МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ

МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

(для студентів 1 курсу усіх спеціальностей Академії)

Частина 1

Харків

ХНАМГ

2012

Методичні вказівки до вирішення задач з вищої математики (для студентів 1 курсу усіх спеціальностей Академії). Частина 1 / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Л.П. Вороновська, Є.С. Пахомова, С.С.Шульгіна – Х.: ХНАМГ, 2012. - 84 с.

Укладачі: Л.П. Вороновська, Є.С. Пахомова, С.С.Шульгіна

Рецензент: канд. техн. наук, професор кафедри вищої математики

С.О. Станішевський.

Рекомендована кафедрою вищої математики,

протокол № 4 від 25.11.2009 р

1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1.1.ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1.1.1. Короткі теоретичні відомості

1. *Відстань d між точками* $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ площини знаходять за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Якщо x_1 і y_1 - координати точки A, а x_2 і y_2 - координати точки B, то координати x і y точки C, яка поділяє відрізок AB в даному відношенні $\lambda = \frac{AC}{CB}$, знаходять за формулами :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо λ=1, то точка $C(x, y)$ *поділяє відрізок AB навпіл*, і тоді координати x і y середини відрізка AB знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. *Площу трикутника* за даними координатами вершин $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

4. Рівняння прямої:

а) загальне рівняння прямої : $Ax + By + C = 0$;

б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$;

в) рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

г) рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ *у даному напрямку:*

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

д) рівняння прямої , яка проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ *:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5. *Кут між двома прямими.* Нехай дані дві прямі

$$y = k_1x + b_1 \text{ і } \quad y = k_2x + b_2$$

Кутом між двома прямими на площині називають кут θ(Рис. 1) на який необхідно повернути пряму (1) проти годинникової стрілки до збігу із другою прямою (2) і знаходять за формулою:

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

З цієї формули прямують дві умови:

а) умова *паралельності* прямих: $k_1 = k_2$;

б) умова *перпендикулярності* прямих : $k_1 = \frac{-1}{k_2}$.

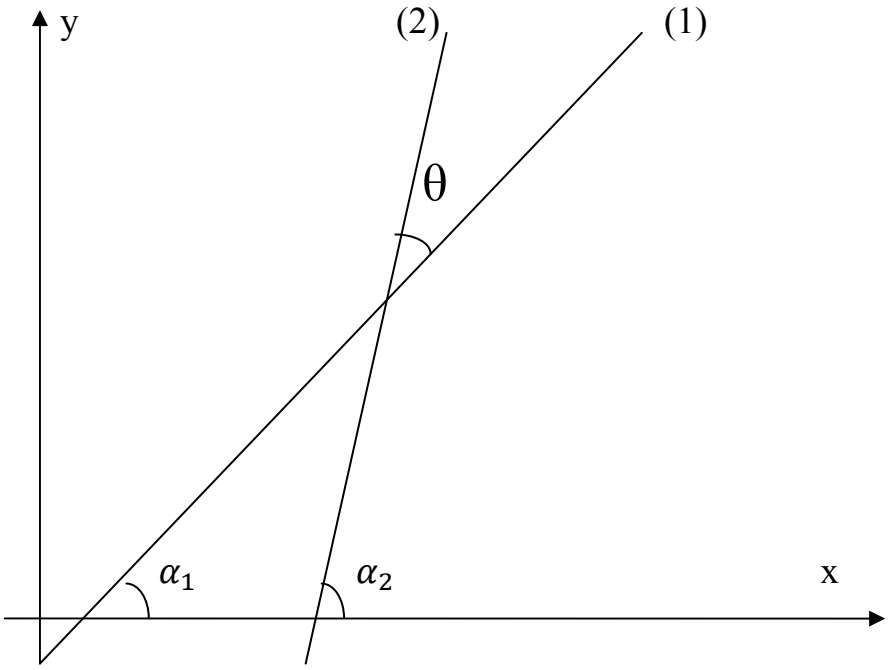


Рис. 1

6. *Відстань від точки* $A(x_0, y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

1.1.2. Розв'язання задач

Для трикутника (Рис. 2) з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6,3)$, $C(5,1)$ виконати наступні приклади:

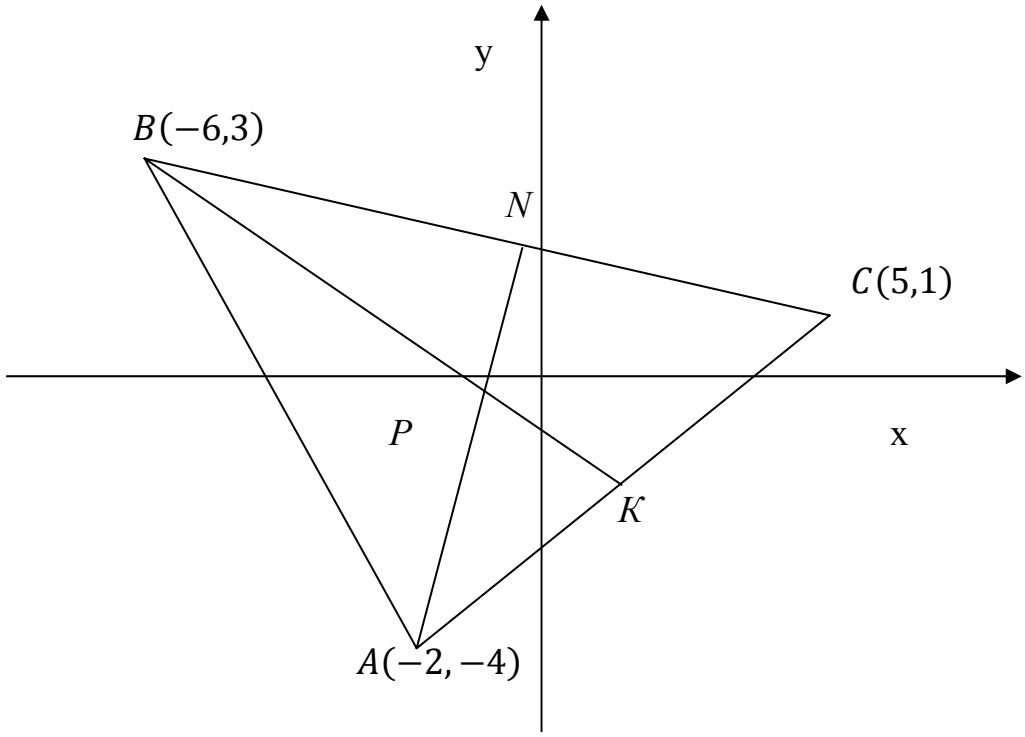


Рис. 2

Приклад 1.Обчислити довжину сторін трикутника.

Розв'язання. Використаємо формулу : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$d_{AB} = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{(-6+2)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{65}$ од. д.

$d_{BC} = \sqrt{(5-(-6))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(5+6)^2 + 4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ од. д.

$d_{AC} = \sqrt{(5-(-2))^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{(5+2)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{74}$ од. д.

Приклад 2. Визначити вид трикутника.

Розв'язання. Вид трикутника можна визначити за його рисунком (Рис. 2), або, знаючи довжину сторін, необхідно порівняти квадрат довжини найбільшої сторони з сумою квадратів довжин менших сторін.

Якщо $d_1^2 > d_2^2 + d_3^2$, то такий трикутник має тупий кут; якщо $d_1^2 = d_2^2 + d_3^2$, то це прямокутний трикутник і якщо $d_1^2 < d_2^2 + d_3^2$,то це гострокутний трикутник. У даному разі маємо:

$d_{BC}^2 < d_{AB}^2 + d_{AC}^2$; $125 < 65 + 74$; $125 < 139$.

Отже: трикутник гострокутний, різносторонній.

Приклад 3. Обчислити площу трикутника.

Розв'язання. Площа даного трикутника за наведеною вище формулою дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}|(-2-5)(3-1) - (-6-5)(-4-1)| = \frac{1}{2}|-14-55| = \left|\frac{-69}{2}\right|.$$

$S = 34{,}5$ од. кв.

Приклад 4. Записати рівняння сторін трикутника.

Розв'язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4), B(-6,3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить крізь дві точки, маємо:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень маємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін BC і AC знаходимо так само.

BC: $B(-6,3)$, $C(5,1)$

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)} = \frac{y-3}{1-3}. \text{Звідси:} \quad y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}.$$

AC: $A(-2,-4)$, $C(5,1)$

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)}. \text{ Звідси } y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}$$

Приклад 5. Знайти внутрішні кути трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання використаємо формулу

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут α утворено перетином прямих AB і AC (рис. 2). Отже, тут:

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \qquad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = arctg\frac{69}{7}.$$

Кут β утворено перетином прямих AB і BC (рис. 2). Отже, тут:

$$k_1 = k_{AB} = -\frac{7}{4}, \qquad k_2 = k_{BC} = -\frac{2}{11}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\beta = \frac{-\frac{2}{11} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{11}} = \frac{\frac{69}{44}}{\frac{58}{44}} = \frac{69}{58}; \ \beta = arctg\frac{69}{58}.$$

Кут γ утворено перетином прямих AC і BC (рис. 2). Отже, тут:

$$k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{11}, \qquad k_2 = k_{AC} = \frac{5}{7}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\gamma = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{69}{77}}{\frac{67}{77}} = \frac{69}{67}; \ \gamma = arctg\frac{69}{67}.$$

Приклад 6. Знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K (рис. 2) знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тут: $\mathrm{A}(-2, -4)$, $\mathrm{C}(5,1)$. Отже, маємо:

$$x_K = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Рівняння BK запишемо використовуючи формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тут: $B(-6,3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Отже $\dfrac{x+6}{\frac{3}{2}+6} = \dfrac{y-3}{-\frac{3}{2}-3}$.

Після тотожних перетворень маємо рівняння медіани *BK:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

Приклад 7. Знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота AN- це перпендикуляр проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова їх перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти *AN* знаходимо за формулою: $y - y_0 = k(x - x_0)$,

де $k = k_{AN}, A(x_0, y_0)$. Тобто: $k = \frac{11}{2}, \qquad A(-2,-4)$.

Маємо $\qquad y + 4 = \frac{11}{2}(x+2); \;\; y = \frac{11}{2}x + 11 - 4$.

Рівняння висоти AN: $y = \frac{11}{2}x + 7$.

Приклад 8. Обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо, як відстань від точки $C(x_0, y_0)$ до прямої AB використовуючи формулу:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Для цього запишемо рівняння прямої AB в загальному виді:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}\ ; \qquad 4y = -7x - 30;\ \ 7x + 4y + 30 = 0;$$

отже, $A = 7, B = 4, C = 30.$ Точка $\mathrm{C}(x_0, y_0)$ має координати $x_0 = 5, y_0$=1.

$$\text{Отже:} \qquad d = \left|\frac{7 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 30}{\sqrt{7^2 + 4^2}}\right| = \frac{69}{\sqrt{65}}\text{ од. д.}$$

Приклад 9. Знайти координати точки перетину медіани BK та висоти AN.

Розв'язання. Позначимо цю точку літерою *P* (рис. 2). Для знаходження її координат треба розв'язати систему рівнянь медіани BK та висоти AN:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{2}x + 7 \end{cases};\ \text{звідси маємо:}\ \ -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{11}{2}x + 7.$$

$$\text{Після тотожних перетворень отримаємо: } x = -\frac{76}{61}.$$

Знайдене значення *x* підставимо у перше рівняння і отримаємо *:*

$$y = \frac{9}{61}$$

Отже, точка перетину медіани і висоти: $P\left(-\frac{76}{61}, \frac{9}{61}\right)$.

Приклад 10. Записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна прямій AC, а тому використавши умову паралельності двох прямих знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BF:

$$k_{BF} = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже використаємо наступне рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тут: $k = \frac{5}{7}$, $B(6,3)$. Отже, $y - 3 = \frac{5}{7}(x + 6)$; $y = \frac{5}{7}x + \frac{30}{7} + 3$.

Рівняння прямої BF: $y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}$.

1.2. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1.2.1. Короткі теоретичні відомості

1. *Рівняння кола:* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де a і b – координати центра кола, а R - радіус кола.

2. *Рівняння еліпса:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{де } a, b - \text{ півосі еліпса.}$$

Якщо $2c$ – відстань між фокусами, то $a^2 - b^2 = c^2$.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення: $e = \frac{c}{a}$.

3. *Рівняння гіперболи:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{де } a - \text{дійсна піввісь,} \qquad \text{а } b - \text{уявна піввісь.}$$

Якщо $2c$ – відстань між фокусами, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення:$e = \frac{c}{a}$.

Асимптоти гіперболи – дві прямі, визначанні рівняннями:

$$y = \frac{b}{a}x \,;\; y = -\frac{b}{a}x \,.$$

Координати фокусів еліпса та гіперболи:$F_1(-c,0)$; $F_2(c,0)$

Рівняння директрис еліпса та гіперболи: $x = \pm\frac{a}{e}$

4. *Рівняння параболи:* $y^2 = 2px$, де $p -$ параметр параболи.

Координати фокусу $F\left(\frac{p}{2},0\right)$. Рівняння директриси параболи: $x = -\frac{p}{2}$.

1.2.2. Розв'язання задач

Приклад 1. Показати, що $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ є рівнянням кола. Знайти його центр та радіус.

Розв'язання. Подамо рівняння у вигляді:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) - 11 = 0.$$

Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 8y + 16) - 16 - 11 = 0,$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) - 36 = 0,$$

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$. Маємо рівняння кола. Центр кола має координати (3,-4) і радіус R=6.

Приклад 2. Написати рівняння кола, яке проходить через точки (0,1), (2,0), (3,-1).

Розв'язання. Підставимо послідовно у рівняння кола координати даних точок і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = R^2; \\ (2-a)^2 + b^2 = R^2; \\ (3-a)^2 + (-1-b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Праві частини рівні, отже і ліві – теж рівні.

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (-1-b)^2 \\ a^2 + (1-b)^2 = (2-a)^2 + b^2 \end{cases}; \begin{cases} 4a - 2b = 3 \\ 6a - 4b = 9 \end{cases}; \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{9}{2} \end{cases}.$$

Підставимо знайдені координати центру кола у одне з початкових рівнянь для отримання R. Маємо:

$$\frac{9}{4}+\left(1+\frac{9}{2}\right)^2=R^2; \quad R^2=\frac{65}{2}.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{65}{2}.$$

Приклад 3. Скласти канонічне рівняння еліпса, знаючи:

а) його піввісі: a=6, b=4;

б) відстань між фокусами 2c=10, а більша вісь 2a=16;

в) більша піввісь a=12, а ексцентриситет e=0,5;

г) сума півосей a+b=12, а відстань між фокусами 2c=6$\sqrt{2}$.

Розв'язання.

а) канонічне рівняння еліпса має вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Підставимо сюди a=6, b=4 і отримаємо: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$

б) щоб скласти канонічне рівняння еліпса знайдемо малу піввісь b. Між величинами a,b і c еліпса існує залежність $a^2-b^2=c^2$, або $b^2=a^2-c^2$.

У нашому випадку $b^2=64-25=39$. Шукане рівняння еліпса має вид:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1.$$

в) відомо, що $e=\frac{c}{a}$. З цієї формули визначимо: $c=e\cdot a=12\cdot 0{,}5=6$.
Користуючись співвідношенням $a^2-b^2=c^2$, знайдемо $b^2=a^2-c^2$=144 −36=108.

Отже отримаємо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1.$

г) відомо, що c=3$\sqrt{2}$; $c^2=18$; $a^2-b^2=c^2$. Отже,

$(a-b)(a+b)=c^2$; $(a-b)12=18$. Складемо систему рівнянь:

$\begin{cases} a+b=12 \\ a-b=1{,}5 \end{cases}$. Звідси отримаємо a=6,75; b=5,25.

Шукане рівняння еліпсу має вид:

$$\frac{x^2}{6{,}75^2}+\frac{y^2}{5{,}25^2}=1$$

Приклад 4. Дійсна піввісь гіперболи дорівнює 5, ексцентриситет $e=1{,}4$. Знайти канонічне рівняння гіперболи.

Розв'язання. Тут a=5 і e=1,4., $a^2=25$. Отже, оскільки $e=\frac{c}{a}$,

то $\frac{c}{5}$=1,4; c=7 , $c^2=49$.

Але $b^2=c^2-a^2$. Тобто $b^2=49-25=16$.

Тому шукане рівняння гіперболи має вид:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Приклад 5. Гіпербола проходить через точки $M\left(3,\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ і $N\left(-2\sqrt{5},3\right)$. Знайти рівняння гіперболи.

Розв'язання. Канонічне рівняння гіперболи може бути записано у вигляді:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 .$$

Необхідно знайти a^2 і b^2 . Підставимо в це рівняння послідовно координати точокM і N, отримаємо систему рівнянь відносно a^2 і b^2 :

$$\begin{cases} 20b^2-9a^2=a^2b^2, \\ 45b^2-12a^2=5a^2b^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо її. Помножимо перше рівняння на 4, а друге на 3:

$$\begin{cases} 80b^2-36a^2=4a^2b^2, \\ 135b^2-36a^2=15a^2b^2. \end{cases}$$

Віднімаючи з другого рівняння перше, отримуємо:

$55b^2 = 11a^2b^2$, або $55b^2 - 11a^2b^2 = 0$.

Відкіля $11b^2(5 - a^2) = 0$; $a^2 = 5$.

Підставимо знайдене значення a^2 в перше рівняння початкової системи: $20b^2 - 45 = 5b^2$. Отже $b^2 = 3$.

Шукане рівняння гіперболи має вид:

$$3x^2 - 5y^2 = 15 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Приклад 6. Парабола $y^2 = 2px$ проходить через точку $M(2,4)$. Знайти параметр p.

Розв'язання. Підставимо у рівняння параболи $y^2 = 2px$ координати точки M: $16=4p$, $p=4$.

Приклад 7. Скласти канонічне рівняння параболи, знаючи, що вершина її знаходиться у початку координат і відстань від фокуса до вершини дорівнює 4, а віссю симетрії служить вісь Ox.

Розв'язання. Так як віссю симетрії параболи служить вісь Ox, а вершиною – початок координат, то парабола може бути задана одним з рівнянь:

$$y^2 = 2px \quad \text{або } y^2 = -2px$$

Параметр параболи p – це відстань від директриси параболи до фокуса. Відстань від фокуса до вершини дорівнює $\frac{p}{2}$. За умовою $\frac{p}{2} = 4$. Отже $p = 8$.

Шукане рівняння має вигляд:

$$y^2 = 16x \quad \text{або } y^2 = -16x.$$

2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.1. Матриці. Визначники

Прямокутна таблиця чисел, складена з m рядків та n стовпців називається *матрицею* порядку $m \times n$. Матриця А має вигляд:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ або } \mathrm{A}=\|a_{ij}\|, \text{ або } \mathrm{A}=\langle a_{ij}\rangle, \text{ де } i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$$

Тут a_{ij}елемент матриці А, який розташований в i-му рядку та j-му стовпці. Матриця називається квадратною, якщо $m = n$. Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}, m = n = 2 \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}, m = n = 3.$$

Необхідно виділити деякі матриці: $E = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ \dots 0 \\ 0\ 1\ 0\ \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots 1 \end{pmatrix}$ - одинична;

$D = \begin{pmatrix} a_{11}\ 0\ 0\ \dots 0 \\ 0\ a_{22}\ 0\ \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}$ - діагональна та $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\ \dots\ a_{1n} \\ 0\ a_{22}a_{23}\ \dots\ a_{2n} \\ 0\ \ 0\ \ a_{33}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}$ – верхньотрикутна.

Введемо поняття *визначника*. Позначимо ΔA або $detA$. Визначник це число, яке знаходиться наступним чином: 1) для $A = (a)$, $n = 1, detA = a$. Тут n - розмірність (порядок) $detA$.

2) для $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$, $n = 2$: $detA = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

3) для $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}, n = 3$, $detA = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$. Останній визначник обчислюєм:

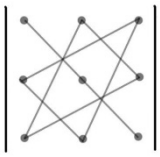
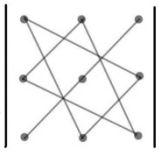
а) за правилом Саррюса. Спочатку під визначником дописуємо два верхніх рядка (або за визначником дописуємо два перших стовпця); потім виконуємо множення по три елементи починаючи з головної діагоналі з їх послідовним

додаванням; потім виконуємо множення по три елементи починаючи з побічної діагоналі з їх послідовним відніманням. Кожний елемент визначника береться із своїм знаком. Отже,

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33});$$

б) за правилом "зірки" отримуємо ту саму суму. Правило "зірки"схематично виглядає наступним чином:

$detA =$  $-$  .

Приклад 1. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти $detA$.

Розв'язання. Скористаємося правилом "зірки"

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - (1 \cdot 0 \cdot (-2) +$$

$$+2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot -1 \cdot 5 = -3 - 8 - 18 - 10 = -19;$$

Скористаємося правилом Саррюса: $detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{matrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 +$

$$+2 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -8 - 3 -$$

$$-18 + 10 = -19$$

Загальний метод обчислення визначників. Загальний метод обчислення визначників полягає у його розкладанні *за елементами рядка (або стовпця).*

Якщо візьмемо будь-який елемент визначника і викреслимо рядок і стовпець, в яких він розташований, то одержимо визначник меншого порядку. Такий визначник називається *мінором*. Мінор помножений на $(-1)^{m+n}$, де m – номер рядка, а n – номер стовпця в яких знаходиться елемент, називається *алгебраїчним доповненням елемента*.

Наприклад, якщо $A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$, то алгебраїчне доповнення для елемента a_{13} має такий вигляд: $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}$, а для елемента a_{32}: $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix}$.

Тоді формула розкладання визначника за елементами першого рядка представляється наступним чином: $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} +$ $+(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$. Розкладання можна проводити як за елементами будь-якого рядка так і за елементами будь-якого стовпця.

Приклад 2. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ загальним методом.

Розв'язання. Для обчислення $detA$ для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ оберемо розкладання визначника за елементами другого стовпця:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-5+4) + +4(15+2) - 3(6+1) = -2 + 68 - 21 = 45.$$

Визначник третього порядку можна обчислити за будь-яким з розглянутих методів. Для обчислення визначників порядку $n \geq 4$ використовується лише метод його розкладання за елементами рядка (або стовпця).

Приклад 3. Обчислити $detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Наявність нульових елементів у визначнику значно зменшує об'єм обчислень. Розкладемо даний визначник за елементами другого рядка, бо саме цей рядок має елемент $a_{22} = 0$, тобто необхідно обчислити три визначника третього порядку замість чотирьох, якщо розкривати його по елементах інших рядків (стовпців):

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}2\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(-4)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+4}6\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(-16+3+50-4+10-60)+4(36+2-10-$$

$$-3-30+8+69+10-4-15-12+2=-2-17+4\cdot 3+6-10==-14.$$

Властивості визначників:

1) Якщо визначник має нульовий рядок (стовпець) то $detA = 0$.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Якщо визначник має два пропорційні або однакові рядки, то $detA = 0$.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -24-24-16+24+24+16 = 0$, бо другий і третій рядок пропорційні: $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}$.

3) Спільний множник якогось рядка можна винести за знак визначник: $detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4) Якщо переставити місцями рядки, то визначник змінить знак:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5) Визначник не зміниться, якщо до будь-якого рядка додати інший рядок або рядок помножити на довільне число.

2.2. Дії над матрицями

Деякі види матриць ми розглянули у розділі 2.1. В цьому розділі ми розглянемо дії над матрицями.

Квадратна матриця називається не виродженою, якщо $detA \neq 0$ і навпаки, якщо $detA = 0$, матриця вироджена.

Сумою $A + B$ двох матриць $A = \langle a_{ij} \rangle$ і $B = \langle b_{ij} \rangle$, що мають однакові розміри, називається матриця $C = \langle c_{ij} \rangle$, що має такий же розмір, а кожний елемент її дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} .$$

Добутком матриці A на число k називається матриця $C = \langle c_{ij} \rangle$, яка має такий же розмір і кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число k:

$$c_{ij} = ka_{ij}.$$

Приклад 4. Обчислити $5A + B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Першим кроком при виконанні цієї задачі буде знаходження матриці $5A$: $5A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 \\ 20 & 10 & -10 \\ 10 & 35 & 5 \end{pmatrix}$, а тепер виконаємо наступну дію:

$$5A + B = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 \\ 20 & 10 & -10 \\ 10 & 35 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 1 \\ 18 & 14 & -5 \\ 11 & 35 & 7 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць. Добуток матриці A на матрицю B можливо виконати тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Тобто, якщо матриця A має розмірність $m \times n$, а

$B - n \times k$, то $C = AB - m \times k$.

Кожний елемент матриці C дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Приклад 5. Знайти добуток двох матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку звернемо увагу на те, що обидві матриці квадратичні одного розміру, а отже в такому випадку завжди можливо виконати дію множення.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 3 - 1\cdot 5 & 1\cdot 1 - 2\cdot 1 - 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 - 1\cdot 2 \\ 0\cdot 4 + 4\cdot 3 + 3\cdot 5 & 0\cdot 1 - 4\cdot 1 + 3\cdot 1 & 0\cdot 2 + 4\cdot 0 + 3\cdot 2 \\ 2\cdot 4 - 1\cdot 3 - 1\cdot 5 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 & 2\cdot 2 - 1\cdot 0 - 1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 27 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 4\cdot 2 + 1\cdot 4 - 2\cdot 1 & 4(-1) + 1\cdot 3 - 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 - 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 3\cdot 2 - 1\cdot 4 - 0\cdot 1 & 3(-1) - 1\cdot 3 - 0\cdot 1 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 5\cdot 2 + 1\cdot 4 - 2\cdot 1 & 5(-1) + 1\cdot 3 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 & -3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 9 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи отримані результати можемо зробити висновок:

$$AB \neq BA\,.$$

Приклад 6. Знайти AB, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Звертаємо увагу, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці, а отже можемо виконати їх множення:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 - 1\cdot 3 \\ 0\cdot 3 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 & 0\cdot 0 + 4\cdot 2 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

А чи можна виконати дію BA? Відповідь - так. Бо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці (2=2).

Знайти добуток AB, якщо $A = (3 \ \ -2 \ \ 1)$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$AB = (3\cdot 4 - 2\cdot 0 + 1\cdot 3) = (15)\,.$$

Приклад 7. Знайти добуток AB, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = (4 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 7)$.

Розв'язання. $AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 7 \\ 12 & 0 & 6 & 21 \\ -20 & 0 & -10 & -35 \\ 8 & 0 & 4 & 14 \end{pmatrix}$.

Обернена матриця. Для деяких задач нам необхідно вміти знаходити *обернену матрицю.* *Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці* А, якщо

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Матриця A має обернену матрицю A^{-1}, коли $detA \neq 0$ (необхідна і достатня умови).

Якщо $detA \neq 0$, то $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}A_{12} \dots A_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}A_{n2} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$, де A_{ij} - відповідні алгебраїчні доповнення.

Приклад 8. Знайти A^{-1} до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо наступне:1) $detA = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 10 - 1 - 12 + 20 = 27.$ Отже, $detA \neq 0$;

2) знайдемо транспоновану матрицю A^T. Для цього міняємо рядки на стовпці:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

3) знайдемо алгебраїчні доповнення до всіх елементів A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(20 - 2) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 + 1) = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8;$$

4) з отриманих алгебраїчних доповнень запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix};$$

5) зробимо перевірку: $AA^{-1} = E$.

Отже, $AA^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0+30-3 & 0+6-6 & 0+12-12 \\ -54+55-1 & 18+11-2 & -18+22-4 \\ 27-35+8 & -9-7+16 & 9-14+32 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отриманий результат вказує на те, що обернена матриця знайдена вірно.

2.3. Правило Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Правило Крамера застосовується лише для таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь і $detA \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Правило Крамера має вигляд :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots \ \dots \ \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

де Δ - це головний визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих, а визначники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ одержуємо з головного визначника заміною i-го стовпця на стовпець правих частин системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ і т.д.}$$

Якщо $\Delta = 0$, то система або несумісна (не має розв'язків), або має безліч розв'язків.

Приклад 9.Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 21 - 140 + 2 - 3 = -176 \neq 0$, отже система має єдиний розв'язок .

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 25 - 20 - 21 - 140 - 5 - 15 = -176;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 35 - 140 - 14 - 5 = -176;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 70 + 5 - 105 + 175 + 10 + 21 = 176\ ;$$

$$x_1 = \frac{-176}{-176} = 1,\ \ x_2 = \frac{-176}{-176} = 1, \qquad x_3 = \frac{176}{-176} = -1.$$

Для перевірки підставляємо отримані значення невідомих в будь-яке рівняння системи.

Перевірка : $x_1 + 5x_2 + x_3 = 5,$

$-1 + 5(-1) + 1 = 5.$

Маємо $5 = 5.$ Тотожність істинна, тому зробимо висновок, що розв'язок знайдено вірно.

Приклад 10.Чи можна розв'язати систему за правилом Крамера?

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases}.$$

Розв'язання. Головний визначник системи $\Delta = 0$, тому правилом Крамера користуватись неможливо.

2.4. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими, яку подано на початку розділу 2.3. Цю систему запишемо у матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $detA \neq 0$, то матриця A має A^{-1}. Помножимо обидві частини рівняння $AX = B$ на A^{-1}: $A^{-1}\,AX = A^{-1}B$, але $AA^{-1} = E$, тому $EX = A^{-1}B$. Враховуючи, що $EX = X$, маємо $X = A^{-1}B$.

Приклад 11. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання. Виконаємо наступне: 1) випишемо окремо матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2) знайдемо значення головного визначника системи:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 + 27 - 12 - 12 + 15 = 20;$$

3) транспонуємо матрицю A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

4) знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(-15 + 8) = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 + 9) = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-4) = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-3 = -5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+9) = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2+3 = 5;$$

5) запишемо обернену матрицю та зробимо її перевірку:

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2+7+15 & 3+7-10 & -4-21+25 \\ -28-2+30 & 42-2-20 & -56+6+50 \\ -10-5+15 & 15-5-10 & -20+15+25 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

6) знайдемо матрицю X: $X = A^{-1}B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4+56+0 \\ 56-16+0 \\ 20-40+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже ми отримали такі значення для невідомих: $x_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = -1;$

7) зробимо перевірку отриманих результатів. Для цього підставимо знайдені значення невідомих в будь-яке рівняння системи:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$$

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4(-1) = -4$$

$$-4 = -4\,.$$

Отримана тотожність істинна, а отже рішення знайдено вірно.

2.5. Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Для системи n лінійних рівнянь з n невідомимизапишемо розширену матрицю : $\left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} & b_n \end{array}\right)$. За допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду верхньотрикутної матриці. Під елементарними перетвореннями розуміють множення рядків на деякі числа і додавання їх до інших рядків.

Метою перетворень є отримання іншої еквівалентної системи простішого вигляду.

Приклад 12. Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Розв’язання. Обчислимо головний визначник системи:

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 8 + 8 - 2 - 8 = 6$, $detA \neq 0$, а отже система має рішення.

Запишемо розширену матрицю: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$.

Виконаємо наступні елементарні перетворення:

1) помножимо перший і другий рядки на такі числа, щоб отримати однакові перші елементи в рядках. В даному випадку помножимо перший рядок на 2 і з першого рядка віднімемо другий. Перший рядок переписуємо в тому ж вигляді, а результат елементарного перетворення записуємо у другий рядок: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$;

2) ті ж самі дії виконуємо з першим та третім рядками. Перший рядок помножимо на 4 і віднімемо третій рядок. Результат перетворення запишемо

у третій рядок. Перший і другий рядки переписуємо такими, як ми їх одержали у пункті 1): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{array}\right)$;

3) працюємо тепер з другим та третім рядками. Необхідно отримати однакові другі елементи в цих рядках. В даному випадку вони вже рівні, тому виконаємо дію віднімання (з другого рядка віднімемо третій, а результат запишемо в третій рядок): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$.

Отримали матрицю, у якої всі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

4) за виглядом отриманої матриці записуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = -11 \\ -2x_3 = 2 \end{cases};$$

5) третє рівняння системи має одну невідому, тому почнемо рішення системи з цього рівняння: $-2x_3 = 2,\ x_3 = -1$; перейдемо до другого рівняння:

$3x_2 + 2x_3 = -11$; підставимо в нього $x_3 = -1$ і отримаємо $x_2 = -3$; перейдемо до першого рівняння $x_1 + x_2 + 2x_3 = -4$; підставимо в нього $x_3 = -1$ та $x_2 = -3$ і отримаємо $x_1 = 1$.

Отже $x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$.

2.6. Розв’язання систем лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних однорідних рівнянь завжди сумісна, бо має завжди тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Але у випадку, коли $\Delta \neq 0$ цей розв'язок єдиний, а у випадку, коли $\Delta = 0$ система має безліч не нульових розв'язків.

Приклад 13. Розв'язати однорідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 7 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -40 + 12 + 21 - 56 + 10 - 18 = -71$, $\Delta \neq 0$, а отже система має тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад 14. Чи можна розв'язати однорідну систему за правилом Крамера?

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 24 + 45 + 10 - 100 + 9 + 12 = 0,$

оскільки головний визначник системи $\Delta = 0$, то за правилом Крамера систему розв'язати не можна. Отже, продовжимо дослідження цієї системи і знайдемо визначник другого порядку відмінний від нуля. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11 \neq 0$ і розв'яжемо систему, де одна із змінних довільна. Тут два рівняння і три невідомі величини.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 = -2x_3 \end{cases}, \quad x_3 \in R.$$

За правилом Крамера $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5x_3 & 1 \\ -2x_3 & -4 \end{vmatrix} = -20x_3 + 2x_3 = -18x_3$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5x_3 \\ 3 & -2x_3 \end{vmatrix} = -4x_3 - 15x_3 = -19x_3$$

Маємо загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь: $x_1 = \frac{-18x_3}{-11} = \frac{18}{11}x_3,\ x_2 = \frac{-19x_3}{-11} = \frac{19}{11}x_3,\ x_3,$ де $x_3 \in R$

Замість x_3 можемо підставити будь яке число. Нехай $x_3 = 11,$ тоді $x_1 = 18,$ а $x_2 = 19$ - це частинний розв'язок даної системи лінійних однорідних рівнянь.

Приклад 15. Розв'язати однорідну систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 6 + 96 - 24 - 36 - 12 = 0$, а отже система має безліч розв'язків. Запишемо розширену матрицю і за допомогою елементарних алгебраїчних перетворень представимо її у вигляді верхньотрикутної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -21 & 0 \\ 0 & 10 & -21 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

За виглядом отриманої матриці запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ 10x_2 - 21x_3 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases} .$$

Третє рівняння має розв'язок при будь-якому значенні x_3. Якщо $x_3 = k$, $k \in R$, то з другого рівняння : $10x_2 - 21x_3 = 0$ маємо $10x_2 = 21k$, тобто $x_2 = \frac{21k}{10}$. Отже, маємо x_2 і x_3. З першого рівняння $x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$

Отримаємо x_1: $x_1 = -2x_2 + 6x_3$, або $x_1 = 6k - \frac{42k}{10}$; $x_1 = \frac{18k}{10}$.

Маємо загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь:

$x_1 = \frac{18k}{10}$, $x_2 = \frac{21k}{10}$, $x_3 = k$ або $x_1 = 18k$, $x_2 = 21k$, $x_3 = 10k$, де $k \in R$.

3. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

3.1. Короткі теоретичні відомості

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при x, яке прямує до x_0, якщо для будь-якого малого наперед заданого додатного числа ε можна знайти таке додатне δ яке залежить від ε, що при всіх значеннях x, які входять до області визначення функції, відмінних від x_0 і виконуючих умову $|x - x_0| < \delta$, має місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Розглянемо необхідні теоретичні дані з теорії границь.

1. *Нескінченно малі і нескінченно великі функції:*

а) функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,;$$

b) функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

\

2. *Властивості нескінченно малих функцій:*

а) якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі, то їх сума, різниця та добуток є нескінченно малою;

b) якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ нескінченно мала, а функція $\varphi(x)$ - обмежена, то їх добуток $f(x)\varphi(x)$ нескінченно мала.

3. *Властивості нескінченно великих функцій:*

Якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ має скінчену границю ($\lim_{x \to x_0} f(x) = b$), а функція $\varphi(x)$ - нескінченно велика ($\lim x \to x0 \varphi(x) = \infty$), то:

а) сума їх - нескінченно велика, тобто $\lim_{x \to x_0}[f(x) + \varphi(x)] = \infty$, а границя відношення $f(x)$ до $\varphi(x)$ дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0;$$

b) якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ $(b > 0)$, а $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, при цьому $\varphi(x)$ додатна в околиці точки x_0 , то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$;

с) добуток двох нескінченно великих функцій є функція нескінченно велика, тобто якщо $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = \infty$.

4. *Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими функціями:*

a) якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ - нескінченно велика функція, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала;

b) якщо при $x \to x_0$ функція $\varphi(x)$ нескінченно мала, то функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ - нескінченно велика, при цьому вважаємо, що в околиці точки x_0 функція $\varphi(x)$ в нуль не обертається.

5. *Правила граничного переходу:*

a) якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають скінчені границі, то і їх алгебраїчна сума має границю , яка дорівнює сумі їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = b \pm c;$$

b) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі, то їх добуток також має границю, яка дорівнює добутку їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = bc\,;$$

c) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі і границя функції $\varphi(x)$ не дорівнює нулю, то границя їх відношення існує і дорівнює відношенню їх границь, тобто якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{b}{c}.$$

3.2. Методи обчислення границь

3.2.1. Знаходження границь від дробово-раціональної функції

Для того щоб знайти границю від дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник і знаменник дробу мають границі, рівні нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на $x - x_0$ і перейти до границі. Якщо і після цього чисельник і знаменник нового дробу мають границі рівні нулю при $x \to x_0$, то необхідно провести повторне ділення на $x - x_0$.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+2}{x^2-2x+8}=\frac{4-2+2}{4-4+8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-1}{2x^3-x^2-x+2}=\frac{1-1-1}{2-1-1+2}=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{3x^2-19x+28}=\frac{16-4-12}{48-76+28}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

За правилом, наведеним вище, розділимо чисельник і знаменник на $x-4$.

$$x^2-x-12=(x-4)(x+3);$$

$$3x^2-19x+28=(x-4)(3x-7);$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(3x-7)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+3}{3x-7}=\frac{4+3}{12-7}=\frac{7}{5}.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+2x^3-3x^2-x+10}{x^3+6x^2+x-14}=\frac{16-16-12+2+10}{-8+24-2-14}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$x^4+2x^3-3x^2-x+10=(x+2)(x^3-3x+5)$$

$$x^3+6x^2+x-14=(x+2)(x^2+4x-7)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^3-3x+5)}{(x+2)(x^2+4x-7)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x+5}{x^2+4x-7}=\frac{-8+6+5}{4-8-7}=-\frac{3}{11}.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+2x^2-13x-6}{x^2+7x+6}=\frac{27+18-39-6}{9+21+6}=\frac{0}{36}=0.$$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2-x+8}{x^3+8x^2+14x-5}=\frac{25+5+8}{-125+200-70-5}=\frac{38}{0}=\infty.$$

Розглянемо декілька задач на знаходження границь дробово-раціональної функції при $x\to\infty$.

При $x\to\infty$ і чисельник, і знаменник дробу функції нескінченно великі. Отже, ми маємо справу з відношенням двох нескінченно великих функцій (маємо невизначеність $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$) . В такому випадку необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищу степінь x, яка зустрічається в членах дробу.

Приклад 7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(найвища степінь x дорівнює 3, тому розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

Тут $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0$ (за властивостями нескінченно великих величин).

Приклад 8.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3x^2-2x+1}{6x^3-9x^2-7x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^5}{x^5}+\frac{3x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5}-\frac{9x^2}{x^5}-\frac{7x}{x^5}+\frac{2}{x^5}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2}-\frac{9}{x^3}-\frac{7}{x^4}+\frac{2}{x^5}} = \frac{5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^5}} = \frac{5}{0} = \infty.$$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+3x^2-9}{4x^6-7x^5+2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8x^3}{x^6}+\frac{3x^2}{x^6}-\frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6}-\frac{7x^5}{x^6}+\frac{2x}{x^6}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{9}{x^6}}{4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^4}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x^6}}{4-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}} = \frac{0}{4} = 0.$$

3.2.2. Знаходження границі від ірраціональної функції

Щоб знайти границю дробу, яка має ірраціональний вираз у випадку, коли і чисельник, і знаменник дробу дорівнює нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно помножити чисельник і знаменник на вираз спряжений до даного ірраціонального виразу.

Приклад 10.

$$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9} = \frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$= \lim_{x\to3} \frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \lim_{x\to3} \frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \lim_{x\to3} \frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)} = \frac{1}{12}.$$

Приклад 11.

$$\lim_{x\to-2}\frac{2+x}{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}\right)^2-\left(\sqrt{11+x}\right)^2}=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{7-x-11-x}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-4-2x}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-2(2+x)}=-\frac{6}{2}=-3.$$

Приклад 12.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(в даному випадку ми маємо ірраціональні вирази і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на відповідні вирази їм спряжені)

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-\left(\sqrt{7-3x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2+7-7+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3-x^2+9)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x-4)(x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)}=\frac{-3(0+0)}{7(4+4)}=0.$$

Для розв’язання наступного прикладу необхідно пам'ятати таку формулу алгебри: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

Приклад 13.

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt[3]{x+2} - 2}{x-6} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

Використаємо наведену вище формулу різниці кубів. Нехай $a = \sqrt[3]{x+2}\,,\ b = 2$, тоді вираз на який ми повинні помножити і чисельник і знаменник має вид: $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+2} + 4$.

$$\lim_{x\to 6} \frac{\left(\sqrt[3]{x+2} - 2\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+2} + 4\right)}{(x-6)\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+2} + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 6} \frac{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3 - 8}{(x-6)\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+2} + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 6} \frac{x-6}{(x-6)\left(\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+2} + 4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 6} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+2} + 4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}.$$

Розглянемо випадок коли необхідно визначити границю функції, яка має ірраціональність, в тому випадку коли аргумент прямує до ∞ або до $\pm\infty$ у разі невизначеності $|\infty - \infty|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$.

Приклад 14.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - x\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2} + x\right)}{\sqrt{x^2+2} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2} + x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Приклад 15.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{x+4}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(у цьому випадку винесемо x за знак кореня в чисельнику, а в знаменнику x за дужки)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1-\frac{3}{\infty}}}{1+\frac{4}{\infty}}=1.$$

3.2.3. Перша важлива границя

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1.$$

При знаходженні границь будемо використовувати наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

Приклад 16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-sinxcosx}{x^3cosx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x\cdot x^2cosx}=\begin{bmatrix}1-cos2\alpha=2sin^2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2cosx}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot cosx}=\left(\text{помножимо і чисельник і знаменник на }\frac{1}{4}\right)=$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot cosx} = \left[\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1; \lim_{x\to 0} cosx = 1\right] = \frac{1}{2}.$$

Приклад 17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sin^2 3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{sin^2x\cdot 9x^2}{sin^2 3x\cdot 9x^2} = \left[\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{x^2} = 1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^2}{sin^2 3x} = 1\end{matrix}\right] = \frac{1}{9}.$$

Приклад 18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{sin3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot 15x}{sin3x\cdot 15x} = \left[\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{5x} = 1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x} = 1\end{matrix}\right] = \frac{5}{3}.$$

Приклад 19.

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos4x - cos2x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-2sin\frac{4x+2x}{2}sin\frac{4x-2x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2sin3xsinx}{x^2} = -2\lim_{x\to 0}\frac{3sin3xsinx}{3x\cdot x} = -6\,.$$

Приклад 20

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left[\begin{matrix}\text{заміна: } t = x-\pi\\ t\to 0\\ x = \pi + t\end{matrix}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)}{\pi^2-(\pi+t)^2} =$$

[за формулами зведення маємо: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right) = cos\frac{t}{2}$]

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-cos\frac{t}{2}}{\pi^2-\pi^2-2\pi t-t^2} = -\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4}\cdot 2sin^2\frac{t}{4}}{\frac{1}{4}\cdot t(2\pi+t)} = -\lim_{t\to 0}\frac{2sin\frac{t}{4}}{2\pi+t} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot 0}{2\pi+0} = 0.$$

3.2.4. Друга важлива границя

В цьому розділі ми розглянемо границі від показниково-степеневої функції $f(x)^{\varphi(x)}$, коли $f(x) \to 1$ і $\varphi(x) \to \infty$; тобто маємо невизначеність $|1^{\infty}|$. Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx} = |1^{\infty}| = e^{k} \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}} = |1^{\infty}| = e^{k}.$$

Число e – ірраціональне ($e \approx 2{,}718\ldots$), його називають експонентою. Коротко *exp*.

Приклад 21.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2} = \left[\begin{array}{l}\dfrac{3x-1}{4+3x} \to 1, \text{коли } x \to \infty \\ 5x-2 \to \infty, \text{коли } x \to \infty\end{array}\right] = |1^{\infty}| =$$

(до основи показниково-степеневої функції додамо та віднімемо одиницю)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2} =$$

(приведемо до єдиного знаменника другий та третій елементи основи)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2} =$$

(помножимо степінь на дріб обернену до дробу, яку додаємо до одиниці у основі функції, а потім на таку ж, яку маємо)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}\cdot\cdot\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)} = exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}\right)$$

$$= exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}\right) = exp\left(-\frac{25}{3}\right)$$

Приклад 22.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x-3}\right)^{3x+2} = |1^{\infty}| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1}{4x-3}-1\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1-4x+3}{4x-3}\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{2}\cdot\cdot\frac{2}{4x-3}\cdot(3x+2)} = exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{4x-3}\right) = \sqrt{e^{3}}$$

Приклад 23.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-5}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3x+1}{x^2-5}-1\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3x+1-x^2+5}{x^2-5}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+6}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2-5}{3x+6}\cdot\cdot\frac{3x+6}{x^2-5}\cdot x}=exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x}{x^2-5}\right)=e^3$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти, які знаходяться в основі функції біля старшого степеня змінної, різні:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{kx}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}$$

У такому випадку є два рішення: 1) якщо $a>c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=\infty$

2) якщо $a<c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=0$.

Приклад 24.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-4}{9x+3}\right)^{x+2}=\left(\frac{7}{9}\right)^{\infty}=0$$

Приклад 25.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{2x-6}\right)^{7x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty}=\infty$$

3.3. Неперервність функції

Функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0 і у деякому її околі.

Визначення. Функція $y=f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0, якщо існує границя цієї функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для неперервності функції в точці x_0 необхідно й достатньо, щоб $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, де $f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ - границя функції зліва, $f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ - границя функції права, $f(x_0)$ - значення функції $f(x)$ в точці x_0.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то її називають неперервною в інтервалі $(a;b)$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$ і в точці $x = a$ вона неперервна справа $\left(\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а в точці $x = b$ вона неперервна зліва $\left(\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)\right)$, то її називають неперервною на відрізку $[a;b]$.

Слід пам'ятати, що всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Точки, в яких порушується умова неперервності, називають точками розриву функції. Точки розриву можуть належати області визначення або знаходитися на границі цієї області.

Усі точки розриву функції діляться на точки розриву першого та другого роду.

а) точка x_0 називається *точкою розриву першого роду*, якщо в цій точці існують скінчені границі функції справа та зліва, тобто $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \mathrm{A}_1$ і $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \mathrm{A}_2$. При цьому:

1) якщо $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$, але $f(x_0) \neq A_1$ або A_2 то точка x_0 називається точкою усувного розриву;

2) якщо $\mathrm{A}_1 \neq \mathrm{A}_2$, то точка x_0 називається точкою скінченого розриву.

Величину $|A_1 - A_2|$ називають стрибком функції в точці розриву.

б) точка x_0 називається *точкою розриву другого роду*, якщо в цій точці хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності.

При знаходженні точок розриву функції необхідно керуватися такими положеннями:

1) елементарна функція може мати розрив тільки в тій точці, де вона не визначена;

2) якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) у відповідних інтервалах зміни аргументу, то вона може мати розриви лише в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y = 3x^2 - 2x$.

Розв'язання: Функція визначена в інтервалі $(-\infty; +\infty)$. Покажемо, що в цьому інтервалі вона неперервна. Для цього знайдемо границю приросту функції Δy при $\Delta x \to 0$.

Через те, що $y = 3x^2 - 2x$, $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)$.

Тоді $\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - (3x^2 - 2x) = 3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) -$

$-2x - 2\Delta x - 3x^2 + 2x = 6x\Delta x - 2\Delta x + 3(\Delta x)^2$.

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ одержимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (6x\Delta x - 2\Delta x + 3(\Delta x)^2) = 6x \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а це означає, що функція $y = 3x^2 - 2x$.

неперервна при будь-якому скінченному x.

Приклад 2. Знайти односторонні границі функції $y = e^{\frac{1}{1-x}}$ при $x \to 1$.

Розв'язання:Символічно усі міркування можна записати так:

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-(1-0)}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-(1+0)}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0.$$

Отже, $f(1+0) = 0,\ f(1-0) = +\infty.$ В точці x=1 функція має розрив другого роду.

Приклад 3. Установити, чи є функція $y = 2^{\frac{1}{x}}$ неперервною або розривною для $x = 3$ та $x = 0$.

Розв'язання: За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо вона визначена в цій точці та $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x = 3$ маємо: $y(3) = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$;

$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2};\quad \lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$

Умова неперервності при $x = 3$ виконується, отже, в цій точці функція неперервна.

Проведемо аналогічні міркування при $x \to 0$: $y(0) = 2^{\frac{1}{0}} = 2^{\infty} = \infty;$

$$\lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Умова неперервності при $x = 0$ не виконується, отже, в цій точці функція має розрив другого роду.

Приклад 4. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x < -1, \\ x^2 - 2, & \text{якщо} -1 \le x \le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання: Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з даних функцій є елементарною і визначеною, а отже й неперервною на всій числовій вісі. Тому вихідна функція може бути розривною лише в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз, тобто в точках $x = -1, x = 1$. Досліджуємо функцію в цих точках.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1-0} y = \lim\limits_{x\to-1-0}(x^2-2) = -1\\ \lim\limits_{x\to-1+0} y = \lim\limits_{x\to-1+0}(x^2-2) = -1\end{array}\right\}$$ в точці $x = -1$ функція неперервна в точці $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1-0} y = \lim\limits_{x\to1-0}(x^2-2) = -1\\ \lim\limits_{x\to1+0} y = \lim\limits_{x\to1+0} 1 = 1\end{array}\right\}$$ в точці $x = 1$ функція має розрив першого роду.

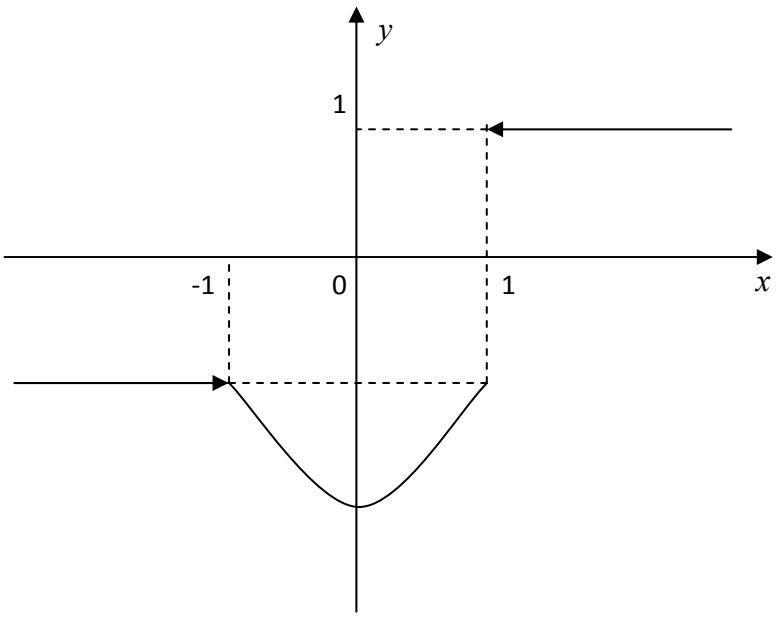


рис.3

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь, крім точки $x = 1$. Побудуємо графік функції (рис.3)

Приклад 5. Знайти точки розриву функції $y = \frac{x}{x^2-4}$ і дослідити характер розриву.

Розв'язання: Відомо, що частка від ділення двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю. Через те, що $x^2 - 4 = 0$ при $x = \pm 2$, дана функція має дві точки розриву: $x = -2$ і $x = 2$.

Визначимо характер розриву функції в цих точках. Для цього обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to-2+0} y = \lim_{x\to-2+0} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to-2+0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{-2+0}{(-2+0-2)(-2+0+2)} = \frac{-2}{-4\cdot 0} = \frac{-2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-2-0} y = \lim_{x\to-2-0} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to-2-0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{-2-0}{(-2-0-2)(-2-0+2)} = \frac{-2}{-4\cdot(-0)} = \frac{-2}{0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to2+0} y = \lim_{x\to2+0} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to2+0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{2+0}{(2+0-2)(2+0+2)} = \frac{2}{0} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to2-0} y = \lim_{x\to2-0} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to2-0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{2-0}{(2-0-2)(2-0+2)} = \frac{2}{-0\cdot 4} = \frac{2}{-0} = -\infty.$$

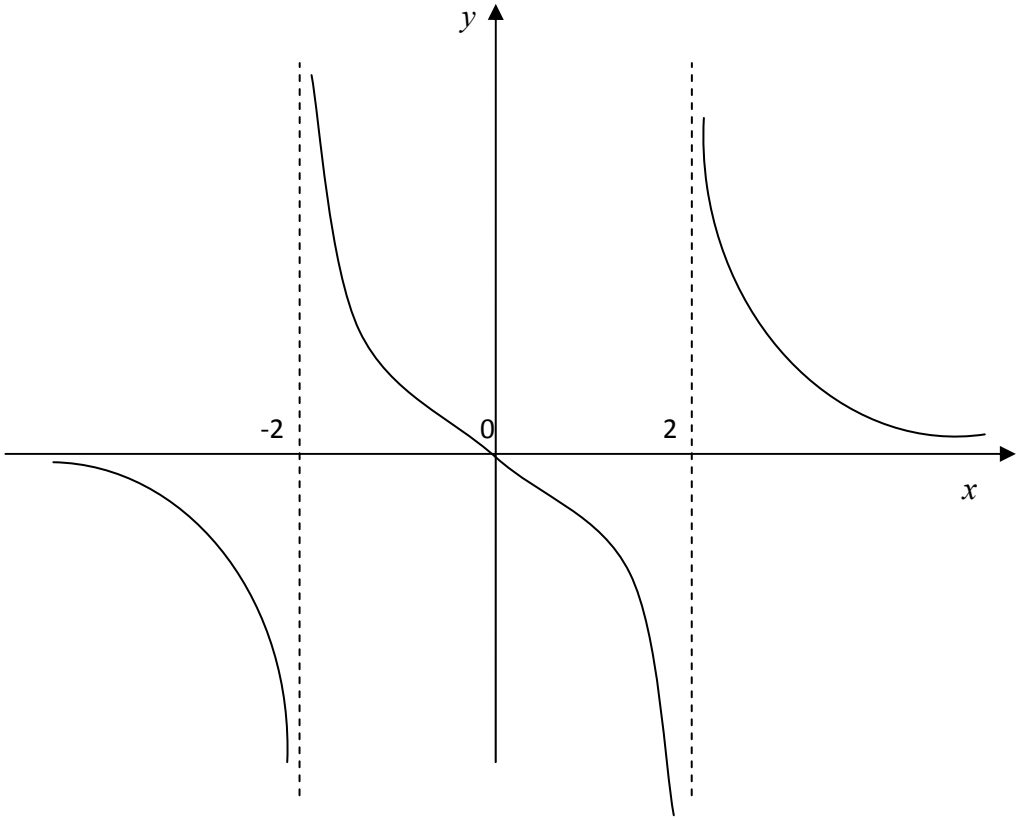


рис.4

Таким чином, в точках $x = -2$ і $x = 2$ функція має нескінченні розриви або розриви другого роду (рис 4) .

Слід зазначити, що функція $y = \frac{x}{x^2-4}$ непарна, а тому достатньо було б дослідити характер розриву лише у точці $x = \pm 2$.

4. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним з основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних, економічних та управлінських задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Визначення. *Похідною функції* $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $f(x)$ позначають одним із символів: $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$.

Отже, $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням.* Функція $\boldsymbol{y = f(x)}$ **,** яка має похідну в кожній точці інтервалу $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ **,** називається *диференційованою в цьому інтервалі.*

Значення похідної функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точці $\boldsymbol{x = x_0}$ позначається $\boldsymbol{f'(x_0)}$ або $\boldsymbol{y'(x_0)}$.

Правила диференціювання

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі $(a;b)$ функції, тоді мають місце наступні правила:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; **2.** $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$; **4.** $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

5. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$; **6.** $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot lnu \cdot v'$.

Таблиця похідних

1. $(c)' = o$; **2**. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$; зокрема, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; зокрема, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$; зокрема, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; **6.** $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; **8.** $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;

9. $(arc\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; **10.** $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$; **12.** $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

4.1.1. Приклади знаходження похідних

Знайти похідні від функцій:

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$, б) $y = 3\sin 5x$, в) $y = tg3x^2$,

г) $y = \arccos\sqrt{5x^4 - 3}$, д) $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}$, е) $y = \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12}$,

ж) $y = arcctg^5 x \cdot \log_5(x^2+2)$, з) $y = \dfrac{(4x+2)^2}{e^{\sin x}}$, и) $y = \dfrac{ctg 9x}{\ln(6x+3)}$

Розв'язання.

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$,

дана функція є сумою степеневих функцій і сталої величини. Похідні від степеневих функцій знаходимо за другою формулою в таблиці похідних, пам'ятаючи перше правило диференціювання, похідну сталої величини шукаємо за першою формулою в таблиці:

$$y' = (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' = 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7;$$

б) $y = 3\sin 5x$,

за четвертим правилом диференціювання виносимо сталу за знак похідної, потім використовуємо п'яту формулу з таблиці похідних, де $u = 5x$:

$$y' = (3\sin 5x)' = 3 \cdot (\sin 5x)' = 3 \cdot \cos 5x \cdot (5x)' = 3 \cdot \cos 5x \cdot 5 = 15\cos 5x;$$

в) $y = tg 3x^2$, $y' = (tg 3x^2)' = \dfrac{(3x^2)'}{\cos^2 3x^2} = \dfrac{6x}{\cos^2 3x^2}$,

у цьому випадку знаходили похідну, користуючись сьомою формулою таблиці похідних, де $u = 3x^2$;

г) $y = \arccos\sqrt{5x^4 - 3}$,

використовуючи десяту формулу таблиці похідних, де $u = \sqrt{5x^4 - 3}$. В свою чергу $u = u(v)$, де $v = 5x^4 - 3$. Отже, знаходимо:

$$y' = (\arccos\sqrt{5x^4-3})' = -\frac{(\sqrt{5x^4-3})'}{\sqrt{1-(\sqrt{5x^4-3})^2}} = -\frac{\dfrac{(5x^4-3)'}{2\sqrt{5x^4-3}}}{\sqrt{1-(5x^4-3)}} =$$

$$=-\frac{\frac{20x^3}{2\sqrt{5x^4-3}}}{\sqrt{1-5x^4+3}}=\frac{-10x^3}{\sqrt{5x^4-3}\cdot\sqrt{4-5x^4}}$$

д) $y=\sqrt[5]{(5x^4-3x^3+7)^4}$,

запишемо функцію в інший спосіб та використаємо другу формулу таблиці похідних:

$$y'=\left((5x^4-3x^3+7)^{\frac{4}{5}}\right)'=\frac{4}{5}\cdot\left(5x^4-3x^3+7\right)^{\frac{4}{5}-1}\cdot\left(5x^4-3x^3+7\right)'=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(5x^4-3x^3+7\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(20x^3-9x^2\right)=\frac{4(20x^3-9x^2)}{5\sqrt[5]{5x^4-3x^3+7}};$$

е) $y=\cos 2x^3\cdot(5x-2)^{12}$,

спочатку розкладемо похідну за другим правилом диференціювання, потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$y=(\cos 2x^3)'\cdot(5x-2)^{12}+\cos 2x^3\cdot\left(\left(5x-2\right)^{12}\right)'=-\sin 2x^3\cdot(2x^3)'\cdot\left(5x-12\right)^{12}+$$

$$+\cos 2x^3\cdot 12(5x-2)^{11}\cdot(5x-2)'=-6x^2\cdot\sin 2x^3\cdot(5x-2)^{12}+60\cdot\cos 2x^3\cdot(5x-2)^{11};$$

ж) $y=arcctg^5x\cdot\log_5(x^2+2)$,

знаходимо похідну також, як у прикладі е) :

$$y'=(arcctg^5x)'\cdot\log_5(x^2+2)+arcctg^5x\cdot\left(\log_5(x^2+2)\right)'=5\cdot arcctg^4x\cdot\left(arcctgx\right)'\cdot\log_5(x^2+2)+$$

$$+arcctg^5x\cdot\frac{(x^2+2)'}{\lg 5\cdot(x^2+2)}=-\frac{5arcctg^4x\cdot\log_5(x^2+2)}{1+x^2}+\frac{2x\cdot arcctg^5x}{\lg 5\cdot(x^2+2)}$$

з) $y=\frac{(4x+2)^2}{e^{\sin x}}$,

в цьому прикладі спочатку використовуємо третє правило диференціювання, потім – формули з таблиці похідних:

$$y=\frac{((4x+2)^2)'\cdot e^{\sin x}-(4x+2)^2\cdot(e^{\sin x})'}{(e^{\sin x})^2}=\frac{2(4x+2)(4x+2)'\cdot e^{\sin x}-(4x+2)^2\cdot e^{\sin x}(\sin x)'}{e^{2\sin x}}=$$

$$=\frac{8(4x+2)e^{\sin x}-(4x+2)^2e^{\sin x}\cdot\cos x}{e^{2\sin x}}=\frac{e^{\sin x}\cdot(4x+2)\cdot\left(8-\cos x\cdot(4x+2)\right)}{e^{2\sin x}}=$$

$$=\frac{(4x+2)(8-\cos x\cdot(4x+2))}{e^{\sin x}}.$$

и) $y=\dfrac{ctg9x}{\ln(6x+3)}$, по зразку з прикладом з) обчислюємо похідну функції:

$$y=\frac{(ctg9x)'\cdot\ln(6x+3)-ctg9x\cdot\left(\ln(6x+3)\right)'}{(\ln(6x+3))^2}=\frac{-\dfrac{(9x)'}{\sin^2 9x}\cdot\ln(6x+3)-ctg9x\cdot\dfrac{(6x+3)'}{6x+3}}{(\ln(6x+3))^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{-9\cdot(6x+3)\cdot\ln(6x+3)-6ctg9x\cdot\sin^2 9x}{\sin^2 9x\cdot(6x+3)}}{(\ln(6x+3))^2}=\frac{-9(6x+3)\ln(6x+3)-6ctg9x\sin^2 9x}{\sin^2 9x\cdot(6x+3)\cdot\left(\ln(6x+3)\right)^2}.$$

4.1.2. Похідна функції, заданої у параметричній формі.

Нехай функцію задано у параметричній формі: $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t\in(\alpha\,;\beta)$. Нехай функція $x=x(t)$ має обернену $t=t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0\in(\alpha\,;\beta)$ похідна $x'_t\neq 0$), тоді має місце формула

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (*)$$

Приклад 1. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо $x'_t = (1-t^2)'_t = -2t$ і $y'_t = (t-t^3)' = 1-3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо

$$y'_x = \frac{1-3t^2}{-2t} = \frac{3t^2-1}{2t}.$$

Приклад 2. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}2t = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули $(*)$, дістанемо:

$$y'_x = \frac{t^2}{1+t^2} / \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 3. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$.

Розв'язання: Знаходмио x'_t і y'_t :

$$x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t),$$

$$y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t).$$

Тому $y'_x = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$.

Приклад 4. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$.

Розв'язання. Маємо $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sqrt{2}\cdot 3\sin^2 t\cos t}{\sqrt{2}\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -tgt$.

4.1.3. Похідна неявно заданої функції.

4.1.3.1 Якщо функція задана рівнянням $F(x;y)=0$ (неявно), то для знаходження похідної від y по x необхідно: продиференціювати рівняння по x, вважаючи, що y є функцією від x (тобто $(x)' = 1$, $(y)' = y'$); отримане рівняння слід розв'язати відносно y'.

Приклад 1. Знайти y'_x, якщо $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$.

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y':

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \qquad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

Приклад 2. Знайти y'_x, якщо $\sin 2x + \cos 3y = \sin^2 y + 1$.

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$2\cos 2x - 3\sin 3y\cdot y' = 2\sin y\cos y\cdot y'.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y':

$$2\sin y\cos y\cdot y' + 3\sin 3y\cdot y' = 2\cos 2x, \qquad y'(2\sin y\cos y + 3\sin 3y) = 2\cos 2x,$$

$$y' = \frac{2\cos 2x}{2\sin y\cos y + 3\sin 3y}.$$

Приклад 3. Знайти y'_x, якщо $ctg\frac{x^2}{y^3} - 5 = \cos 3x$.

Розв'язання. Знову диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x**:**

$$-\frac{2xy^3 - 3x^2y^2y'}{y^6} \cdot \frac{1}{sin^2\frac{x^2}{y^3}} = -3\sin 3x,$$

Розв'язуємо отримане рівняння відносно y':

$$\frac{y^2(2xy - 3x^2y')}{y^6\sin^2\frac{x^2}{y^3}} = 3\sin 3x, \qquad \frac{2xy - 3x^2y'}{y^4\sin^2\frac{x^2}{y^3}} = 3\sin 3x,$$

$$2xy - 3x^2y' = 3\sin 3x \cdot y^4\sin^2\frac{x^2}{y^3}, \qquad 3x^2y' = 2xy - 3\sin 3x \cdot y^4\sin^2\frac{x^2}{y^3},$$

$$y' = \frac{2xy - 3\sin 3x \cdot y^4\sin^2\frac{x^2}{y^3}}{3x^2}.$$

Приклад 4. Знайти y'_x, якщо $\cos\frac{y}{x} + 4x = e^y$.

Розв'язання. $$-\sin\frac{y}{x} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = e^y \cdot y'.$$

Розв'язуємо рівняння відносно y':

$$-\sin\frac{y}{x} \cdot (y'x - y) = x^2e^y \cdot y', \qquad -\sin\frac{y}{x} \cdot y'x + y\sin\frac{y}{x} = x^2e^y \cdot y',$$

$$x^2e^y \cdot y' + \sin\frac{y}{x} \cdot y'x = y\sin\frac{y}{x}, \qquad y'(x^2e^y + x\sin\frac{y}{x}) = y\sin\frac{y}{x},$$

$$y' = \frac{y \sin \frac{y}{x}}{x^2 e^y + x \sin \frac{y}{x}}.$$

б) Неявно задану функцію $F(x; y) = 0$ можна диференціювати так: вважаємо, що x і y-незалежні змінні, тобто $(x)' = 1; (y)' = 1$. Тоді

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

де F'_x - похідна заданої функції по x, тут y вважаємо сталою, F'_y - похідна функції по y, тут x вважаємо сталою.

Приклад. Знайти y'_x, якщо $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо: $F'_x = -3 \cdot 5x^4 + 8 \cdot 2xy^3 = -15x^4 + 16xy^3$;

$$F'_y = 2y + 8x^2 \cdot 3y^2 = 2y + 24x^2y^2 .$$

Звідки $$y'_x = -\frac{-15x^4+16xy^3}{2y+24x^2y^2},$$

або $y'_x = \frac{15x^4-16xy^3}{2y+24x^2y^2}$ (дивись приклад 1 в п. 4.1.3).

4.1.4. Логарифмічне диференціювання.

4.1.4.1. Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад. Знайти y', якщо $y = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$lny = \ln\left(\sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2x \cdot \sqrt[4]{cosx}\right),$$

$$lny = \frac{1}{5} lnsinx + 2lnarctgx + \frac{1}{4} lncosx,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам'ятаючи, що $(x)' = 1$, $(y)' = y'$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{cosx}{sinx} + \frac{2}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-sinx}{cosx},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right),$$

$$y' = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2 x \cdot \sqrt[4]{cosx} \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1+x^2)} - \frac{tgx}{4}\right).$$

б) Похідна показниково-степеневої функції. Формула 6 правил.

Функція $y = u(x)^{v(x)}$ називається *показниково-степеневою* функцією. Похідна від неї знаходиться за допмогою логарифмічного диференціювання.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайти y′, якщо $y = (x^2+1)^{sinx}$.

$$lny = ln(x^2+1)^{sinx}, \qquad lny = sinx \cdot ln(x^2+1) \quad ,$$

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}.$$

Знаходимо y': $\qquad y' = y \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$

На місце y записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2+1)^{sinx} \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Остаточно: $y' = (x^2+1)^{sinx-1} \cdot \left[(x^2+1)cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + 2xsinx\right].$

Приклад 2. Знайти y′, якщо $y = (\mathrm{arctg}\sqrt{x})^{\ln(2x+1)}$.

$$\ln y = \ln(\mathrm{arctg}\sqrt{x})^{\ln(2x+1)}, \qquad \ln y = \ln(2x+1) \cdot \ln(\mathrm{arctg}\sqrt{x}) \quad ,$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln(2x+1))' \cdot \ln\mathrm{arctg}\sqrt{x} + \ln(2x+1) \cdot \left(\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1} \cdot \ln\mathrm{arctg}\sqrt{x} + \ln(2x+1) \cdot \frac{\left(\mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)'}{\mathrm{arctg}\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} \cdot \ln\mathrm{arctg}\sqrt{x} + \ln(2x+1) \cdot \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{(1+x) \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}}\right),$$

$$y' = (\mathrm{arctg}\sqrt{x})^{\ln(2x+1)} \cdot \left(\frac{2\ln\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}}\right).$$

Приклад 3. Знайти y′, якщо $y = (ln\cos x)^{arccosx^2}$

$$lny = ln(ln\cos x)^{arccosx^2}, \qquad lny = arccosx^2 \cdot ln(ln\cos x),$$

$$\frac{y'}{y} = (arccosx^2)' \cdot ln(ln\cos x) + arccosx^2 \cdot \left(ln(ln\cos x)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^4}} \cdot ln(ln\cos x) + arccosx^2 \cdot \frac{(ln\cos x)'}{ln\cos x},$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x \cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^4}} - arccosx^2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x \cdot ln\cos x},$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x \cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{tgx \cdot arccosx^2}{ln\cos x},$$

$$y' = -y \cdot \left(\frac{2x \cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{tgx \cdot arccosx^2}{ln\cos x}\right),$$

$$y' = -(ln\cos x)^{arccosx^2} \cdot \left(\frac{2x \cdot ln(ln\cos x)}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{tgx \cdot arccosx^2}{ln\cos x}\right).$$

4.1.5. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у проміжку $(a; b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Якщо функція $f'(x)$ диференційована у цьому ж проміжку, то її похідна називається *похідною другого порядку* і позначається $f''(x)$ (або y'', $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$). Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається *похідною третього порядку* і позначається $f'''(x)$ (або y''', $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$). Таким чином, $y''' = (y'')'$.

Похідною n – го порядку (або *n*- ю похідною, якщо вона існує) називається похідна від похідної (n – 1) порядку:

Таким чином, $$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Похідні, порядок яких вище першого, називають *похідними вищих порядків.*

Приклад 1. Знайти y''', якщо $y = 2e^{3x}$.

Розв'язання. $y' = (2e^{3x})' = 2 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 6 \cdot e^{3x}$, $y'' = (6 \cdot e^{3x})' = 6 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 18 \cdot e^{3x}$;

$$y''' = (18 \cdot e^{3x})' = 18 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 54 \cdot e^{3x}.$$

Приклад 2. Знайти y''' в точці $x_0 = 1$, якщо $y = 7x^5 - 3x^3 + 8x - 4$.

Розв'язання. $y' = 35x^4 - 9x^2 + 8$, $y'' = 140\mathrm{x}^3 - 18\mathrm{x}$, $y''' = 520\mathrm{x}^2 - 18$, $\mathrm{y}'''(1) = 520 - 18 = 502$.

Приклад 3. Для функції $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^4 + 2\mathrm{x}^3 + \mathrm{x} + 5$ знайти похідну n-го порядку.

Розв'язання. $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 4\mathrm{x}^3 + 6\mathrm{x}^2 + 1$, $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 12\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{x}$,

$\mathrm{f}'''(\mathrm{x}) = 24\mathrm{x} + 12$, $\mathrm{f}^{(4)}(x) = 24$, $\mathrm{f}^{(n)}(x) = 0$ для $n \geq 5$.

4.1.6. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x похідну $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді, за теоремою про зв'язок функції, її границі і нескінченно малої, маємо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, або $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким чином, приріст функції Δy являє собою суму двох доданків $f'(x) \cdot \Delta x$ і $\alpha \cdot \Delta x$, які є нескінченно малими при $\Delta x \to 0$, причому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f' \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Тому перший доданок називають *головною частиною приросту функції* Δy.

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається головна частина її приросту (лінійна відносно Δx), яка дорівнює добутку похідної функції на приріст її аргументу і позначається dy (або $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Диференціал dy називають *диференціалом першого порядку*.

Якщо $y = x$, то $dy = dx = \Delta x$. Тому $dy = f'(x) \cdot dx$.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = x^2 \cdot 5^{7x}$.

Розв'язання. $dy = (x^2 \cdot 5^{7x})' \cdot dx = (2x \cdot 5^{7x} + x^2 \cdot 5^{7x} \ln 7) \cdot dx$.

4.1.7. Рівняння дотичної та нормалі до графіку функції

Якщо точка дотику *M* має координати (x_0; y_0), то кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x)$. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через задану точку у заданому напрямі $y - y_0 = k(x - x_0)$, можна записати *рівняння дотичної*: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Пряма, яка перпендикулярна до дотичної в точці дотику, називається *нормаллю до кривої,* її кутовий коефіцієнт

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{дот}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ (якщо } f'(x_0) \neq 0\text{).}$$

Рівняння нормалі має вид $y - y_0 = \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = 5x^2 - 3x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. За умовою задачі $x_0 = 1$. Тоді $f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 4$. Знайдемо похідну функції $y = 5x^2 - 3x + 2$ у точці $x_0 = 1$.

Вона дорівнює $y' = (5x^2 - 3x + 2)' = 10x - 3$, $y'(1) = 10 \cdot 1 - 3 = 7$.

Отже, рівняння шуканих дотичної і нормалі мають відповідно вигляд: $y - 4 = 7 \cdot (x - 1)$ і $y - 4 = -\frac{1}{7} \cdot (x - 1)$, або $7x - y - 3 = 0$ і $x + 7y - 29 = 0$.

4.1.8. Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і диференційовні в околі точки $x_0 = a$, тобто $0 < |x - a| < \varepsilon$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то відношення функцій має туж границю, тобто:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \text{ або } \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} .$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо $a = \infty$, тобто: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження 2: існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна брати границю відношень других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Інші невизначенності треба тотожнє перетворювати до розглянутих: $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, щоб застосувати правило Лопіталя.

Приклад 1. Знайти границі функцій

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(5+3x)}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5+3x}}{2}=\frac{3}{10}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5e^{5x}}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{25e^{5x}}{2}=\frac{\infty}{2}=\infty$; (Застосували правило Лопіталя двічі)

в) $$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot lnx=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{1/x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0\ ;$$

(Виконали тотожнє перетворення $|0\cdot\infty|$ до $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2/1+4x^2}{8}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4(1+4x^2)}=\frac{1}{4}$;

д) $$\lim\limits_{x\to 1}\text{lnx}\cdot\ln(x-1)=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{1/lnx}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1/x-1}{-1/x\cdot(lnx)^2}=$$

$-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1}==\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{(lnx)^2+\frac{2xlnx}{x}}{1}=0$; (Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

е) $$\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot lnx=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{1/lnx}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2/1+x^2}{-1/x(lnx)^2}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x(lnx)^2}{1+x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(lnx)^2+4lnx}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4lnx}{x}+\frac{4}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(lnx+1)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{1}{\infty}=0\ ;$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя 4 рази)

ж) $$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=|\infty-\infty|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\ ;$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

Приклад 2. Знайти границі функцій

а) $$\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A\ ,$$

функція є показниково-степеневою, тому позначимо границю функції через A, та прологарифмуємо її:

$$\ln A = \ln\lim_{x\to 0}(\mathrm{arcsinx})^{\mathrm{tgx}} = \lim_{x\to 0}\ln(\mathrm{arcsinx})^{\mathrm{tgx}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{tgx}\cdot\ln(\mathrm{arcsinx}) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{arcsinx})}{\mathrm{ctgx}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування маємо:

$$lnA = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{arcsinx}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1} = 0\ ,$$

Далі скористалися еквеквівалентністю нескінченно мали.

Отже, $lnA = 0$ і тоді $A = e^0 = 1$.

б) $$\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$$

$$\ln A = ln\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{lnx}\cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{lnctgx}{lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{sin^2x\cdot ctgx}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin^2x\cdot ctgx} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin^2x\cdot\frac{cosx}{sinx}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx\cdot cosx} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = -1,$$

отримали $\ln A = -1$, тоді $A = e^{-1}$.

4.2. Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

4.2.1. Зростання і спадання функції

Теорема. Для того, щоб диференційована на проміжку $(a; b)$ функція $f(x)$ зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$ при будь – якому $x \in (a; b)$.

Приклад. Знайти проміжки зростання і спадання функції $y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $x \neq 4$, тобто $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$y' = \frac{(2x-4)(\mathrm{x}-4) - (\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 1)}{(\mathrm{x}-4)^2} = \frac{2\mathrm{x}^2 - 8\mathrm{x} - 4\mathrm{x} + 16 - \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} - 1}{(\mathrm{x}-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 15}{(\mathrm{x}-4)^2} = \frac{(x-5)(x-3)}{(\mathrm{x}-4)^2}; y' = 0; \frac{(x-5)(x-3)}{(\mathrm{x}-4)^2} = 0.$$

Відкіля знаходимо корені похідної: $x = 5$ і $x = 3$. На Рис. 4 зображено інтервали зростання і спадання даної функції.

Знак y':

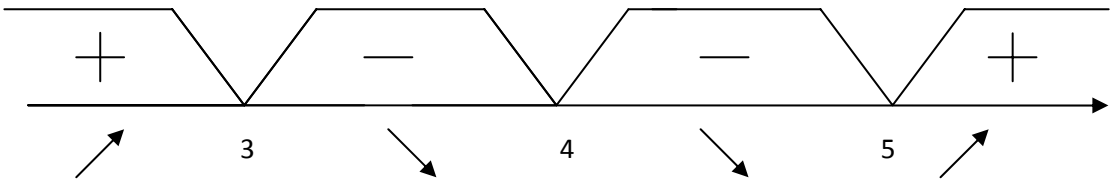


Рис. 4

Зробимо висновок, що функція зростає,коли: $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, функція спадає,коли: $x \in (3; 4) \cup (4; 5)$.

4.2.2. Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі. Точка x_0 називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0 : $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $\big($або $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\big)$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції.*

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то необхідно,щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Геометрично рівність $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox*, а якщо $f'(x_0) = \infty$, то дотична паралельна осі Оу.

Зауважимо, що умова $f'(x_0) = 0$ не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ її похідна $y' = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму.

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, неперервна функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними.*

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Приклад. Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції: $y = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Нагадуємо, що будь – яке дослідження функції необхідно розпочинати з находження її області визначення. Тут $D(y) = R$.

Похідна цієї функції: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

При переході через точку $x_0 = -1$ похідна функції змінює знак з «+» на «-», тобто в точці $x_0 = -1$ знаходиться максимум функції. При переході через точку $x_0 = 1$ похідна функції змінює знак з «-» на «+», в точці $x_0 = 1$ знаходиться мінімум функції.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$. Максимум її знаходиться в точці $x_0 = -1$, мінімум-в точці $x_0 = 1$.

4.2.3. Опуклість графіка функції. Точки перегину.

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$.

Графік функції $f(x)$ називається *опуклим (угнутим)* на проміжку $(a;b)$, якщо усі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Часто опуклі і угнуті функції називають *опуклими вгору і опуклими вниз* відповідно.

Точку графіка функції $f(x)$, у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину.*

У подальшому вважаємо, що функція $f(x)$ має другу похідну на проміжку $(a;b)$.

Теорема (достатня умова опуклості графіка функції).

Якщо друга похідна функції $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ в усіх точках проміжку $(a;b)$, то графік функції опуклий вгору (опуклий вниз) на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова існування точок перегину).

Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Приклад. Дослідити функцію $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо першу і другу похідні даної функції: $y' = 5x^4 - 2$, $y'' = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y'' = 0$ при $x = 0$. Тому $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим вгору на проміжку $(-\infty;0)$ і опуклим вниз на проміжку $(0;\infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

4.2.4. Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про поведінку графіка функції при віддалені його точок на нескінченність

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty.$$

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b,$$

де $k = lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - kx)$.

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y = kx + b$, то k і b знаходять за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для k і b, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Тому $y = b$ – рівняння *горизонтальної асимптоти*.

<u>Зауваження</u>. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні k і b не існує або дорівнює ∞, то похилих асимптот немає.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функцій $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Область визначення $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Шукаємо вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty\,; \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty\,;$$

звідси $x=-1$ і $x=1$ є вертикальними асимптотами.

Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=1\,,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Підставляючи $k=1$ і $b=0$ в рівняння $y=kx+b$, отримаємо: $\mathrm{y}=\mathrm{x}$, це шукана похила асимптота.

4.2.5. Дослідження функції в цілому

При дослідженні графіка функції в цілому, рекомендується, наприклад, загальна схема, за яко. Слід:

1. знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2. дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3. знайти точки перетину графіка фунції з осями координат;
4. дослідити поведінку функції на нескінченності;
5. знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
6. знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;
7. знайти асимптоти графіка функції;
8. побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення: $x \neq \pm 1;$ тобто $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

Прямі $x = \pm 1$ служать вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x \to 1\pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 1\pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty .$$

2. Обчислимо $y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, одже, функція парна і її графік симетричний відносно осі Oy.

3. Точка перетину з віссю Oy: $x = 0$; $y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$. Маємо точку A(0;1).

Точок перетину з віссю Ox нема. При $y = 0$, рівняння $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$ не має рішень.

4. Обчислюємо: $\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, тобто пряма $y = -1$ служить горизонтальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y = kx + b .$$

Знайдемо параметри k та b:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптототу: $y = -1$.

5. Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо $y'(x)$: $\quad y' = \dfrac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$;

$y' = 0$, якщо $x = 0$ та y' не існує, якщо $x = \pm 1$, тобто критичною є тільки точка $x = 0$, оскільки точки $x = \pm 1$ не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на Рис. 5.

Знак y':

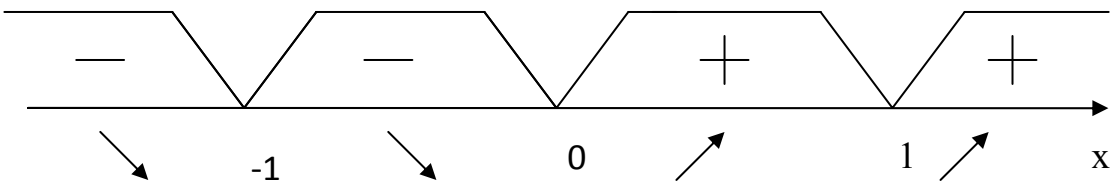


Рис. 5

На інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(-1;0)$ функція спадає, оскільки тут $y'(x) < 0$.

На інтервалах $(0;1)$ та $(1;+\infty)$ функція зростає, оскільки тут $y'(x) > 0$. Зміна знака похідної при переході через точку x= 0 , вказує на те, що точка $B(0;1)$ – екстремальна. Це точка мінімуму функції: $y_{\min} = y(0) = 1$.

6. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

Знайдемо другу похідну даної функції:

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{4\cdot(1-x^2)^2 - 4x\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на Рис. 6.

Знак y'':

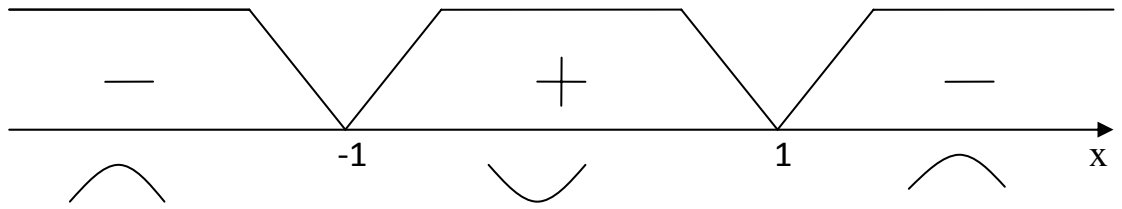


Рис. 6

На інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ графік функції опуклий, тому що

тут $y''(x) < 0.$ На інтервалі $(-1;1)$ графік функції угнутий, тому що тут $y''(x) > 0.$

Точок перегину немає.

7. Асимптоти графіка функції знайдені у п.1 і п.4.

8. Побудуємо ескіз графіка, використовуючи отриману вище інформацію (Рис. 7) функції:

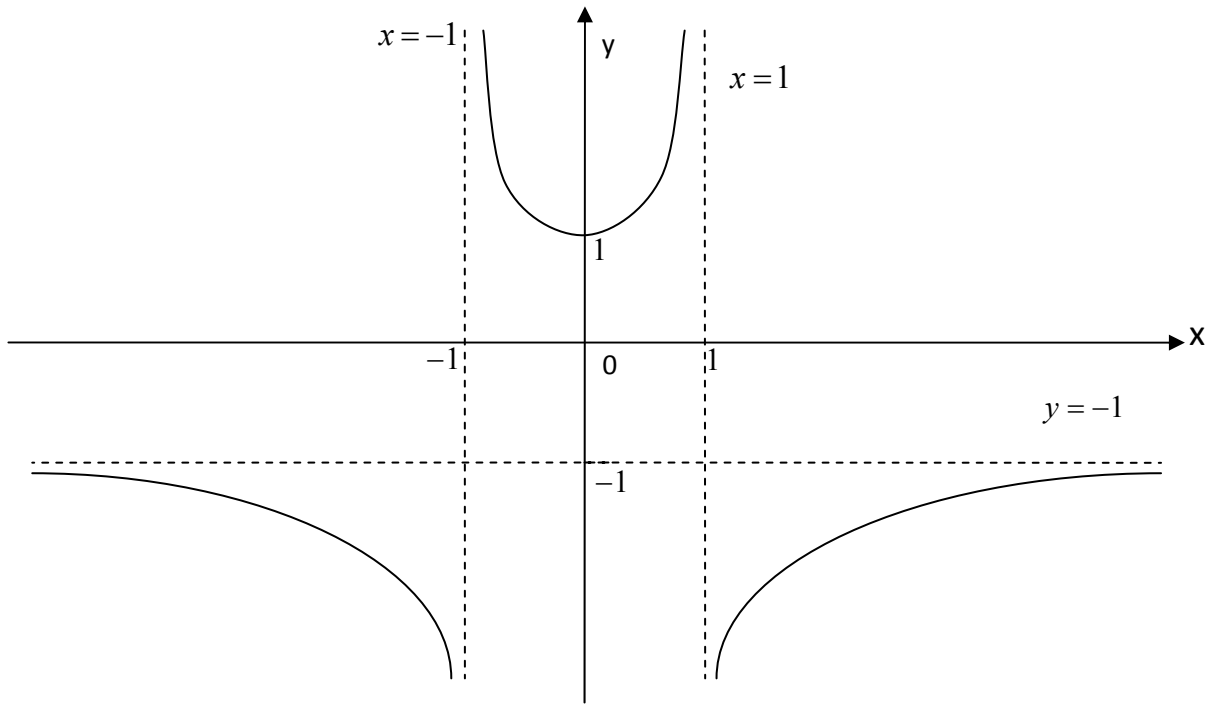


Рис. 7

Завдання 2. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ та побудувати її графік

1. Область визначення: $x \in R$; $D(y) = (-\infty;+\infty)$. Вертикальних асимптот функція не має.

2. Функція загального вигляду, тому що $y(-x) \neq \pm y(x)$.

3. Точки перетину з осями координат.

Точки перетину з віссю Oy: $x = 0$ $y(0) = \sqrt[3]{0^3 - 2 \cdot 0^2} = 0$, тобто A(0;0) - точка перетину з Oy.

Точки перетину з віссю Ox: $y = 0$, рівняння $0 = y(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ має рішення $x = 0$ та $x = 2$, тобто A(0;0) та B(2;0) – точки перетину з Ox.

4. Поведінка функції на нескінченності $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = \pm\infty$.

5. Для дослідження функції на монотонність та екстремуми

знайдемо $y'(x)$: $$y' = \frac{3x^2 - 4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \frac{3x - 4}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

$y' = 0$, $x = \frac{4}{3}$, y' не існує, якщо $x = 0$ та $x = 2$.

Критичні точки $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$ та $x = 2$. Знак похідної і поведінка функції на відповідних інтервалах подані на Рис. 8. Точка $x = 2$ - не екстремальна, оскільки y' не змінює знак під час переходу через неї.

На інтервалі $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ функція спадає, оскільки тут $y'(x) < 0$.

На інтервалах $(-\infty; 0)$ та $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ функція зростає, оскільки тут $y'(x) > 0$.

Знак y':

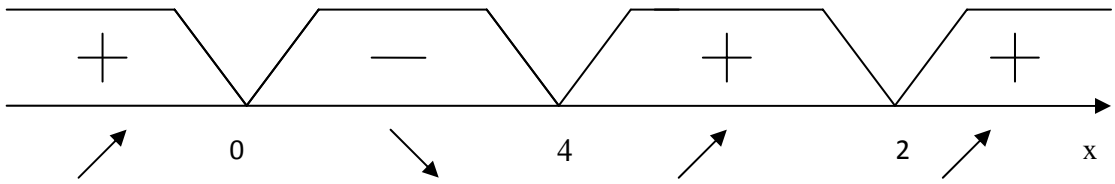


Рис. 8

$y_{\min} = y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{3} \cong -1{,}058$, тобто $C\left(\frac{4}{3};-\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ – точка мінімуму.

$y_{\max} = y(0) = 0$, тобто G (0;0) – точка максимуму.

6. Для дослідження функції на опуклість та угнутість та на наявність точок перегину знайдемо $y''(x)$:

$$y''(x) = (y'(x))' = \left(\frac{3x^2-4x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{(6x-4)\cdot\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}-(3x^2-4x)\cdot\frac{2\cdot(3x^2-4x)}{3\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2}}}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{8}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^5}} = -\frac{8}{9}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$$

Знак y'' і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на Рис. 9.

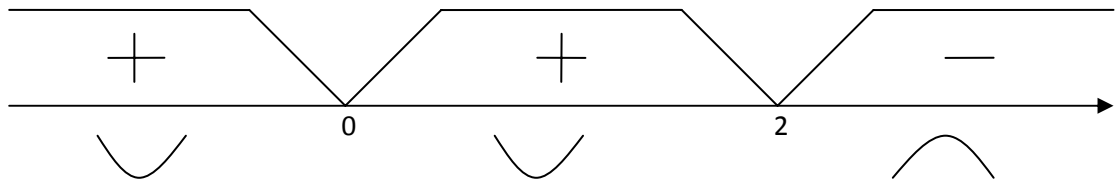


Рис. 9

На інтервалах $(-\infty;0)\cup(0;2)$ графік функції угнутий, оскільки тут $y''(x) > 0$.

На інтервалі $(2;+\infty)$ графік функції опуклий, оскільки тут $y''(x) < 0$.

Під час переходу через точку $x = 2$ друга похідна змінює знак, отже, це точка перегину графіка функції.

7. Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$y = kx + b$. Знайдемо параметри $к$ та b.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} - 1\right) = (\infty \cdot 0) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\left(-\frac{2}{x^2}\right)\right)}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{3} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Таким чином, отримали рівняння похилої асимптоти у вигляді

$$y = x - \frac{2}{3} \quad \text{або} \quad 3y - 3x + 2 = 0.$$

Вертикальних асимптот графік функції не має, оскільки $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

8. Будуємо ескіз графіка функції за отриманою інформацією (Рис. 10).

Приклад 3. Дослідити функцію $y = \frac{1}{\ln x}$ та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення: $D(y) = (0;+\infty) \setminus \{1\}$. Пряма $x = 1$ служить вертикальною асимптотою.
2. Область визначення не симетрична відносно початку координат. Тобто дана функція загального виду.

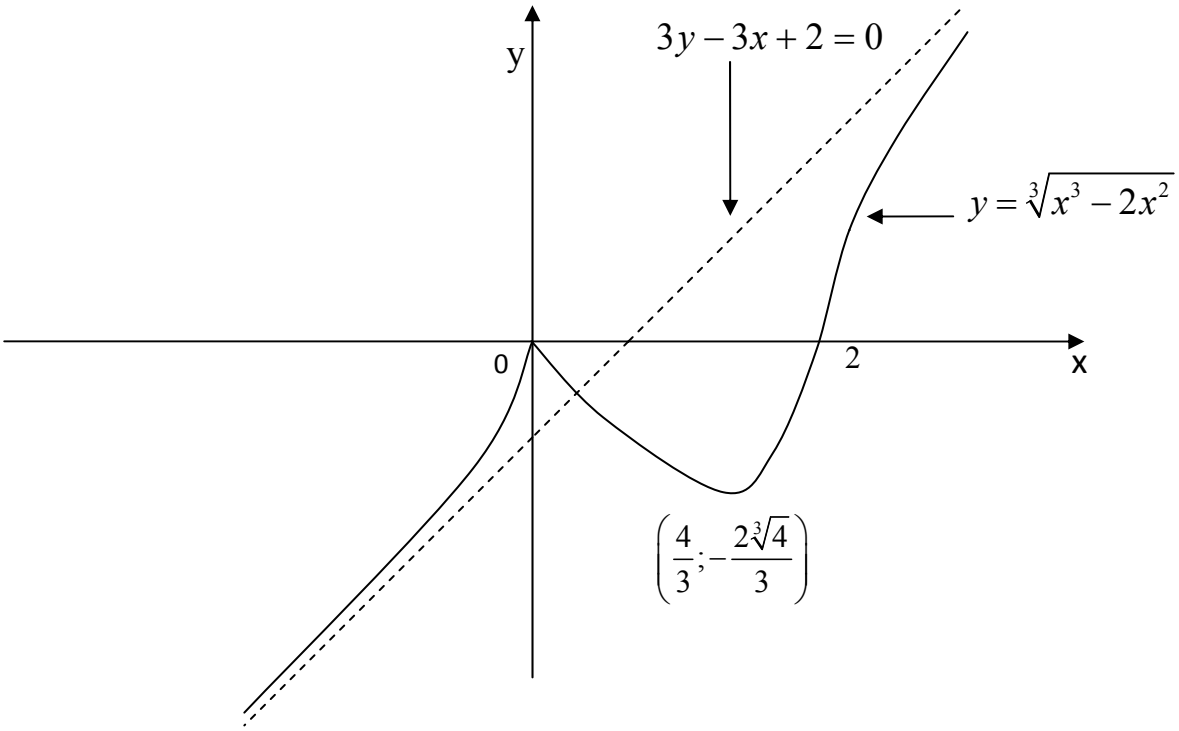


Рис. 10

3. Область визначення: $D(y)=(0;+\infty)\setminus\{1\}$. Пряма $x=1$ служить вертикальною асимптотою.

4. Область визначення не симетрична відносно початку координат. Тобто дана функція загального виду.

5. Точки перетину з осями координат. Графік функції не перетинає осі координат, оскільки $\frac{1}{\ln x}\neq 0$, нема перетину з вісью Ох і $0\notin D(y)$, тобто нема перетину з віссю Оу. Тут потрібно обчислити координати допоміжних точок. Наприклад, коли $x=\frac{1}{e}$ і $x=e$: $y-\frac{1}{ln\frac{1}{e}}=-1$; $y=\frac{1}{lne}=1$. Нехай це будуть точки: $B(\frac{1}{e};-1)$ і $C(e;1)$.

6. Поведінка функції на нескінченності:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{lnx}=\frac{1}{\infty}=0$, тобто відшукали горизонтальну асимптоту $y=0$.

7. Для дослідження функції на монотонність та екстремуми знайдемо $y'(x)$:

$$y' = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x \cdot \ln^2 x},$$

а) $y' \neq 0$ при $\forall x \in D(y)$;

б) y' не існує при $x = 0 \notin D(y)$ и при $x = 1 \notin D(y)$.

Таким чином критичних точок першого роду функція не має, це означає, що функція не має екстремумів.

Точка розриву $x = 1$ розбиває область визначення функції на дві частини. Визначимо знак похідної в кожной з них. Отримаємо (Рис. 11).

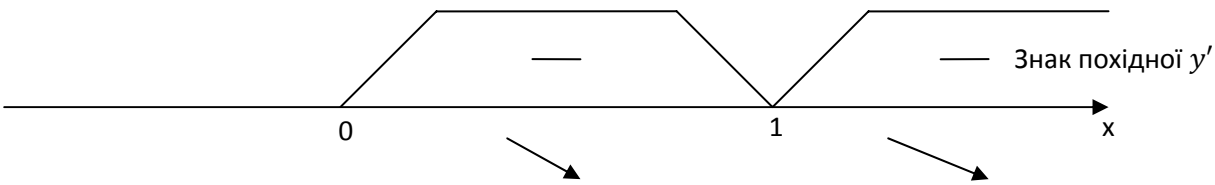


Рис. 11

Тобто функція спадає на інтервалах $(0; 1)$ і $(1; +\infty)$.

8. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину. Обчислимо другу похідну:

$$y'' = \left(-\frac{1}{x \cdot \ln^2 x}\right)' = \frac{\ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{x^2 \cdot \ln^4 x} = \frac{2 + \ln x}{x^2 \cdot \ln^3 x},$$

а) $y'' = 0$ при $x = e^{-2} \approx 0{,}1$;

б) y' не існує при $x = 0 \notin D(y)$ и при $x = 1 \notin D(y)$.

Таким чином критичною точкою другого роду є точка $A(e^{-2}; -0{,}5)$ з координатами $x = e^{-2}$ і $y = -0{,}5$.

Критична точка $x = e^{-2}$ і точка $x = 1$ розриву функцыї розбивають область визначення на три частини (Рис. 12). Визнчимо знак другої похідної в кожній з них.

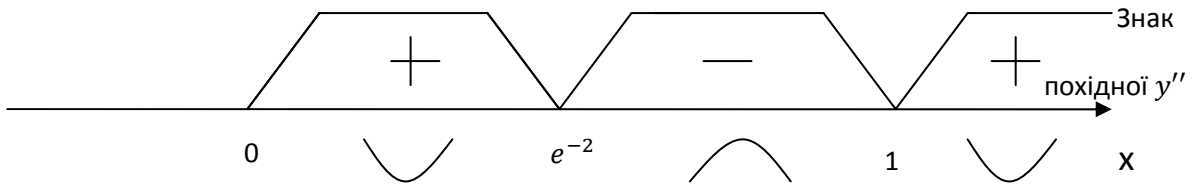


Рис. 12

Отже, графік функції опуклий на інтервалі $(e^{-2}; 1)$, оскільки тут $y'' < 0$, графік функцій угнутий на інтервалах $(0; e^{-2})$ і $(1; +\infty)$, оскільки тут $y'' > 0$.

9. Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням $y = kx + b$. Функція визначена при $x \to +\infty$, тому можливо існування похилої асимптоти для правої частини графіка. Маємо:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k \cdot x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.$$

Отримали пряму $y = 0$ горизонтальну асимптоту, яку ми відшукали в 5 пункті дослідження.

Знайдемо вертикальні асимтоти.

Функція має дві точки розриву: $x = 0$ і $x = 1$. Визначимо тип розривів:

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{\ln x} = \left(\frac{1}{\ln(+0)}\right) = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\ln x} = \qquad \left(\frac{1}{\ln(1-0)}\right) = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{\ln x} = \left(\frac{1}{\ln(1+0)}\right) = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty .$$

Звідси точка $x = 1$ є точкою розриву другого роду, пряма $x = 1$ є вертикальна асимтота до графіку функції. Точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду.

10.Будуємо графік функції за отриманою вище інформацією (Рис. 13)

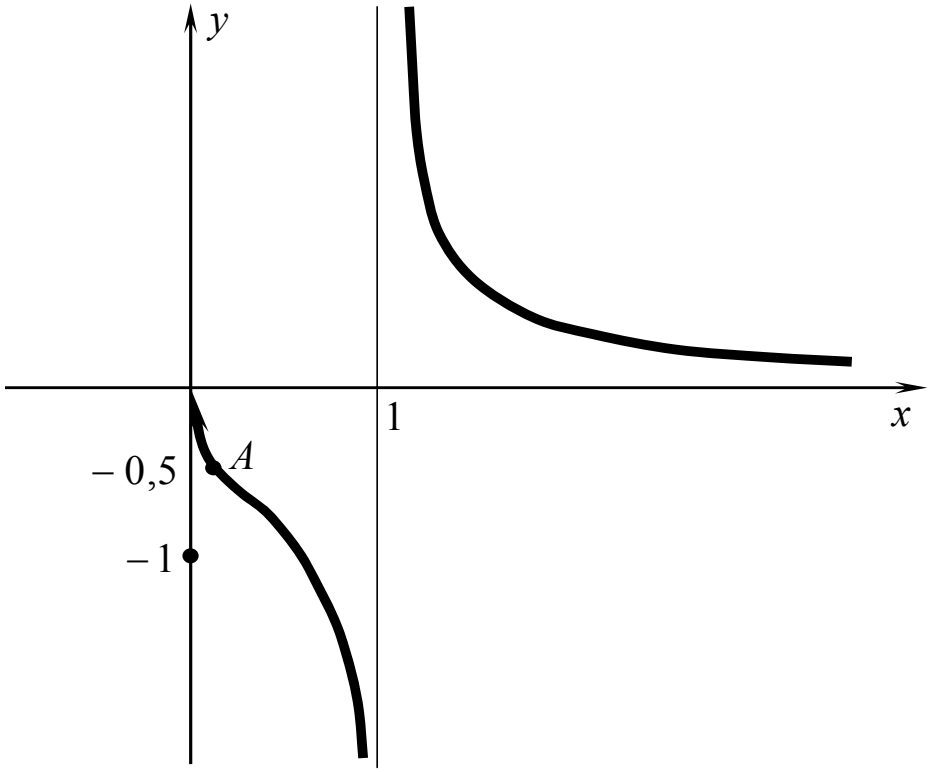


Рис. 13

4.2.6. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Відомо, що така функція досягає свого найбільшого та найменшого значення на цьому відрізку. Таким чином, для знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку $[a;b]$ необхідно:

1) знайти критичні точки функції на інтервалі $(a;b)$;

2) обчислити значення функції у критичних точках;
3) обчислити значення функції у точках a і b;
4) серед знайдених значень вибрати найбільше та найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 1$ на відрізку $[-2;1]$.

Розв'язання. Обчислимо похідну даної функції: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$ Знайдемо критичні точки функції, розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$. Тобто: $12x^3 + 12x^2 = 0$. Відкіля $12x^2(x+1) = 0, x_2 = -1;\ x_1 = 0$. Перевіряємо, чи належать знайдені критичні точки даному відрізку? Так $x_1 = 0 \in [-2;1]$ і $x_2 = -1 \in [-2;1]$. Обчисляємо значення функції на кінцях відрізку і у критичних точках: $f(0) = -1$, $f(-1) = 3 - 4 - 1 = -2$, $f(-2) = 48 - 32 - 1 = 15$, $f(1) = 6$. Порівняємо знайдені числа.

Отже, $f(-2) = 15$ найбільше, $f(-1) = -2$ найменше значення функції на відрізку $[-2;1]$.

Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку застосовують при розв'язанні багатьох практичних задач, які пов'язані з відшуканням оптимальних розв'язків.

5. Список літератури

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.

2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.1. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.

3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. Кн.1. Основні розділи. – 400 с. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985.

5. Станішевський С.О. Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. Наука, 1985. – 383 с.

8. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для самостійної роботи студентів 1 курсу усіх спеціальностей

частина 1

Укладачі: **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна,

ПАХОМОВА Євгенія Серафимівна

ШУЛЬГІНА Світлана Сергіївна

Відповідальний за випуск *М. П. Данилевський*

Редактор: *М.З. Аляб'єв*

План 2009, поз.188М

Підп. до друку 16.12.09 Формат 60х84 1/16 Папір офісний

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,5

Тираж 100 прим. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК № 4064 від 12. 05. 2011 р.