якщо всі *головні визначники матриці позитивні* $\Delta_1 \ge 0,\ \Delta_2 \ge 0,\ \ldots\ ,\ \Delta_n \ge 0$;
- матриця H *негативно визначена* в тім і тільки в тому випадку, якщо всі непарні головні визначники матриці негативні, а всі парні – позитивні $\Delta_1 \le 0,\ \ \Delta_2 \ge 0,\ldots,\ (-1)^n \Delta_n \ge 0$;

- у всіх інших випадках матриця вважається невизначеною або частково визначеною.

Всі *методи рішення задачі безумовної оптимізації* можна розділити на два класи: *класичні* й *прямі*. Класичні методи дозволяю аналітично виразити оптимальну точку, через рішення системи рівнянь, і при цьому знаходять точні значення координат екстремальних точок.

Методи прямого пошуку, які також називають просто *прямі*, *пошукові, покрокові, ітераційні, обчислювальні, наближені* або *некласичні*, вирішують задачу безумовної оптимізації шляхом поступового поетапного наближення до точки екстремуму. Рішення одержують наближеним, але з наперед заданою точністю.

2.3.3. Класичний метод рішення задач безумовної мінімізації. Метод Ейлера

Метод Ейлера базується на необхідних і достатніх умовах існування екстремуму. Метод дозволяє виявити всі екстремальні точки цільової функції (як локальні мінімуми, так і локальні максимуми) і в такий спосіб дати загальну уяву про поведінку гіперповерхні функції $y(\overline{x})$ в гіперпросторі $\mathbf{R}^n$.

Алгоритм методу

1. Беруть частині похідні цільової функції $y(\overline{x})$ по кожній змінній x_i і відповідно до необхідних умов для точки локального екстремуму дорівнюють нулю $\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}$;
2. Розв'язують будь-яким відомим методом отриману систему, що у загальному випадку складається з n нелінійних рівнянь. Корінь системи, якщо вони існують, являють собою стаціонарні точки функції $y(\overline{x})$, оскільки в них всі частинні похідні дорівнюють нулю.
3. Беруть всі другі приватні й змішані похідні від функції $y(\overline{x})$ й обчислюють їх у кожній стаціонарній точці. По обчислених похідних

формують матрицю Гесса для кожної стаціонарної точки. Досліджують характер отриманих гессианов. По характерові матриць Гесса встановлюють вид відповідних екстремальних точок.

4. Обчислюють значення функції $y(\bar{x})$ в кожному локальному мінімумі, якщо вирішується задача мінімізації, або в кожному локальному максимумі, якщо – задача максимізації. Потім шляхом порівняння обчислених значень знаходять абсолютний екстремум.

Проілюструємо метод Ейлера на конкретному прикладі.

Приклад 2.5. Дослідити на наявність глобальних екстремумів функцію двох змінних $y(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - 15x_1$.

Рішення.

1. Візьмемо частинні похідні й дорівняємо їх до нуля $\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1 x_2 - 15 = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = -3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1 x_2 = 0 \end{cases}$.

2. Знайдемо корінь цієї системи. Розділимо обидва рівняння на 3 і віднімемо з першого друге, одержимо $3x_1^2 - 4x_1 x_2 - 5 = 0$. Тепер, виразимо x_2 через x_1, отже $x_2 = \dfrac{3x_1^2 - 5}{4x_1}$. Підставимо отриманий вираз до другого, зважаючи на $x_1 \neq 0$. Зробимо ряд спрощень, та одержимо $17x_1^4 - 70x_1^2 + 25 = 0$. У результаті рішення біквадратного рівняння отримаємо чотири корені: $x_{1A} = -0{,}6285$; $x_{1B} = 0{,}6285$; $x_{1C} = -1{,}9294$; $x_{1D} = 1{,}9294$. Знаходимо відповідні координати для другої змінної: $x_{2A} = 1{,}5175$; $x_{2B} = -1{,}5175$; $x_{2C} = -0{,}7992$; $x_{2D} = 0{,}7992$. Одержимо 4 стаціонарні точки $\bar{x}^{\circ}_A = \begin{bmatrix} -0{,}6285 \\ 1{,}5175 \end{bmatrix}$; $\bar{x}^{\circ}_B = \begin{bmatrix} 0{,}6285 \\ -1{,}5175 \end{bmatrix}$; $\bar{x}^{\circ}_C = \begin{bmatrix} -1{,}9294 \\ -0{,}7992 \end{bmatrix}$; $\bar{x}^{\circ}_D = \begin{bmatrix} 1{,}9294 \\ 0{,}7992 \end{bmatrix}$.

3. Для визначення виду стаціонарних точок сформуємо матриці Гесса. Для цього спочатку візьмемо всі другі приватні й змішані похідні функції $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 12x_1 - 6x_2$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 6x_2$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = -6x_1 + 6x_2$. Потім обчислимо їх у кожній стаціонарній крапці. Сформуємо матриці Гесса для кожної стаціонарної крапки: $H_{\text{A}} = \begin{bmatrix} -16{,}647 & 12{,}876 \\ 12{,}876 & 5{,}334 \end{bmatrix}$; $H_{\text{B}} = \begin{bmatrix} -16{,}647 & -12{,}876 \\ -12{,}876 & 5{,}334 \end{bmatrix}$; $H_{\text{C}} = \begin{bmatrix} -18{,}3576 & 6{,}7812 \\ 6{,}7812 & -16{,}3716 \end{bmatrix}$; $H_{\text{D}} = \begin{bmatrix} 18{,}3576 & -6{,}7812 \\ -6{,}7812 & 16{,}3716 \end{bmatrix}$. Відповідно до критерію Сильвестра, стаціонарні точки $\bar{x}^{\circ}_{\text{A}}$ й $\bar{x}^{\circ}_{\text{B}}$ не є екстремальними, $\bar{x}^{\circ}_{\text{D}}$ – точка локального мінімуму, $\bar{x}^{\circ}_{\text{C}}$ – точка локального максимуму. А оскільки функція має один явний мінімум й один явний максимум, то вони одночасно є й глобальними екстремумами. Отже, розв’язком є дві точки: точка мінімуму $\bar{x}^{**\text{T}}_{\text{D}} = [1{,}9294 \quad 0{,}7992]$, у якій $y^{**}_{min} = -19{,}293$; і точка максимуму $\bar{x}^{**\text{T}}_{\text{C}} = [-1{,}9294 \quad -0{,}7992]$, у якій $y^{**}_{max} = 19{,}293$.

2.3.4. Математична постановка, особливості й методи рішення багатомірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівностей. Метод Лагранжа

Аналітичний запис ***задачі оптимізації при обмеженнях у вигляді рівностей*** має такий вигляд:

$$y(\bar{x}) \to \underset{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n}{opt}, \tag{2.10}$$

$$\Omega: \quad f_i(\bar{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad n < m. \tag{2.11}$$

Якщо розбити вектор змінних $\bar{x}$ на залежні $\bar{s}$ й незалежні $\bar{t}$ змінні $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$, то ***необхідні умови*** локального умовного оптимуму виглядають у такий спосіб:

$$\boxed{\left(\frac{\delta\ y}{\delta\ \bar{t}}\right)^{*} = 0} \tag{2.12}$$

(***перші частинні умовні похідні функції цілі по незалежним змінним дорівнюють нулю***), де $\left(\frac{\delta\ y}{\delta\ \bar{t}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial\ y}{\partial\ \bar{t}}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial\ y}{\partial\ \bar{s}}\right)^{\mathrm{T}} (\mathbf{W})^{-1}\mathbf{C}$,

$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{bmatrix}$ *матриця Якобі* й

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_{21}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_p} \end{bmatrix}$ *матриця управління.*

Достатні умови точки локального ***мінімуму полягають у позитивній визначеності матриці*** **S*:***

$$\underline{\mathbf{S} = \mathbf{P}_{tt} - \mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C} - \left(\mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_{ss}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C},} \tag{2.13}$$

де $\mathbf{P} = \mathbf{H} - \sum_{i}^{m} \lambda_i \mathbf{H}_i$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{st} \\ \mathbf{P}_{ts} & \mathbf{P}_{tt} \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{л}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\delta\ y}{\delta\ \mathbf{f}} \right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial\ y}{\partial\ \mathbf{s}} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{-1}, \quad \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Для рішення задач багатомірної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей можна ***методом підстановки*** (виразивши залежні змінні через незалежні й підставивши їх у цільову функцію, вирішують задачу як задачу безумовної мінімізації), ***методом Якобі*** (заснований на необхідних і достатніх умовах крапки локального умовного оптимуму), ***методом невизначених множників Лагранжа***.

2.3.5. Знаходження стаціонарних точок методом невизначених множників Лагранжа

Метод Лагранжа полягає у відшуканні екстремуму спеціальної функції - функції Лагранжа, що дозволяє перейти від умовної оптимізації до безумовної.

Функція Лагранжа має такий вигляд

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = y(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}), \tag{2.14}$$

Візьмемо перші похідні від функції Лагранжа по змінним $\bar{x}$. Відповідно до необхідних умов дорівняємо їх до нуля:

$$\left(\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{x}} \right)^* = 0 \ . \tag{2.15}$$

Візьмемо перші похідні від функції Лагранжа по змінним $\overline{\lambda}$. Отримаємо функції-обмеження, що взяті з протилежним знаком

$$\frac{\partial L\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)}{\partial \lambda} = -\overline{f}\left(\overline{x}\right).. \tag{2.16}$$

Розв'язуючи систему $\begin{cases} \dfrac{\partial L\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)}{\partial \overline{x}} = 0; \\ \overline{f}\left(\overline{x}\right) = 0 \end{cases}$, знайдемо стаціонарні точки, які можна досліджувати на предмет екстремуму за допомогою перевірки достатніх умов локального мінімуму (2.13).

Продемонструємо метод на прикладі.

Приклад 2.6. Дослідити на наявність екстремумів функцію двох змінних

$$y(\, x_1, x_2 \,) = 2\pi\, x_1 x_2 + 2\pi\, x_1^2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad f\left(\mathbf{x}\right) = \pi\, x_1^2 x_2 - a = 0.$$

і визначити глобальні екстремуми (мінімум і максимум) функції за умови їхньої наявності.

Рішення.

Насамперед, формуємо функцію Лагранжа $L\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right) = 2\pi\, x_1 x_2 + 2\pi\, x_1^2 - \lambda\left(\pi\, x_1^2 x_2 - a\right).$

Потім формуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)}{x_1} = 2\pi\, x_2 + 4\pi\, x_1 - \lambda\, 2\pi\, x_1 x_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L\left(\overline{x},\overline{\lambda}\right)}{\partial\, x_2} = 2\pi\, x_1 - \lambda\, 2\pi\, x_1^2 = 0; \\ f\left(\overline{x}\right) = \left(\pi\, x_1^2 x_2 - a\right) = 0. \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему за допомогою алгебраїчних перетворень $x_1 = \sqrt[3]{\dfrac{a}{2\pi}}$; $x_2 = 2\sqrt[3]{\dfrac{a}{2\pi}}$; $\lambda = 2\sqrt[3]{\dfrac{2\pi}{a}}$. Таким чином, задача має одну умовно стаціонарну точку $\overline{x}^{\circ\,\mathrm{T}} = \left[\sqrt[3]{\dfrac{a}{2\pi}} \quad 2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{2\pi}}\right]$.

2.4. *Динамічне програмування*

2.4.1. Загальні принципи динамічного програмування

Розвиток виробничих сил й ускладнення зв'язків у суспільстві призвели до необхідності наукового підходу до проблеми планування й управління. Виявилося, що багато завдань планування й управління можна трактувати як процес поетапного вибору (прийняття рішень).

Розглянемо задачу оптимального планування (керування). Нехай S − деяка система, стан якої згодом змінюється. Процес зміни станів системи керований, тобто можна впливати на його хід за допомогою вибору керуючих факторів U^i. Із процесом змін зв'язаний деякий критерій *W, що* характеризує якість керування й залежить від нього. Оптимальність планування означає вибір найкращого керування для досягнення поставленої мети, тобто вибір такого *U,* щоб *W(U)* було оптимальним.

Задачі динамічного програмування мають ряд особливостей.

1. У них розглядається процес поводження системи в часі.
2. Стан системи в кожен момент часу однозначно визначається чисельними значеннями невеликого набору параметрів.
3. Операція вибору рішення складається в перетворенні цього набору параметрів у такий же набір з іншими числовими значеннями.
4. Якщо система в розглянутий момент часу перебуває в деякому стані, то її поводження надалі визначається цим станом й обраним керуванням, але не залежить від передісторії (тобто від того, у яких станах перебувала система до цього моменту).

Нехай є система *S*, стан якої характеризується вектором $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Чисельне значення набору параметрів у момент часу *i* позначимо через $\overline{x_i}$.

Нехай у момент *i* на систему *S* впливає керуючий фактор U^i, у результаті якого в наступний момент $i+1$ вона переходить у нового стану. Символічно такий перехід можна представити у вигляді

$$S\left(\overrightarrow{x^i}\right)^{U^i} \rightarrow S\left(\overrightarrow{x^{i+1}}\right). \tag{2.17}$$

Приклад 2.7. Нехай є мережа доріг, що з'єднує населені пункти. Розглянемо у якості системи людину, що пересувається з одного пункту в інший.

Процес руху природно розглядати як багатоетапний. Кожен етап складається в переходів з одного пункту в сусідній і відбувається (умовно) за одиницю часу. Людина, що перебуває в момент i у якомусь пункті K_i, загалом кажучи, може з нього потрапити в різні сусідні пункти. Керування U^i, що приймається системою (людиною), й буде визначати вибір конкретного сусіднього пункту K_{i+1}, у який людина буде рухатися з K_i. Зрозуміло, що наступні стани системи (пункт K_{i+1}), y якому вона опиниться через одиницю часу, однозначно визначається її попереднім станом K_i (пунктом, де вона була) і прийнятим керуванням U^i — рішенням куди рухатися.

Якщо в нашому прикладі людина поставила мету потрапити з пункту *A* в пункт *B*, то природно виникає завдання вибрати керування так, щоб рух з *A* в *B* проходило по найкоротшому шляху. Оптимальне керування - це послідовність рішень про те, через які пункти треба рухатися, щоб пройдений шлях з *A* в *B* був самим коротким з усіх можливих.

Специфіка методу динамічного програмування полягає в тому, що для відшукання оптимального керування досліджуваний процес розподіляється на етапи, причому керування оптимізується щоразу тільки на одному етапі.

Динамічне програмування (планування) - це планування далекоглядне, з урахуванням майбутнього, а не короткозоре, коли керуються принципом «аби тільки добре зараз, а там - що буде».

Як же знаходити оптимальне керування в багатокроковому процесі? Загальне правило полягає в тому, що керування на кожному кроці треба вибирати з урахуванням майбутнього. Із цього правила є виключення - це останній крок, де можна діяти без оглядки на майбутнє: його на останньому кроці немає.

Динамічне програмування ґрунтується на принципі знаходження на кожному кроці умовно оптимального керування для кожного можливого результату попереднього кроку.

Керуючись цим принципом, ми розвертаємо процес знаходження оптимального керування з кінця, знаходячи спочатку умовно оптимальне керування для кожного можливого результату передостаннього кроку, а потім на основі його умовно оптимальне керування на передостанньому кроці й т.д., поки не дійдемо до першого кроку. На першому кроці нам треба робити гіпотези про стан системи - ми знаємо, із чого починається процес, і можемо з урахуванням знайдених умовно оптимальних керувань на наступних кроках знайти безумовно оптимальне керування на першому кроці, тобто таке керування, що з урахуванням всіх умовно оптимальних керувань на наступних кроках дає оптимальне керування для всього процесу.

Отже, методологія динамічного програмування складається в розподілі завдання на етапи та поетапній побудові оптимального керування на кожному кроці.

2.4.2. Задача про заміну встаткування

Ідею й принципи динамічного програмування розглянемо на простому прикладі. Відомо, що проблема заміни старого парку машин новими - одна з основних проблем індустрії. Устаткування згодом зношується, старіє фізично й «морально»; у процесі експлуатації або падає продуктивність устаткування, або зростають експлуатаційні витрати, або й те й інше. Тому задача про заміну встаткування досить актуальна.

Розглянемо плановий період, що складений з декількох років. На початку планового періоду є одна машина фіксованого віку. У процесі роботи машина дає щорічно доход, вимагає експлуатаційних витрат і має залишкову вартість, причому всі перераховані характеристики залежать від віку машини, у будь-який рік машину можна залишити або продати по залишковій вартості й купити нову за відомою ціною (яка може мінятися згодом). Завдання полягає от у чому: для кожного року в плановому періоді треба вирішити - зберігати наявну в цей момент машину або продати її й купити нову для того, щоб сумарний прибуток за весь плановий період був максимальною.

Перехід системи S з одного стану в інше за 1 рік залежно від ухваленого рішення можна зобразити графічно (рис. 2.2).

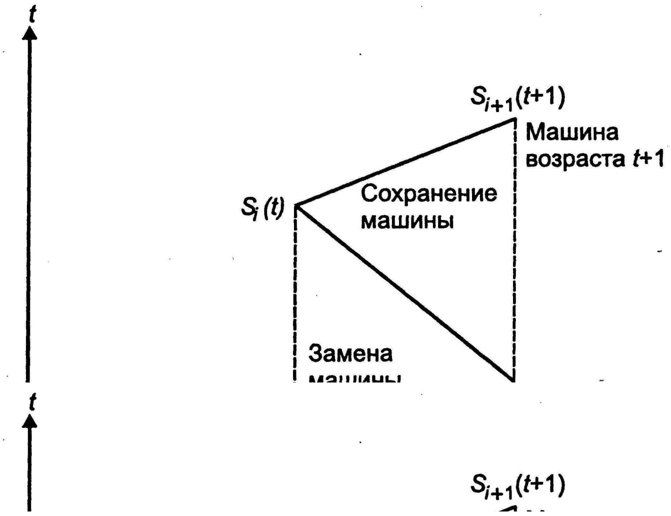


Рис. 2.2. – Перехід системи *S* зі стану в «нове» стан за 1 рік

Нехай функцію $f_n(t)$ - величина сумарного доходу (прибутку) за останні *n* років планового періоду за умови, що на початку цього періоду з *n* років ми маємо машину віку *t*.

Функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, що враховують внесок наступних кроків у загальний ефект, називаються *функціями Беллмана* — на прізвище американського математика Р. Беллмана, творця методу динамічного програмування. За допомогою цих функцій ведеться аналіз задачі динамічного програмування. Очевидно, якщо ми зуміємо обчислити $f_n(t_0)$ й знайти політику замін, те це й буде рішення завдання.

Достоїнства динамічного програмування:

- можливість поетапного аналізу результатів розв'язуваної задачі, визначення оптимальної стратегії з урахуванням фактору часу;
- поглиблення раніше розроблених методів кількісного і якісного дослідження природи економічних процесів;
- більше об'єктивне, повне й точне рішення планово-економічних і виробничих задач.

Сутність методу динамічного програмування полягає в заміні однієї задачі з багатьма змінними кількома послідовно розв'язуваних задач із меншим числом змінних.

Оптимізація багатокрокового процесу здійснюється на основі принципу оптимальності Беллмана: *оптимальне поводження системи має властивість, якім б не був початковий стан системи, наступні рішення повинні бути оптимальними тільки щодо стану, отриманого в результаті попереднього рішення*.

Зміст цього принципу полягає в тому, що при плануванні кожного кроку багатоетапного процесу необхідно враховувати не тільки вигоду, одержувану на даному кроці, але також загальну вигоду, одержувану по закінченні всього процесу.

До задач динамічного програмування відносяться: задачі про вибір траєкторії; задачі послідовного прийняття рішень (задача про використання робочої сили); динамічне програмування при безперервних змінних; задача керування багатономенклатурними запасами при обмеженні на ємність складу; динамічні задачі керування запасами й ін.

2.5. Стохастичне програмування

Стохастичне програмування використається для рішення задач, у яких обмеження носять імовірнісний, випадковий характер і необхідно враховувати вплив будь-яких непередбачених обставин. Цільовою функцією, у такого роду задачах, може служити математичне очікування деякого виробничого показника.

До числа задач стохастичного програмування можна віднести:

- комплектування ремонтних підприємств верстатним парком, коли заздалегідь невідомий обсяг робіт;
- визначення необхідної кількості транспортних засобів на пасажирських маршрутах, коли об'єм перевезень носить випадковий характер;
- визначення запасів деяких ресурсів, коли його поставка носить випадковий характер.

Основним підходом до рішення стохастичних задач є подання задачі в такому виді, щоб її можна було вирішити методами нелінійного або динамічного програмування.

Тому задачі стохастичного програмування підрозділяється на два основних класи: одноетапні (однокрокові) і многоэтапные (багатокрокові).

Приклад однокрокової стохастичної задачі - транспортна задача при випадковому характері потреб у продукції. Рішення цієї задача зводиться до рішення відповідної лінійної транспортної задачі.

Приклад багатокрокової стохастичної задачі - задача про запаси при випадковому характері попиту на продукцію в j-м періоді. Для рішення цієї задачі застосовують метод динамічного програмування.

2.6. Математична модель міжгалузевого балансу

Міжгалузевий баланс виробництва й розподілу продукції - інструмент аналізу й планування структури суспільного виробництва, що враховує комплексні взаємозв'язки галузей виробничої сфери. Міжгалузевий баланс характеризує процес формування й використання сукупного суспільного продукту в детальному галузевому розрізі. Деталізуючи загальні народногосподарські пропорції, що відбиваються балансом суспільного продукту, міжгалузевий баланс у той же час синтезує в єдину систему приватні міжгалузеві баланси, що характеризують джерела формування ресурсів і використання в народному господарстві окремих видів продукції.

Міжгалузевий баланс може бути розроблений як у грошовому, так й у натуральному вираженні.

Схема міжгалузевого балансу являє собою синтез двох таблиць, одна з яких характеризує детальну структуру витрат на виробництво в розрізі окремих видів продукції, а інша - структуру розподілу продукції в народному господарстві.

2.7. Елементи теорії масового обслуговування

Теорія масового обслуговування вийшла з теорії ймовірностей. Начало розробки практичних задач масового обслуговування поклав співробітник Копенгагенської телефонної компанії датський математик А.К.Эрланг (1878 - 1929 р.) у період між 1908 - 1922 р. В 1909 р. з'явилася його робота "Теорія ймовірностей і телефонні переговори" й інші публікації, у яких були сформульовані перші прикладні задачі телефонії. Ці задачі були пов'язані з необхідністю впорядкувати роботу телефонної мережі й розробити методи оцінки якості обслуговування споживачів залежно від числа використовуваних пристроїв.

Узагальнення методів рішення різноманітних задач і розробка загальної теорії масового обслуговування пов'язана з ім'ям радянського математика А.Я.Хинчина. У його книзі "Математичні методи теорії масового обслуговування" вперше були сформульовані загальні ідеї й методи теорії. Подальший розвиток теорії масового обслуговування пов'язане з ім'ям радянського математика Б.В.Гнеденко і його учнів А.Н.Колмогорова, Н.П.Бусленко й ін. Із закордонних авторів відомі Д.Кендалл, Ф.Паллачек, Л.Токач й ін.

Загальною особливістю задач із застосуванням теорії масового обслуговування є випадковий характер досліджуваних процесів. Однієї з типових життєвих ситуацій варто вважати утворення черг при задоволенні яких-небудь потреб, що приводить до втрат робочого часу й непродуктивній витраті різних ресурсів.

У багатьох галузях людської діяльності мають місце процеси, що носять характер масового обслуговування:

побутове обслуговування – обслуговування продавцями покупців у магазинах, ремонт різних побутових предметів у майстерень, розмови по телефоні, надання медичної допомоги, бібліотечне обслуговування, готельне обслуговування, пожежне обслуговування й т.п.;

у військовій справі – обстріл літаків, катерів й інших видів техніки супротивника, так само як і бомбування з літака;

у виробництві – транспортне й ремонтне обслуговування, організація постачання.

Типовим прикладом задачі масового обслуговування в житлово-комунальному господарстві є експлуатація одним робітником (сантехником, електриком, ремонтником) групи об'єктів (будинків, під'їздів, квартир). Якщо за робітником закріплено недостатньо об'єктів, то в моменти їхньої справності він простоює, якщо багато – він не може їх вчасно обслужити. Аналогічна ситуація виникає, якщо декілька (n) об'єктів обслуговується декількома (r) робітниками.

Теорія масового обслуговування вивчає закономірності протікання процесів, пов'язаних з масовим обслуговуванням, розробкою кількісних методів відшукання таких об'єктивних характеристик, які забезпечують своєчасне задоволення вступників вимог на обслуговування.

У вітчизняній і закордонній літературі теорію масового обслуговування називають по-різному: теорією лінії очікування, теорією черг, теорією групоутворення, проблемами скупченості й ін. Ця наукова дисципліна займається описом, аналізом і дослідженням різних по своєму змісту явищ із метою виявлення й створення необхідних передумов для їхнього якісного функціонування. При цьому під якістю обслуговування розуміється не те, як добре виконана робота, а наскільки вона вчасно виконана, чи не утвориться черга на обслуговування вимог або чи не відбувається втрата вимог на обслуговування через одночасну зайнятість обслуговуючого персоналу.

У самому загальному виді черга на обслуговування може виникати по наступних причинах:

- недостатня кількість або недостатня продуктивність обслуговуючих апаратів (обслуговуючого персоналу);
- нерегулярне надходження вимог;
- зміна (варіювання) тривалості обслуговування.

При організації виробництв, коли вимоги на обслуговування надходять рівномірно, через рівні проміжки часу, і коли вони вчасно обслуговуються, ніякої задачі масового обслуговування не виникає.

2.8. Елементи теорії ігор

Гра - це ідеалізована математична модель колективного поводження: декілька учасників впливають на ситуацію, причому їхні інтереси різні. Зіткнення протилежних інтересів породжує конфлікт, з якого потрібно знайти вихід, що найбільш влаштовує всіх учасників. ***Теорія ігор*** - це сукупність математичних методів для аналізу й оцінки поводження в конфліктних ситуаціях, а також вибору оптимальної стратегії поводження. Вона широко використається в організації виробництва й економіці. Наприклад, господарська діяльність підприємств перебуває в тісному зв'язку з поводженням покупця відносно придбання товарів. Кожне підприємство приймає конкретне рішення щодо своєї діяльності, з огляду на поведінку покупців, на те як зміниться їхня чисельність, активність.

Під *грою* будемо розуміти послідовність дій (ходів), що здійснюється за деякими правилами. Конфліктуючі сторони умовно називаються гравцями. *Ціль гри* - розробка таких пропозицій гравцям, щоб той, хто виграє, зумів виграти якнайбільше, а той, хто програє, програв би якнайменше. *Ходом у грі* назвемо вибір однієї з можливих дій і її здійснення. *Стратегією гравця* назвемо систему правил, що однозначно визначають вибір поводження гравця на кожному ході залежно від ситуації, яка склалася в процесі гри. Кожна фіксована стратегія, яку може вибрати гравець, називається його *чистою стратегією*. Теорія гри дає вказівки гравцям про вибір стратегій, які забезпечать максимально можливий середній виграш.

Для складання математичної моделі гри приймемо наступні допущення:

- розглядаємо тільки парні ігри, за участю двох гравців **A** и **B**, причому для визначеності будемо вважати, що гравець **A** завжди виграє, а **B** програє;

- розглядаємо ігри з нульовою сумою, тобто в сумі виграш **A** и програш **B** дорівнюють нулю, або, що теж саме, виграш **A** дорівнює програшу **B**;

- всі ходи гравців і результат гри можна виразити кількісно, у вигляді плати за хід;

- стратегії кожного гравця відомі заздалегідь;

- гра складається із двох ходів: гравець **А** вибирає одну зі своїх стратегій A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, а гравець **В** - B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ причому кожен вибір здійснюється при повнім незнанні вибору іншого гравця.

Нехай **А** и **В** - два гравці, що володіють кінцевим числом можливих дій - чистих стратегій (виражених кількісно), відповідно A_1, A_2, ... , A_m і B_1, B_2, ... , B_n. Гравець **А** може вибрати будь-яку чисту стратегію A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, у відповідь на яку гравець **В** може вибрати будь-яку свою чисту стратегію B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Вибір пари стратегій $\left(A_i, B_j\right)$ однозначно визначає результат a_{ij} - виграш гравця **А** и програш гравця **В.** Очевидно, якщо $a_{ij} < 0$, гравець **А** програє. При відомих значеннях a_{ij} виграшу для кожної пари $\left(A_i, B_j\right)$ чистих стратегій, можна скласти матрицю виграшів гравця А (програшів гравця В), що називають ***платіжною матрицею***, або матрицею гри:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array},$$

у якій рядки відповідають чистим стратегіям гравця **А**, а стовпці - чистим стратегіям гравця **В.**

Під час гри гравець **А**, вибираючи чисту стратегію A_i, нічого не знає про те, як буде діяти гравець **В**, тому вибираючи рядок, він визначає *гарантований виграш (тобто мінімальний)* по кожній стратегії й вибирає в кожному рядку мінімальний елемент. Після цього він вибирає той рядок, у якому цей мінімальний елемент найбільший. Такий вибір при будь-яких діях гравця **В** забезпечить гравцеві **А** ***максимальний гарантований виграш***. Таким чином, вибір оптимальної стратегії гравця **А** визначається числом

$$\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right), \tag{2.18}$$

яке називається чистою *нижньою ціною гри* (максимином), а відповідна стратегія максиминною.

Гравець **B** вибирає стратегію (відповідний стовпець B_j) так, щоб програти якнайменше. Він не знає, як буде діяти його партнер, тому в кожному стовпці шукає максимальний елемент, тобто те, що йому доведеться заплатити при самому несприятливому для нього виборі гравця **A.** Бажаючи, мінімізувати свій програш, він вибирає той стовпець, де буде мінімум *гарантованого (тобто максимального) програшу*. Таким чином, вибір оптимальної стратегії гравця **B** визначається числом

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right), \tag{2.19}$$

яке називається чистою *верхньою ціною гри* (минимаксом), а відповідна стратегія минимаксною. Очевидно, що завжди $\alpha \le \beta$.

Якщо $\alpha = \beta = \nu$, то ν називають *ціною гри*, елемент a_{ij} у такому випадку називають *седловою точкою*.

Якщо платіжна матриця має седлову точку, то чисті стратегії врівноважені й жодному із гравців нема сенсу ухиляться від своєї оптимальної стратегії. Рішенням гри буде (A_i, B_j, ν). Ситуація рівноваги визначається за схемою:

$$\begin{array}{cccc}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \to \\ \to \\ \\ \to \end{array} & \begin{array}{c} \min\limits_j a_{1j} \\ \min\limits_j a_{2j} \\ \\ \min\limits_j a_{mj} \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{array}}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \alpha
\end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \max\limits_i a_{i1} & \max\limits_i a_{i2} & \max\limits_i a_{in} \end{array}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \beta}$$

Приклад 2.8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ \langle 5 \rangle & 9 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 2 \\ \to 5 \\ \to 4 \end{matrix} \Bigg\} \alpha = 5$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{5 \quad 9 \quad 8 \quad 10}_{\beta=5} \end{matrix}$$

Ціна гри $\nu = \alpha = \beta = 5$. Сідлова точка $a_{31} = 5$. Рішення $(A_3, B_1, 5)$.

Приклад 2.9. Магазин може завезти в різних пропорціях товари трьох типів (А1, А2, А3). Їхня реалізація, а отже, і одержуваний прибуток (a_{ij}) залежать від виду товару й стану попиту. Припускаючи, що останній може характеризуватися трьома станами (В1, В2, В3) і з огляду на, що попит пов'язаний зі зміною моди й прогнозування його неможливо, визначити оптимальну стратегію в закупівлі товарів з умови середнього гарантованого прибутку при наступній матриці прибутків

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 13 \\ 13 & 18 & \langle 13 \rangle \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \to 10 \\ \to 12 \\ \to 13 \end{array} \Bigg\} \to \alpha = \max(\min a_{ij}) = 13$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{20 \quad 18 \quad 13} \end{matrix} \qquad \alpha = \beta = \nu = 13$$

$$\beta = \min(\max a_{ij}) = 13$$

Оптимальною стратегією для магазина в даних умовах буде закупівля товарів виду A_3, що при будь-якому стані попиту забезпечить гарантований прибуток 13 ден. од. Рішення гри: $(A_3, B_3, 13)$.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Математичне програмування: Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування», за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»).

Автори: к.т.н., доцент Ганна Вікторівна Білогурова,

д.т.н., проф. Микола Іванович Самойленко.

Рецензент: зав. кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, д. ф-м. н., професор Колосов А. І.

Відповідальний за випуск: О.Б. Костенко

Редактор: М. З. Аляб'єв

Комп'ютерна верстка: І.В. Волосожарова

План 2009, поз. 187Л.

Підп. до друку 17.06.09	Формат 60х84 1/16	Папір офісний
Друк на різографі.	Умовн.-друк. арк. 3,2.	Обл.- вид. арк. 3,7.
Зам. №	Тираж 100 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

61002, Харків, вул. Революції, 12