

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА



Я.Б.Форкун, С.М. Юрченко

ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»

(для студентів усіх форм навчання напрямку 6.030601 „Менеджмент”,
професійного спрямування „Менеджмент організацій”,
спеціалізації „Менеджмент організацій паливно-енергетичного комплексу”)

Харків – ХНАМГ – 2009

Текст лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" (для студентів усіх форм навчання напрямку 6.030601 „Менеджмент” професійного спрямування „Менеджмент організацій” спеціалізації „Менеджмент організацій паливно-енергетичного комплексу”) / Укл.: Форкун Я.Б., Юрченко С.М. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 78 с.

Укладачі: доц., к.т.н. Я.Б. Форкун,
ст. викл. С.М. Юрченко

Рецензент: проф., д.т.н. А.Г. Сосков

**Рекомендовано кафедрою теоретичної
та загальної електротехніки,
протокол № 03 від 29.10.2009 р.**

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.	6
1.1. Електричне коло, електрична схема та їх елементи	6
1.2. Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола	7
1.3. Види з'єднань пасивних елементів схеми	8
1.4. Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки)	9
1.5. Закони Кірхгофа	10
1.6. Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму	11
1.7. Потенціальна діаграма	12
1.8. Методи розрахунку електричних схем	13
1.8.1. Метод контурних струмів	13
1.8.2. Метод вузлових потенціалів. Метод двох вузлів	15
1.8.3. Принцип накладання і метод накладання	16
1.8.4. Теорема про еквівалентний генератор. Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці	17
1.9. Перетворення зірки опорів на еквівалентний трикутник опорів	19
Контрольні запитання	20
РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	21
2.1. Основні величини, що характеризують синусоїдний струм	21
2.2. Синусоїдний струм активного опору, індуктивності, ємності	22
2.3. Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму	24
2.4. Потужність у колах синусоїдного струму	25
2.5. Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл	26
2.6. Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами	28
2.7. Символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі	29
2.8. Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола	30
2.9. Комплексна форма запису потужності. Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму	31
2.10. Векторні й топографічні діаграми	31
2.11. Резонанс у колах синусоїдного струму	32
2.12. Практичне застосування резонансу	35
2.13. Трифазні кола	36
2.13.1. Основні поняття і визначення	36
2.13.2. Основні схеми з'єднання трифазних кіл. Визначення лінійних і фазних величин	37
2.13.3. Розрахунок трифазних кіл	38

2.14. Кола зі взаємною індуктивністю	43
2.14.1.Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності	43
2.14.2.Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок	44
2.14.3.Визначення взаємної індуктивності	45
Контрольні запитання	46
РОЗДІЛ 3. НЕСИНУСОЇДНІ ПЕРІОДИЧНІ СТРУМИ Й НАПРУГИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ	47
3.1. Визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг	47
3.2. Зображення несинусоїдних струмів і напруг за допомогою рядів Фур'є	48
3.3. Деякі властивості періодичних кривих, які мають симетрію	50
3.4. Розклад у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми	52
3.5. Порядок розрахунку електричного кола з несинусоїдними джерелами енергії	54
3.6. Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл	55
3.7. Діючі й середні за модулем значення несинусоїдних функцій	55
3.8. Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних періодичних кривих	56
3.9. Величини, на які реагують амперметри й вольтметри різних систем при несинусоїдних струмах	57
3.10. Потужності в колах несинусоїдного струму	57
3.11. Вищі гармоніки в трифазних колах	58
3.12. Особливості роботи трифазних систем, що були викликані гармоніками, кратними трьома	60
Контрольні запитання	64
РОЗДІЛ 4. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ	65
4.1. Визначення перехідних процесів	65
4.2. Закони комутації	66
4.3. Класичний метод розрахунку перехідних процесів	67
4.4. Незалежні й залежні початкові умови	68
4.5. Методи складання характеристичного рівняння	69
4.6. Визначення ступеня характеристичного рівняння	70
4.7. Властивості коренів характеристичного рівняння	70
4.8. Характер вільного процесу залежно від коренів характеристичного рівняння	71
4.9. Визначення постійних інтегрування у класичному методі	73
4.10. Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом	75
4.11. Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів	75
Контрольні запитання	76
Рекомендована література	76
Післямова	77

Вступ

Електротехнікою називається широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. „Теоретичні основи електротехніки” (ТОЕ) – дисципліна, яка займається питаннями розрахунку й вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Завдання дисципліни:

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл і співвідношенням між електричними величинами в електричних і магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;
- навчити теорії та методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного й несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії й методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії й методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами.

Вивчення курсу „Теоретичні основи електротехніки” потребує знання курсів фізики, а саме розділу "Електрика та магнетизм", математики, передусім розділів: системи лінійних алгебраїчних рівнянь, теорія матриць, похідна й інтеграл, диференціальні рівняння, функціональні ряди, інтегральні перетворення Лапласа, векторна алгебра. Теоретичні положення курсу засвоюються ґрунтовно тільки тоді, коли вони використані для вирішення конкретних задач. Саме тому в тексті лекцій для кращого засвоєння теоретичного матеріалу наведено ряд розв'язаних прикладів.

Текст лекцій призначений для студентів, які навчаються за напрямом 6.030601 „Менеджмент” професійного спрямування „Менеджмент організацій” спеціалізації „Менеджмент організацій паливно-енергетичного комплексу”.

Враховуючи, що для студентів вказаної спеціалізації дисципліна ТОЕ викладається протягом тільки одного семестру і містить у якості аудиторних тільки лекційні й практичні заняття, було зроблено акцент на темах, без яких неможливо подальше успішне вивчення спеціальних електротехнічних дисциплін. Звісно, текст лекцій не претендує на вичерпність у висвітленні основ сучасної теоретичної електротехніки, але він забезпечить набуття знань, які в майбутньому повинні допомогти при вирішенні конкретних технічних завдань.

Розділ 1. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1. Електричне коло, електрична схема та їх елементи

Електричне коло – сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу і взаємного перетворення електромагнітної та інших видів енергії та інформації, якщо процеси, що відбуваються у пристроях, можуть бути описані за допомогою понять про електрорушійну силу (*ЕРС*), струм і напругу.

Основні елементи електричного кола:

- джерела електричної енергії – пристрої, що перетворюють механічну, теплову, хімічну й інші види енергії в електромагнітну (генератор, акумуляторна батарея тощо);
- перетворювачі електромагнітної енергії (трансформатори, перетворювачі частоти та ін.);
- пристрої передачі електромагнітної енергії (лінії передачі);
- споживачі електромагнітної енергії, що перетворюють електромагнітну енергію в механічну, теплову, хімічну та інші види (двигуни, лампи розжарювання, резистори та ін.).

Іншими словами, *електричне коло* – сукупність джерел і споживачів електромагнітної енергії, з'єднаних проводами, по яких може протікати електричний струм.

Кола, в яких процеси отримання електричної енергії в джерелах, передача та перетворення в споживачах відбуваються при незмінних у часі струмах та напругах, називаються *колами постійного струму*.

У курсі ТОЕ електричне коло замінюють моделлю (графічним зображенням), яка називається *електричною схемою*. Елементами електричної схеми є *активні* й *пасивні* елементи. До пасивних елементів (аналог споживачів електромагнітної енергії) відносять (рис. 1.1):

- опір, [Ом] – ідеалізований елемент, що приблизно замінює резистор, в якому відбувається перетворення електричної енергії в теплову;
- ємність, [Ф] – ідеалізований елемент, який приблизно замінює конденсатор, в якому накопичується енергія електричного поля;
- індуктивність [Гн] – ідеалізований елемент, який приблизно замінює котушку індуктивності, в якій може накопичуватися енергія магнітного поля.

До активних елементів (аналог джерел електромагнітної енергії) відносять джерела електрорушійної сили (*ЕРС*) та джерела струму.

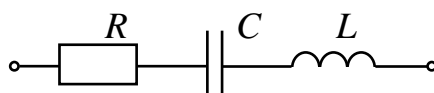


Рис.1.1 – Умовні позначення опору, ємності та індуктивності

У джерелах *ЕРС* і джерелах струму під дією сторонніх сил неелектричної природи відбувається ділення зарядів різних знаків, що приводить до появи напруги на затискачах джерела *ЕРС* або струму в колі з джерелом струму. Активні елементи враховують процеси перетворення неелектричних видів енергії в електромагнітну.

Всі схеми (як і кола) поділяють на розгалужені та нерозгалужені.

Розгалуженим колом зветься коло, що має три і більше вітки, два і більше вузлів.

Нерозгалуженим колом називається коло, що має тільки один контур і, звідси, не має вузлів.

Вітка – ділянка кола, вздовж якої протікає один і той же струм; утворюється вітка кількома послідовно з'єднаними елементами.

Вузол – точка на схемі, де з'єднуються три і більше вітки. *Вітки*, приєднані до одних і тих самих вузлів, називаються паралельними.

Контур – будь-який замкнутий шлях, що проходить в загальному випадку по декількох вітках.

Електричні кола поділяють на:

- *лінійні* – кола, що містять тільки лінійні елементи, тобто ті, що мають лінійні вольт-амперні характеристики (резистор, ємність, індуктивність);

- *нелінійні* – кола, що містять хоча б один елемент з нелінійною вольт-амперною характеристикою (діод, стабілітрон, лампа розжарювання та ін.).

1.2. Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола

Напруга на ділянці кола – це різниця потенціалів (φ) крайніх точок цієї ділянки (рис.1.2,а). За визначенням:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b . \quad (1.1)$$

При протіканні через опір R струму I потенціал точки «а» дорівнює

$$\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R , \quad (1.2)$$

де $I \cdot R$ – падіння напруги на опорі R .

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що не має у своєму складі *ЕРС*, має вигляд:

$$I = \frac{U_{ab}}{R} . \quad (1.3)$$

Розглянемо ділянку кола, що має у своєму складі *ЕРС* (рис.1.2,б). Для цього кола закон Ома має вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} . \quad (1.4)$$

Якщо ділянка кола має у своєму складі кілька ЕРС, протилежно спрямованих, а також кілька опорів, то закон Ома матиме вигляд:

$$I = \frac{\pm U_{ab} \pm E_k}{\sum R_k}. \quad (1.5)$$

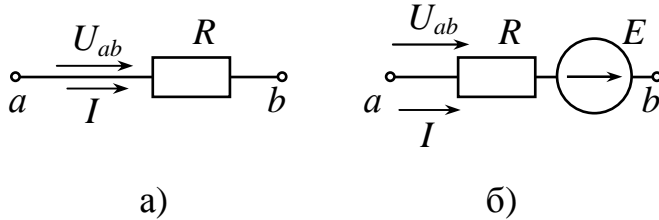


Рис.1.2

Примітка: коли напрямки ЕРС E_k і напруги U_{ab} збігаються з напрямком струму I на ділянці «ab», то в чисельнику беремо E_k і напругу U_{ab} зі знаками "+", і навпаки.

1.3. Види з'єднань пасивних елементів схеми

У якості пасивних елементів схеми для кіл постійного струму розглядають лише активні опори. Охарактеризуємо основні види з'єднань пасивних елементів.

1. Послідовне з'єднання – рис. 1.3. Еквівалентний опір – рис. 1.4.

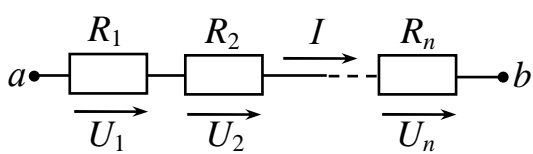


Рис.1.3

$$U_{ab} = U_1 + U_2 + \dots + U_n; \\ I = \frac{U_{ab}}{R_{\text{екв}}}; \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

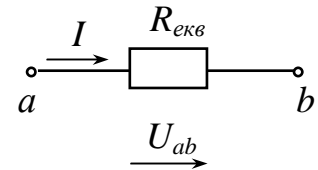


Рис.1.4

2. Паралельне з'єднання – рис.1.5. Еквівалентний опір – рис. 1.6.

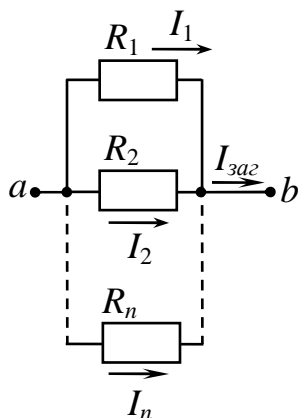


Рис.1.5

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1}; I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}; I_n = \frac{U_{ab}}{R_n}; \quad G_{\text{екв}} = G_{ab} = \sum_{k=1}^n G_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k};$$

$$I_{\text{заг}} = I_1 + I_2 + \dots + I_n;$$

$$I_{\text{заг}} = \frac{U_{ab}}{R_{\text{екв}}} = U_{ab} \cdot G_{\text{екв}};$$

$$R_{\text{екв}} = \frac{1}{G_{\text{екв}}}.$$

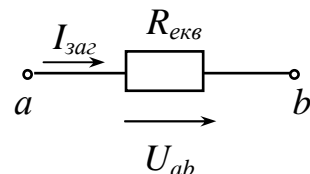


Рис.1.6

3. Змішане – чергування ділянок послідовного та паралельного з'єднання – рис. 1.7. Еквівалентний опір – рис. 1.8.

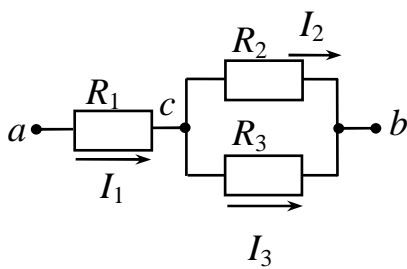


Рис. 1.7

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_{\hat{a}\hat{e}\hat{a}}}; R_{\hat{e}\hat{e}\hat{a}} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$U_{cb} = I_1 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3};$$

$$I_2 = \frac{U_{cb}}{R_2}; I_3 = \frac{U_{cb}}{R_3}.$$

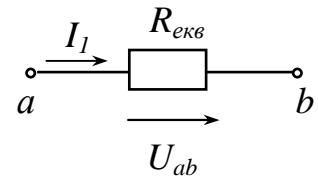


Рис. 1.8

1.4. Джерела напруги і струму. Перетворення джерела напруги на джерело струму (і навпаки)

Джерела енергії спричиняють виникнення струмів і напруг в електричних колах. Для аналізу електричних кіл використовують поняття ідеалізованих джерел напруги та струму.

Під ідеалізованим *джерелом напруги* розуміють таке джерело, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через нього, і яке характеризують тільки електрорушійною силою E (рис. 1.9,а). Якщо джерело напруги не ідеалізоване, то воно має внутрішній опір R_0 , і напруга на його затискачах залежить від величини струму через нього (рис. 1.9,б; де m_U, m_I – масштаби за напругою та струмом вольт-амперної характеристики джерела).

Під ідеалізованим *джерелом струму* розуміють таке джерело енергії, сила струму якого j не залежить від навантаження, до якого це джерело під'єднане (внутрішній опір такого джерела $R_0 \rightarrow \infty$). Умовне позначення ідеалізованого джерела струму та його вольт-амперна характеристика (ВАХ) представлені на рис. 1.10.

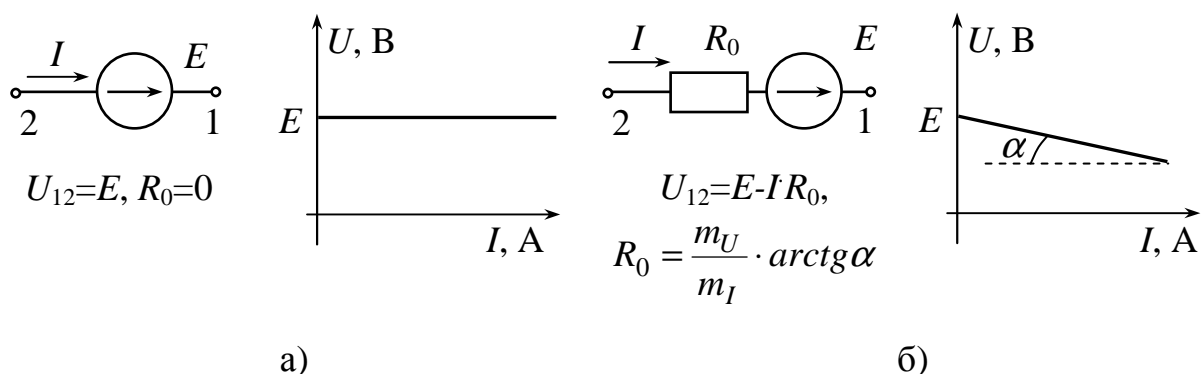


Рис. 1.9.

Фізично виконати ідеалізовані джерела струму та напруги неможливо.

При розрахунку електричних кіл реальне джерело енергії з ЕРС E_0 з внутрішнім опором R_0 , що з'єднане з навантаженням R_f , може бути представлено

двома способами (рис. 1.11,а і рис. 1.11,б). Ці схеми еквівалентні щодо струму в навантаженні I_i та потужності, яка споживається навантаженням ($P_i = I_i^2 \cdot R_i$), і нееквівалентні щодо потужності, яка споживається внутрішнім опором R_0 .

Для переходу від реального джерела напруги до реального джерела струму (і навпаки) застосовують наступні формули:

$$\frac{E}{R_0} = j; \quad (1.6)$$

$$E = j \cdot R_0. \quad (1.7)$$

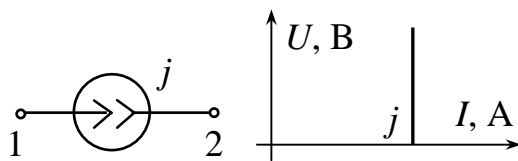


Рис.1.10

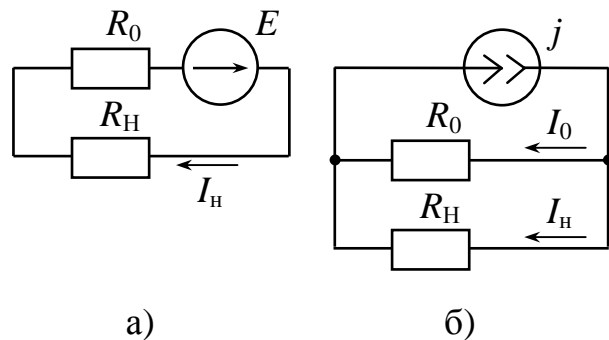


Рис.1.11

1.5. Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду: алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі, у будь який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^c \pm I_k = 0, \quad (1.8)$$

де k – номери віток, які зв'язані з даним вузлом. Якщо струм спрямований до вузла, то він входить у рівняння (1.8) зі знаком "+", і навпаки.

Другий закон Кірхгофа виражає закон збереження енергії: алгебраїчна сума напруг ділянок замкнутого контуру дорівнює нулю в будь-який момент часу:

$$\sum_{k=1}^d U_k = 0, \quad (1.9)$$

де k – номер ділянки, що входить у контур.

Частіше використовують інше формулювання другого закону Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг уздовж контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС вздовж цього ж контуру:

$$\sum_{k=1}^f \pm E_k = \sum_{k=1}^g \pm I_k \cdot R_k. \quad (1.10)$$

Знаки ЕРС E_k , або падінь напруг $I_k \cdot R_k$ залежать від їх напрямків і обра-

ного напрямку обходу контурів.

За першим законом Кірхгофа для схеми треба складати « $n-1$ » рівнянь, де n – кількість вузлів у схемі. За другим законом Кірхгофа треба складати « $m-n+1$ » рівнянь, де m – кількість віток у схемі з невідомими струмами (якщо вітка містить джерело струму, то струм цієї вітки відомий). Отже, система рівнянь за законами Кірхгофа повинна мати стільки рівнянь, скільки невідомих струмів (віток).

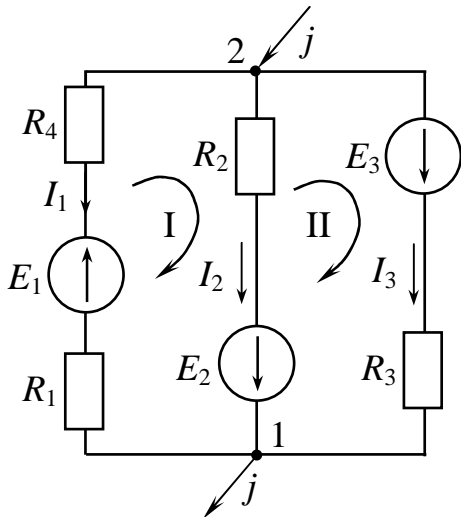


Рис.1.12

Розглянемо порядок розрахунку струмів схеми за законами Кірхгофа для схеми (рис.1.12):

1. Довільно обираємо напрямки струмів у вітках.

2. Визначаємо кількість вузлів і віток з невідомими струмами у схемі, а отже кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа. $n=2$ та $m=3$, тоді за першим законом Кірхгофа складаємо одне рівняння, а за другим – два рівняння.

3. Довільно обираємо напрямки обходу контурів.

контурів.

4. Складаємо і вирішуємо систему відносно невідомих струмів.

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 - I_3 + j = 0 \\ -I_1 \cdot (R_1 + R_4) + I_2 \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = -E_2 + E_3 \end{cases} \quad (1.11)$$

1.6. Енергетичний баланс в електричних колах постійного струму

На підставі закону збереження енергії: кількість тепла, що виділяється в опорах схеми, повинна дорівнювати енергії, яка постачається за той же самий час джерелами енергії, тобто потужність джерел енергії (напруги і струму) дорівнює потужності, що споживається опорами схеми:

$$\sum_{k=1}^h (\pm E_k \cdot I_k) + \sum_{k=1}^s j_k \cdot U_{ab} = \sum_{i=1}^t I_k^2 \cdot R_k, \quad (1.12)$$

де h – кількість ЕРС у схемі;

s – кількість джерел струму у схемі;

t – кількість опорів у схемі;

U_{ab} – напруга між умовною точкою «а», куди втікає струм джерела струму j_k , та умовною точкою «b», звідки струм цього джерела струму j_k витікає.

Правило складання балансу: якщо напрямок джерела ЕРС E_k і напрямок струму I_k , що протікає через нього, збігаються, то доданок $E_k \cdot I_k$ беремо зі знаком "+", і навпаки.

Приклад складання балансу для схеми рис.1.12:

$$-E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_2 + j \cdot U_{21} = I_1^2 \cdot (R_1 + R_4) + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3. \quad (1.13)$$

1.7. Потенціальна діаграма

Потенціальна діаграма – це графік розподілу потенціалу вздовж замкнутого контуру або ділянки кола. По осі абсцис відкладають опори вздовж контуру, один за одним, починаючи від довільно обраної точки, потенціал якої приймають рівним нулю. По осі ординат відкладають потенціали точок контуру.

Розглянемо приклад побудови діаграми для зовнішнього контуру схеми рис. 1.12., тобто для контуру, зображеного на рис. 1.13:

1. Розраховуємо струми схеми;
2. Позначаємо точки обраного контуру.
3. Обираємо напрямок обходу та умовно заземлюємо одну з точок контуру ($\varphi_1 = 0$).
4. Розраховуємо потенціали точок контуру.

Для рис.1.6:

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_3 = \varphi_1 + I_1 \cdot R_1; \quad \varphi_4 = \varphi_3 + E_1; \quad \varphi_2 = \varphi_4 + I_1 \cdot R_4; \quad \varphi_5 = \varphi_2 + E_3 = 0;$$

$$\varphi_1 = \varphi_5 - I_3 \cdot R_3 = 0.$$

5. Будуємо діаграму, можливий вигляд якої – рис.1.14.

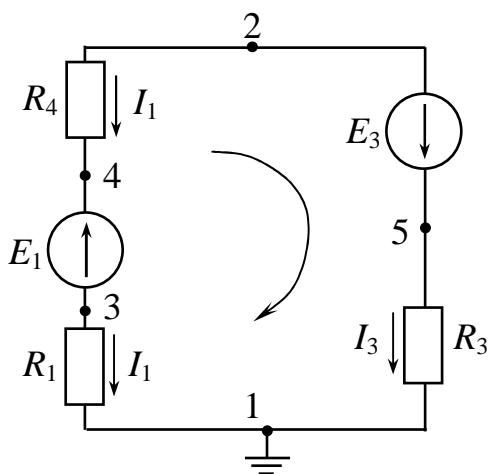


Рис. 1.13

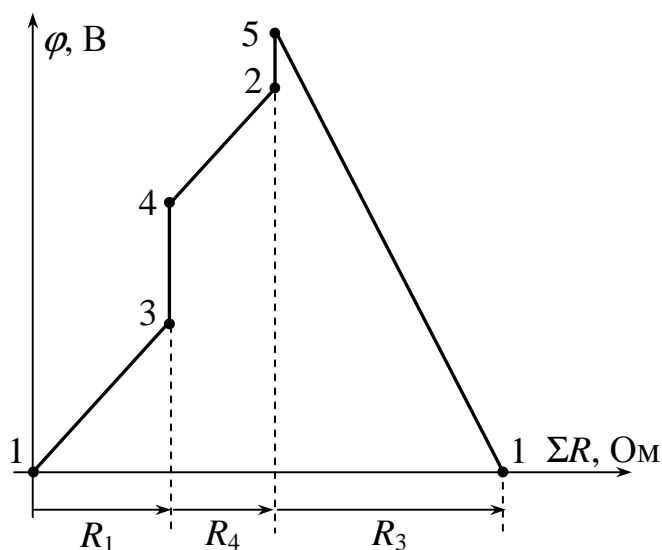


Рис. 1.14

1.8. Методи розрахунку електричних схем

1.8.1. Метод контурних струмів

Метод контурних струмів застосовується для розрахунку кіл будь-якої складності й дозволяє зменшити кількість рівнянь, що треба було б скласти за законами Кірхгофа, а саме з « m » до « $m-n+1$ » де n – кількість вузлів, а m – кількість віток у схемі.

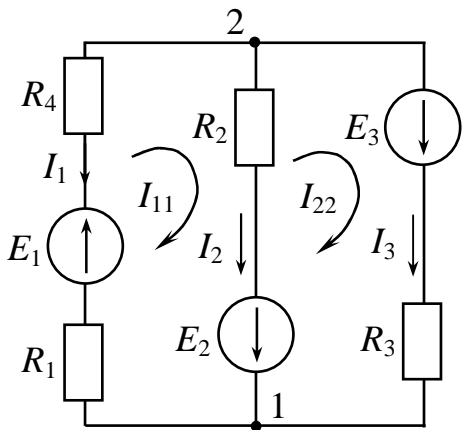


Рис.1.15

Відповідно до цього методу роблять припущення, що в кожному *незалежному* контурі тече свій *контурний* струм (*незалежний* контур – це контур, що містить хоча б одну вітку, яка не входить в інші контури). Кількість рівнянь, що треба скласти за методом, дорівнює кількості незалежних контурів, або числу рівнянь за другим законом Кірхгофа. Струми віток визначають за допомогою контурних струмів.

Потрібно мати на увазі, що контурний струм – це зручне, але умовне розрахункове поняття, фізично існують лише струми віток.

Розглянемо схему рис.1.15, у якій довільно задамося напрямками струмів у вітках I_1, I_2, I_3 і напрямками контурних струмів I_{11}, I_{22} (за годинниковою стрілкою). Складаємо систему за другим законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_1 + I_{11} \cdot R_4 + I_{11} \cdot R_2 - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ I_{22} \cdot R_3 + I_{22} \cdot R_2 - I_{11} \cdot R_2 = E_3 - E_2 \end{cases}, \quad (1.14)$$

$$\text{або} \begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_4 + R_2) - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3) = E_3 - E_2 \end{cases}. \quad (1.15)$$

Позначимо:

$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2$ – власний опір першого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать першому контуру;

$R_{22} = R_2 + R_3$ – власний опір другого контуру, дорівнює сумі усіх опорів, які належать другому контуру;

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ – взаємний опір першого та другого контурів, дорівнює опорі вітки, що належить обом контурам; якщо контурні струми направлені в одну сторону, то всі взаємні опори – від'ємні величини;

$E_{11} = E_1 + E_2$; $E_{22} = E_3 - E_2$ – власні ЕРС першого та другого контурів, які дорівнюють алгебраїчній сумі усіх ЕРС, які належать першому та другому конту-

рам відповідно.

Система (1.15) набуває вигляду:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} = E_{22} \end{cases} \quad (1.16)$$

Після того, як з системи знаходять значення контурних струмів I_{11} і I_{22} , визначають значення струмів віток:

$$I_1 = -I_{11}; \quad I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_3 = I_{22} \quad (1.17)$$

Якщо в колі є джерело струму, ввімкнене в деяку вітку, один з контурних струмів стає відомим (дорівнює струму джерела струму з відповідним знаком), тоді кількість рівнянь скорочується на одиницю.

Якщо схема має три незалежних контурів, то система містить три рівняння:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22} \\ I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33} \end{cases} \quad (1.18)$$

і загальне рішення системи має вигляд:

$$\begin{aligned} I_{11} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \\ I_{22} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{23}}{\Delta}, \\ I_{33} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{33}}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.19)$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$ – головний визначник системи (1.18);

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \text{ – алгебраїчне доповнення, що отримують з головно-}$$

го визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і першого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+1}$;

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \text{ – алгебраїчне доповнення, що отримують з головно-}$$

го визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і другого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+2}$ і т. ін.

1.8.2. Метод вузлових потенціалів. Метод двох вузлів

Цей метод розрахунку електричних кіл, відповідно до якого за невідомі приймаються потенціали вузлів, після визначення яких можна знайти струм

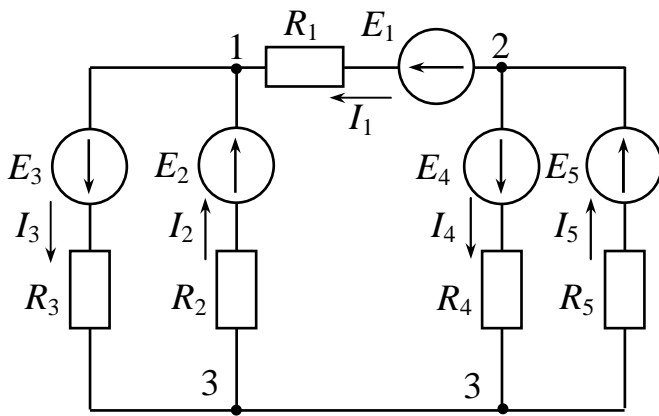


Рис. 1.16

будь-якої вітки за законом Ома. Врахуємо, що завжди можна потенціал одного з вузлів схеми прийняти рівним нулю, тому система рівнянь для визначення інших невідомих потенціалів вузлів повинна мати « $n-1$ » рівнянь. В основі методу – закони Ома та перший закон Кірхгофа.

Розглянемо порядок розрахунку за методом вузлових потенціалів на прикладі схеми рис. 1.16.

1. Довільно направляємо струми в вітках кола.

2. Приймаємо $\varphi_3 = 0$.

3. Складаємо систему рівнянь в загальному вигляді за методом, що містить $n-1$ рівнянь. У нашому випадку

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} = \sum_1 \pm E_k \cdot G_k \\ -\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} = \sum_2 \pm E_k \cdot G_k \end{cases} \quad (1.20)$$

4. Визначаємо власні й взаємні провідності вузлів

$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3$ – власна провідність вузла 1, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 1;

$G_{22} = G_4 + G_5$ – власна провідність вузла 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 2;

$G_{12} = G_{21} = 1/R_1$ – взаємна провідність вузлів 1 і 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що напряду поєднують ці вузли,

де $G_1 = \frac{1}{R_1}, G_2 = \frac{1}{R_2}, G_3 = \frac{1}{R_3}, G_4 = \frac{1}{R_4}, G_5 = \frac{1}{R_5}$ – провідності віток.

5. Визначаємо вузлові струми.

$\sum_1 \pm E_k \cdot G_k = E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 - E_3 \cdot G_3$, $\sum_2 \pm E_k \cdot G_k = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5$ – вузлові струми відповідно першого та другого вузлів; добуток $E_k \cdot G_k$ беремо зі знаком "+", якщо ЕРС E_k спрямована до вузла, відносно якого визначається

вузловий струм, і навпаки.

6. Вирішуємо систему (визначаємо потенціали вузлів кола).

5. За законом Ома визначаємо струми віток.

$$\begin{aligned} I_1 &= (\varphi_2 - \varphi_1 + E_1) \cdot G_1, \quad I_2 = (-\varphi_1 + E_2) \cdot G_2, \quad I_3 = (\varphi_1 + E_3) \cdot G_3, \\ I_4 &= (\varphi_2 + E_4) \cdot G_4, \quad I_5 = (-\varphi_2 + E_5) \cdot G_5. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Деякі особливості застосування методу.

Припустимо, що в схемі рис. 1.16 у вітці, де тече струм I_5 , немає опору R_5 , тоді $\varphi_2 = E_5$ і достатньо тільки одного рівняння з системи (1.20) – першого.

Розглянемо частковий випадок методу вузлових потенціалів - *метод двох вузлів*. Якщо в схемі два вузли, то за методом вузлових потенціалів потрібне лише одне рівняння для визначення потенціалу одного з вузлів, бо потенціал другого дорівнює нулю. Так, для схеми рис.1.15, якщо $\varphi_2 = 0$, то:

$$\varphi_1 \cdot \overbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}^{G_{11}} = \overbrace{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}^{\sum \pm E_k \cdot G_k}, \quad (1.22)$$

$$\text{де } G_1 = \frac{1}{R_1 + R_4}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2}, \quad G_3 = \frac{1}{R_3}.$$

Враховуючи, що $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1$, отримуємо вираз для напруги між вузлами 1 і 2:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}. \quad (1.23)$$

Останнє рівняння є основою *метода двох вузлів*, що застосовується для знаходження струмів у схемах, подібних розглянутій (після визначення напруги між двома вузлами струми віток визначають за законом Ома).

1.8.3. Принцип накладання і метод накладання

Принцип накладання (суперпозиції): струм у будь-якій вітці лінійного електричного кола буде дорівнювати алгебраїчній сумі струмів (так звані часткові струми), що викликані кожним з джерел енергії окремо. Впливає принцип з лінійності рівнянь, що отримані на основі законів Кірхгофа для кіл з постійними параметрами.

З принципу накладення впливає метод накладання. Розглянемо порядок розрахунку за методом на прикладі схеми на рис. 1.17,а.

1. Довільно направляємо струми у вітках.

2. Розраховуємо часткові струми від дії кожної EPC чи кожного джерела струму окремо. При цьому треба закорочувати інші джерела напруги та розми-кати джерела струму (враховуємо також, що не треба закорочувати внутрішній опір джерела напруги, якщо останній заданий).

Так, для схеми рис. 1.17,б визначаємо струми від дії $EPC E_1$:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_2}{R_3 + R_4 + R_2}}; \quad I_2' = I_1' \cdot \frac{(R_3 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_2}; \quad I_3' = I_1' - I_2'. \quad (1.24)$$

Для схеми рис. 1.17,в визначаємо струми від дії $EPC E_2$:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{(R_3 + R_4) \cdot R_1}{R_3 + R_4 + R_1}}; \quad I_1'' = I_2'' \cdot \frac{(R_3 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_1}; \quad I_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_3 + R_4 + R_1}. \quad (1.25)$$

3. Алгебраїчно підсумовуємо часткові струми, орієнтуючись при цьому на обрані напрямки струмів у вихідній схемі.

Для вихідної схеми рис. 1.17,а, I_2 та I_3 :

$$I_1 = I_1' - I_1'', \quad I_2 = I_2' - I_2'', \quad I_3 = I_3' + I_3''. \quad (1.26)$$

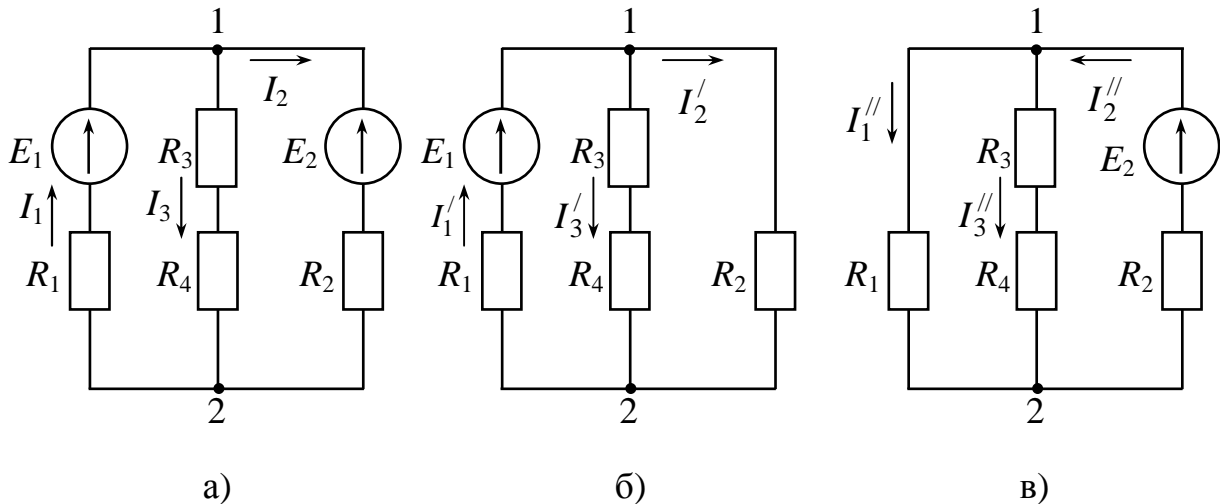


Рис.1.17

1.8.4. Теорема про еквівалентний генератор. Метод еквівалентного генератора для розрахунку струму в одній вітці

У будь-якій електричній схемі (рис. 1.18,а) завжди можна виділити яку-небудь вітку, а всю частину схеми, що залишилася, незалежно від її складності, умовно позначити прямокутником з двома вихідними затискачами (рис.1.18,б). По відношенню до виділеної вітки ця частина схеми, що залишилася, є *двополюсником*.

Таким чином, *двополюсник* – це узагальнена назва схеми, що двома своїми вихідними затискачами приєднується до виділеної вітки, яка містить опір

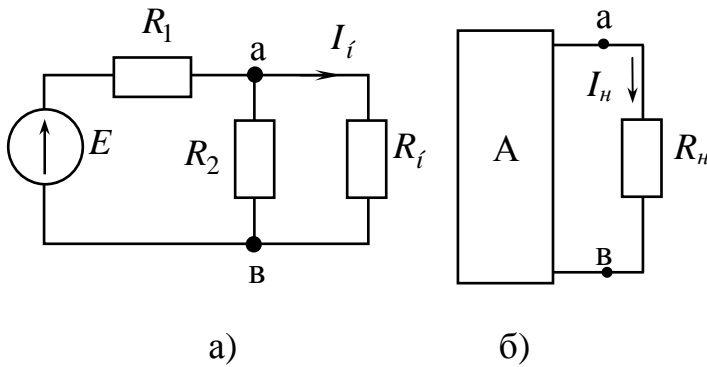


Рис. 1.18

R_f . Двополюсники бувають активними (якщо мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії) та пасивними (якщо не мають у своєму складі джерел енергії).

Теорема Тевенена про *еквівалентний генератор*: будь-який активний двополюсник по

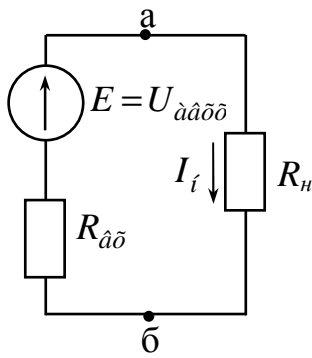


Рис. 1.19

відношенню до виділеної вітки можна замінити еквівалентним джерелом напруги, *ЕРС* якого дорівнює напрузі холостого ходу на розімкнутих затискачах "аб", а внутрішній опір – вхідному опору двополюсника:

$$I = \frac{U_{\hat{a}\hat{b}}}{R_f + R_{\hat{a}\hat{b}}}. \quad (1.27)$$

де $U_{a\hat{v}xx}$ - напруга холостого ходу;

$R_{\hat{v}x}$ – вхідний опір двополюсника відносно вхідних затискачів.

Формула (1.27) відповідає схемі рис. 1.19.

Використовують теорему для розрахунку струму в одній вітці електричного кола. Цей метод розрахунку за розглянутою теоремою має назву еквівалентного генератора або активного двополюсника.

Визначимо струм I_2 за методом для схеми рис. 1.20,а.

1. Вириваємо опір R_2 – рис. 1.20,б.

2. Визначають $R_{\hat{v}x}$, при цьому закорочують усі *ЕРС* (якщо у джерела напруги заданий внутрішній опір, то його не закорочують), і розривають всі джерела струму – рис. 1.20,в:

$$R_{\hat{v}x} = \frac{R_1 \cdot (R_3 + R_4)}{R_3 + R_4 + R_1}$$

3. Визначають напругу холостого ходу на розімкнутих затискачах U_{xx} :

$$U_{a\hat{v}xx} = -E_2 + I_{xx} \cdot (R_3 + R_4),$$

де струм холостого ходу: $I_{xx} = \frac{E_1}{R_3 + R_4 + R_1}$.

4. За формулою (1.27) визначають струм I_2 .

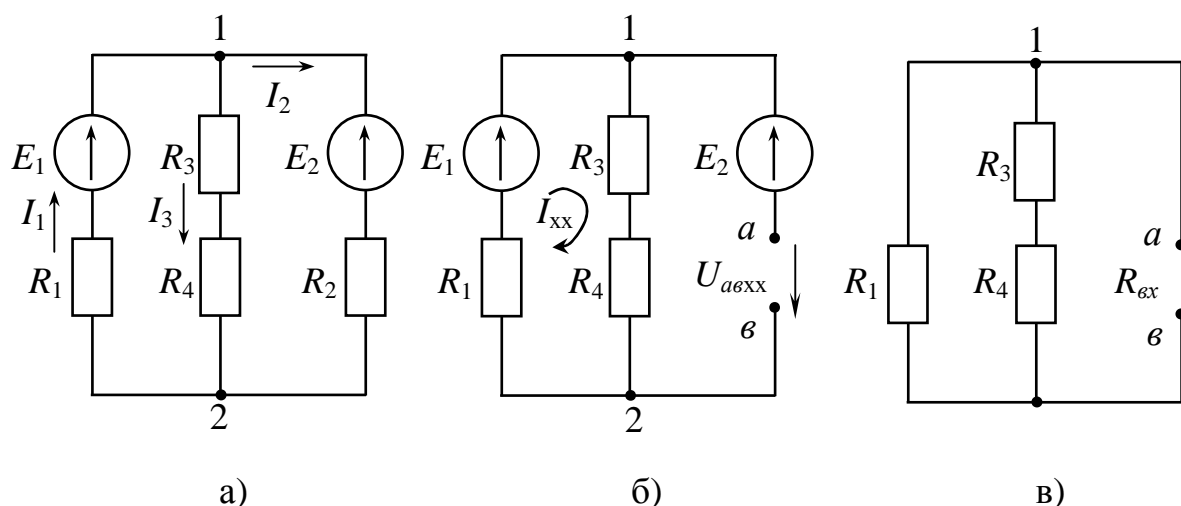


Рис. 1.20

1.9. Перетворення зірки опорів на еквівалентний трикутник опорів

Зіркою опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому всі початки опорів з'єднані в одну точку (рис. 1.21,а), трикутником опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому початок одного опору з'єднується з кінцем іншого (рис. 1.21,б).

Схеми рис. 1.21,а і рис. 1.21,б еквівалентні у відношенні струмів I_1, I_2, I_3 та потенціалів вузлів 1, 2 і 3, якщо виконуються наступні співвідношення:

$$R_{12} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}; \quad (1.28)$$

$$R_{13} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}; \quad (1.29)$$

$$R_{23} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_2 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_3}} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}; \quad (1.30)$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \quad (1.31) \quad R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \quad (1.32)$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \quad (1.33)$$

Формули (1.28) ÷ (1.30) застосовують для переходу від зірки опорів до трикутника, а формули (1.31) ÷ (1.33) – для переходу від трикутника опорів до зірки опорів.

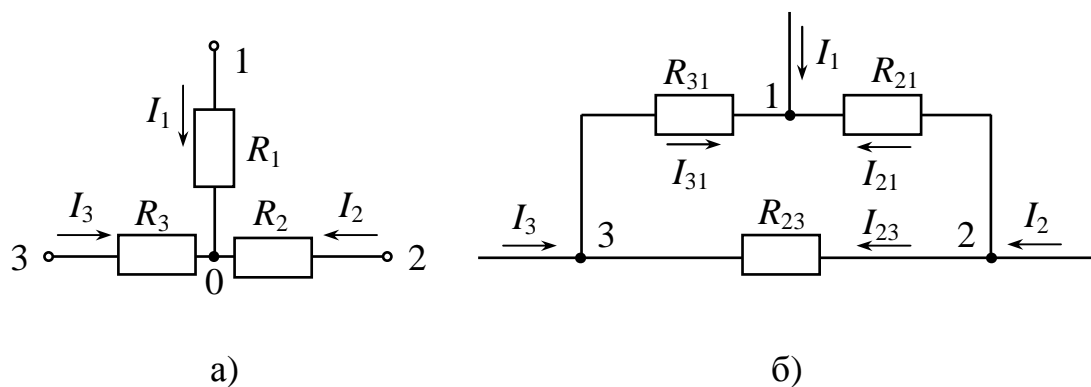


Рис. 1.21

Контрольні запитання

- 1) Дайте визначення поняттям «електричне коло», «електрична схема»; поясніть, з яких елементів складається електричне коло і схема.
- 2) Поясніть, що таке лінійне і нелінійне, розгалужене й нерозгалужене електричне коло.
- 3) Дайте визначення джерел електрорушійної сили та струму. Поясніть, як проводять еквівалентну заміну реального джерела *ЕРС* джерелом струму (і навпаки).
- 4) Поясніть, як записують закон Ома для ділянки кола, що містить джерела *ЕРС* та активні опори.
- 5) Сформулюйте закони Кірхгофа. Поясніть, як проводять розрахунок струмів за законами Кірхгофа.
- 6) Поясніть, як проводять баланс потужностей у колах постійного струму.
- 7) На прикладі поясніть, як будують потенціальну діаграму для контуру кола.
- 8) Поясніть, як проводять розрахунок струмів методом вузлових потенціалів. Наведіть особливості методу.
- 9) Поясніть, як проводять розрахунок струмів методом двох вузлів.
- 10) Поясніть, як проводять розрахунок струмів методом контурних струмів. Наведіть особливості методу.
- 11) Поясніть, як проводять розрахунок струмів методом накладання.
- 12) Поясніть, як здійснюють перетворення зірки опорів на еквівалентний трикутник опорів (і навпаки).
- 13) Наведіть теорему Тевенена про еквівалентний генератор. Поясніть, як проводять розрахунок струму методом еквівалентного генератора.
- 14) Дайте порівняльну характеристику методів розрахунку електричних кіл постійного струму.

Розділ 2. ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

2.1. Основні величини, що характеризують синусоїдний струм

Струм, що змінюється за законом синуса, називається *синусоїдним* (або гармонійним). Миттєве значення такого струму:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi_i\right), \quad (2.1)$$

де $(\omega \cdot t + \varphi)$ – фаза, аргумент синуса, характеризує стан коливання,

I_m – амплітудне, тобто максимальне значення струму, А;

φ_i – початкова фаза струму, визначає зсув синусоїди відносно нуля (якщо $\varphi > 0$ синусоїда зсунута вліво, а якщо $\varphi < 0$ синусоїда зсунута вправо), рад;

T – період, тобто час, за який відбувається одне повне коливання, с;

f – частота коливань, тобто кількість коливань в секунду, 1/с=Гц;

ω – кутова частота, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, рад/с.

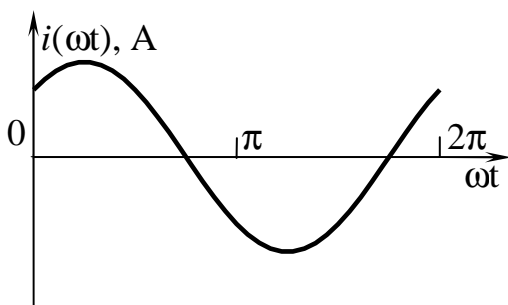


Рис. 2.1

На рис. 2.1 показана крива струму (так звана хвильова діаграма) при $\varphi = 45^\circ$.

Синусоїдні струми відносно низьких частот отримують за допомогою синхронних генераторів, а синусоїдні струми високої частоти (більш десятків кілогерц) – за допомогою напівпровідникових генераторів.

Синусоїдна величина характеризується миттєвим, амплітудним, середнім і діючим значеннями.

Середнє значення синусоїдної величини – це її середнє значення за половину періоду:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \approx 0,637 \cdot I_m. \quad (2.2)$$

Діюче значення синусоїдного струму чисельно дорівнює значенню постійного струму, який за час, що дорівнює періоду T , викликає виділення такої кількості тепла в провіднику з опором R , що і синусоїдний струм за той же час T . Діючий струм називають ще *ефективним* або *середньоквадратичним*:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 \cdot \sin \omega t \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m. \quad (2.3)$$

Синусоїдну величину характеризують коефіцієнтом амплітуди

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} \text{ і коефіцієнтом форми } k_\phi = \frac{I}{I_{\text{ср}}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2 / \pi \cdot I_m} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}.$$

2.2. Синусоїдний струм активного опору, індуктивності та ємності

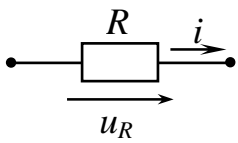


Рис. 2.2

Розглянемо ділянку кола рис. 2.2. По активному опору тече синусоїдний струм $i_R = I_{mR} \cdot \sin \omega t$. За законом Ома:

$$u_R = i_R \cdot R = I_{mR} \cdot R \cdot \sin \omega t = U_{mR} \cdot \sin \omega t, \quad (2.4)$$

де $U_{mR} = I_{mR} \cdot R$ – амплітудне значення напруги на активному

опорі.

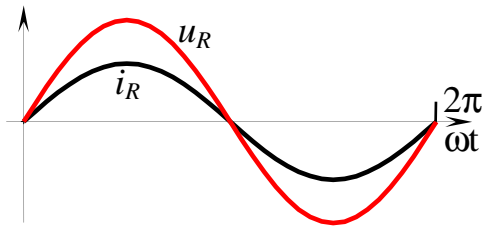


Рис. 2.3

З (2.4) бачимо, що струм і напруга на активному опорі співпадають за фазою (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює нулю: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$) – рис.2.3.

Миттєва потужність – добуток миттєвої напруги на ділянці кола і миттєвого струму. Для активного опору:

$$P_R = u_R \cdot i_R = U_{mR} \cdot I_{mR} \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{U_{mR} \cdot I_{mR}}{2} \cdot (1 - \cos(2 \cdot \omega t)). \quad (2.5)$$

Активна потужність – це середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_R = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_R dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_{mR} \cdot I_{mR}}{2} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{U_{mR}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{mR}}{\sqrt{2}} = U \cdot I = I^2 \cdot R. \quad (2.6)$$

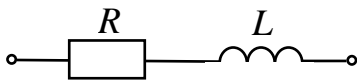


Рис. 2.4

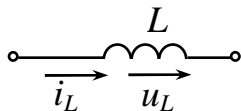


Рис. 2.5

Будь-яка обмотка (катушка) має індуктивність і активний опір. На схемі катушку позначають так, як показано на рис. 2.4. Як відомо, *індуктивність* – це елемент схеми заміщення, який дозволяє врахувати при розрахунках явища самоіндукції і накопичування енергії магнітного поля. Виділимо зі схеми рис. 2.4 тільки одну індуктивність – рис.2.5. Нехай по активному опору тече синусоїдний струм: $i_L = I_{mL} \cdot \sin \omega t$. У катушці наводиться ЕРС:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I_{mL} \cos(\omega t) = -\omega \cdot L \cdot I_{mL} \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (2.7)$$

Позитивний напрямок ЕРС співпадає зі струмом, а напруга на індуктивності: $u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_{mL} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{mL} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ),$ (2.8)

де $U_{mL} = I_{mL} \cdot \omega \cdot L = I_{mL} \cdot X_L$ – амплітудне значення напруги на індуктивному опорі; (2.9)

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L - \text{індуктивний опір.} \quad (2.10)$$

З (2.8) бачимо, що напруга на індуктивності випереджає струм на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$). Тобто якщо $u_L = 0$, то $i_L = \max$ – див рис.2.6.

Миттєва потужність індуктивності:

$$p_L = u_L \cdot i_L = U_{mL} \cdot I_{mL} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{U_{mL} \cdot I_{mL}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t). \quad (2.11)$$

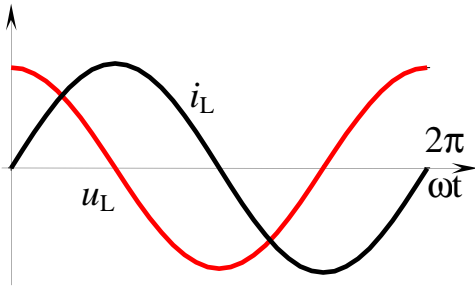


Рис. 2.6

Миттєва потужність індуктивності може мати позитивний знак – тоді індуктивність накопичує енергію, що береться з джерела, і від'ємний знак – тоді індуктивність віддає енергію в джерело.

Активна потужність індуктивності – середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_L = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} p_L dt = 0. \quad (2.12)$$

Розглянемо ділянку кола рис. 2.7. Ємність, як елемент схеми заміщення, дозволяє врахувати явища зарядки конденсатора і накопичування енергії електричного поля. Якщо $u_C = \text{const}$, то $i_C = \frac{dq}{dt} = 0$.

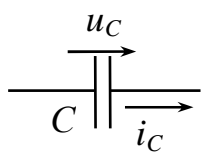


Рис. 2.7

$$\text{Якщо } u_C = U_{mC} \cdot \sin(\omega t), \text{ то заряд} \quad (2.13)$$

$$q = C \cdot u_C = C \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t). \quad (2.14)$$

Конденсатор при цьому періодично перезаряджається, що супроводжується протіканням через нього зарядного струму:

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = \frac{d(C \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t))}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_{mC} \cdot \cos(\omega t) = I_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (2.15)$$

$$\text{де } I_{mC} = \frac{U_{mC}}{1/\omega \cdot C} = \frac{U_{mC}}{X_C} - \text{амплітудне значення струму через ємність,} \quad (2.16)$$

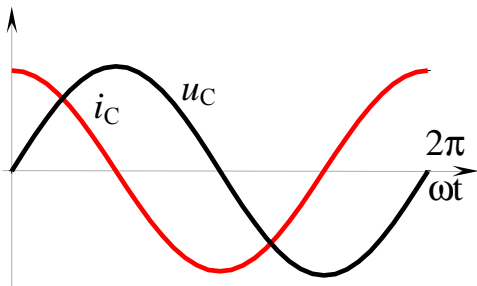


Рис. 2.8

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} - \text{ємнісний опір.} \quad (2.17)$$

Таким чином, струм ємності випереджає напругу на ній на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$) – рис.2.8.

Миттєва потужність ємності може мати

позитивний і від'ємний знаки:

$$p_C = u_C \cdot i_C = U_{mC} \cdot I_{mC} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{U_{mC} \cdot I_{mC}}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t). \quad (2.18)$$

$$\text{Активна потужність ємності: } P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_C dt = 0. \quad (2.19)$$

2.3. Тригонометричний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

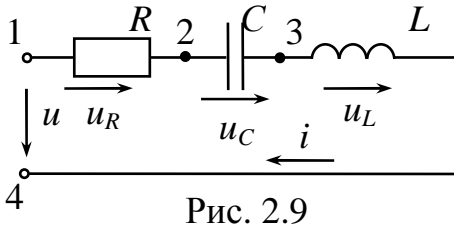


Рис. 2.9

Розглянемо послідовне з'єднання активного опору, ємності, індуктивності (рис.2.9). Нехай до кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. У колі протікає синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень напруг: $u = u_R + u_C + u_L$. (2.20)

З урахуванням раніше розглянутого

$$u = I_m \cdot R \cdot \sin(\omega t) - I_m \cdot X_C \cdot \cos(\omega t) + I_m \cdot X_L \cdot \cos(\omega t), \quad (2.21)$$

$$\text{або } U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot (R \cdot \sin(\omega t) + (X_L - X_C) \cdot \cos(\omega t)). \quad (2.22)$$

$$\text{Позначимо } X = X_L - X_C \text{ – реактивний опір кола.} \quad (2.23)$$

$$\text{Тоді } R \cdot \sin(\omega t) + X \cdot \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.24)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{X}{R} \text{ – кут зсуву фаз між напругою } u \text{ і струмом } i; \quad (2.25)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ – модуль повного опору кола.} \quad (2.26)$$

Отже вираз (2.23) можна записати:

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.27)$$

$$\text{або } U_m = I_m \cdot Z \text{ – закон Ома.} \quad (2.28)$$

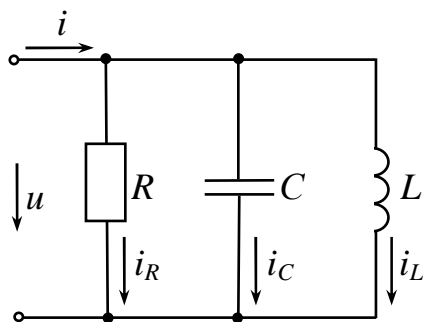


Рис. 2.10

Розглянемо схему рис. 2.10 – паралельне з'єднання трьох елементів – активного опору, ємності й індуктивності.

$u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$ – напруга та струм на вході кола. Перший закон Кірхгофа для кола: $i = i_R + i_C + i_L$. (2.29)

З урахуванням раніш розглянутого струми віток дорівнюють:

$$i_R = U_m \cdot G \cdot \sin(\omega t), \quad i_C = U_m \cdot B_C \cdot \cos(\omega t) = U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t), \quad i_L = -U_m \cdot B_L \cdot \cos(\omega t),$$

де $G = \frac{1}{R}$ – активна провідність; (2.30)

$$B_C = \omega \cdot C \text{ – реактивна ємнісна провідність;} \quad (2.31)$$

$$B_L = \frac{1}{\omega \cdot L} \text{ – реактивна індуктивна провідність.} \quad (2.32)$$

З урахуванням (2.30), (2.31) і (2.32) вираз (2.29) набуває вигляду:

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot [G \cdot \sin(\omega t) - (B_L - B_C) \cdot \cos(\omega t)], \text{ або} \quad (2.33)$$

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot \sqrt{G^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi). \quad (2.34)$$

Позначимо φ - кут зсуву фаз між напругою u і струмом i на вході кола:

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{B}{G}, \text{ де} \quad (2.35)$$

$$B = B_L - B_C \text{ – повна реактивна провідність.} \quad (2.36)$$

Застосуємо позначення:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \text{ – повна провідність кола.} \quad (2.37)$$

$$\text{Остаточно маємо: } I_m = U_m \cdot Y \text{ – закон Ома.} \quad (2.38)$$

Формули (2.20), (2.23), (2.25), (2.26), (2.28), (2.29), (2.30), (2.31), (2.32), (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) – основа для розрахунку найпростіших кіл синусоїдного струму тригонометричним методом.

2.4. Потужність у колах синусоїдного струму (активна, реактивна, повна)

В колах синусоїдного струму розрізняють повну, активну, реактивну потужності.

Припустимо, до якогось складного кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, на вході кола тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

Миттєва потужність:

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U \cdot I \cdot (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)). \quad (2.39)$$

Активна потужність – середнє значення p за період:

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} p \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cdot \pi = U \cdot I \cdot \cos \varphi, \quad (2.40)$$

де $\cos \varphi$ - коефіцієнт потужності.

При розрахунках синусоїдних кіл застосовують поняття *реактивної* потужності: $Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$. (2.41)

Реактивна потужність додатна при активно-індуктивному ($R-L$) навантаженні, коли $\varphi > 0$, і від'ємна при активно-ємнісному навантаженні ($R-C$), коли $\varphi < 0$. Тобто індуктивність можна розглядати як споживача реактивної енергії, а ємність – як її генератор.

Оскільки електричні машини й апарати конструюють для роботи на певні значення струмів і напруг, їх характеризують не активною, що залежить від $\cos \varphi$, а *повною* потужністю:

$$S = U \cdot I. \quad (2.42)$$

Повна потужність показує ту активну потужність, яку джерело енергії може віддати споживачу, якщо останній працює при $\cos \varphi = 1$.

Трикутники опорів, провідностей і потужностей представлені на рис.2.11.

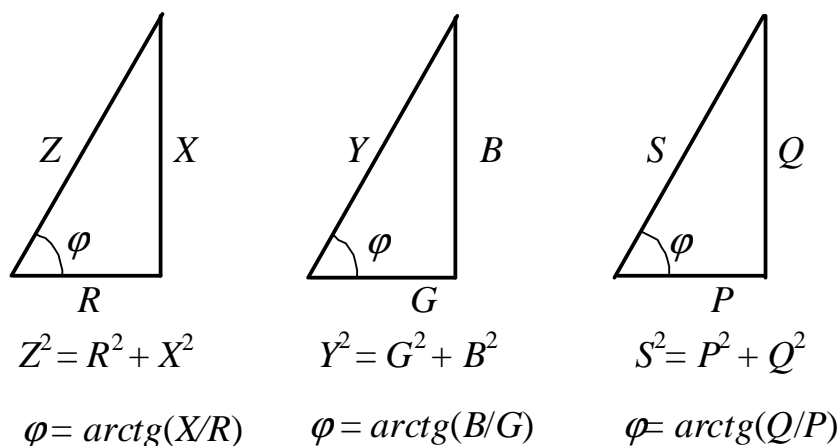


Рис. 2.11

2.5. Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл

Розрахунок електричних кіл суттєво полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами або комплексними числами.

Відповідно до формули Ейлера комплексне число $e^{j \cdot \alpha}$ дорівнює: $e^{j \cdot \alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, і на комплексній площині зображується вектором, що має одиничну довжину та складає з віссю дійсних чисел кут α (рис. 2.12). Проекція $e^{j \cdot \alpha}$ на ось дійсних чисел – $\cos \alpha$, а на ось уявних чисел – $\sin \alpha$, де $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Якщо замість числа $e^{j \cdot \alpha}$ розглянути число $I_m \cdot e^{j \cdot \alpha}$, то відповідно до фор-

мули Ейлера $I_m \cdot e^{j \cdot \alpha} = I_m \cdot \cos \alpha + j \cdot I_m \cdot \sin \alpha$, і на комплексній площині воно зображується вектором, що має довжину I_m і також складає з віссю дійсних чисел кут α . Кут α може бути будь-яким. Припустимо, що $\alpha = \omega \cdot t + \varphi$, тоді

$$I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (2.43)$$

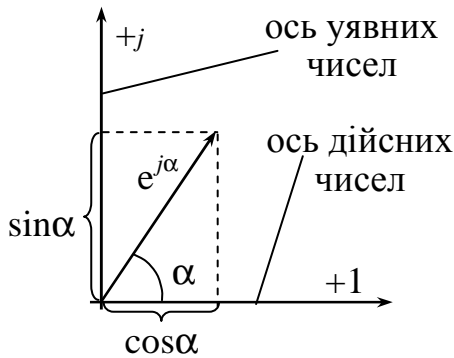


Рис.2.12

де $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – дійсна частина,

$I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ – коефіцієнт при уявній одиниці j .

Таким чином, синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ можна уявити як проекцію вектора $I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$, що обертається з кутовою швидкістю ω , на ось уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується

амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення вектора $I_m \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t)}$ повністю визначає синусоїдну функцію $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, а комплексне число $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j \cdot \varphi}$ зветься комплексною амплітудою струму ($e^{j \cdot \omega \cdot t}$ – оператор обертання). Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити простіші операції.

Примітка: на комплексній площині додатні кути відкладаються проти годинникової стрілки від осі дійсних чисел, від'ємні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Розглянемо приклад розв'язання задачі за допомогою комплексної площини: для схеми рис. 2.13 задані струми $i_1 = 10 \cdot \sin(\omega t - 60)$ та $i_2 = 5 \cdot \sin(\omega t + 30)$.

Треба знайти струм i .

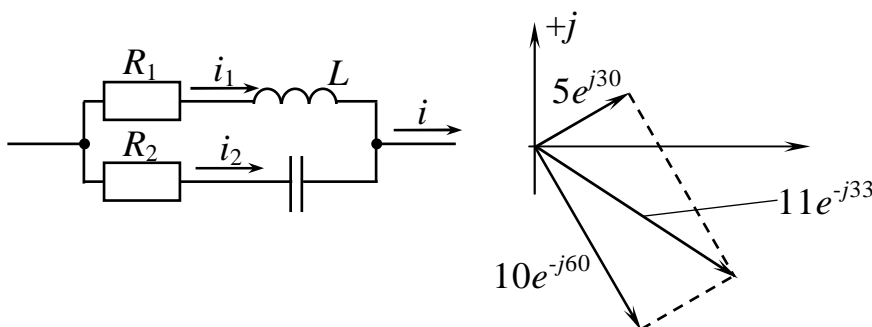


Рис. 2.13

За першим законом Кірхгофа цей струм дорівнює $i = i_1 + i_2$

Будуємо на комплексній площині в обраному масштабі вектори, що зображують

струми i_1, i_2 , та складаємо їх для отримання загального струму i .

2.6. Форми запису комплексного числа. Дії з комплексними числами

Існують три *форми* запису комплексних чисел:

- показова – $\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$;
- алгебраїчна – $\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$, де 4,33 – дійсна частина, $j \cdot 2,5$ – уявна частина;
- тригонометрична – $\underline{I}_m = 5 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$, як перехід від показової форми ($\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$) до алгебраїчної ($\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$).

Дії над комплексними числами:

- множення роблять у показовій формі, наприклад:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} \cdot 15 \cdot e^{-j \cdot 40^\circ} = 75 \cdot e^{-j \cdot 10^\circ}.$$

- ділення роблять також у показовій формі, наприклад:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{75 \cdot e^{-j \cdot 10^\circ}}{15 \cdot e^{-j \cdot 40^\circ}} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}.$$

- складання або віднімання роблять в алгебраїчній формі, наприклад:

$$\underline{I}_{m1} = 10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 10 \cdot \cos(-60^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(-60^\circ) = 5 - j \cdot 8,66,$$

$$\underline{I}_{m2} = 10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 10 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 4,33 + j \cdot 2,5,$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 5 - j \cdot 8,66 + 4,33 + j \cdot 2,5 = 9,33 - j \cdot 6,16.$$

Перехід від алгебраїчної до показової форми має деякі особливості.

Так, якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в першій або четвертій чвертях комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{j \cdot \left(\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ},$$

$$\underline{I}_m = 4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{-j \cdot \left(\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у другій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{j \cdot \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{j \cdot 150^\circ}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число знаходиться в третій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{-j \cdot \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)^\circ} = 5 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ}.$$

Примітка: $\frac{1}{j} = -j$; множення вектора на уявне число j означає його оберт

на 90° проти годинникової стрілки.

2.7. Символічний (комплексний) метод розрахунку кіл синусоїдного струму. Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Сутність методу полягає в тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені відносно комплексних струмів, EPC і напруг. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщає її, диференціювання замінюється множенням на $j\omega$, а інтегрування – діленням на $j\omega$.

Розглянемо просте електричне коло (рис. 2.9), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$ і в якому тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Інтегрально-диференціальне рівняння, що характеризує стан кола (другий закон Кірхгофа) – $u = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int u_C dt$. (2.44)

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг, має вигляд (другий закон Кірхгофа в комплексній формі):

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_m - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_m = \underline{I}_m \cdot \left(R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right) = \quad (2.45)$$

$$= \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} = \underline{I}_m \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I}_m \cdot Z \cdot e^{j\varphi},$$

де $X_L = \omega \cdot L$, $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$, $X = X_L - X_C$ відповідно індуктивний, ємнісний, реактивний опори,

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – модуль повного опора,

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$ – кут зсуву фаз між струмом і напругою.

Введемо позначення:

$$\underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = Z \cdot e^{j\varphi} \text{ – комплекс повного опора кола.} \quad (2.46)$$

$$\text{Тоді закон Ома в комплексній формі має вигляд } \underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}. \quad (2.47)$$

Розглянемо коло рис.2.10, до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ і на вході якого тече синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів в інтегрально-диференціальній формі:

$$i = i_R + i_L + i_C = u \cdot G + \frac{1}{L} \cdot \int u \cdot dt + C \cdot \frac{du}{dt}, \quad (2.48)$$

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струмів і напруги має вигляд (перший закон Кірхгофа в комплексній формі):

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m \cdot G + \frac{\underline{U}_m}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{\underline{U}_m}{-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \underline{U}_m \cdot (G - j \cdot (B_L - B_C)) = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC} \quad (2.49)$$

– перший закон Кірхгофа в комплексній формі.

Висновки:

- алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю $\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$;
- алгебраїчна сума комплексних напруг уздовж замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС: $\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \sum_{k=1}^m \underline{E}_k$;
- оскільки в основі усіх розглянутих методів розрахунку кіл постійного струму лежать закони Кірхгофа, то всі вони можуть бути використані для розрахунку кіл синусоїдного струму в комплексній формі.

2.8. Комплексна провідність, залежність між опором і провідністю ділянки кола

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на цій ділянці кола:

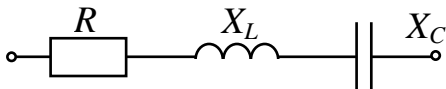


Рис.2.14

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j\varphi}} = Y \cdot e^{-j\varphi} = G - j \cdot B. \quad (2.50)$$

де G – активна провідність;

$B = B_L - B_C$ – реактивна провідність.

Знайдемо G і B , якщо відомі R , $X = X_L - X_C$.

$$\underline{Y} = G - j \cdot B = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{(R - j \cdot X)}{(R + j \cdot X) \cdot (R - j \cdot X)} = \frac{(R - j \cdot X)}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (2.51)$$

$$\text{Тобто } G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}. \quad (2.52)$$

Знайдемо R і X , якщо відомі G і B :

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{(G + j \cdot B)}{(G - j \cdot B) \cdot (G + j \cdot B)} = \frac{(G + j \cdot B)}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \cdot \frac{B}{G^2 + B^2}. \quad (2.53)$$

$$\text{Тобто } R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2} \quad (2.54)$$

2.9. Комплексна форма запису потужності.

Баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму

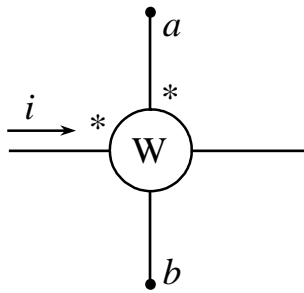


Рис. 2.15

Припустимо, напруга і струм на ділянці кола –
 $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$, $\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$.

Кут зсуву фаз між напругою і струмом $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.
 Тоді комплексом повної потужності визначається:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot \varphi} \\ &= P + j \cdot Q = U \cdot I \cdot \cos \varphi + U \cdot I \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.55)$$

де $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i}$ – спряжене комплексне значення струму \underline{I} .

Вимірювання потужності проводиться ватметром, який має дві котушки: одна – нерухома, підключена послідовно з ділянкою кола, де роблять вимірювання потужності, має малий опір; друга – рухома, підключена паралельно цієї ж ділянці кола, має великий опір.

Знак «*» ставлять на кінцях однойменних затискачів. Ватметр, показаний на рис. 2.15, вимірює значення: $\operatorname{Re} \left[\tilde{S} \right] = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{av} \cdot \underline{I}^* \right] = U_{av} \cdot I \cdot \cos \left(\underline{U}_{av} \cdot \underline{I} \right)$.

У будь-якому колі повинен виконуватися баланс як активних, так і пасивних потужностей, тобто сума всіх потужностей, що віддаються джерелом, повинна дорівнюватись сумі всіх потужностей, що приймаються споживачами:

$$\sum_{k=1}^n P_{\text{кджер}} = \sum_{k=1}^m P_{\text{кспож}}; \quad \sum_{k=1}^n Q_{\text{кджер}} = \sum_{k=1}^m Q_{\text{кспож}}.$$

2.10. Векторні й топографічні діаграми

Векторні діаграми – діаграми, що зображують сукупність векторів синусоїдних величин, що розглядають, на комплексній площині з дотриманням їх взаємної орієнтації. *Топографічна* діаграма – сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі. Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то

отримуємо векторно-топографічну діаграму.

Хвильова (часова) діаграма – крива миттєвих значень струмів, напруг тощо.

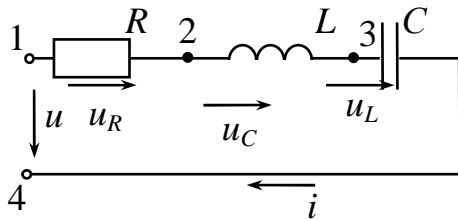


Рис. 2.16

Розглянемо порядок побудови векторно-топографічної діаграми на прикладі схеми рис.2.16:

- розраховуємо комплекс струму \underline{I}_m ;
- Визначаємо $U_{mR} = I_m \cdot R$, $U_{mL} = I_m \cdot X_L$,
 $U_{mC} = I_m \cdot X_C$;
- вибираємо масштаби за струмом і за напругою – m_I , m_U ;
- позначаємо точки на схемі (1-4);

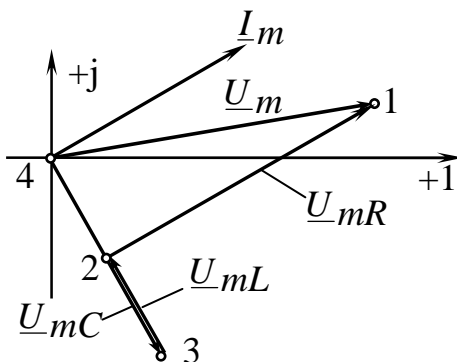


Рис. 2.17

- останню точку (4 в нашому випадку) розташовуємо на початку координат, обхід робимо назустріч струму послідовно від останньої точки до першої; при цьому пам'ятаємо, що напруга на активному опорі співпадає зі струмом за фазою, напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90° , напруга на ємності відстає від струму за фазою на 90° .

На рис. 2.17 наведено приклад побудови діаграми у випадку активно-ємнісного характеру кола (струм \underline{I}_m випереджає напругу $\underline{U}_m = \underline{U}_{m14}$ на вході кола).

2.11. Резонанс у колах синусоїдного струму (резонанс напруг, струмів)

Резонансний режим – це такий режим роботи кола, що містить хоча б одну індуктивність і хоча б одну ємність, під час якого струм на вході співпадає за фазою зі вхідною напругою.

Розрізняють два основних резонансних режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Резонанс напруг – це такий режим роботи кола, що містить послідовно з'єднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході співпадає за фазою зі вхідною напругою та досягає максимального значення. Резонанс напруг відбувається в так званому послідовному коливальному контурі – рис. 2.16. У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним: $X = X_L - X_C = 0$, $\underline{Z}_{\text{вх}} = R$, а сумарна реактивна поту-

жність $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Досягти резонансу можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Поняття, що характеризують резонанс напруг:

1) *резонансна частота* – частота під час резонансу ω_0 , яка знаходиться з

$$\text{умови } X_L = X_C : \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \quad (2.56)$$

2) *хвильовий (характеристичний) опір* – це ємнісний або індуктивний

$$\text{опір під час резонансу, тобто } \rho = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (2.57)$$

3) *добротність контуру* – це відношення напруги на ємності чи напруги на індуктивності до вхідної напруги; показує в скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більше напруги на вході під час резонансу:

$$q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 \cdot L \cdot I}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}. \quad (2.58)$$

Резонанс струмів – такий режим роботи кола, що містить паралельно з'єднанні ємності й індуктивності, за якого вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм співпадає за фазою з напругою на вході кола. Під час резонансу струмів струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж в загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною, реактивна потужність дорівнює нулю:

$$B = B_L - B_C = 0; \quad Q = Q_L - Q_C = 0.$$

Отримати резонанс струмів можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Розглянемо реальний паралельний коливальний контур (рис. 2.18), до якого прикладається синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$. Знайдемо модулі струмів:

$$I = U \cdot Y, \quad I_1 = U \cdot Y_1, \quad I_2 = U \cdot Y_2, \quad (2.59)$$

$$\text{де } Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}; \quad Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}. \quad (2.60)$$

Активні провідності віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{R_2}{Z_2^2}. \quad (2.61)$$

$$\text{Повна активна провідність кола} - G = G_1 + G_2. \quad (2.62)$$

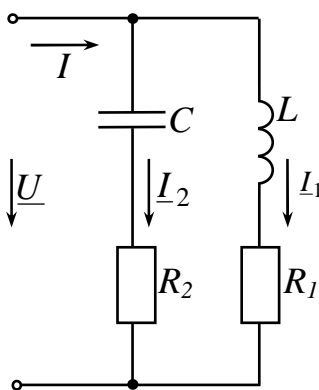


Рис. 2.18

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{\omega \cdot L}{Z_1^2}; \quad B_2 = B_C = -\frac{1/\omega \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot Z_2^2}. \quad (2.63)$$

$$\text{Повна реактивна провідність кола } B = B_1 + B_2. \quad (2.64)$$

Під час резонансу повна провідність – $Y_0 = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$ і тому загальний струм досягає мінімального значення – $I_0 = U \cdot Y_0 = U \cdot (G_1 + G_2)$.

Знайдемо резонансну частоту ω_0 з умови:

$$B = 0 \Rightarrow B = B_L - B_C \Rightarrow \frac{\omega_0 \cdot L}{R_1^2 + (\omega_0 \cdot L)^2} = \frac{1/\omega_0 \cdot C}{R_2^2 + (1/\omega_0 \cdot C)^2}. \quad (2.65)$$

Таким чином резонансна частота:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (2.66)$$

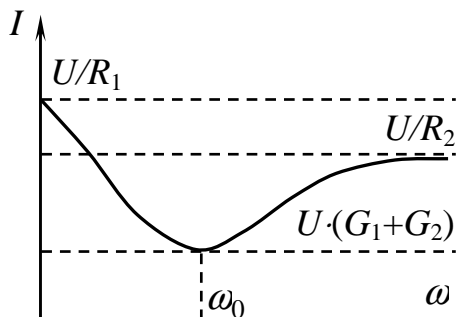


Рис. 2.19

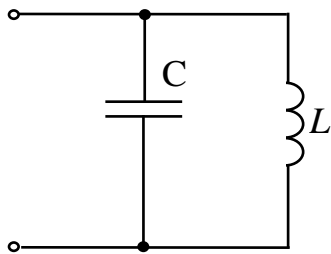


Рис.2.20

З останнього виразу бачимо, що резонанс є можливим у випадках:

1) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_1$ і $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_2$;

2) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_1$ і $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_2$;

3) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2 = \rho$ – резонанс можливий

за будь-якої частоти, тому що вхідний опір має активний характер.

Залежність струму I від кутової частоти ω для реального контуру, що представлений на рис.2.18, зображена на рис.2.19.

Якщо $R_1 \approx 0$ та $R_2 = 0$, то струм $I \rightarrow 0$, $Z_{ex} \rightarrow \infty$. Контури, у яких R_1 та R_2 є ма-

лими в порівнянні з $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ звуться *контурами з малими втратами* – рис.2.20.

Для таких контурів резонансна частота – $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$.

$$\text{Добротність контуру: } q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}. \quad (2.67)$$

$$\text{Хвильова провідність: } \gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (2.68)$$

2.12. Практичне застосування резонансу

1. Підвищення коефіцієнта потужності (компенсація куту зсуву фаз).

Для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати найбільш високий коефіцієнт потужності $\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I}$, тобто намагатися отримати менший зсув за фазою між напругою на приймачі й струмом від генератора. Високий $\cos \varphi$ необхідний для зменшення втрат під час передачі енергії по лініях електропередач: якщо підвищувати $\cos \varphi$, то струм $I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$, від якого залежить рівень втрат в проводах, можна зменшити:

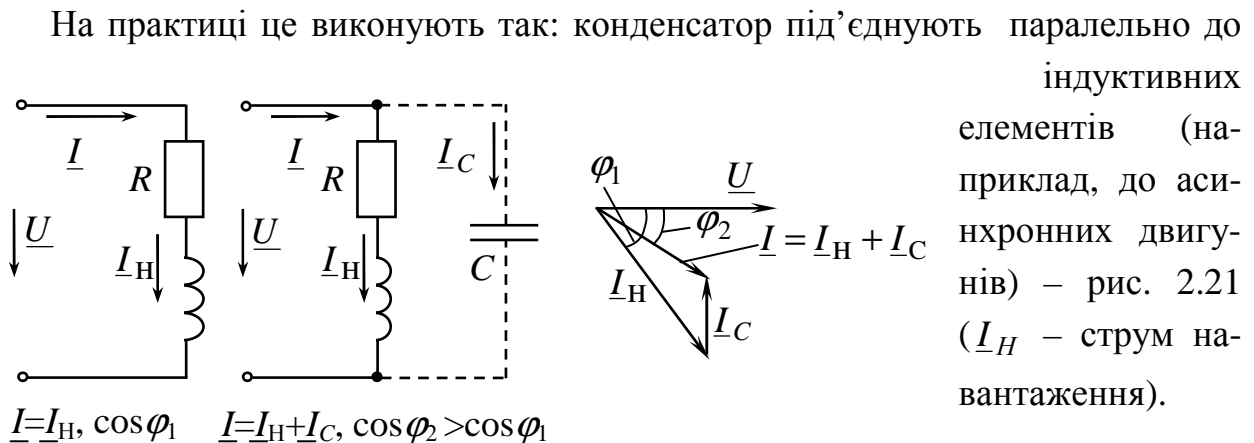


Рис. 2.21

2. У передавачах та радіоприймальних пристроях (наприклад, налаштування радіоприймача на якунебудь станцію означає досягнення резонансу його коливального контуру з частотою електромагнітних хвиль, що випромінює ця станція).

3. У провідниковому міжміському зв'язку.

4. В електровимірювальній техніці й пристроях автоматики.

5. У ферорезонансних стабілізаторах напруги.

Але якщо резонанс не передбачений спеціально, він може викликати небажані наслідки – пробій ізоляції й пошкодження електротехнічних пристроїв.

2.13. Трифазні кола

2.13.1. Основні поняття й визначення

Сукупність електричних кіл, де діють створені спільним джерелом синусоїдні електрорушійні сили однакової частоти й амплітуди, що відрізняються один від одної на кут $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ (m – кількість фаз) – це багатofазні симетричні системи. Багатofазні системи бувають дво-, три-, чотири-, шести-, дванадцятифазними.

Трифазна симетрична система ЕРС – сукупність трьох синусоїдних ЕРС однієї частоти, що мають однакові амплітуди й зсунуті між собою на 120° .

Графіки миттєвих значень ЕРС e_A, e_B, e_C зображений на рис. 2.22, а векторні діаграми – на рис. 2.23.

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює “ -120° ”, а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює “ $+120^\circ$ ”, називається *прямим*; миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin(\omega t); \quad e_B = E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ); \quad e_C = E_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ). \quad (2.69)$$

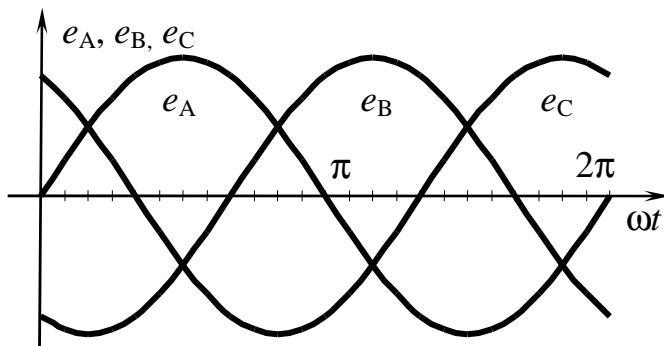


Рис. 2.22

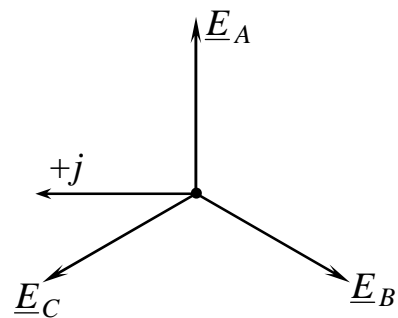


Рис. 2.23

Трифазне коло – сукупність трифазної системи ЕРС, трифазного навантаження та з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Переваги трифазних систем у порівнянні з іншими багатofазними системами:

- 1) передача енергії на великі відстані трифазним струмом більш економічна з точки зору економії металу;
- 2) елементи трифазної системи, такі як асинхронний двигун, трифазний генератор і трансформатор, є простими у виробництві, економічні, надійні в роботі;

3) система має властивості незмінності величини миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження в усіх трьох фазах однакове.

Усі ланки трифазного кола були розроблені російським вченим М.О. Доліво-Добровольським.

Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування “початок” і “кінець”. Початки позначають буквами А, В, С, а кінці – буквами х, у, z.

2.13.2. Основні схеми з'єднання трифазних кіл. Визначення лінійних і фазних величин

Основні схеми з'єднання у трифазних колах – це схеми з'єднання зіркою і трикутником.

Якщо всі "початки" або всі "кінці" фазних обмоток з'єднані в один вузол (нейтральну точку чи, якщо вона заземлена, в нульову) – таке з'єднання називається *зіркою* (рис. 2.24).

Проводи, що з'єднують обмотки генератора або трансформатора з навантаженням, називаються *лінійними*, а провід, що з'єднує нейтральні або нульові точки генератора і навантаження, відповідно *нейтральним* або *нульовим*.

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора ($\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$) або на фазних навантаженнях (\underline{U}_{aO_1} , \underline{U}_{bO_1} , \underline{U}_{cO_1} – рис.

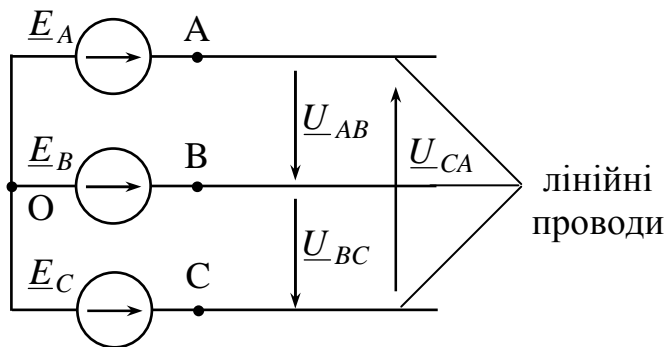


Рис. 2.24

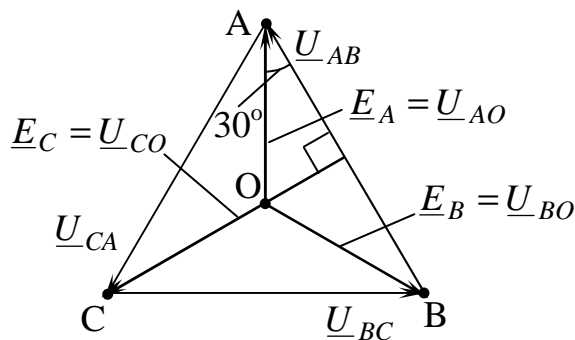


Рис. 2.25

2.27) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці потенціалів між точками А, В, С або різниці фазних напруг:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \\ \underline{U}_{BC} &= \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \\ \underline{U}_{CA} &= \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Відповідно до виразів (2.70) побудуємо векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис. 2.25), з якої видно, що при прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні й випереджають їх на 30° , тобто співвідношення між комплексами лінійних та фазних напруг

мають вигляд:

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j30^\circ}. \quad (2.71)$$

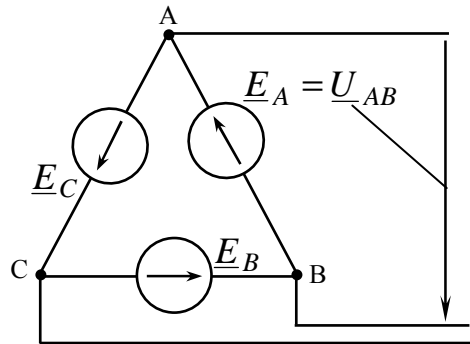


Рис. 2.26

При з'єднанні в трикутник фазні обмотки генератора, трансформатора або навантаження з'єднані один з одним таким чином, що "початок" однієї фази генератора (або навантаження) з'єднується з "кінцем" іншої фази (рис. 2.26), а кожна фаза навантаження вмикається між лінійними проводами, внаслідок чого вона знаходиться під лінійною напругою. Лінійна напруга одночасно є і фазною напругою, тобто: $\underline{U}_л = \underline{U}_ф$. Якщо до затискачів генератора не підключене навантаження, то по об-

мотках не протікатиме струм, тому що:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = 0.$$

2.13.3. Розрахунок трифазних кіл

Трифазне коло є різновидом кіл синусоїдного струму, і тому його розрахунок і дослідження здійснюють за допомогою методів, що розглядалися раніше, при цьому вважаємо, що трифазна *EPC* симетрична.

При з'єднанні "зірка-зірка" обмотки генератора й фазні навантаження поєднуються зіркою. Таке трифазне коло може бути без нейтрального проводу (трипровідна система, (рис. 2.27)) або з ним (чотирипровідна система (рис. 2.28)).

Проводи, що з'єднують генератор та навантаження, називаються лінійними, струми, що течуть по них – лінійні струми ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$), а напруга між лінійними проводами – лінійними напругами ($\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$). Для схем рис. 2.27 і рис. 2.28 фазні струми дорівнюють лінійним. Струм, що тече по нейтральному проводу (рис. 2.28) – струм нейтрального або нульового проводу (\underline{I}_N).

За позитивний напрямок струмів у лінійних проводах приймається напрямок від джерела до навантаження, а в нейтральному проводі навпаки – від навантаження до джерела.

Струм у нейтральному проводі дорівнює геометричній сумі лінійних струмів (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (2.72)$$

За симетричного навантаження ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) в випадку, що відповідає

схемі рис. 2.27, потенціали точок O і O_1 дорівнюють один одному:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A} = 0, \text{ тому що } \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ}\right) = 0.$$

При цьому струми однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° , а комплекси фазних струмів дорівнюють:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C}. \quad (2.73)$$

При симетричному навантаженні (рис. 2.28) за наявності нульового проводу фазні струми визначають за (2.73), а струм в нейтральному проводі відсутній: $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

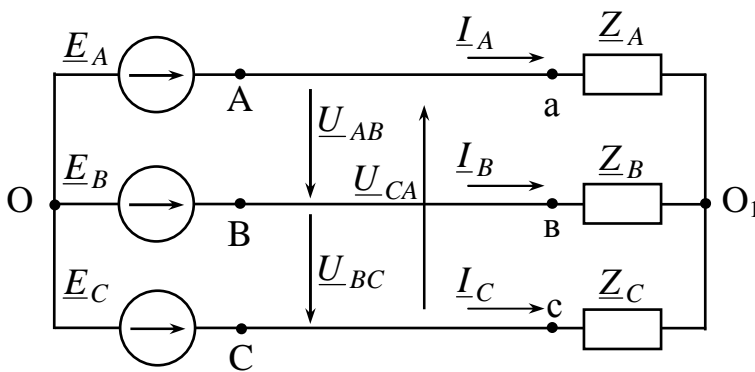


Рис. 2.27

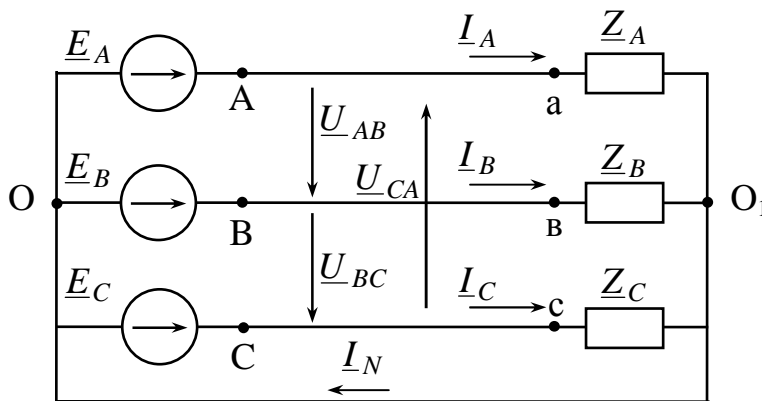


Рис. 2.28

Якщо навантаження не-симетричне ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$) та нульовий провід відсутній фазні струми встановлюються таким чином, що їх сума дорівнює нулю. Внаслідок чого відбувається викривлення симетрії фазних напруг так, що навантаження опиняються під різними, не рівними одна одній (та фазним ЕРС) напругами. Потенціали точок O та O_1 не дорівнюють один одному. Розрахунок кола здійснюють так:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} :

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (2.74)$$

$$\text{де } \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} - \text{комплекси фазних провідностей}; \quad (2.75)$$

- визначають фазні напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (2.76)$$

- визначають фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \underline{I}_B = \underline{U}_{bO_1} \cdot \underline{Y}_B; \underline{I}_C = \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C \quad (2.77)$$

Коли в нейтральному проводі відсутній опір і навантаження несиметричне (рис. 2.28) потенціали точок О і О₁ дорівнюють один одному – $\underline{U}_{O_1O} = 0$, і тому фазні струми визначають за формулами. (2.73).

Струм нейтрального проводу визначають за виразом (2.72).

За несиметричного навантаження, коли в нейтральному проводі є опір \underline{Z}_N (рис. 2.29), потенціали точок О і О₁ не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють у наступній послідовності:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} , за виразом, що випливає з методу двох вузлів:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (2.78)$$

$$\text{де } \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N} \text{ – комплекс провідності нейтрального проводу;} \quad (2.79)$$

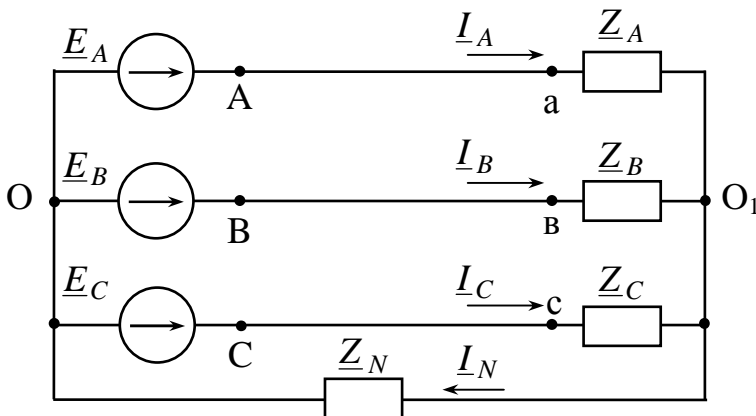


Рис. 2.29

- визначають фазні напруги на навантаженнях за формулами (2.76);

- визначають фазні струми за формулами (2.77);

- струм у нейтральному проводі \underline{I}_N визначають як суму фазних струмів (2.72).

За симетричного навантаження у випадку, що відпові-

дає схемі рис. 2.29, потенціали точок О і О₁ дорівнюють один одному

$$(\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0), \text{ внаслідок того, що}$$

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = 0.$$

Розрахунок кіл “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник” (рис.2.30) відрізняються тільки величиною напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{\text{ф. навантаження}}$): у випадку кола “трикутник-трикутник” -

$\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{ф. генератора}}$, а у випадку кола “зірка-трикутник” -

$$\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{лінійне генератора}} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{\phi} \cdot \angle 30^\circ.$$

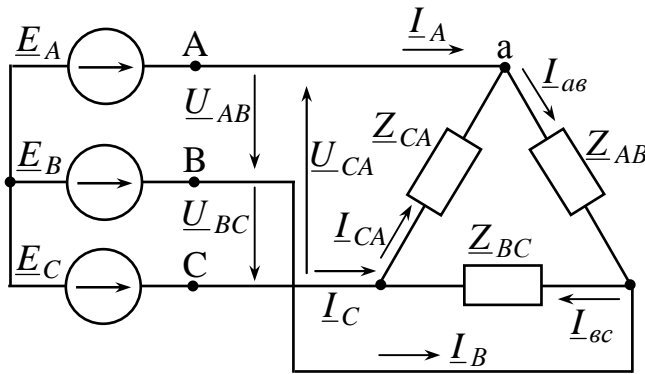


Рис. 2.30

За позитивний напрямок лінійних струмів ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) приймається напрямок від джерела до навантаження. Позитивний напрямок фазних струмів вибирають від точки "а" до "в" (струм $\underline{I}_{ав}$), від точки "в" до "с" (струм $\underline{I}_{вс}$), від точки "с" до "а" (струм $\underline{I}_{са}$).

Розглянемо коло "зірка-трикутник" без урахування опорів проводів (рис. 2.30), розрахунок якого проводять у наступній послідовності:

- визначають комплекси фазних струмів за виразами:

$$\underline{I}_{ав} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ав}} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_{ав}; \quad \underline{I}_{вс} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{вс}} = \underline{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_{вс}; \quad \underline{I}_{са} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{са}} = \underline{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_{са}, \quad (2.80)$$

де $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ – лінійні напруги (2.71);

$\underline{Y}_{ав}, \underline{Y}_{вс}, \underline{Y}_{са}$ – комплекси фазних провідностей:

$$\underline{Y}_{ав} = \frac{1}{\underline{Z}_{ав}}; \quad \underline{Y}_{вс} = \frac{1}{\underline{Z}_{вс}}; \quad \underline{Y}_{са} = \frac{1}{\underline{Z}_{са}}. \quad (2.81)$$

Лінійні струми визначають за першим законом Кірхгофа для вузлів "а", "в", "с":

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ав} - \underline{I}_{са}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{вс} - \underline{I}_{ав}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{са} - \underline{I}_{вс}. \quad (2.82)$$

При симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням

$$\varphi = \arctg \frac{X_{\phi}}{R_{\phi}}, \quad (2.83)$$

де X_{ϕ} – реактивний опір навантаження;

R_{ϕ} – активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть рівними між собою, в $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30° при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_A = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ав} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_B = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{вс} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_C = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{са} \angle -30^\circ. \quad (2.84)$$

Таким чином, при симетричному навантаженні фаз розрахунок трифазно-

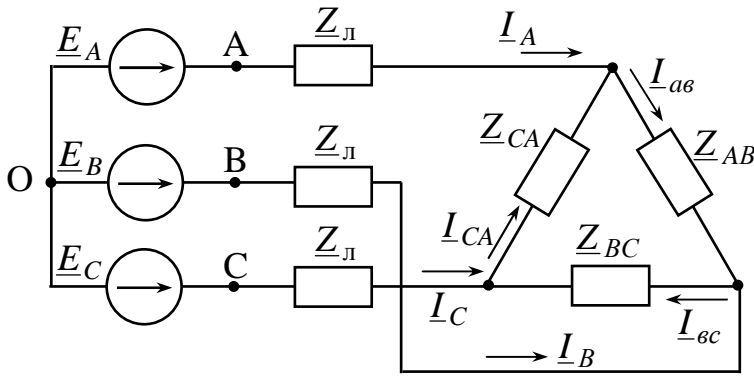


Рис. 2.31

ліній не дорівнюють один одному ($Z_{\text{ла}} \neq Z_{\text{лв}} \neq Z_{\text{лс}}$) і навантаження фаз несиметричне (рис. 2.31).

Розрахунок такої схеми слід виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою. Опори променів зірки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}'_a &= \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \cdot \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \\ \underline{Z}'_c &= \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi$, то опір променів еквівалентної зірки: $\underline{Z}'_a = \underline{Z}'_b = \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_\phi}{3}$. (2.86)

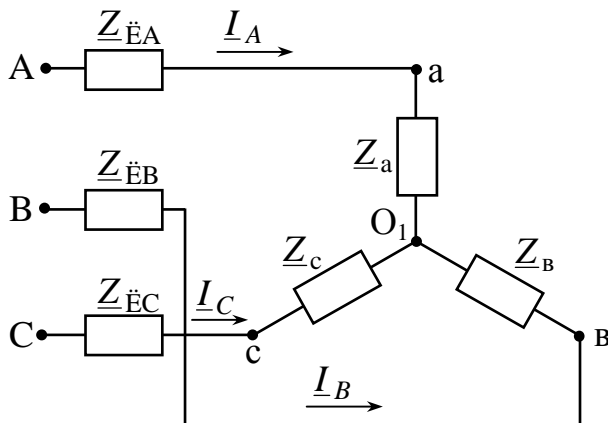


Рис. 2.32

го кола можна звести до розрахунку однієї фази. При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми.

Розглянемо загальний випадок кола “зірка-трикутник” з урахуванням опорів проводів, коли опори в

У результаті перетворення одержуємо еквівалентну схему, зображену на рис. 2.32, лінійні струми якої (I_A, I_B, I_C) в загальному випадку розраховують як у схемі “зірка-зірка” при несиметричному навантаженні, а саме:

- визначають повні опори ($\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$) та провідності ($\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$) кожної фази, враховуючи що опори з'єднувальних

проводів увімкнені послідовно з опорами відповідних променів еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}'_a + \underline{Z}_{\text{ла}}; \quad \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{Z}_B = \underline{Z}'_b + \underline{Z}_{\text{лв}}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}'_c + \underline{Z}_{jc}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}. \quad (2.87)$$

- визначають напругу зміщення нейтралі за формулою (2.74);
- визначають фазні напруги за формулами (2.76);
- визначають лінійні струми за формулами (2.77).

Фазні струми в навантаженнях $\underline{Z}_{ab}; \underline{Z}_{bc}; \underline{Z}_{ca}$ вихідної схеми (рис.2.31) визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}, \quad (2.88)$$

де $\underline{U}_{ab}; \underline{U}_{bc}; \underline{U}_{ca}$ – лінійні напруги на навантаженнях:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_{aO_1} - \underline{U}_{bO_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_b; \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_{bO_1} - \underline{U}_{cO_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_b - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c; \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{U}_{cO_1} - \underline{U}_{aO_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a. \end{aligned} \quad (2.89)$$

2.14. Кола зі взаємною індуктивністю

2.14.1. Індуктивно зв'язані елементи кола. Поняття взаємної індуктивності

Якщо зміна струму в одному елементі кола призводить до появи *ЕРС* в іншому елементі кола, то говорять, що ці два елементи *індуктивно зв'язані*, а *ЕРС*, що виникає при цьому, називається *ЕРС* взаємної індукції (e_M). Кола, в

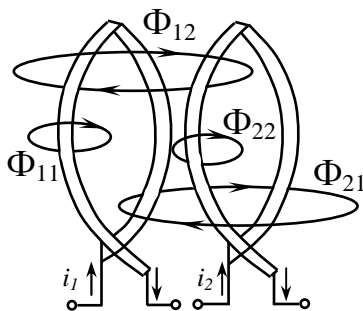


Рис. 2.33

яких крім *ЕРС* самоіндукції, що наведена в якомусь контурі при зміні струму, що протікає по цьому ж контурі, наводяться *ЕРС* взаємної індукції, називають *індуктивно* або *магнітозв'язаними* колами.

Нехай є дві котушки (рис. 2.33), умовно представлені у вигляді витків і віддалені одна від одної на деяку відстань. По котушках протікають синусоїдні струми i_1 і i_2 . Витки 1-ї котушки зчеплені з маг-

нітним потоком самоіндукції Φ_1 :

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad (2.90)$$

де Φ_{11} – частина магнітного потоку Φ_1 , який замикається, проходячи тільки через перший контур;

Φ_{12} – частина потоку Φ_1 , який замикається, проходячи через другий контур.

$$\text{Аналогічно для другого контуру: } \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \quad (2.91)$$

Зрозуміло, що кожна котушка зчеплена з двома магнітними потоками:

самоіндукції і взаємоіндукції. Повне потокозчеплення 1-го і 2-го контурів:

$$\Psi_{1n} = \omega_1(\Phi_1 \pm \Phi_{21}) = \Psi_1 \pm \Psi_{21}; \quad \Psi_{2n} = \omega_2(\Phi_2 \pm \Phi_{12}) = \Psi_{22} \pm \Psi_{12} \quad (2.92)$$

де w_1, w_2 – число витків 1 і 2 контурів;

Знак «+» у формулі (2.92) ставиться в тому випадку, коли потік самоіндукції і потік взаємної індукції направлені узгоджено.

Введемо поняття *взаємної індуктивності* M (Гн), яка дозволяє при розрахунках врахувати явище взаємоіндукції і явище накопичення енергії в магнітному полі індуктивно зв'язаних котушок. Для нашого випадку:

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}. \quad (2.93)$$

Взаємна індуктивність M залежить від взаємного розташування, геометричних розмірів котушок, числа витків і від відносної магнітної проникності осердя μ ; вона може бути визначена за допомогою досліду.

Коефіцієнт індуктивного зв'язку між двома контурами з індуктивностями L_1 і L_2 і взаємною індуктивністю M :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \quad (2.94)$$

Зрозуміло, що коефіцієнт індуктивного зв'язку $k=1$, якщо весь потік, що створюється 1-м контуром, буде зчеплений з другим контуром і залежить від взаємного розташування контурів (зміна індуктивного зв'язку досягається переміщенням однієї котушки відносно іншої). Взагалі $k \leq 1$.

Зазначимо, що M може бути більше L_1 (або L_2), але не може бути більше і L_1 , і L_2 одночасно.

2.14 2. Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок

При складанні рівнянь для індуктивно зв'язаних кіл необхідно знати узгоджено або зустрічно спрямовані потоки самоіндукції і взаємоіндукції (або ще говорять: *узгоджено* або *зустрічно* включені котушки), тобто знати напрям намотування витків котушок і напрям струму в них.

Котушки включені узгоджено, якщо струми в них однаково орієнтовані відносно однойменних затискачів, які на схемах позначаються «*» або «•». При узгодженому включенні котушок EPC самоіндукції і взаємоіндукції складаються.

На прикладі рис. 2.34 розглянемо методику складання рівнянь за законами Кірхгофа для розрахунку магнітозв'язаних кіл (включення котушок – узгоджене):

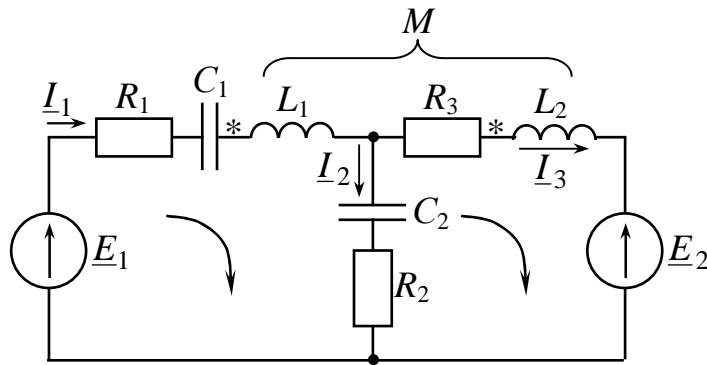


Рис. 2.34

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_1 \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1 dt + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt + i_2 \cdot R_2 = e_1, \\ i_3 \cdot R_3 + L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt - i_2 \cdot R_2 = e_2 \end{cases} \quad (2.95)$$

де $L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_3}{dt}$, $L_2 \cdot \frac{di_3}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt}$ - падіння напруги в 1 і 2 котушках відповідно.

Перейдемо до системи рівнянь у комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \\ \underline{I}_1 \cdot \left(R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_1} + j \cdot \omega \cdot L_1 \right) + \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} \right) + \underline{I}_3 \cdot j \cdot \omega \cdot M = \underline{E}_1 \\ \underline{I}_1 \cdot j \cdot \omega \cdot M + \underline{I}_3 \cdot (R_3 + j \cdot \omega \cdot L_2) - \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} \right) = \underline{E}_2 \end{cases} \quad (2.96)$$

Величина $X_M = \omega \cdot M$ – реактивний опір взаємної індуктивності, Ом.

Величина $\underline{Z} = j \cdot \omega \cdot M$ – комплексний опір взаємної індуктивності, Ом.

2.14.3. Визначення взаємної індуктивності

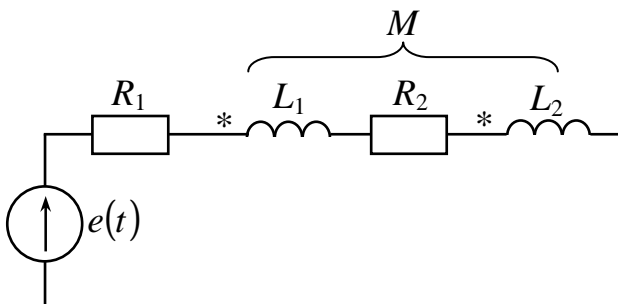


Рис. 2.35

Розглянемо рис. 2.35 – послідовне включення двох індуктивно зв'язаних котушок.

Нехай включення котушок – узгоджене. За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} + M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} +$$

$$+ M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e. \quad (2.97)$$

$$\text{або: } \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M)] = \underline{E} \Rightarrow \quad (2.98)$$

Таким чином, комплексний опір кола в цьому випадку

$$\underline{Z}_{\text{узг.}} = R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j\omega \cdot X_{\text{узг.}} \quad (2.99)$$

Нехай включення котушок – зустрічне. За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} - M \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R_2 = e, \quad (2.100)$$

$$\text{або: } \underline{I} \cdot [R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M)] = \underline{E}. \quad (2.101)$$

Комплексний опір кола в цьому випадку:

$$\underline{Z}_{\text{зустр.}} = R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j\omega \cdot X_{\text{зустр.}} \quad (2.102)$$

$$\text{Отже } X_{\text{узг.}} - X_{\text{зустр.}} = 4 \cdot \omega \cdot M = 4 \cdot X_M, \text{ звідки: } M = \frac{X_{\text{узг.}} - X_{\text{зустр.}}}{4 \cdot \omega}. \quad (2.103)$$

Вираз (2.103) використовують для визначення шляхом досліду взаємної індуктивності M .

Контрольні запитання

- 1) Дайте визначення синусоїдного струму, поясніть, які основні величини його характеризують.
- 2) Поясніть, як проводять розрахунок кіл синусоїдного струму тригонометричним методом.
- 3) Поясніть, як проводять розрахунок кіл синусоїдного струму символічним методом.
- 4) Наведіть формулювання законів Ома і Кірхгофа в комплексній формі.
- 5) Наведіть формулювання комплексного опору і комплексної провідності ділянки кола. Поясніть зв'язок між опором та провідністю ділянки кола.
- 6) Дайте визначення активної, реактивної та повної потужності. Наведіть комплексну форму запису повної потужності.
- 7) Поясніть, за яких умов у колах синусоїдного струму виникає резонанс і як це явище знаходить практичне застосування.
- 8) Дайте визначення поняттям взаємної індукції та індуктивно-зв'язаних кіл. Поясніть, як визначають взаємну індуктивність за допомогою досліду.
- 9) Дайте визначення трифазної системи EPC . Покажіть співвідношення між лінійними і фазними напругами..
- 10) Поясніть, як проводять розрахунок схеми „зірка-зірка” з нульовим проводом при симетричному й несиметричному навантаженні
- 11) Поясніть, як проводять розрахунок кола „зірка-трикутник” при симетричному й несиметричному навантаженні без урахування та з урахуванням опорів у лініях.

Розділ 3. Несинусоїдні періодичні струми й напруги в лінійних електричних колах

3.1. Визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг

Раніше розглядалися лінійні кола з незмінними параметрами активного опору (R), індуктивності (L), ємності (C) і взаємоіндуктивності (M) при дії джерел постійних або синусоїдних EPC і струмів. Але на практиці EPC , напруги й струми відрізняються від постійних або синусоїдних, причому їх залежність від часу може бути періодичною, майже періодичною та неперіодичною.

Періодичними несинусоїдними струмами й напругами називають струми й напруги, які змінюються в часі за періодичним несинусоїдним законом.

Розглянемо режими роботи кіл, які призводять до їх появи:

1. Джерела EPC (або струму) дають несинусоїдну EPC (струм), а всі елементи кола (R, L, C, M) – лінійні елементи (їх величини від струму не залежать).

Так у різних пристроях радіотехніки, автоматики, телемеханіки, обчислювальної техніки застосовують генератори періодичних імпульсів. При цьому форма імпульсів може бути різною (прямокутною, трапецієподібною, ступінчатою тощо – рис. 3.1). Під час проходження цих імпульсів по електричних колах їх форма суттєво змінюється.

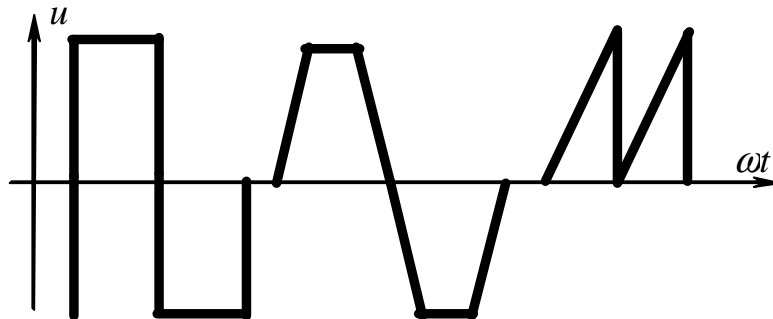


Рис. 3.1 - Приклади періодичних несинусоїдних кривих напруги $u(\omega t)$

2. Джерело EPC (струму) дає синусоїдну EPC (струм), але один чи кілька елементів кола – нелінійні.

Приклад отримання несинусоїдного періодичного струму в колі з синусоїдним джерелом енергії – схема з котушкою з феромагнітним осердям (рис. 3.2). Струм у цьому випадку має приблизно форму, що зображена на рис. 3.3.

3. Сукупність 1 і 2 режимів.

4. Якщо джерело EPC (струму) дає постійну або синусоїдну EPC (струм), а один або декілька елементів кола періодично змінюються у часі.

В усіх задачах, де доводиться мати справу зі складними несинусоїдними

кривими струмів і напруг, важливо вміти звести складну задачу до більш простої та застосувати методи розрахунку простих задач.

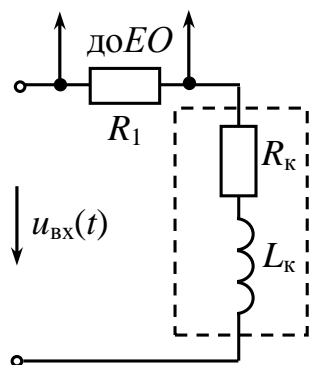


Рис. 3.2

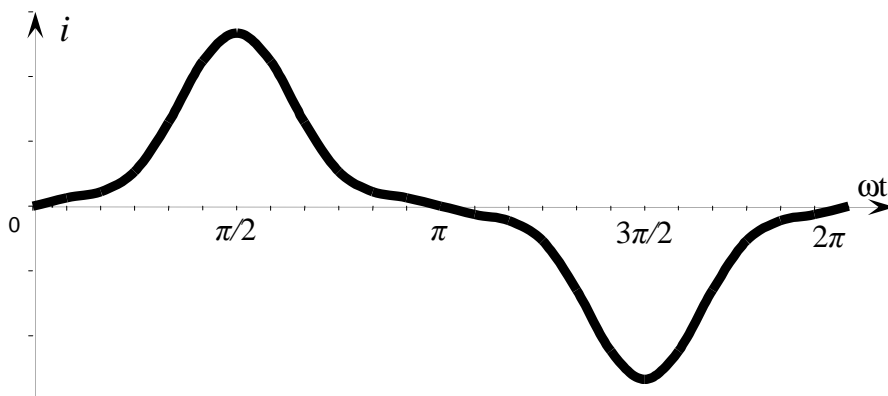


Рис. 3.3

У цьому розділі розглядаються методи розрахунку лінійних кіл при несинусоїдних періодичних або майже періодичних струмах і напругах, які можна розкласти на гармонійні складові.

3.2. Зображення несинусоїдних струмів і напруг за допомогою рядів Фур'є

Як відомо, будь-яку періодичну функцію $f(x)$ з періодом 2π , яка задовольняє умові Діріхле (тобто, яка має на всякому інтервалі кінцеве число розривів першого роду та кінцеве число максимумів та мінімумів) може бути розкладена у нескінченний тригонометричний ряд. При цьому змінна x зв'язана з часом t співвідношенням $x = \omega t = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}$, де T – період функції у часі (тобто період функції за x дорівнює « $2 \cdot \pi$ », а за часом період тієї ж функції дорівнює « T »). Таким чином:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(2)''} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(k)'} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)''} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + \dots, \quad (3.1)$$

$$\text{де } A^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) d\omega t - \text{ нульова гармоніка (чи постійна складова);} \quad (3.2)$$

$$A_1' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin \omega t d\omega t - \text{ амплітуда синусної складової першої гармоніки;} \quad (3.3)$$

$$A_1'' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos \omega t d\omega t - \text{ амплітуда косинусної складової першої гармоніки;} \quad (3.4)$$

$$A_m^{(k)'} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \cdot \omega t) d\omega t - \text{амплітуда синусної складової гармоніки з номером } k; \quad (3.5)$$

$$A_m^{(k)''} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \cdot \omega t) d\omega t - \text{амплітуда косинусної складової гармоніки з номером } k. \quad (3.6)$$

Інакше вираз (3.1) може бути записаний так:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \cdot \sin(k \cdot \omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k'' \cdot \cos(k \cdot \omega t). \quad (3.7)$$

Частіше ряд Фур'є записують у вигляді суми нульової гармоніки та синусоїдних складових з ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi^{(k)}), \quad (3.8)$$

$$\text{де } A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)'}^2 + A_m^{(k)''2}}; \varphi^{(k)} = \arctg \frac{A_m^{(k)''}}{A_m^{(k)'}} - \text{амплітуда та початкова фаза гармоніки з номером «k»}. \quad (3.9)$$

При розгляданні цієї теми ми будемо говорити, що гармоніки бувають такими: нульова, перша (основна) та вищі (з номерами 2, 3, 4 і т.д.). Крім того, якщо $k=1, 3, 5, \dots$ – це непарні гармоніки, а якщо $k=2, 4, 6, \dots$ – це парні гармоніки.

Приклад.

Крива напруги має в своєму складі 3 гармонійні складові:

$$u(\omega t) = 100 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \cos(\omega t) + 30 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) - 15 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + 8 \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + 12 \cdot \cos(5 \cdot \omega t), \text{ В.}$$

Представимо ряд Фур'є у вигляді суми синусних складових з ненульовими початковими фазами.

Відповідно до формул (3.8) та (3.9) визначимо амплітуди та початкові фази синусних складових першої, третьої та п'ятої гармонік.

$$A_m^{(1)} = \sqrt{A_m^{(1)'}^2 + A_m^{(1)''2}} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 127 \text{ В}; \varphi^{(1)} = \arctg \frac{80}{100} = 38,66^\circ;$$

$$A_m^{(3)} = \sqrt{A_m^{(3)'}^2 + A_m^{(3)''2}} = \sqrt{30^2 + 15^2} = 34,7 \text{ В}; \varphi^{(3)} = \arctg \frac{-15}{30} = -26,6^\circ;$$

$$A_m^{(5)} = \sqrt{A_m^{(5)'}^2 + A_m^{(5)''2}} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14,4 \text{ В}; \varphi^{(5)} = \arctg \frac{12}{8} = 56,3^\circ.$$

Таким чином ряд Фур'є матиме вигляд

$$u(\omega t) = 127 \cdot \sin(\omega t + 38,66^\circ) + 34,7 \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 26,6^\circ) + 14,4 \cdot \sin(5 \cdot \omega t + 56,3^\circ), \text{ В.}$$

Крива, що відповідає цьому ряду – рис. 3.4.

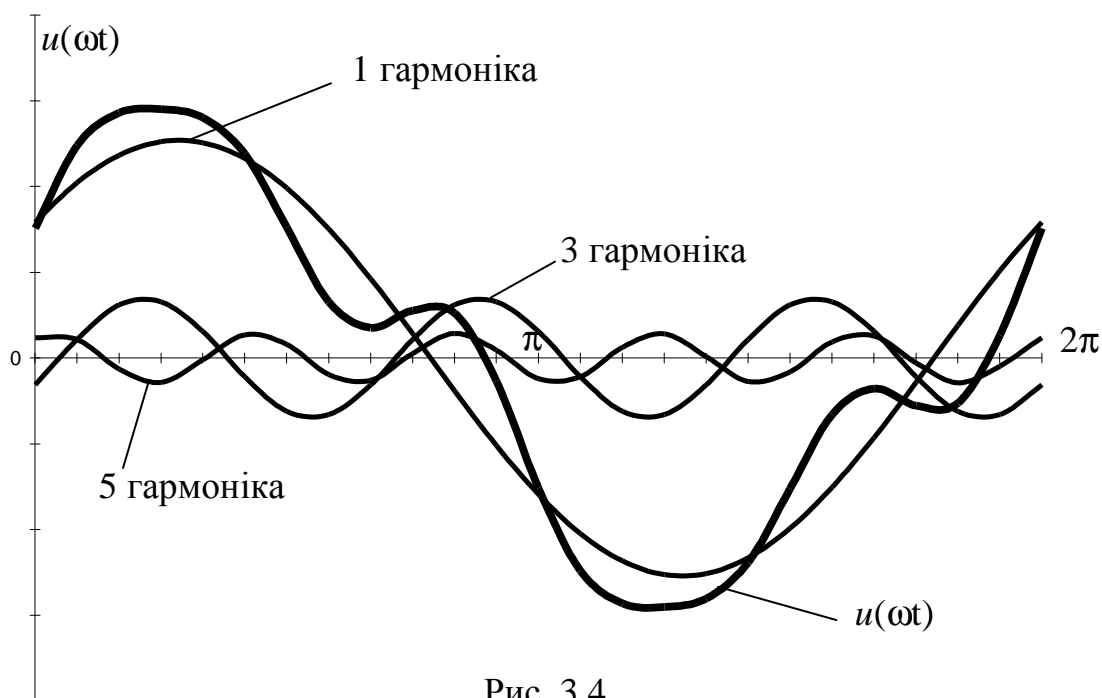
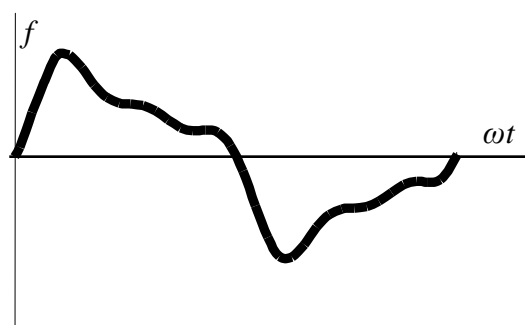


Рис. 3.4

3.3. Деякі властивості періодичних кривих, які мають симетрію

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші види симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо деякі гармоніки виключаються з ряду. Розглянемо це детальніше.

1. Крива симетрична відносно осі абсцис (рис. 3.5), тобто задовольняє умові: $f(\omega t + \pi) = f(\omega t)$. При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є нульова і парні гармоніки дорівнюють нулю: $A_0 = A_2' = A_2'' = A_4' = A_4'' = \dots = 0$, а сам ряд має



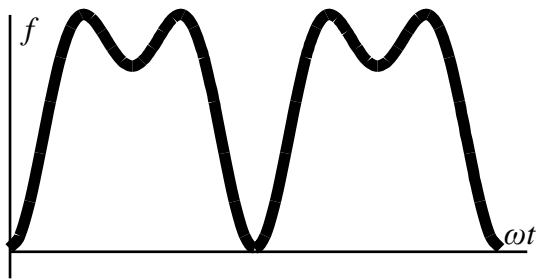
Вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + \\ + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \quad (3.10) \\ + A_m^{(5)'} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + A_m^{(5)''} \cdot \cos(5 \cdot \omega t) + \dots$$

Рис. 3.5

2. Крива симетрична відносно осі ординат (рис. 3.6), тобто задовольняє умові: $f(\omega t) = f(-\omega t)$.

При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є відсутні синусні складові, тобто $A_1' = A_2' = A_3' = \dots = 0$, а сам ряд Фур'є має вигляд:



$$f(\omega t) = A_0 + A_1'' \cdot \cos(\omega t) + A_2'' \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_3'' \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots \quad (3.11)$$

Рис. 3.6

3. Крива симетрична відносно початку координат (рис. 3.7), тобто задовольняє умові $f(\omega t) = -f(-\omega t)$. Такий ряд Фур'є не містить нульову та косинусні складові, тобто: $A_0 = A_1'' = A_2'' = A_3'' = \dots = 0$, і має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots \quad (3.12)$$

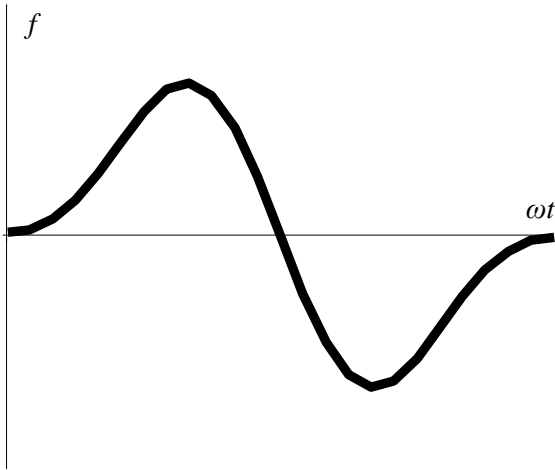


Рис. 3.7

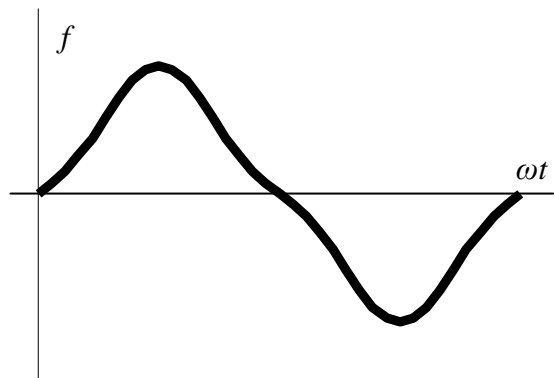


Рис. 3.8

4. Крива одночасно симетрична відносно осі абсцис та початку координат (рис. 3.8), тобто задовольняє умовам: $f(\omega t) = -f(-\omega t)$, $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$.

Такий ряд Фур'є містить лише непарні синусні гармоніки і має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots \quad (3.13)$$

Перед тим як розкласти криву у ряд Фур'є треба подивитися, якими видами симетрії вона задовольняє та виключити ті чи інші гармоніки.

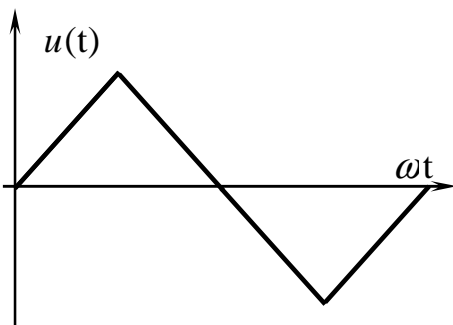


Рис. 3.9

Усі періодичні криві, які зустрічаються в електротехніці можна розділити на 2 групи.

1 група – періодичні криві геометрично правильної форми (трапеції, трикутники, прямокутники і т.д.); їх розкладання у ряд Фур'є наведено у довідниках. Так, наприклад, якщо періо-

дична крива напруги (рис. 3.9) має форму трикутника, то ряд Фур'є, що відповідає такій формі (обмежимося трьома членами ряду) має вигляд:

$$u(\omega t) = \frac{8 \cdot U_m}{\pi^2} \cdot \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\omega t) - \dots \right), \text{ В.}$$

2 група – криві довільної геометрично неправильної форми. Вони розкладаються у ряд Фур'є графоаналітичними методом.

3.4. Розкладання у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми

Криві довільної геометрично неправильної форми мають бути представлені у вигляді графіка. Графоаналітичний метод, який застосовують для розкладання таких кривих у ряд Фур'є, заснований на заміні визначених інтегралів (3.2, 3.5, 3.6) сумою кінцевого числа складових. Для цього період функції 2π поділяється на n рівних інтервалів, кожен з яких можна визначити так:

$$d\omega t \rightarrow \Delta\omega t = \frac{2 \cdot \pi}{n}. \text{ Отже}$$

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left(f_p(\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t). \quad (3.14)$$

де $f_p(\omega t)$ – значення функцій $f(\omega t)$ в середині p -го інтервалу, тобто при значенні $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$,

p – поточний індекс.

Амплітуди синусної і косинусної складових k -ї гармоніки відповідно дорівнюють:

$$A_m^{(k)/} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} = \quad (3.15)$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t);$$

$$A_m^{(k) //} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left(f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \quad (3.16)$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)),$$

де $\sin_p(k \omega t)$ і $\cos_p(k \omega t)$ - значення функцій $\sin(k \omega t)$, $\cos(k \omega t)$ у середині p -го інтервалу.

Звичайно період поділяють на $n = 24$ частини ($\Delta\omega t = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ рад).

Розглянемо приклад графоаналітичного розкладання кривої $f(\omega t)$ в ряд Фур'є (рис. 3.10). Слід урахувати, що крива має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис), отже можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме: $f(\omega t) = A'_{1m} \cdot \sin \omega t + A'_{3m} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A'_{5m} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + \dots$ (обмежуємося трьома членами ряду). Знайдемо амплітуди $A'_{1m}, A'_{3m}, A'_{5m}$.

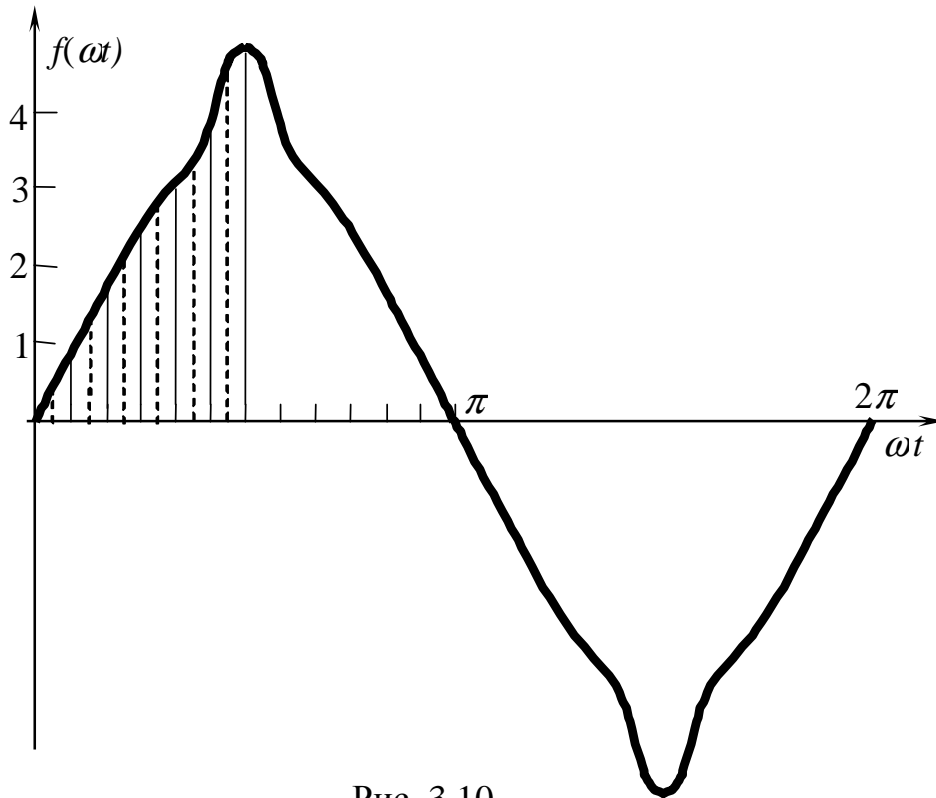


Рис. 3.10

Розділимо чверть періоду кривої $f(\omega t)$ на шість рівних частин і визначимо ординати функції $f(\omega t)$ посередині кожної ділянки, яка становить 15° . Результати розкладання, що проводять за наведеною вище методикою, подані в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 - Результати розкладання кривої $f(\omega t)$ в ряд Фур'є

n	$f(\alpha t)$	αt	$\sin \alpha t$	$f(\alpha t) \sin \alpha t$	$3\alpha t$	$\sin 3\alpha t$	$f(\alpha t) \sin 3\alpha t$	$5\alpha t$	$\sin 5\alpha t$	$f(\alpha t) \sin 5\alpha t$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,5	$7,5^\circ$	0,13	0,0665	22,5	0,382	0,191	37,5	0,608	0,304
2	1,2	$22,5^\circ$	0,382	0,46	67,5	0,924	1,108	112,5	0,923	1,1
3	2,1	$37,5^\circ$	0,608	1,27	112,5	0,924	1,94	187,5	-0,13	-0,273
4	2,8	$52,5^\circ$	0,793	2,22	157,5	0,382	1,07	262,5	-0,99	-2,77
5	3,3	$67,5^\circ$	0,924	3,05	202,5	-0,382	-1,26	337,5	-0,382	-1,26
6	4,7	$82,5^\circ$	0,991	4,6	247,5	-0,923	-4,34	412,5	0,79	3,72

$$\sum_{1}^6 f(\omega t) \cdot \sin \omega t = 11,66 \quad \sum_{1}^6 f(\omega t) \cdot \sin 3\omega t = -1,29 \quad \sum_{1}^6 f(\omega t) \cdot \sin 5\omega t = 0,821$$

Амплітуди синусних гармонік з номерами 1, 3, 5 відповідно :

$$A'_{1m} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot 11,66 = \frac{1}{3} \cdot 11,66 = 3,88; \quad A'_{3m} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot (-1,29) = \frac{1}{3} \cdot (-1,29) = -0,43;$$

$$A'_{5m} = \frac{1}{3} \cdot 0,821 = 0,247 \text{ (коефіцієнт «4» застосовуємо тому, що розкладаємо тільки}$$

ки $\frac{1}{4}$ періоду, а для отримання кінцевого результату помножуємо відповідне

$$\text{значення } \left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)) \right] \text{ на «4»}).$$

Таким чином, ряд Фур'є $f(\omega t)$ має вигляд

$$f(\omega t) = 3,88 \cdot \sin(\omega t) - 0,43 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 0,247 \cdot \sin(5 \cdot \omega t).$$

3.5. Порядок розрахунку електричного кола з несинусоїдними джерелами енергії

1. Представимо несинусоїдну *EPC* тригонометричним рядом Фур'є. Припустимо, що ряд Фур'є має вигляд

$$e(\omega t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + 20^\circ) + E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 45^\circ), \text{ В.}$$

Умовно розглянемо несинусоїдну *EPC* $e(\omega t)$ як послідовне з'єднання постійної *EPC* $E^{(0)}$ і трьох синусоїдних *EPC*, а саме $e^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + 20^\circ)$, $e^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t)$, $e^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 45^\circ)$ – рис. 3.11.

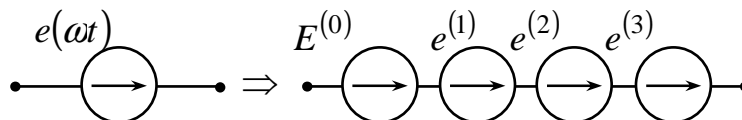


Рис. 3.11

2. Запишемо комплексні амплітуди *EPC* гармонік з номерами 1, 2, 3:

$$\underline{E}_m^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot e^{j20^\circ}; \quad \underline{E}_m^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot e^{j0^\circ}; \quad \underline{E}_m^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot e^{-j45^\circ}, \text{ В.}$$

3. Визначимо активні й комплексні опори віток для окремих гармонік.

При цьому треба врахувати, що реактивні опори залежать від номеру гармоніки, тобто індуктивний і ємнісний опори для гармоніки з номером « k » визначаються так:

$$x_L^{(k)} = k \cdot x_L^{(1)} = k \cdot \omega \cdot L, \quad x_C^{(k)} = \frac{x_C^{(1)}}{k} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} \quad (3.17)$$

Приклад.

Якщо $x_L^{(1)} = 10 \text{ Ом}$, то $x_L^{(3)} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ Ом}$; а якщо $x_C^{(1)} = 50 \text{ Ом}$, то

$x_C^{(5)} = \frac{50}{5} = 10$ Ом. Таким чином, з ростом номера гармоніки індуктивний опір збільшується, а ємнісний зменшується пропорційно.

Комплексний опір вітки, що містить активний опір, індуктивність та ємності, дорівнює:

$$\underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left(k \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} \right) = R + j \cdot \left(k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right). \quad (3.18)$$

4. Розраховуємо струми від дії нульової гармоніки несинусоїдної ЕРС - $I_n^{(0)}$; потім визначаємо комплексні амплітуди струмів від дії 1-ої, 2-ої і т.д. гармонік несинусоїдної ЕРС - $\underline{I}_{mn}^{(1)}, \underline{I}_{mn}^{(2)}, \underline{I}_{mn}^{(3)}$, де « n » – номер вітки.

Таким чином, зрозуміло, що основний метод розрахунку електричних кіл з несинусоїдними періодичними джерелами енергії – метод накладання.

5. За комплексними амплітудами записуємо миттєві значення струмів окремих гармонік – $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, i_n^{(3)}$.

6. Записуємо ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді суми окремих гармонік, наприклад, для вітки з номером: « n » несинусоїдний струм у загальному вигляді матиме вигляд $i_n(\omega t) = I_n^{(0)} + i_n^{(1)} + i_n^{(2)} + i_n^{(3)}$.

3.6. Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл

1. Додавання різнойменних гармонік струмів або напруг за комплексним методом не можливе, тому що кутові швидкості обертання векторів різних гармонік неоднакові.

2. Фізичний сенс нульової гармоніки напруги чи струму – це постійна напруга чи струм. Тому падіння напруги на індуктивності від нульової гармоніки струму дорівнює нулю: $x_L^{(0)} = 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot L = 0$, нульова гармоніка струму через конденсатор дорівнює нулю: $x_C^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty \Rightarrow I^{(0)} = 0$.

3. Вважають, що величина активного опору не залежить від частоти.

3.7. Діючі й середні за модулем значення несинусоїдних функцій

За визначенням діюче значення:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}, \quad (3.19)$$

$$\text{де } i = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \sin(k \cdot \omega t + \psi^{(k)}) - \text{несинусоїдний струм.} \quad (3.20)$$

Якщо у рівняння (3.19) підставити вираз (3.20), то отримаємо:

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \sum_{k=1}^n I_m^{(k)2}} = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(2)2} + \dots + I^{(k)2} + \dots}, \quad (3.21)$$

де $\frac{I_m^{(k)}}{\sqrt{2}} = I^{(k)}$ – діюче значення струму гармоніки з номером « k ».

Таким чином, діюче значення несинусоїдної величини не залежить від початкових фаз окремих гармонік.

Аналогічно, для напруги

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)2}} = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(2)2} + \dots}.$$

Приклад.

На вході двополюсника несинусоїдні напруга і струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 100 + 80 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ) + 60 \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 20^\circ) + 50 \cdot \sin(5 \cdot \omega t + 45^\circ), \text{ В};$$

$$i(\omega t) = 33,3 + 17,87 \cdot \sin(\omega t - 18^\circ) + 5,59 \cdot \sin(5 \cdot \omega t + 120^\circ), \text{ А}.$$

Знайдемо їх діючі значення:

$$I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,87^2}{2} + \frac{5,59^2}{2}} = 35,6 \text{ А}, \quad U = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 127,1 \text{ В}.$$

Середнє за модулем значення несинусоїдного струму визначають так:

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |i(\omega t)| d\omega t. \quad (3.22)$$

3.8. Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних періодичних кривих

Несинусоїдні криві, яким відповідає певна несинусоїдна функція, характеризують наступними коефіцієнтами:

- коефіцієнтом форми кривої K_ϕ , який визначається як відношення діючого значення до середнього за модулем значення, а саме $K_\phi = \frac{A}{A_{\text{ср}}}$ (для синусоїди $K_\phi = \frac{A}{A_{\text{ср}}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1,11$);

- коефіцієнтом амплітуди, який дорівнює відношенню максимального значення до діючого значення несинусоїдної функції, а саме $K_a = \frac{A_{\text{max}}}{A}$ (для




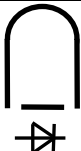
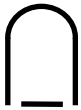

синусоїди $K_a = \sqrt{2}$);

- коефіцієнтом викривлення, який визначають як відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення усієї несинусоїдної функції, в яку входить і перша гармоніка, а саме $K_{\hat{a}} = \frac{A^{(1)}}{A}$.

3.9. Величини, на які реагують амперметри й вольтметри різних систем при несинусоїдних струмах

Несинусоїдні струми й напруги вимірюють приладами різних систем, принцип дії яких розглядається в курсі «Основи метрології та електричних вимірів». Наведена нижче таблиця показує, на які величини реагують вольтметри й амперметри різних систем.

Таблиця 3.2

№	Системи приладів	Умовні позначення	Величина, на яку реагує прилад
1	Електродинамічна		Діюча
2	Електромагнітна		Діюча
3	Теплова		Діюча
4	Магнітоелектрична система з випрямлячем		Середнє за модулем значення
5	Магнітоелектрична система з рухомою рамкою		Постійна складова
6	Амплітудні електронні прилади		Максимальне значення

3.10. Потужності в колах несинусоїдного струму

Активна потужність несинусоїдного струму – це середнє значення миттєвої потужності за період першої гармоніки:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u \cdot i) dt. \quad (3.23)$$

Підставимо у (3.23) наступні формули:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_u^{(k)}), \quad (3.24)$$

$$i(t) = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_i^{(k)}). \quad (3.25)$$

Розрахувавши визначений інтеграл (3.23), отримаємо:

$$P = U_0 \cdot I_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = U_0 \cdot I_0 + U^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + U^{(2)} \cdot I^{(2)} \cdot \cos \varphi^{(2)} + \dots, \quad (3.26)$$

де $U^{(k)}, I^{(k)}, \varphi^{(k)}$ – відповідно діючі значення несинусоїдної напруги і струму k -ої гармоніки;

$\varphi^{(k)} = \varphi_u^{(k)} - \varphi_i^{(k)}$ – кут зсуву фаз між несинусоїдною напругою і струмом k -ої гармоніки.

Таким чином, активна потужність несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік.

Аналогічно для *реактивної потужності*:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)}. \quad (3.27)$$

Повна потужність S дорівнює добутку діючого значення несинусоїдної напруги й діючого значення несинусоїдного струму.

$$S = U \cdot I. \quad (3.28)$$

Кола несинусоїдного струму також характеризують *потужністю викривлення* T , коефіцієнтом викривлення K_T :

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}, \text{ (ВА)}; K_T = \frac{T}{S}. \quad (3.29)$$

Відношення активної потужності до повної називають *коефіцієнтом потужності*, його прирівнюють до косинусу деякого умовного кута φ :

$$X = \frac{P}{S} = \cos \varphi. \quad (3.30)$$

3.11. Вищі гармоніки в трифазних колах

ЕРС всіх фаз трифазного трансформатора або трифазного генератора часто виявляється несинусоїдною. Кожна *ЕРС* (e_A, e_B, e_C) повторює за формою інші із зсувом на одну третину періоду ($T/3$) і може бути розкладена на гармоніки. Запишемо для гармоніки з номером « k » миттєве значення *ЕРС* фази A :

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \omega t + \varphi^{(k)}). \quad (3.31)$$

Оскільки ЕРС фази B відстає від ЕРС фази A на $T/3$, а ЕРС фази C випереджає ЕРС фази A на $T/3$, то для гармоніки з номером « k » ЕРС фаз B і C відповідно дорівнюють:

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right), \quad (3.32)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right). \quad (3.33)$$

$$\text{Примітка: } k \cdot \omega \cdot \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} = 120^\circ \cdot k.$$

Якщо $\varphi^{(k)} = 0$, то

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \quad (3.34)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

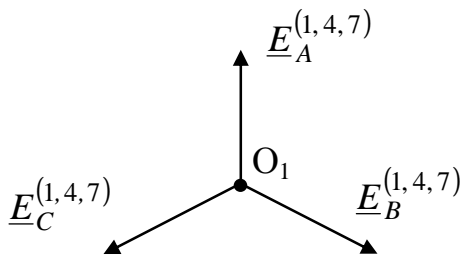


Рис. 3.12

Гармоніки з номерами $k=1, 4, 7, 10, \dots$ складають так звану пряму послідовність чергування фаз. Для цих гармонік ЕРС фази B відстає від ЕРС фази A , а ЕРС фази C випереджає ЕРС фази A на 120° (векторна діаграма – рис. 3.12).

Припустимо, номер гармоніки $k = 4$, тоді:

$$e_A^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin(4 \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 2 \cdot \pi - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \quad (3.35)$$

$$e_C^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Гармоніки з номерами $k=2,5,8,\dots$ складають так звану зворотну послідовність чергування фаз. Для цих гармонік ЕРС фази B випереджає ЕРС фази A , а

EPC фази C відстає від EPC фази A на 120° (векторна діаграма – на рис. 3.13).

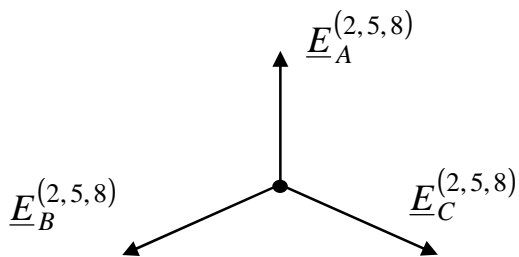


Рис. 3.13

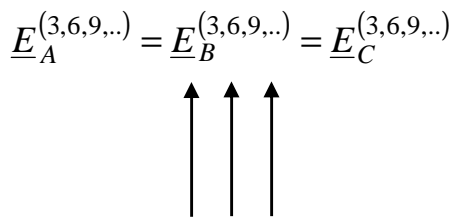


Рис. 3.14

Припустимо, номер гармоніки $k = 2$, тоді

$$\begin{aligned} e_A^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t), \\ e_B^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t - 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \\ e_C^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Гармоніки з номерами $k = 3, 6, 9, \dots$ (кратні трьом) утворюють нульову послідовність чергування фаз, для якої початкові фази EPC всіх фаз однакові (векторна діаграма – рис. 3.14). Припустимо, номер гармоніки $k = 3$, тоді

$$\begin{aligned} e_A^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t); \\ e_A^{(3)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 120^\circ \cdot 3) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t); \\ e_N^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 120^\circ \cdot 3) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t). \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.12. Особливості роботи трифазних систем, що були викликані гармоніками, кратними трьом

Розглянемо деякі особливості розрахунку трифазних кіл, пов'язаних з наявністю в гармонійному складі фазних EPC гармонік, кратних трьом.

1. Нехай обмотки трифазного генератора з'єднані відкритим трикутником (рис. 3.15). Якщо у фазних EPC присутні гармоніки, кратні трьом, то на затискачах « $n - B$ » буде напруга, діюче й миттєве значення якої

$$U_{nB} = 3 \cdot \sqrt{\frac{E_m^{(3)^2}}{2} + \frac{E_m^{(6)^2}}{2} + \frac{E_m^{(9)^2}}{2} \dots}, \quad (3.38)$$

$$u_{nB} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t + \varphi^{(6)}) + \dots \quad (3.39)$$

2. При з'єднанні обмоток генератора в закритий трикутник (рис. 3.16) по

них протікатимуть струми гармонік, кратних трьом

$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}^{(3k)}}, \quad (3.40)$$

де $\underline{Z}_0^{(3k)}$ – опір обмотки кожної фази для гармоніки, кратної трьом,

$\underline{E}^{(3k)}$ – комплекс діючого значення гармоніки фазної ЕРС, кратної трьом.

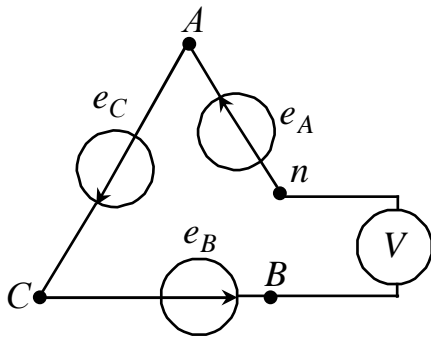


Рис. 3.15

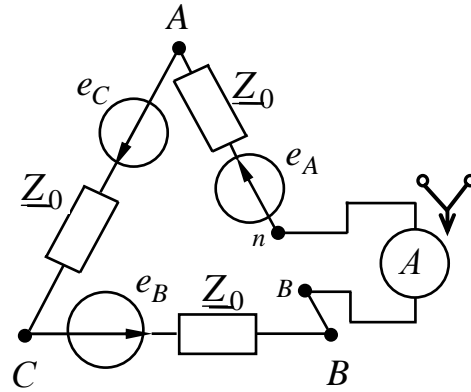


Рис. 3.16

Таким чином, діюче значення струму $I = \sqrt{I^{(3)^2} + I^{(6)^2} + I^{(9)^2} + \dots}$. (3.41)

3. Якщо обмотки генератора або трансформатора з'єднані в «зірку», в лінійній напрузі відсутні гармоніки, кратні трьом, оскільки $\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0$ (аналогічно для $\underline{U}_{BC}^{(3k)}$ і $\underline{U}_{CA}^{(3k)}$).

Таким чином:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(4)^2} + \dots} \quad (3.42)$$

Діюче значення фазної напруги:

$$U_\phi = \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(3)^2} + U^{(4)^2} + \dots} \quad (3.43)$$

Якщо у фазній напрузі присутні гармоніки, кратні трьом, то співвідношення $\frac{U_L}{U_\phi} < \sqrt{3}$, а якщо у фазній напрузі немає гармонік, кратних трьом, то

співвідношення $\frac{U_L}{U_\phi} = \sqrt{3}$.

4. З'єднання «зірка – зірка» без нульового проводу (навантаження симетричне й несиметричне) – на рис. 3.17.

При цьому струми гармонік, кратних трьом, відсутні, тому що інакше не виконуватиметься 1-й закон Кірхгофа, але при цьому між нульовими точками діятиме напруга зсуву нейтралі:

$$u_{010} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t) + E_m^{(9)} \cdot \sin(9 \cdot \omega t) \dots \quad (3.44)$$

Комплекс діючого значення цієї напруги для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} \cdot \underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{E}_B^{(3k)} \cdot \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{E}_C^{(3k)} \cdot \underline{Y}_C^{(3k)}}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}} = \underline{E}_\phi^{(3k)}. \quad (3.45)$$

де $\underline{Y}_\phi^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}}$ – провідність фази для гармоніки, кратної трьом.

$\underline{Z}_\phi^{(3k)}$ – опір фази для гармоніки, що кратна трьом.

Тоді лінійні струми для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}} = 0. \quad (3.46)$$

При несиметричному навантаженні напруга зсуву нейтралі:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \underline{E}_\phi^{(3k)}. \quad (3.47)$$

Тоді лінійні струми для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = \frac{0}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = 0, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}} = 0, \quad (3.48)$$

$$\underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}} = 0.$$

Діюче значення напруги зсуву нейтралі:

$$U_{010} = \sqrt{\frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(6)2}}{2} + \frac{E_m^{(9)2}}{2} + \dots}, \quad (3.49)$$

5. Схема «зірка – зірка» з нульовим проводом при симетричному навантаженні й наявності опору в нульовому проводі (рис. 3.18).

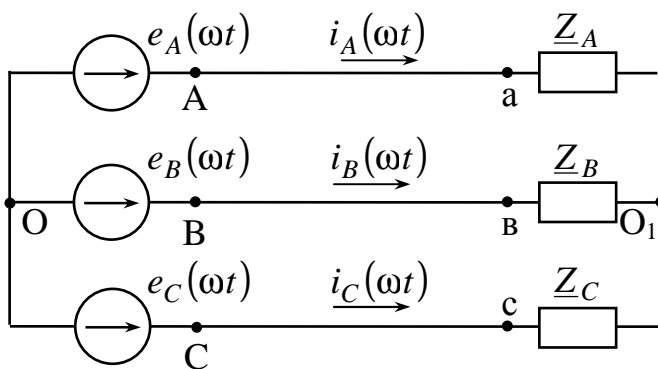


Рис. 3.17

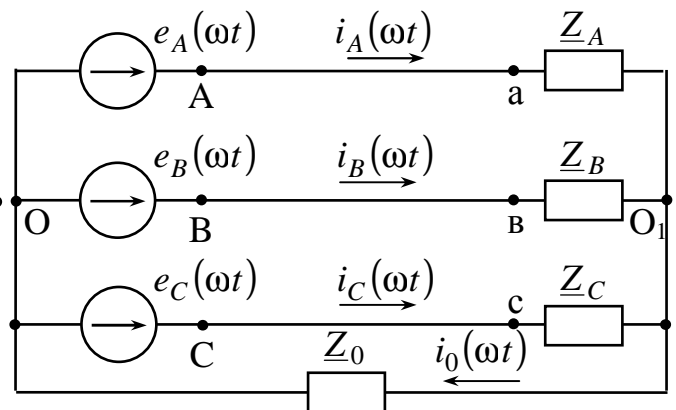


Рис. 3.18

По нульовому проводу протікатимуть струми гармонік, кратних трьом.

Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_{\hat{o}}^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_{\hat{o}}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\hat{o}}^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}, \quad (3.50)$$

де $\underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_0^{(3k)}}$ – провідність опору $\underline{Z}_0^{(3k)}$ в нульовому проводі для гармоніки, кратної трьом.

Струм нульового проводу:

$$\begin{aligned} \underline{I}_0^{(3k)} &= \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{U}_{010}^{(3k)} \cdot \underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}} \cdot \frac{1}{1/\underline{Y}_0^{(3k)}} = \\ &= \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Y}_0^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}\right) \cdot \frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}}} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)}}{\left(\frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}} + \frac{1}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}\right)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)} + \frac{\underline{Z}_{\phi}^{(3k)}}{3}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{I}_0^{(3k)}}{3}. \quad (3.52)$$

6. Схема зірка – зірка з нульовим проводом при несиметричному навантаженні і наявності опору \underline{Z}_0 у нульовому проводі (рис. 3.18).

Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}. \quad (3.53)$$

Струми знаходять так:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}}, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}}, \quad \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}}, \quad (3.54)$$

$$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{I}_A^{(3k)} + \underline{I}_B^{(3k)} + \underline{I}_C^{(3k)}. \quad (3.55)$$

Контрольні запитання

- 1) Дайте визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг та вкажіть режими роботи електричних кіл, що призводять до виникнення несинусоїдних струмів і напруг.
- 2) Поясніть, як проводять розкладання в ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми.
- 3) Вкажіть особливості періодичних несинусоїдних кривих, що мають деякі види симетрії.
- 4) Дайте визначення середнього й діючого значень несинусоїдного струму й напруги.
- 5) Дайте визначення активної, реактивної, повної потужностей і потужності викривлення несинусоїдного струму.
- 6) Наведіть порядок розрахунку струмів і напруг у колах, де діють несинусоїдні джерела напруги або струму. Вкажіть особливості такого розрахунку.
- 7) Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми „зірка-зірка” без нульового проводу (симетричне навантаження).
- 8) Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми „зірка-зірка” з нульовим проводом (несиметричне навантаження).

Розділ 4. Перехідні процеси в лінійних електричних колах

4.1. Визначення перехідних процесів

Перехідний процес – це процес переходу від одного до іншого режиму роботи кола, який будь-чим відрізняється від попереднього (амплітудою, фазою, частотою діючих у колі *ЕРС*, значеннями параметрів схеми). Перехідні процеси виникають у результаті різних комутацій.

Комутація – це розмикання або замикання ключів. На схемах це відображається так:



Рис. 4.1 – Приклади позначення ключів, що працюють на замикання й розмикання

Фізичне значення – перехід від енергетичного стану, відповідного режиму роботи кола до комутації, до енергетичного стану режиму кола після комутації. Якщо в колі є котушки індуктивності та (або) ємності, то такий перехід не може відбутися миттєво, оскільки миттєво не може змінитися енергія електричного й магнітного полів.

Перехідні процеси звичайно є швидкоплинними процесами (тривалість їх – десятки, соті, млрд. частки секунди). Але вивчення перехідних процесів є дуже важливим, оскільки дозволяє виявити можливі перевищення напруги на окремих ділянках кола, які можуть бути небезпечними для ізоляції установок; можливі збільшення амплітуд струмів, що іноді значно перевищують амплітуду струму сталого періодичного процесу. Сталими періодичними режимами є, як відомо, режим синусоїдного струму, режим постійного струму і режим відсутності струму у вітках кола.

Вивчення перехідних процесів також дає можливість встановити, як деформуються за формою й амплітудою сигнали при проходженні через підсилювачі, фільтри та інші радіотехнічні пристрої.

Вирішити задачу з перехідного процесу – це знайти закон зміни $i(t)$, або $u(t)$ на окремих ділянках кола. Так для схеми рис. 4.2, другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі при замиканні ключа має вигляд

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E. \quad (4.1)$$

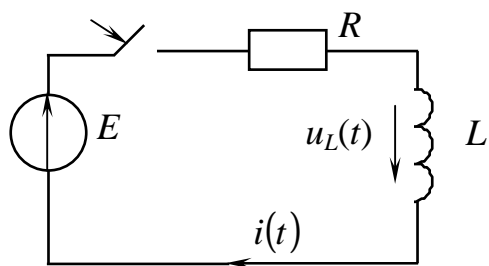


Рис. 4.2

Способи вирішення цього рівняння, тобто знаходження такої функції, яка задовольняє рівнянню (4.1), такі:

- класичний;
- операторний;
- за допомогою інтеграла Дюамеля.

Теоретично перехідний процес вважається нескінченним; момент комутації – це момент « $t = 0$ », момент безпосередньо перед комутацією – « $t = 0-$ »; а момент безпосередньо після комутації – « $t = 0+$ ».

4.2. Закони комутації

Перший закон комутації: в індуктивному елементі струм (і магнітний потік) безпосередньо після комутації, тобто у момент « $t = 0 +$ », зберігає значення, яке він мав безпосередньо перед комутацією, тобто у момент « $t = 0-$ », а далі починає змінюватися саме з цього значення:

$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$ - струм в індуктивному елементі стрибком змінюватися не може.

Припустимо, що це не так, і струм $i(t)$, який і є струмом в індуктивному елементі $i_L(t)$, в схемі рис. 4.2 зміниться стрибком. Тоді швидкість змінення струму $\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) \cdot R + L \cdot \infty = E$. (4.2)

З рівняння (4.2) виходить, що ЕРС повинна дорівнювати « ∞ », що не має фізичного сенсу, оскільки реальні джерела живлення не можуть мати нескінченно велику потужність.

Другий закон комутації: на ємнісному елементі напруга (і заряд) зберігає у момент комутації те значення, яке було безпосередньо перед комутацією і надалі починає змінюватися саме з цього значення.

$u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$ – напруга на ємності стрибком змінюватися не може.

Запишемо для схеми рис. 4.3 другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі:

$$i(t) \cdot R + u_C(t) = E, \quad (4.3)$$

$$\text{де } i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow \quad (4.4)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E. \quad (4.5)$$

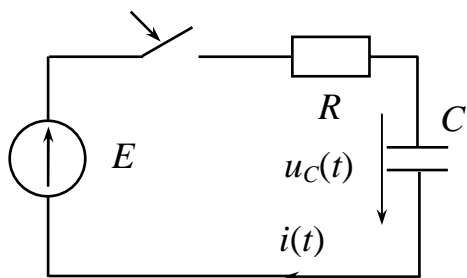


Рис. 4.3

Якщо напруга $u_C(t)$ зміниться стрибком, то величина $\frac{du_C(t)}{dt}$ повинна бути нескінченно великою, а отже

$$R \cdot C \cdot \infty + u_C(t) = E. \quad (4.6)$$

фізичного сенсу.

Це, як і в попередньому випадку не має

З енергетичного погляду неможливість миттєвої зміни струму $i_L(t)$ і напруги $u_C(t)$ пояснюється неможливістю стрибкоподібної зміни запасеної енергії магнітного поля $\frac{L \cdot i^2}{2}$ в індуктивному елементі й енергії електричного поля

$\frac{C \cdot u_C^2}{2}$ в ємності.

4.3. Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Рішенням лінійного неоднорідного диференційного рівняння першого порядку (ЛНДР) є сума часткового рішення неоднорідного рівняння і загального рішення однорідного рівняння (ЛОДР). ЛОДР, як відомо, отримуємо з ЛНДР, якщо праву частину останнього прирівнюємо до нуля.

Згідно з цим методом закон зміни струму (або напруги) розглядають як суму примусового ($i_{i\partial}$) і вільного ($i_{\hat{a}}$) струму (або напруги), тобто

$$i(t) = i_{i\partial} + i_{\hat{a}}; \quad u(t) = u_{i\partial} + u_{\hat{a}}. \quad (4.7)$$

Примусова складова – це частинне вирішення неоднорідного диференційного рівняння, або, якщо говорити з погляду електротехніки, – це значення струму або напруги в сталому режимі, тобто в припущенні, що перехідний процес повністю завершився ($t \rightarrow \infty$) і його можна не брати до уваги.

Вільна складова – загальне вирішення однорідного рівняння (термін «вільна» означає, що ця складова є вирішенням рівняння, вільного від примусової сили). Її вигляд залежить від коренів характеристичного рівняння.

Повний струм – це той струм, який насправді тече у вітці при перехідному процесі, а примусова і вільна складові дають дійсну величину струму (аналогічно для напруги).

Приклад. Для схеми на рис. 4.2 $i_{i0} = \frac{E}{R}$ ($E = \text{const}$), а рішенням ЛОДР

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ є показова функція виду } A \cdot e^{pt}.$$

Для даного випадку:

$p = -\frac{R}{L}$ – так званий коефіцієнт згасання, чим він більше, тим швидше встановлюється примусовий режим;

$A = -\frac{E}{R}$ – так звана постійна складова; щоб знайти A , необхідно мати значення $i(t)$ у будь-який момент часу (для даного прикладу за першим законом комутації – $i(0) = 0$).

A , p – незалежні від часу числа.

Таким чином:

$$i(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{pt} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4.8)$$

Підставимо (4.8) у (4.1):

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right) \cdot R + L \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right) = E - E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + L \cdot \left(-\frac{E}{R} \right) \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} =$$

$$= E - E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = E \Rightarrow \text{рівняння (4.8) – виявляється рішенням (4.1).}$$

Робимо висновок: класичний метод полягає в інтегруванні диференціальних рівнянь, які зв'язують струми й напруги кола, внаслідок чого з'являються постійні інтегрування, і в подальшому визначенні цих постійних за допомогою початкових умов, що впливають із законів комутації.

4.4. Незалежні й залежні початкові умови

Під початковими умовами розуміють значення величин струмів і напруг в момент $t = 0$.

Незалежні початкові умови (Н.П.У.) – це значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах, які відомі з режиму до комутації й стрибком змінюватися не можуть (відповідно до законів комутації). Значення інших струмів і напруг називають залежними початковими умовами. Крім того, початкові умови можуть бути нульовими й ненульовими.

Нульові початкові умови мають місце в схемі, якщо на початку перехідного процесу всі струми й напруги на пасивних елементах схеми дорівнюють

нулю (для схем на рис. 4.2 і рис. 4.3 - $i(0)=0$; $u_C(0)=0$).

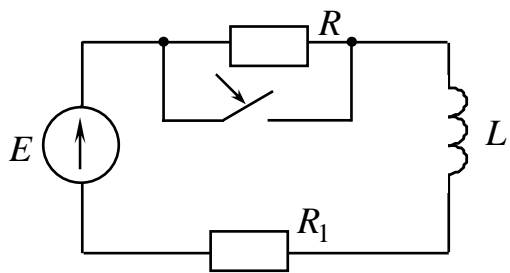


Рис. 4.4

Приклад ненульових початкових умов – рис. 4.4, а саме незалежна початкова умова в даному випадку $i_L(0) = \frac{E}{R + R_1}$.

Залежні початкові умови (З.П.У.) знаходять шляхом складання рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації та моменту часу $t = 0$. Для тієї ж схеми на рис. 4.4:

$$i_L(0) \cdot R_1 + u_L(0) = E \Rightarrow u_L(0) = E - \frac{E}{R + R_1} \cdot R_1 - \text{це і є залежна початкова умова.}$$

Висновок: після вивчення розділів 4.1-4.4 відомо, як знаходять залежні й незалежні початкові умови і як визначають зі схеми після комутації примусові складові. Таким чином, тепер треба розглянути, як у класичному методі знаходять вільні складові струмів і напруг. Для цього, як побачимо далі, необхідно скласти характеристичне рівняння.

4.5. Методи складання характеристичного рівняння

1. Метод *головного визначника* для отримання характеристичного рівняння.
2. Метод *вхідного опору* більш легкий шлях отримання характеристичного рівняння.

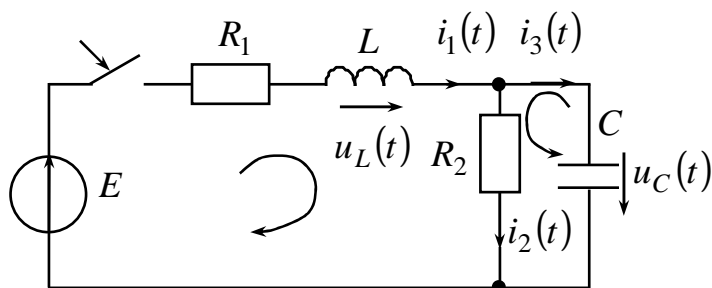


Рис. 4.5

За цим методом складають вираз для вхідного опору кола $\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)$ після комутації відносно вітки з джерелом ЕРС припускаючи, що в колі діє саме синусоїдна ЕРС. При цьому інші джерела ЕРС закорочують, а джерела струму – розривають. Для схеми на рис. 4.5

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = R_1 + j \cdot \omega \cdot L + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}. \quad (4.8)$$

Потім у виразі для $\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)$ замінюють $j\omega$ на p і зрівнюють отриманий таким чином вираз $\underline{Z}_{\text{вх}}(p)$ з нулем: $\frac{(R_1 + p \cdot L) \cdot (R_2 \cdot p \cdot C + 1) + R_2}{(R_2 \cdot p \cdot C + 1)} = 0 \Rightarrow$

$$p^2 \cdot C \cdot L \cdot R_2 + p \cdot (L + C \cdot R_1 \cdot R_2) + R_1 + R_2 = 0.$$

Якщо схема містить декілька джерел EPC , то вираз для вхідного опору складають відносно будь-якого джерела, інші закорочують (джерела струму розривають). Частіше для складання характеристичного рівняння застосовують саме цей метод, а метод головного визначника доцільний, коли схема після комутації дуже складна й важко записати вираз $\underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}}(j \cdot \omega)$.

4.6. Визначення ступеня характеристичного рівняння

Ступінь характеристичного рівняння необхідно вміти оцінювати до безпосереднього розрахунку схеми, в якій досліджується перехідний процес, що дає можливість визначити трудомісткість подальших обчислень і допомагає виявленню помилки, якщо вона виникає при складанні характеристичного рівняння.

Ступінь характеристичного рівняння дорівнює числу основних незалежних початкових умов після можливого спрощення схеми після комутації і не залежить від виду діючої в схемі EPC .

Спрощення полягає в тому, що паралельно з'єднані ємності й послідовно з'єднані індуктивності замінюються однією еквівалентною ємністю ($C_{\text{екв}} = C_1 + C_2$) й індуктивністю ($L_{\text{екв}} = L_1 + L_2$).

Ступінь характеристичного рівняння не залежить від того, чи існує магнітний зв'язок між індуктивностями схеми, або він відсутній.

4.7. Властивості коренів характеристичного рівняння

1. Число коренів характеристичного рівняння дорівнює ступеню цього рівняння.

2. Всі дійсні корені характеристичного рівняння завжди від'ємні, оскільки вільний процес проходить за відсутності примусової сили, тому не може відбуватися нескінченно довго, а для цього процес повинен бути затухаючим, тобто $p < 0$.

3. Рівняння другого ступеня може мати:

- 2 дійсні нерівні від'ємні корені;
- 2 дійсні рівні від'ємні корені;
- 2 комплексно спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.

4. Рівняння третього ступеня може мати:

- 3 дійсні нерівні від'ємні корені;
- 3 дійсні від'ємні корені, з яких 2 однакові;
- 3 дійсні рівні від'ємні корені;
- один дійсний від'ємний корінь і два комплексно спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.

4.8. Характер вільного процесу залежно від коренів характеристичного рівняння

1. Характеристичне рівняння першого ступеня, тобто має один корінь:

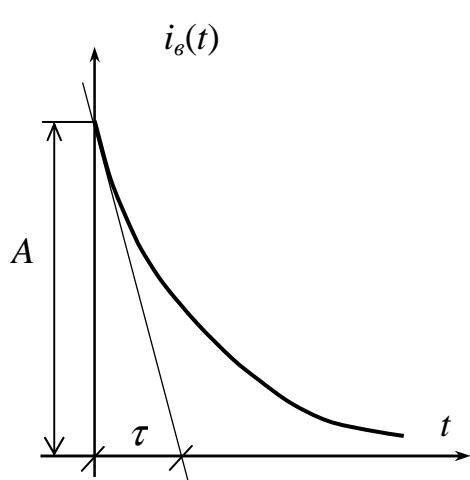


Рис.4.6

$$i_g = A \cdot e^{p \cdot t} \quad (4.9)$$

де p – коефіцієнт згасання

A – постійна інтегрування (залежить від параметрів кола, ЕРС, моменту включення).

Характер зміни i_{cs} при $A > 0$ наведений на рис. 4.6.

Величину $\tau = \frac{1}{|p|}$ називають *сталю*

часу кола, тобто це час, за який вільна складова i_g зменшується в $e = 2,71$ разів;

τ залежить від виду схеми та її параметрів:

при $t = 0$: $i_g = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$;

при $t = \tau$: $i_g = A \cdot e^{p \cdot \frac{1}{|p|}} = A \cdot e^{(-1)} = \frac{A}{e}$, тобто функція i_g зменшилась у e разів.

Постійна часу τ дорівнює довжині піддотичної (рис.4.6).

2. Характеристичне рівняння другого ступеня, тобто має 2 кореня.

При цьому можливі три випадки.

2.1. Дійсні нерівні корені $p_1 = -a$; $p_2 = -b$ (припустимо $b > a$, тобто $|p_1| < |p_2|$, $\tau_1 > \tau_2$).

Тоді :

$$i_g = A_1 \cdot e^{-a \cdot t} + A_2 \cdot e^{-b \cdot t} = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (4.10)$$

Характер зміни вільного процесу при різних за величиною і знаком постійних інтегрування A_1 та A_2 подані на рис. 4.7 – 4.10, де позначено:

«1» – крива $A_1 \cdot e^{-a \cdot t}$; «2» – крива $A_2 \cdot e^{-b \cdot t}$;

«3» – результуюча крива, яка була отримана шляхом складання кривих «1» і «2».

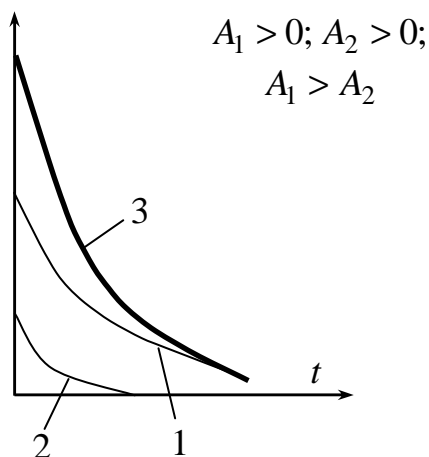


Рис. 4.7

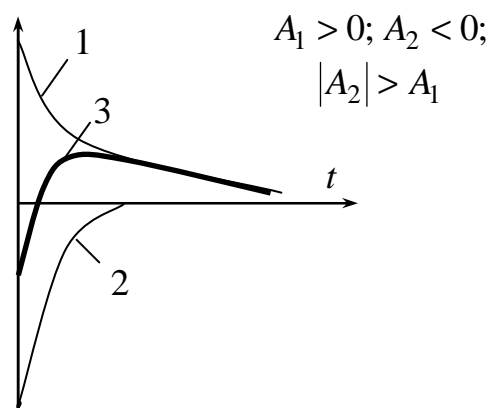


Рис. 4.8

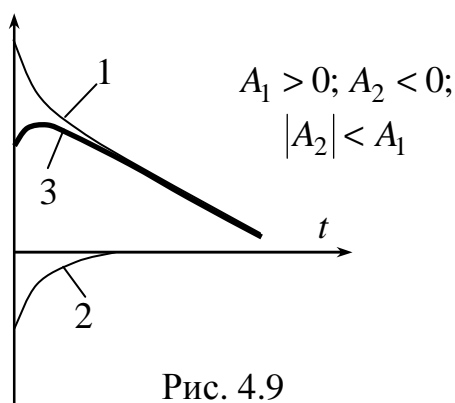


Рис. 4.9

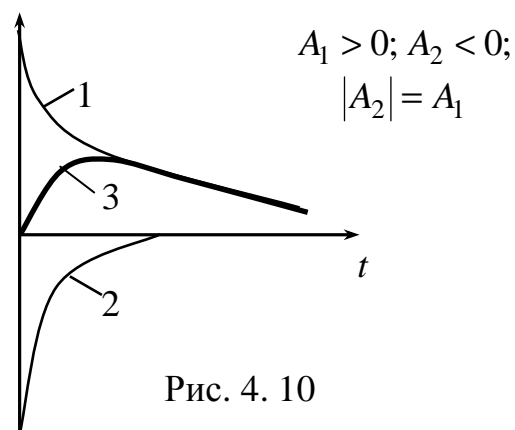


Рис. 4. 10

2.2. Корені дійсні й рівні $p_1 = p_2 = p$.

Тоді вираз для $i_{\hat{n}\hat{a}}(t)$ має вигляд - $i_{\hat{e}} = (A_1 \cdot e^{pt} + A_2 \cdot e^{pt}) = e^{pt} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t)$. (4.11)

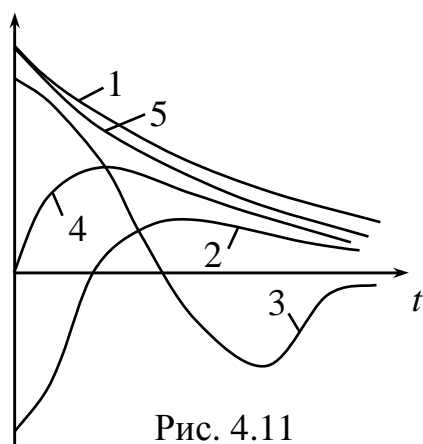


Рис. 4.11

На рис. 4.11 подані п'ять кривих, що показують можливий характер зміни функції $e^{pt} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t)$ при різних знаках сталих інтегрування A_1 і A_2 :

- крива «1» - $A_1 > 0; A_2 > 0$;
- крива «2» - $A_1 < 0; A_2 > 0$;
- крива «3» - $A_1 > 0; A_2 < 0$;
- крива «4» - $A_1 = 0; A_2 > 0$;

- крива «5» - $A_1 > 0; A_2 = 0$.

2.3. Корені комплексно спряжені, тобто $p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$.

$$\text{Тоді вираз для } i_{\epsilon}(t) \text{ має вигляд: } i_{\epsilon} = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi). \quad (4.12)$$

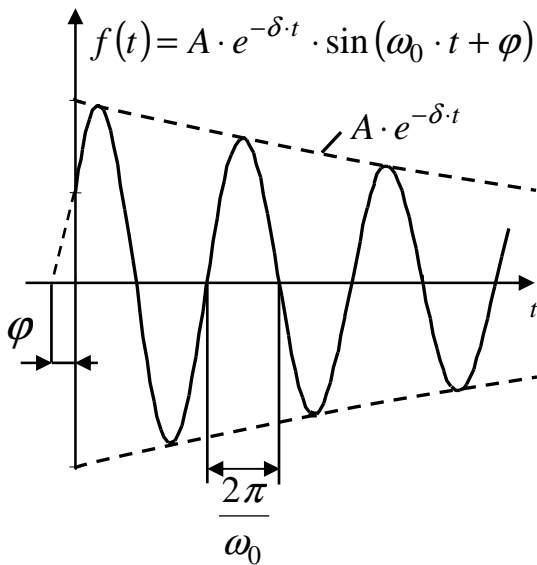


Рис. 4.12

Формула (4.12) описує синусоїдне коливання, що затухає з кутовою частотою ω_0 і початковою фазою φ (рис. 4.12). Обвідна коливання визначається кривими $A \cdot e^{-\delta \cdot t}$ та $-A \cdot e^{-\delta \cdot t}$. Чим більше коефіцієнт згасання δ , тим швидше затухає коливальний процес. Кутова частота вільних коливань ω_0 і коефіцієнт згасання δ залежать тільки від параметрів кола після комутації. A і φ визначаються значеннями параметрів схеми, початковими умовами і величиною ЕРС джерела.

4.9. Визначення постійних інтегрування у класичному методі

1. Характеристичне рівняння першого ступеня.

$$\text{Вільна складова струму} - i_{\epsilon} = A \cdot e^{pt} \Rightarrow i(t) = i_{i\delta}(t) + \dot{A} \cdot e^{pt} \Rightarrow \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow i(0) = i_{i\delta}(0) + \dot{A} \cdot e^{p \cdot 0} = i_{i\delta}(0) + \dot{A} \Rightarrow \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{A} = i(0) - i_{i\delta}(0)}. \quad (4.16)$$

2. Характеристичне рівняння другого ступеня.

2.1. Корені рівняння дійсні нерівні числа ($p_1 \neq p_2$).

$$\text{Вільна складова струму} - i_{\epsilon} = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \Rightarrow. \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow i(t) = i_{i\delta}(t) + \dot{A}_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + \dot{A}_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (4.18)$$

Для визначення постійних інтегрування A_1 і A_2 необхідно мати значення струму $i(t)$ і значення $\frac{di}{dt}$ в нульовий момент часу, тобто $i(0)$ та $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$.

У момент $t=0$:

$$i(0) = i_{i\delta}(0) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot 0} + A_2 \cdot e^{p_1 \cdot 0} \Rightarrow \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow i(0) = i_{i\delta}(0) + A_1 + A_2. \quad (4.20)$$

Похідна виразу (4.18) є вигляд

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{i\delta}(t) + \dot{A}_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + \dot{A}_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (4.21)$$

$$\text{Отже, } \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{i\delta}(0) + \dot{A}_1 \cdot p_1 + \dot{A}_2 \cdot p_2. \quad (4.22)$$

Вирішивши спільно (4.20) і (4.22) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$, знаходимо A_1 і A_2 .

2.2. Корені рівняння дійсні рівні числа ($p_1=p_2=p$), тобто

$$i_g = A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (4.23)$$

$$i(t) = i_{i\delta}(t) + \dot{A}_1 \cdot e^{p \cdot t} + \dot{A}_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (4.24)$$

$$i(0) = i_{i\delta}(0) + \dot{A}_1, \quad (4.25)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{i\delta}(t) + \dot{A}_1 \cdot p \cdot e^{p \cdot t} + \dot{A}_2 \cdot e^{p \cdot t} + \dot{A}_2 \cdot t \cdot p \cdot e^{p \cdot t}, \quad (4.26)$$

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} = i'_{i\delta}(0) + \dot{A}_1 \cdot p + \dot{A}_2, \quad (4.27)$$

Вирішивши спільно (4.25) і (4.27) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$, знайдемо A_1 і A_2 .

2.3. Корені рівняння комплексно-спряжені числа ($p_{12} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$), тобто:

$$i_g = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (4.28)$$

$$i(t) = i_{i\delta}(t) + \dot{A} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (4.29)$$

$$i(0) = i_{i\delta}(0) + \dot{A} \cdot \sin \alpha, \quad (4.30)$$

$$\frac{di}{dt} = i'_{i\delta}(t) + \dot{A} \cdot (-\delta) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha) + \dot{A} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{i\delta}(0) + \dot{A} \cdot (-\delta) \cdot \sin \alpha + \dot{A} \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha. \quad (4.32)$$

Вирішивши спільно (4.30) і (4.32) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$, знайдемо A_1 і A_2 .

4.10. Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом

- 1 Довільно вибираємо напрями струмів (напруг) у вітках кола.
2. Записуємо рішення для струмів і напруг у загальному вигляді, тобто у вигляді суми примусових і вільних складових: $i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{в}}(t)$, $u(t) = u_{\text{пр}}(t) + u_{\text{в}}(t)$.
3. Визначаємо незалежні початкові умови (шляхом розрахунку схеми до комутації) і залежні початкові умови (шляхом складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для моменту часу $t = 0$).
4. Вважаючи, що перехідний процес повністю завершився, для схеми після комутації визначаємо примусові складові струмів і напруг.
5. Для схеми після комутації складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його рішення і визначаємо вигляд вільних складових струмів і напруг (розділ 4.8).
6. За допомогою незалежних і залежних початкових умов визначаємо постійні інтегрування (розділ 4.9).
7. Остаточно записуємо закони струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ при перехідному процесі.

4.11. Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів

Яким методом користуватися цілком залежить від навички і звички. Як класичний, так і операторний методи можна застосовувати для вирішення задач будь-якої складності. Але зробимо деякі зауваження:

- якщо порядок характеристичного рівняння більше двох, то доцільно застосовувати операторний метод;
- класичний метод більш фізично «прозорий» (якщо характеристичне рівняння має ступінь менше двох, то застосовують саме його);
- операторний метод потребує достатньої математичної підготовки.
- основною областю застосування інтеграла Дюамеля є випадки, коли напруга, що впливає на електричне коло, змінюється в часі за складним законом.

Контрольні запитання

- 1) Дайте визначення перехідних процесів і сформулюйте закони комутації.
- 2) Дайте визначення класичного методу розрахунку перехідних процесів.
- 3) Дайте визначення примусових і вільних складових струмів і напруг; незалежних і залежних, нульових і ненульових початкових умов.
- 4) Охарактеризуйте методи складання характеристичного рівняння: метод головного визначника й метод вхідного опору.
- 5) Поясніть, як залежить характер вільного процесу від кількості та характеру коренів характеристичного рівняння.
- 6) Поясніть, яким чином визначають сталі інтегрування у класичному методі.
- 7) Наведіть порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом..
- 8) Порівняйте різні методи аналізу перехідних процесів.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст]: учебник / - Л.А. Бессонов; М.: Гардарики, 2002. – 640 с.
2. Зевеке, Г.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов [Текст] / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, Нетушил, Страхов; М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
3. Паначевний, Б.І. Загальна електротехніка: теорія і практикум: Підручник [Текст] / Б.І. Паначевний, Ю.Ф. Свергун; К.: Каравела, 2004. - 440 с.
4. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. Учебник [Текст] / Л.А. Бессонов; М.: Гардарики, 2001 г. – 317 с.
5. Рибалко, М.П. Теоретичні основи електротехніки: Лінійні електричні кола: Підручник [Текст] / В.О. Есауленко, В.І. Костенко; Донецьк: Новий світ, 2003. – 513 с.
6. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса [Текст] / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин; Издательство «Питер», 2004 г. (Том 1 – 462 с., Том 2 – 575 с., том 3 – 376 с.).
7. Воробкевич, А.Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки. Частина 1. Навч. посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів [Текст] / В.С. Маляр, Р.Я. Совин, М.О. Соколовський, П.Г. Стахів, О.І. Шегедін, А.Ю. Воробкевича, О.І. Шегедіна; К.: «Магнолія Плюс», 2004. – 224 с.

ПІСЛЯМОВА

Отже Ви, шановний студенте, закінчили ознайомлення з нашим текстом лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки". У ньому були розглянуті наступні теми:

- 1) лінійні електричні кола постійного струму;*
- 2) лінійні електричні кола синусоїдного струму;*
- 3) несинусоїдні періодичні струми й напруги в лінійних електричних колах;*
- 4) перехідні процеси в лінійних електричних колах.*

При цьому автори намагалися забезпечити доступність викладення матеріалу і дружність тексту до читача.

Звісно, текст лекцій не претендує на вичерпність у висвітленні основ сучасної теоретичної електротехніки. Але ми сподіваємося, він сповна відповідає поставленій меті – забезпечити набуття знань, що є необхідними для подальшого успішного вивчення усіх спеціальних електротехнічних дисциплін у вищому навчальному закладі і які в майбутньому повинні допомогти при вирішенні конкретних технічних завдань у Вашій практичній діяльності за основною спеціальністю. Особливо корисним текст лекцій буде для студентів заочної форми навчання.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Текст лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" (для студентів усіх форм навчання напряму 6.030601 „Менеджмент” професійного спрямування „Менеджмент організацій” спеціалізації „Менеджмент організацій паливно-енергетичного комплексу”)

Укладачі: доц., к.т.н. Яна Борисівна Форкун,
ст. викл. Світлана Марківна Юрченко

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009, поз.102Л

Підп. до друку	24.12.2009 р.	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі		Умовн.-друк.арк. 3,6	Обл.-вид. арк. 3,7
Замовл. №	.	Тираж 50 прим.	
61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12			
Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ			
61002, Харків, вул. Революції, 12			