МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ І ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИЛІНИ

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

(для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.030504 - «Економіка підприємства»)

Харків – ХНАМГ – 2009

Методичні вказівки до проведення практичних занять і виконання самостійної роботи (частина 1) з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.030504 - «Економіка підприємства») / Укл.: Самойленко М.І., Штельма О.М., Білогурова Г.В., Протопопова В.П. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 75 с.

Укладачі: М.І.Самойленко,
О.М.Штельма,
Г.В. Білогурова,
В.П Протопопова

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу й узгоджені з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів економічних спеціальностей.

Рецензент: доцент фізико-математичних наук О.Б. Костенко

Затверджено кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол №5 від 26.12.2008 р.

Вступ

Переведення економіки країни на шлях інтенсивного розвитку безпосередньо пов’язано з необхідністю підвищення ефективності використання математичної теорії у прикладній сфері діяльності людини. Вирішальну роль у досягненні поставленою мети відіграють фахівці, які добре володіють математичними методами і мають достатній досвід їх використання при вирішенні практичних задач.

Економіко-математичне моделювання відіграє винятково важливу роль у підготовці фахівців економічного профілю. Використання математичних методів в інженерно-економічній діяльності дозволяє вирішувати оптимальним способом багато економічних і організаційних задач. Іншими словами, інженер-економіст стає власником надійного інструменту для одержання найвищого економічного ефекту в конкретних виробничих умовах.

Прикладами можливих економічних задач, що наочно ілюструють корисність і необхідність знання запропонованої дисципліни, є наступні задачі (надаються в змістовній постановці):

- одержання максимального випуску продукції або максимального прибутку при заданих матеріальних, трудових або тимчасових витратах;
- забезпечення планових показників підприємства при мінімальних фінансових витратах;
- досягнення максимально короткого терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкта, товарообігу, виробничого циклу і т.п. при існуючих або заданих виробничих ресурсах (матеріальних, трудових, енергетичних, тимчасових та ін.).

Інженер-економіст повинен не тільки вміти вирішувати складні економічні задачі, але й вміти здійснювати їх математичну постановку, тобто за змістовною постановкою задачі складати її математичну модель, знати методи

її розв’язання, аналізувати з метою використання в економіці та приймати ефективни управлінські рішення.

***Мета*:** формування системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей.

Завдання: вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв’язання та аналізу з метою використання в економіці

Предметом вивчення дисципліни є методологія та інструментарій побудови математичних моделей і розв’язування детермінованих оптимізаційних задач.

Оптимізаційні економіко-математичні моделі

Побудова математичних моделей економічних задач.

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого (максимального) або найменшого (мінімального) значення цільової функції $Y(x_1, x_2, ..., x_n) = Y(\bar{x})$ за умов $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i$ $(i = \overline{1, m})$ де Y і f_i – задані функції, а b_i – дійсні числа

$$Y(\bar{x}) \to \underset{\bar{x} \in \Omega}{opt}$$

$$\Omega : \begin{cases} f_i(\bar{x}) \le b_i, \\ f_i(\bar{x}) = b_i, \\ f_i(\bar{x}) \ge b_i, \\ (i = \overline{1, m}) \end{cases}$$

Для побудови математичної моделі задачі необхідно:

- Визначити *невідомі*;
- Скласти *цільову функцію* $Y(\bar{x})$;
- Записати *систему обмеженнь* Ω .

Побудуємо математичні моделі задач лінійного й нелінійного програмування .

Задача організації виробництва

Для виготовлення трьох видів виробів А, В, С використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу на фрезерному обладнанні складають для виробу А – 3, В – 6, С – 5 верстато-год відповідно; на токарному обладнанні для виробу А – 2, В – 7, С – 3 верстато-год ; на зварювальному обладнанні для виробу А – 6, В – 5, С – 7 верстато-год ; на шливовальном обладнанні для виробу А – 5, В – 8, С – 6 верстато-год. Загальний фонд робочого часу фрезерного обладнання складе 130 од, токарного, – 220 од, зварювального, – 210 од, шліфувального, – 260 од. Прибуток від реалізації одного виробу А складе 9 грн, В - 12 грн, С - 11 грн.

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний. Всі дані відображені в табл.1.

Таблиця 1

Тип обладнання	**Витрати часу на обробку одного виробу, *станко-г***			**Загальний фонд робочого часу обладнання, г**
	A	B	C	
Фрезерне	3	6	5	130
Токарне	2	7	3	220
Зварювальне	6	5	7	210
Шліфувальне	5	8	6	260
Прибуток, грн.	9	12	11	–

Побудова математичної моделі задачі.

Дана змістовна постановка задача організації виробництва. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі* – x_1, x_2, x_3 . Буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 – виду *B* та x_3 – виду *C*.
2. Скласти цільову *функцію* $Y(\bar{x})$. Якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 – виду *B* і x_3 – виду C, то прибуток складе

$$Y(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

3. Записати систему обмеженнь Ω. Для виробництва такої кількості виробів потрібно буде витратити $3x_1 + 6x_2 + 5x_3$ станко-г. фрезерного обладнання. Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 130, повинна виконуватися нерівність $3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 130$.

Аналогічні міркування щодо можливого використання токарного, зварювального і шліфувального обладнання приведуть до наступних нерівностей: $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 220$;

$$6x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 210;$$
$$5x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 260.$$

При цьому кількість виробів, що виготовляються, не може бути негативною: $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$; $x_3 \ge 0$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд

$$Y(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1(\bar{x}) = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 130 \\ f_2(\bar{x}) = 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 220 \\ f_3(\bar{x}) = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 210 \\ f_4(\bar{x}) = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 260 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача планування випуску продукції.

На швейній фабриці тканина може бути розкроєна чотирма способами A, B, C, D для виготовлення виробів двох видів. У табл.2. наведені кількості виробів i–го виду (i =1, 2) і величина відходів при j-му варіанті (j = 1, 2, 3, 4) розкрою 1 м^2. У ній же вказані необхідні кількості кожного виду виробів, які необхідно виготовити фабриці в плановому періоді. Потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано задану кількість виробів кожного виду при мінімальних загальних відходах.

Таблиця 2

Вид виробу	**Кількість виробів з 1 м^2 тканини**				**Планова кількість виробів (м^2)**
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	3	4	2	380
II	4	3	1	3	210
Величина відходів	0,1	0,3	0,2	0,4	

Побудова математичної моделі задачі.

Дана змістовна постановка задачі планування випуску продукції. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі*. Позначимо через x_j кількість тканини (м^2), яка розкроюється по j–му варіанту $j=\overline{1,4}$.

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

2. Скласти цільову *функцію* $Y(\bar{x})$. $Y(\bar{x})=0,1x_1+0,3x_2+0,2x_3+0,4x_4 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$.

3. Записати систему обмеженнь Ω. При цьому кількості виробів обох видів повинні відповідати плану:

$$f_1(\bar{x})=x_1+3x_2+4x_3+2x_4=380;$$

$$f_2(\bar{x})=4x_1+3x_2+x_3+3x_4=210.$$

Кількість тканини x_j , що розкроїли кожним способом, є позитивною величиною, тобто

$$x_j \geq 0 \;\; j=\overline{1,4}$$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y(\bar{x})=0,1x_1+0,3x_2+0,2x_3+0,4x_4 \to \min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} f_1(\bar{x})=x_1+3x_2+4x_3+2x_4=380 \\ f_2(\bar{x})=4x_1+3x_2+x_3+3x_4=210 \\ x_1\geq 0;\quad x_2\geq 0;\quad x_3\geq 0;\quad x_4\geq 0. \end{cases}$$

Транспортна задача планування перевезень

Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції використовують три види сировини. Потреби в сировині кожного з

підприємств відповідно дорівнюють 110, 70, 180 і 120 од. Сировина зосереджена в трьох місцях її отримання, а запаси відповідно дорівнюють 100, 130, 160 од. На кожне з підприємств сировина може завозитися з будь-якого пункту її отримання. Тарифи перевезень є відомими величинами і задаються матрицею $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 8 & 5\\ 5 & 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$ *. Скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість є мінімальною.*

Побудова математичної моделі задач.

Дана змістовна постановка транспортної задачі. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі.* У транспортній задачі вектор змінних перетвориться до матричного вигляду, причому x_{ij} означає кількість сировини, що перевозиться з *i-го* місця отримання до *j-го* підприємства:

$$x=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}\end{bmatrix}$$

2. Скласти цільову *функцію* $Y(\overline{x})$. (Загальна вартість перевезень є мінімальною): $Y(\overline{x})=\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{4}c_{ij}x_{ij}\to\min_{x\in\Omega}$

$$Y(\overline{x})=5x_{11}+6x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+3x_{21}+4x_{22}+8x_{23}+5x_{24}+5x_{31}+3x_{32}+2x_{33}+5x_{34}\to\min_{x_{ij}\in\Omega}$$

3. Записати систему обмеженнь Ω. Запаси сировини відповідно дорівнюють 100, 130, 160 од. Сумарні перевезення сировини з і–го пункту відправлення повинні відповідати загальному їх запасу на даному пункті:

$$f_1(\overline{x})=\sum_{j}^{4}x_{1j}=x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 100,$$

$$f_2(\overline{x}) = \sum_j^4 x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 130,$$

$$f_3(\overline{x}) = \sum_j^4 x_{3j} = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 160.$$

Потреби в сировині кожного з підприємств відповідно дорівнюють 110, 70, 180, 120 од.

Сумарний об'єм сировини, що перевозиться в j-й пункт призначення, повинен відповідати потребі:

$$f_4(\overline{x}) = \sum_i^3 x_{i1} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110,$$

$$f_5(\overline{x}) = \sum_i^3 x_{i2} = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70,$$

$$f_6(\overline{x}) = \sum_i^3 x_{i3} = x_{13} + x_{23} + x_{33} = 180,$$

$$f_7(\overline{x}) = \sum_i^3 x_{i4} = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120.$$

Природно, кількість сировини x_{ij} є величина позитивна, тобто

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}.$$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y(\overline{x}) = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} + 5x_{24} + 5x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}$$

$$\begin{cases} f_1(\overline{x}) = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 130 \\ f_2(\overline{x}) = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 100 \\ f_3(\overline{x}) = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 160 \\ f_4(\overline{x}) = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110 \\ f_5(\overline{x}) = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ f_6(\overline{x}) = x_{13} + x_{23} + x_{33} = 180 \\ f_7(\overline{x}) = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120 \\ x_{ij} \ge 0 i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Задача про планування виробництва

Є два способи виробництва деякого продукту – першим і другим. Витрати на виробництво x_1 *од. продукту першим способом виражаються*

залежністю $H_1(x_1) = 2x_1^2 + 3x_1 + 4$. *Витрати на виробництво* x_2 *од. продукту другим способом виражаються залежністю* $H_2(x_2) = 3x_2^2 + 4x_2 + 2$. *За деякий звітний проміжок часу необхідно проізвести рівно 350 од. продукції, розподіливши її між двома способами так, щоб мінімізувати загальні витрати.*

Побудова математичної моделі задачі

Дана змістовна постановка задачі нелінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі* – x_1 , x_2.
2. Скласти цільову *функцію* $Y(\bar{x})$. $Y(\bar{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 + 6 \to \min\limits_{x \in \Omega}$.
3. Записати систему обмеженнь Ω. Необхідно проізвести рівно 350 од. продукції. $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 350$.

Кількість продукції величина позитивна $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$.

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y(\bar{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 + 6 \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 = 350 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Задача лінійного програмування та методи її розв'язування

Математична постановка задачі лінійного програмування

Форми запису задачі лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: знайти оптимум лінійної цільової функції $y(\bar{x})$, якщо обмеження f_i лінійні і змінні $\bar{x}$ позитивні.

Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}},$$

$$\Omega: \begin{cases} A_1\bar{x} + \bar{b}_1 \le 0; \\ A_2\bar{x} + \bar{b}_2 = 0; \\ A_3\bar{x} + \bar{b}_3 \ge 0; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases}$$

де $\bar{x}$ – n-мірний вектор дійсних змінних $\bar{x} \in R^n$; $\bar{c}$ – n-мірний вектор коефіцієнтів функції, що оптимізується; c_0 – вільний член функції, що оптимізується; A_1, A_2, A_3 – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$ відповідно; $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $m_3 \times 1$ відповідно.

Задачу, подану вище, називають *стандартною* задачею лінійного програмування (ЗЛП).

ЗЛП, в якій обмеження записані у вигляді рівностей і змінні позитивні , називається ЗЛП в ***канонічній*** формі. *Канонічна*, або *основна* задача лінійного програмування має вигляд $y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}$,

$$\Omega: \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases}$$

де A – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\bar{b}$ – вектор вільних членів обмежень розмірності $m \times 1$.

Перетворення стандартної ЗЛП до канонічної ЗЛП розглянемо на прикладах.

Приклад 1. Перетворити в канонічну форму наступну задачу лінійного програмування:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 \le 3 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Обмеження-нерівність типу "$\le$" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад, { $x_1 - x_3 + x_5 \le 3$ } стане { $x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3$ };

2. Обмеження-нерівність типу "$\ge$" перетвориться в обмеження-рівність відніманням з його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад { $x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8$ } стане { $x_1 + x_4 - 5x_5 - x_7 = 8$ }.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_7 = 8 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Приклад 2. *Перетворити в канонічну форму і записати у векторно-матричній формі наступну задачу лінійного програмування*:

$$y(x) = 6x_1 - 4x_2 - 7x_4 + x_5 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5},$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 \le 8; \\ 9x_1 - x_3 + 2x_5 \le 5; \\ x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 \ge 3;; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Нерівності типу "≤" (f_1, f_2) перетворимо в рівність шляхом додавання до їх лівих частин двох додаткових змінних x_6, x_7. Отримаємо $f_1 = 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 + x_6 = 8$; $f_2 = 9x_1 - x_3 + 2x_5 + x_7 = 5$.

2. Нерівність типу "≥" (f_3) перетворимо в рівність шляхом віднімання з його лівої частини додаткової змінної x_8.

Отримаємо $f_3 = x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 - x_8 = 3$.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = 6x_1 - 4x_2 - 7x_4 + x_5 \to \max_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 + x_6 = 8; \\ 9x_1 - x_3 + 2x_5 + x_7 = 5; \\ x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 - x_8 = 3;; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,8} \end{cases}$$

Векторно-матрична форма запису початкової задачі:

$$y(x) = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}; \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

Графічний метод розв'язання ЗЛП

Найбільш простим і наглядним методом розв'язання задач лінійного програмування є графічний метод. Його застосовують для задач лінійного

програмування з двома змінними, заданими в неканонічній формі, і багатьма змінними в канонічній формі за умови, що вони містять не більше двох вільних змінних.

Якщо задача задана в канонічній формі, її необхідно заздалегідь перетворити в стандартну, тобто в задачу лінійного програмування наступного вигляду:

$$y(\bar{x}) = [c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \underset{\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^2}{\text{opt}}$$

$$\Omega: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21`} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Алгоритм розв’язання задачі лінійного програмування графічним методом, як правило, включає наступні етапи:

1. Приведення математичної моделі задачі до вигляду, наведеного вище.

2. Побудова прямих, які визначаються рівняннями

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_i = 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad x_1 = 0 \text{ і } x_2 = 0.$$

3. Знаходження напівплощин, які визначаються кожним з обмежень задачі.

4. Виділення багатокутника рішень (області допустимих рішень).

5. Побудова прямої, що проходить через багатокутник рішень.

6. Побудова вектора $\bar{c}^T = [c_1 \quad c_2]$.

7. Переміщення прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ у напрямі вектора $\bar{c}$ до межі області Ω (задачі максимізації) або у зворотному напрямі вектора $\bar{c}$ (задачі мінімізації).

8. Визначення координат граничної точки і обчислення значення цільової функції в цій точці, яка є максимальною (мінімальною).

При вирішенні ЗЛП можливі такі випадки:

- Якщо пряма $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ виявиться паралельною якій-небудь стороні багатокутника рішень, то в цьому випадку задача має безліч рішень. Координати будь-якої точки цієї сторони багатокутника будуть рішенням задачі.
- Якщо область Ω необмежена, то задача або не має рішення, або функція може прийняти тільки максимальне або тільки мінімальне значення.

Приклад 3. *Підприємство має наступні виробничі ресурси (сировина, обладнання) і може організувати виробництво продукції двома різними способами. Витрати ресурсів і амортизація обладнання за один день і загальний ресурс при кожному способі задані в таблиці (у грош.од).*

При першому способі виробництва підприємство випускає за один день 3 тис. виробів , при другому - 5 *тис. виробів .*

Виробничий ресурс	*Витрати ресурсів за 1 день при роботі*		*Загальний ресурс*
	по 1 способу	*по 2 способу*	
Сировина	*1,5*	*1,6*	*141*
Обладнання	*0,5*	*0,8*	*63*

Скільки днів повинне працювати підприємство по кожному з цих способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продукції ?

Розв'язання.

Позначимо:

x_1 - *час роботи* підприємства першим способом;

x_2 - *час роботи* підприємства другим способом.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 5x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 1,5x_1 + 1,6x_2 \le 141 \\ 0,5x_1 + 0,8x_2 \le 63 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Розв'яжемо цю задачу графічним методом.

1) Задача лінійного програмування з двома змінними і задана в неканонічній формі.

2) Будуємо на площині X_1OX_2 прямі, які визначаються з нерівностей системи обмежень. Кожна з цих прямих ділить площину X_1OX_2 на дві напівплощини.

3) Далі знаходимо напівплощини, які визначаються кожним з обмежень даної задачі . Для кожної напівплощини беремо яку-небудь точку, наприклад $\overline{x}_0^{\text{т}} = [0 \quad 0]$ і перевіряємо відповідну нерівність $a_{i1}x_{01} + a_{i2}x_{02} \le b_i$. Якщо нерівність виконується, значить, точка $\overline{x}_0^{\text{т}}$ належить шуканій напівплощині, інакше не належить. У точці $\overline{x}_0^{\text{т}} = [0 \quad 0]$ виконується перша і друга нерівності . Знайдені напівплощини виділяємо штрихуванням.

4) Виділяємо багатокутник рішень. Перетин знайдених напівплощин утворює багатокутник рішень, область допустимих рішень Ω. У нашій задачі багатокутником рішень є чотирикутник ABCD на Рис.1.

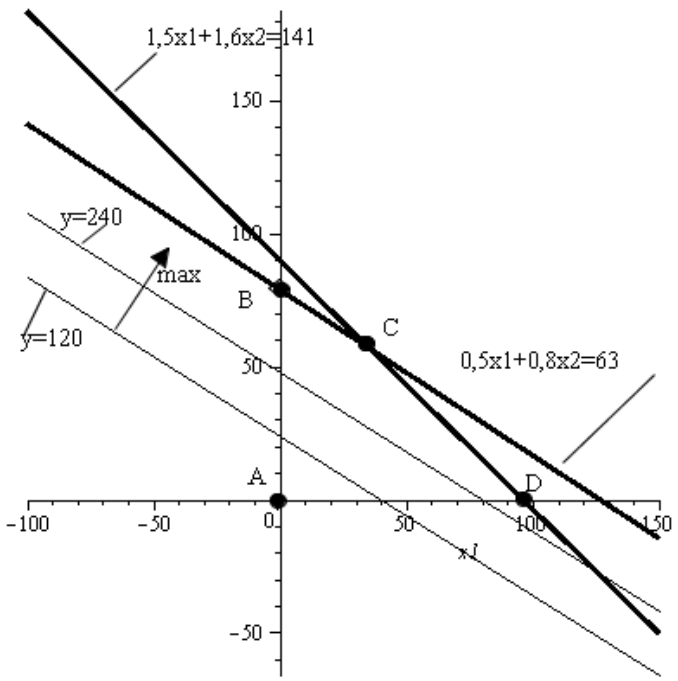

Рис. 1

5) Будуємо пряму $y_0 = 3x_1 + 5x_2$ при довільному значенні y_0 і переміщаємо її паралельно самій собі з метою виявлення найближчої і самої віддаленої загальних точок з багатокутником рішень. Одна з цих точок відповідає мінімальному рішенню, інша – максимальному.

6) Задаємо $y_0 = 60$ і $y_0 = 120$. Переміщаючи пряму паралельно самій собі, знаходимо точку максимуму С, дивись рис.1

7) Знайдемо координати цієї точки з розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 1,6x_2 = 141 \\ 0,5x_1 + 0,8x_2 = 63 \end{cases}$$

Шукане рішення: $\bar{x}_C = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix}$. Після підстановки знайдених значень змінних у цільову функцію отримаємо $y_C = 390$.

Таким чином ми знайшли відповідь: максимальний випуск продукції складе 390 тис. од., при цьому за першим способом підприємство повинне працювати 30 днів, за другим – 60 днів.

Приклад 4. *Вирішити задачу лінійного програмування графічним методом.*

$$y = x_1 + x_2 \to \underset{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^2}{\text{opt}}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Розв'язання .

1) Задача лінійного програмування з двома змінними і задана в неканонічній формі.

2) Будуємо на площині X_1OX_2 прямі, які визначаються з нерівностей системи обмежень. Кожна з цих прямих ділить площину X_1OX_2 на дві напівплощини.

3) Далі знаходимо напівплощини, які визначаються кожним з обмежень даної задачі. Для кожної напівплощини беремо яку-небудь точку,

наприклад $\overline{x}_0^{\text{т}} = [0 \quad 0]$ і перевіряємо відповідну нерівність $a_{i1}x_{01} + a_{i2}x_{02} \le b_i$. Якщо нерівність виконується, значить, точка $\overline{x}_0^{\text{т}}$ належить шуканій напівплощині, інакше не належить. У точці $\overline{x}_0^{\text{т}} = [0 \quad 0]$ виконується друга і четверта нерівності і не виконується перша і третя нерівності.

4) Виділяємо багатокутник рішень. Перетин знайдених напівплощин утворює багатокутник рішень, область допустимих рішень Ω. У нашій задачі багатокутником рішень є чотирикутник ABCD на Рис.2.

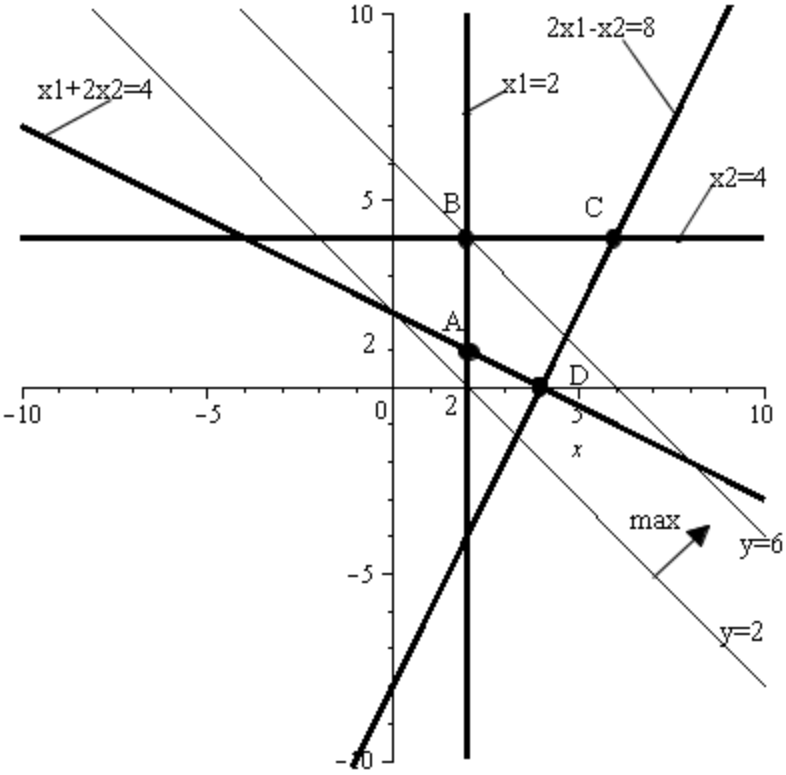

Рис. 2.

5) Будуємо пряму $y_0 = x_1 + x_2$ при довільному значенні y_0 і переміщаємо її паралельно самій собі з метою виявлення найближчої і самої віддаленої загальних точок з багатокутником рішень. Одна з цих точок відповідає мінімальному рішенню, інша – максимальному.

6) Вектор $\overline{c}^{\text{т}} = [1 \quad 1]$ в даному випадку можна не будувати, очевидно що, збільшуючи значення x_1 і x_2, ми збільшуємо значення цільової функції.

7) Задаємо $y_0 = 2$ и $y_0 = 6$. Переміщаючи пряму паралельно самій собі, знаходимо точку мінімуму А і точку максимуму С, дивись рис.2

8) Знайдемо координати цих точок з розв'язання відповідних систем рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8, \\ x_2 = 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 = 2; \end{cases}$$

Вирішивши по черзі кожну систему, знайдемо шукані рішення: $\overline{x}_A^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\overline{x}_C^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$. Після підстановки знайдених значень змінних у цільоуву функцію отримаємо відповідно $y_A^* = 2 + 1 = 3$ і $y_C^* = 6 + 4 = 10$.

Таким чином ми знайшли відповідь: А – точка мінімуму $\overline{x}_A^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $y_A^* = 3$, а С –точка максимуму С – $\overline{x}_C^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ $y_C^* = 10$.

Застосування симплекс-методу в економічних задачах

Розглянемо застосування симплекс методу в економічних задачах на конкретних прикладах.

Приклад 5. *Підприємство має наступні виробничі ресурси (сировина, обладнання, електроенергія) і може організувати виробництво продукції двома різними способами. Витрати ресурсів і амортизація обладнання за один місяць і загальний ресурс при кожному способі задані в таблиці (у грош.од).*

При першому способі виробництва підприємство випускає за один місяць 3 тис. виробів , при другому - 4 *тис. виробів .*

Виробничий ресурс	*Витрати ресурсів за 1 місяць при роботі*		*Загальний ресурс*
	по 1 способу	*по 2 способу*	
Сировина	*1*	*2*	*4*
Обладнання	*1*	*1*	*3*
Електроенергія	*2*	*1*	*8*

Скільки місяців повинно працювати підприємство кожним з цих

способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продкуці?

Розв'язання.

Позначимо:

x_1 - *час роботи* підприємства першим способом;

x_2 - *час роботи* підприємства другим способом.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми *:*

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

Як базис виберемо змінні x_3, x_4, x_5. Далі заповнюємо симплекс-таблицю:

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = 3$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	1	2	1	0	0	$4/2$
x_4	0	3	1	1	0	1	0	$3/1$
x_5	0	8	2	1	0	0	1	$8/1$
Δ_j		$\Delta_0 = 0$	-3	-4	0	0	0	

1. Визначаємо початкове опорне рішення. Тобто незалежні змінні дорівнюють 0, а базисні (залежні) змінні дорівнюють правим частинам обмежень задачі. Знаходимо значення цільової функції на даному опорному плані

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i^{баз} \cdot b_i = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 8 = 0$$

Визначаємо оцінки цільової функції $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_i^{баз} \cdot a_{ij} - C_j$

$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 3 = -3$; $\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 4 = -4$; $\Delta_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$;
$\Delta_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$; $\Delta_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$;

Перше опорне рішення не є оптимальним, оскільки $\Delta_j < 0, j = \overline{1,5}$.

Критерій оптимальності: мінімум цільової функції досягнутий, якщо для деякого опорного рішення $\overline{x}'_{on} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n+m})$ *всі оцінки* $\Delta_j \le 0$ $(j = \overline{1, n+m})$, а *максимум* цільової функції досягнутий, якщо для деякого опорного рішення $\overline{x}'_{on} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n+m})$ *всі оцінки* $\Delta_j \ge 0$ $(j = \overline{1, n+m})$.

2. Виберемо *направляючий стовпець*. Оскільки дана задача на максимум, то для поліпшення рішення серед оцінок Δ_j потрібно вибрати найменшу, в даному випадку $\Delta_2 = -4$. Виділяємо направляючий стовпець. У базис необхідно ввести змінну x_2.

3. Знайдемо *направляючий рядок*. Для цього підрахуємо симплекс-відношення $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ir}}$.

Вибираємо другий рядок k=2, оскільки $\theta_k = \min\left\{4/2; 3/1; 8/1\right\} = 2$. Виділяємо направляючий рядок сірим кольором, а змінну x_3 необхідно вивести з базису.

4. Заповнюємо симплекс таблицю 2-го шагу. У стовпець "Базис" замість змінної x_3, яку вивели з базису, вказуємо x_2, яку ввели в базис.

У стовпець $\overline{C}^{баз}$ вносимо зміни – навпроти x_2 записуємо значення коефіцієнта цільової функції $C_2 = 4$.

Далі симплекс-таблицю заповнюємо в наступному порядку:.

1. У стовпцях x_2, x_4, x_5, відповідающих базисним змінним, записуємо одиничні вектори $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$.

2. Всі елементи направляючого рядка (окрім $\overline{C}^{баз}$) ділимо на головний елемент (на 2).
3. Елементи таблиці, що залишилися, перераховуємо за формулою жорданових виключень (за четвертим правилом)

$$a_{ij}^{ное} = a_{ij} - \frac{a_{ir} \cdot a_{kj}}{a_{kr}}.$$

Отримана таблиця має наступний вигляд.

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1 = 3$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	4	2	1/2	1	1/2	0	0	4
x_4	0	1	1/2	0	-1/2	1	0	2
x_5	0	6	3/2	0	-1/2	0	1	4
Δ_j		$\Delta_0 = 8$	-1	0	2	0	0	

1. *Друге опорне рішення* $\overline{x}' = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 6)$ не є оптимальним оскільки $\Delta_1 < 0$.

2. Виберемо *направляючий стовпець*. Оскільки серед всіх Δ_j тільки $\Delta_1 < 0$ направляючим стовпцем буде перший стовпець, а змінну x_1 необхідно ввести в базис.

3. Знайдемо *направляючий рядок*. Для цього підрахуємо симплекс-відношенняя θ_i. Вибираємо другий рядок k=2, оскільки $\theta_k = \min\{4; 2; 4\} = 2$. Направляючий рядок виділяємо сірим кольором, а змінну x_4 необхідно вивести з базису.

4. Заповнюємо симплекс таблицю 3-го кроку.

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1 = 3$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	4	1	0	1	1	-1	0	
x_1	3	2	1	0	-1	2	0	
x_5	0	3	0	0	1	-3		
Δ_j		$\Delta_0 = 10$	0	0	1	2	0	

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то отримане опорне рішення є оптимальним $\overline{x}^{'}* = (2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3)$, а максимум функції рівний $y(\overline{x}*) = 10$.

Максимальний випуск продукції складе 10 тис. од., при цьому за першим способом підприємство повинне працювати два місяці, за другим - один місяць.

Приклад 6. *Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування:*

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + 5x_2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_j \geq 0, j = 1,2 \end{cases}$$

Розв'язання.

Необхідно привести задачу до канонічної форми, введемо три додаткові змінні x_3, x_4, x_5

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + 5x_2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Сформуємо симплекс-таблицю:

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1 = -2$	$C_2 = 5$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	3	2	5	1	0	0	3/2
x_4	0	2	-1	2	0	1	0	
x_5	0	6	1	-1	0	0	1	6
Δ_j		0	2	-5	0	0	0	

$\overline{x}_{on}^T = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 6]$ $y(\overline{x}) = 0$

Рішення не оптимальне, оскільки є позитивні оцінки.

Критерій оптимальності: *мінімум* цільової функції досягнутий, якщо для

деякого опорного рішення $\bar{x}'_{on} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n+m})$ *всі оцінки* $\Delta_j \le 0 \ \ (j = \overline{1, n+m})$, а *максимум* цільової функції досягнутий, якщо для деякого опорного рішення $\bar{x}'_{on} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n+m})$ *всі оцінки* $\Delta_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, n+m})$.

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = -2$	$C_2 = 5$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-2	3/2	1	5/2	1/2	0	0	
x_4	0	7/2	0	9/2	1/2	1	0	
x_5	0	9/2	0	-7/2	1/5	0	1	
Δ_j		-3	0	-10	-1	0	0	

Оскільки немає позитивних оцінок, ми знайшли мінімум функції.

$$\bar{x}^{*T} = [3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 7/2 \quad 9/2] \ \ y_{min}(\bar{x}^*) = -3$$

Знайдемо максимум початкової задачі.

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = -2$	$C_2 = 5$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	3	2	5	1	0	0	3/5
x_4	0	2	-1	2	0	1	0	2/2
x_5	0	6	1	-1	0	0	1	
Δ_j		0	2	-5	0	0	0	

$$\bar{x}_{on}^{T} = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 6] \ \ y(\bar{x}) = 0$$

Рішення не оптимальне, оскільки є негативні оцінки.

Базис	$\bar{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = -2$	$C_2 = 5$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	5	3/5	2/5	1	1/5	0	0	
x_4	0	4/5	-9/5	0	-2/5	1	0	
x_5	0	33/5	7/5	0	1/5	0	1	
Δ_j		3	4	0	1	0	0	

Оскільки негативних оцінок немає, ми знайшли максимум.

$$\bar{x}^{*T} = \left[0 \quad 3/5 \quad 0 \quad 4/5 \quad 33/5\right] \ \ y_{max}(\bar{x}^*) = 3$$

Диференційний алгоритм

Приклад 7.

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 2 од. поживної речовини А, не менше 5 од. речовини В. На 1 кг корму I доводиться 1 од. поживної речовини А, 2 од. поживної речовини В . На 1 кг корму II доводиться 3 од. поживної речовини А і 8 од. поживної речовини В . Цена 1 кг корму I складає 1 грн., 1 кг корму II складає 4 грн. Необхідно визначити денний раціон тварин, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин, при мінімальних грошових витратах на придбання корму.

Поживні речовини	**Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг корму**		**Щоденна норма поживних речовин**
	I	II	
A	1	3	2
B	2	8	5
Вартість 1 кг корму	1	4	

Розв'язання.

Позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2)$ – кількість кілограмів корму I та II в денному раціоні. Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y\left(\bar{x}\right) = x_1 + 4x_2 \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 8x_2 \geq 5 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми. Введемо дві додаткові змінні x_3, x_4.

$$y\left(\bar{x}\right) = x_1 + 4x_2 \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_4 = 5 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

1.Пошук опорного рішення. Нехай залежними змінними будуть x_3, x_4, а незалежними будуть x_1 і x_2, тоді виразимо залежні через незалежні $x_3 = x_1 + 3x_2 - 2;\ x_4 = 2x_1 + 8x_2 - 5$.

Складемо таблицю й одержимо перше опорне рішення $\overline{x_0}^T = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -5]$. Воно неприпустиме тому, що $x_3 = -2 < 0$, $x_4 = -5 < 0$.

	x_1	x_2	1
x_3=	1	3	-2
x_4=	2	8	-5
y=	1	4	0

2.Пошук припустимого опорного рішення. Направляючим стовпцем може бути і перший і другий, оскільки всі елементи матриці B позитивні. Нехай направляючим стовпцем буде перший стовпець. Для вибору направляючого рядка застосуємо критерій $\Delta t_1 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \left[-\frac{-2}{1};\ -\frac{-5}{2} \right] = 2$. Це означає, що перший рядок обрано направляючим і залежна змінна x_3 стане незалежною, а незалежна змінна x_1 стане залежною.

	x_1	x_2	1
x_3=	1	3	-2
x_4=	2	8	-5
y=	1	4	0

Головним елементом стане $b_{11} = 1$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\overline{x_1}^T = [2 \quad 0 \quad 0 \quad -1]$. Дане рішення не є припустимим. Воно неприпустиме тому, що $x_4 = -1 < 0$.

	x_3	x_2	1
x_1=	1	-3	2
x_4=	2	2	-1
y=	1	1	2

Ми знову повторюємо 2-й етап.

2.Пошук припустимого опорного рішення. Направляючим стовпцем може бути і перший і другий, оскільки 2>0. Для вибору направляючого

	x_3	x_4	1
x_1=	4	-3/2	1/2
x_2=	1	1/2	1/2
y=	0	1/2	5/2

рядка застосуємо критерій $\Delta t_2 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0}\left[-\frac{2}{-3};\ \ -\frac{-1}{2}\right] = 1/2$. Це означає, що другий рядок обрано направляючим і залежна змінна x_4 стане незалежної, а незалежна змінна x_2 стане залежною. Головним елементом стане $b_{42} = 2$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\bar{x}_2^T = \left[1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0\right]$. Дане рішення є припустимим. Тепер нас цікавить, чи є це рішення оптимальним? Дане рішення є оптимальним, оскільки $k_1 = 0 \geq 0$ і $k_2 = 1/2 \geq 0$. Підставимо $\bar{x}_2^T = \left[1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0\right]$ в цільову функцію вихідної задачі. Одержимо $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, $y^* = 0.5 + 4 \cdot 0.5 = 2.5$.

Денний раціон тварин, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин – 0.5 кілограмів корму I та 0.5 кілограмів корму II. Мінімальні грошові витрати на придбання корму – 2.5 грн.

Приклад 8. *Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування:*

$$y(\bar{x}) = -x_1 - 2x_2 + 2 \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

Розв'язання.

1.Пошук опорного рішення. Нехай залежними змінними будуть x_3, x_4, x_5, а незалежними будуть x_1 і x_2, тоді виразимо залежні через незалежні $x_3 = -4x_1 + 2x_2 + 12;\ x_4 = x_1 - 3x_2 + 6;\ x_5 = 2x_1 + 4x_2 - 16$.

Складемо таблицю й одержимо перше опорне рішення $\bar{x}_0^T = \left[0 \quad 0 \quad 12 \quad 6 \quad -16\right]$. Воно неприпустиме тому, що $x_5 = -16 < 0$. Значення цільової функції $y\left(\bar{x}_0\right) = 2$.

2.Пошук припустимого опорного рішення. Направляючим стовпцем може бути і перший, і другий, оскільки й $b_{31} > 0$, і $b_{32} > 0$. Нехай направляючим стовпцем буде перший стовпець. Для вибору направляючого рядка застосуємо критерій $\Delta t_1 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0}\left[-\frac{12}{-4} \quad -\frac{-16}{2}\right] = 3$. Це означає, що перший рядок обрано направляючим і залежна змінна x_3 стане незалежною, а незалежна змінна x_1 стане залежною.

	x_1	x_2	1
x_3=	-4	2	12
x_4=	1	-3	6
x_5=	**2**	4	-16
y=	-1	-2	2

Головним елементом стане $b_{11} = -4$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\bar{x}_1^T = [3 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad -10]$. Дане рішення не є припустимим. Однак, $y\left(\bar{x}_1\right) = -1$, $y\left(\bar{x}_1\right) < y\left(\bar{x}_0\right)$.

Ми знову повторюємо 2-й етап.

	x_3	x_2	1
x_1=	-1/4	1/2	3
x_4=	-1/4	-5/2	9
x_5=	-1/2	5	-10
y=	1/4	-5/2	-1

2.Пошук припустимого опорного рішення. Направляючим стовпцем може бути тільки **другий стовпець**, оскільки в третьому рядку тільки $b_{32} > 0$. Для вибору направляючого рядка застосуємо критерій

	x_3	x_2	1
x_1=	-4	1/2	3
x_4=	-1/4	-5/2	9
x_5=	-1/2	5	-10
y=	1/4	-5/2	-1

$\Delta t_2 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0}\left[-\frac{9}{-5/2} \quad -\frac{-10}{5}\right] = 2$. Це означає, що як направляючий обран третій рядок і залежна змінна x_5 стане незалежною, а незалежна змінна x_2 стане залежною. Головним елементом стане $b_{32} = 5$. Виконавши один крок

	x_3	x_5	1
x_1=	-1/5	1/10	4
x_4=	-1/2	-1/2	4
x_2=	1/10	1/5	2
y=	0	-1/2	-6

жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\bar{x}_2^T = [4 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad 0]$. Дане рішення є припустимим $y(\bar{x}_2) = -6$, $y(\bar{x}_2) < y(\bar{x}_1)$. Тепер нас цікавить, чи є це рішення оптимальним? Ні, оскільки $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$. Переходимо до третього етапу.

	x_3	x_5	*1*
x_1=	-1/5	1/10	4
x_4=	-1/2	-1/2	4
x_2=	1/10	1/5	2
y=	0	-1/2	-6

3.Пошук оптимального рішення. Направляючим стовпцем може бути тільки *другий стовпець*, оскільки саме $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$. Вибір направляючого рядка здійснюється тільки серед рядків, у яких $b_{ir} < 0$, тільки $b_{22} = -\frac{1}{2} < 0$. Це означає, що *другий рядок – направляючий*.

	x_3	x_4	*1*
x_1=	-0,3	-1/5	4,8
x_5=	-1	-2	8
x_2=	-1/10	-2/5	3,6
y=	1/2	1	-10

І незалежна змінна x_5 стане залежною, а залежна змінна x_4 стане незалежною. Головним елементом стане $b_{22} = -\frac{1}{2}$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\bar{x}_3^T = [4{,}8 \quad 3{,}6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Дане рішення є оптимальним, оскільки $k_1 = \frac{1}{2} > 0$ й $k_2 = 1 > 0$. $y(\bar{x}_3) = -10$, $y(\bar{x}_3) < y(\bar{x}_2)$. Щоб довідатися, яким є рішення вихідної задачі, підставимо $\bar{x}_3^T = [4{,}8 \quad 3{,}6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ в цільову функцію вихідної задачі. Одержимо $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4{,}8 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}$, $y^* = -4.8 - 2 \cdot 3.6 + 2 = -10$.

Теорія двоїстості і аналіз лінійних оптимізаційних задач. Економічна інтерпретація двоїстості

Двоїсті задачі.

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, яку називають ***двоїстою*** по відношенню до даної (початкової) задачі. Початкова і двоїста задачі тісно зв'язані між собою і утворюють *єдину пару* двоїстих задач, причому задача, двоїста по відношенню до двоїстої задачі, збігається з початковою.

Залежно від структури моделі вихідної задачі розрізняють симетричні, несиметричні та змішані двоїсті задачі.

Симетричні двоїсті задачі.

Симетрична пара двоїстих задач.

Початкова задача	**Двоїста задача**
$y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{cases}$	$d(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \ge c_j, j = \overline{1,n}; \\ z_i \ge 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$

Порівнюючи форми запису прямої і двоїстої задач, можна встановити між ними наступні взаємозв'язки.

- Кожному і-*му* обмеженню вихідної задачі відповідає змінна z_i двоїстої задачі й, навпаки, кожному j-*му* обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна x_j вихідної задачі.
- Вільні члени обмежень однієї із задач є коефіцієнтами при відповідних змінних у цільовій функції іншої задачі. При цьому максимізація міняється на мінімізацію, і навпаки.
- Матриці систем обмежень двоїстої пари задач взаємно транспоновані.

Отже, рядок коефіцієнтів a_{ij} в j-*м* обмеженні двоїстої задачі є стовпець коефіцієнтів при x_j в обмеженнях вихідної задачі й навпаки. Знаки нерівностей змінюються на протилежні. Вільними членами обмежень є коефіцієнти при відповідних змінних у цільовій функції задачі.

- Всі змінні двоїстої задачі позитивні.

Несиметричні двоїсті задачі.

Несиметрична пара двоїстих задач.

Початкова задача	**Двоїста задача**
1. $y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$	1. $d(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to min$
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m};$	2. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n};$
3. $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$	3. $z_i -$ *довільні по знаку,* $i = \overline{1,m};$

Взаємозв'язки між прямою та двоїстою задачами такі ж самі, як в парі симетричних задач, але треба врахувати наступні особливості:

- Обмеженнями двоїстої задачі будуть нерівності. У задачах обмеження-нерівності варто записувати зі знаком "$\leq$ " при максимізації та зі знаком "$\geq$ " при мінімізації.
- Змінні z_i довільні по знаку, тобто можуть набувати як позитивних, так і негативних значень.

Змішані двоїсті задачі.

Математична модель вихідної задачі має умови симетричних та несиметричних задач. Якщо необхідно побудувати двоїсту задачу, треба виконувати правила симетричних і несиметричних задач.

Розберемо декілька прикладів побудови двоїстих задач.

Приклад 9. Побудувати двоїсту задачу до заданої:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 7 & z_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 10 & z_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \; x_3 \ge 0 \end{cases} .$$

Розв'язання.

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 7z_1 + 10z_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} z_1 + 2z_2 \ge 2 \\ -2z_1 + 3z_2 \ge -2 \\ z_1 - 2z_2 \ge 1 \\ z_1 \ge, z_2 \ge 0 \end{cases}$$

Дана задача є симетричною.

Приклад 10. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 & z_1 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 & z_2 \\ x_j \ge 0, \; j = 1,4 \end{cases}$$

Розв'язання.

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 9z_1 + 6z_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2z_1 + z_2 \le 3 \\ -2z_1 + z_2 \le 1 \\ 3z_1 - 6z_2 \le 3 \\ -z_1 - z_2 \le 1 \end{cases}$$

z_i – *довільні по знаку,* $i = \overline{1,2}$;

Дана задача є несиметричною.

Приклад 11. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 & z_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4 & z_2 \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8 & z_3 \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язання.

Перш ніж приступити до побудови двоїстої задачі, необхідно упорядкувати запис початкової задачі. Оскільки цільова функція мінімізується, то нерівності мають бути записані у вигляді "$\ge$". Для цього другу нерівність помножимо на -1, після чого вона запишеться у вигляді

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \ge -4$$

Необхідно ввести змінні z_1, z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 6z_1 - 4z_2 + 8z_3 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} z_1 - 2z_2 + z_3 \le 1 \\ -2z_1 - 3z_2 = -2 \\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 \le 1 \\ 3z_1 + z_2 = -1 \\ -2z_1 - z_2 - 4z_3 \le 1 \\ z_2 \ge 0, z_3 \ge 0 \end{cases}$$

Друге і четверте обмеження виражені у вигляді рівностей, оскільки відповідні їм змінні x_2 та x_4 не підпорядковані умовам позитивності. Умови позитивності в двоїстій задачі накладені тільки на змінні z_2 та z_3, оскільки їм відповідають в початковій задачі обмеження у вигляді нерівностей.

Дана задача є змішаною.

Приклад 12. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 & z_1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le 11 & z_2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 9 & z_3 \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Розв'язання.

Оскільки початкова задача на максимум, то третю нерівність потрібно привести до вигляду « $\leq$», для чого помножимо її на "-1", отримаємо: $-4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \leq -9$.

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 , z_3 та записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 12z_1 + 11z_2 - 9z_3 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3z_1 + 2z_2 - 4z_3 \geq 1; \\ z_1 + 2z_2 - z_3 = 4; \\ 2z_1 - z_2 - 3z_3 \geq 3; \\ z_1 + 2z_2 + z_3 \geq 2; \\ z_2 \geq 0, \quad z_3 \geq 0. \end{cases}$$

Друге обмеження двоїстої задачі записане у вигляді рівності, оскільки відповідна йому змінна x_2 в початковій задачі може бути будь-якою. На змінну z_1 не накладається обмеження позитивності, оскільки відповідно їй перше обмеження в початковій задачі має вид строгої рівності.

Дана задача є змішаною.

Застосування теорії двоїстості в економіці

Приклад 13.

Фірма випускає три види виробів, маючи в своєму розпорядженні сировину чотирьох типів А, Б, В, Г, відповідно, в кількостях 18, 16, 8 і 6 т. Норми витрат кожного типу сировини на 1од. виробу першого виду складають, відповідно, 1, 2, 1, 0, другого виду 2, 1, 1, 1 і третього виду - 1, 1, 0, 1. Прибуток від реалізації 1 од. виробу першого виду 3 грош.од., другого - 4 грош.од., третього - 2 грош.од.

1. *Скласти план виробництва трьох видів виробів, щоб отримати максимальний прибуток.*

2. *По вихідним даним задачі сформулювати другу економічну задачу (двоїсту до даної).*

3. *Знайти оптимальне рішення двоїстої задачі.*

4. *Визначити дефіцитність сировини.*

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йде на виготовлення одиниці виробу**			**Запас сировини**
	I	II	III	
А	1	2	1	18
Б	2	1	1	16
В	1	1	0	8
Г	0	1	1	6
Прибуток від реалізації 1 од. виробу	3	4	2	

Розв'язання.

1. Позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ план виробництва виробів трьох видів. Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16; \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 + x_3 \le 6; \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми, введемо чотири додаткові змінні x_4, x_5, x_6, x_7.

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 16; \\ x_1 + x_2 + x_6 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_7 = 6; \\ x_j \ge 0,\ j = 1,7 \end{cases}$$

Розв’язуємо задачу симплекс-методом. Далі заповнюємо симплекс-таблицю:

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0	9
x_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0	16
x_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0	8
x_7	0	6	0	1	1	0	0	0	1	6
Δ_j		$\Delta_0=0$	-3	-4	-2	0	0	0	0	

Наступні таблиці будуть мати вигляд:

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2	6
x_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1	5
x_6	0	2	1	0	-1	0	0	1	-1	2
x_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1	
Δ_j		$\Delta_0=24$	-3	0	2	0	0	0	4	

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	4	0	0	2	1	0	-1	-1	
x_5	0	6	0	0	-1	0	1	-2	1	3
x_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1	
x_2	4	6	0	1	1	1	0	0	1	4
Δ_j		$\Delta_0=30$	0	0	-1	0	0	3	4	

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\overline{b}$	$C_1=3$	$C_2=4$	$C_3=2$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	$C_7=0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1	
x_3	2	3	0	0	1	0	$1/2$	-1	$1/2$	
x_1	3	5	1	0	0	0	$1/2$	0	$-1/2$	
x_2	4	3	0	1	0	0	$-1/2$	1	$1/2$	
Δ_j		$\Delta_0=33$	0	0	0	0	$1/2$	2	$3/2$	

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то отримане опорне рішення є оптимальним $\overline{x}'^* = (5 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, а максимум функції рівний $y(\overline{x}^*) = 33$.

Оптимальний план виробництва трьох видів виробів: 5 виробів I виду, 3 – II виду, 3 – III виду, максимальний прибуток складе 33 грош. од.

2. Сформулюємо двоїсту задачу до даної:

$$d(\overline{z}) = 18z_1 + 16z_2 + 8z_3 + 6z_4 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} z_1 + 2z_2 + z_3 \geq 3 \\ 2z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 4 \\ z_1 + z_2 + z_4 \geq 2 \\ z_i \geq 0, \ i = \overline{1,4}; \end{cases}$$

У двоїстій задачі треба знайти оптимальні ціни z_1, z_2, z_3, z_4 за сировину і мінімізувати загальну вартість всієї сировини $d(\overline{z}) \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$.

3. Якщо вихідна задача розв'язана симплекс методом, то рішення двоїстої задачі може бути знайдено за допомогою формули

$$\overline{z}' = \overline{c}' A^{-1}$$

де $\overline{c}'$ – вектор-рядок коефіцієнтів при базисних змінних цільової функції в оптимальному рішенні початкової задачі ;

A^{-1} – зворотна матриця для матриці A, яка є матрицею коефіцієнтів базисних змінних системи обмежень початкової задачі в оптимальному рішенні.

Базисними змінними в оптимальному рішенні є x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\overline{c}' = [3 \quad 4 \quad 2 \quad 0] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}' = \bar{c}' A^{-1} = [3 \quad 4 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Оптимальне рішення $\bar{z}' = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, а мінімум функції, згідно з теоремою двоїстості $y(x)_{\max} = d(\bar{z})_{\min}$, дорівнює $d(\bar{z}) = 33$.

4. Найбільш дефіцитною є сировина типу В , для якої подвійна оцінка $z_3 = 2$. Менш дефіцитна сировина типу Б , для якої $z_2 = 1/2$. Зовсім недефіцитною є сировина типу А, $z_1 = 0$.

Завдання для контрольних робіт

Завдання для контрольної роботи з теми “Оптимізаційні економіко-математичні моделі”

Варіант 1

Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі *A, B, C* використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. На виробництво 1 т. карамелі виду А витрачається 0,8 т. цукрового піску, 0,4 т. патоки. На виробництво 1 т. карамелі виду В витрачається 0,5 т цукрового піску, 0,4 т патоки і 0,1 т фруктового пюре. На виробництво 1 т. карамелі виду *C* витрачається 0,6 т цукрового піску, 0,3 т патоки і 0,1 т фруктового пюре. Відомо також, що фабрика не може використовувати більше 800 т цукрового піску, більше 600 т патоки і більше 120 т фруктового пюре. Прибуток від реалізації 1т карамелі вигляду А, В, *C* відповідно рівна 108, 112, 126 тис. гр. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток .

Варіант 2

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 60 од. поживної речовини *A*, не менше 50 од. речовини *B* і не менше 12 од. речовини *C*. *На* 1 кг корму I доводиться 1 од. поживної речовини А, 2 од. поживної речовини В і 1 од. поживної речовини С. На 1 кг корму II доводиться 3 од. поживної речовини А і по 4 од. поживної речовини В И С. На 1 кг корму III доводиться 4 од. поживної речовини А, 2 од. поживної речовини В і 3 од. поживної речовини С. Цена 1 кг корму I складає 0,09 грн., 1 кг корму II складає 0,12 грн., 1 кг корму III складає 0,1 грн. Необхідно скласти денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин, при мінімальних грошових витратах на придбання корму.

Варіант 3

На складах *A1, A2, A3* є запаси продукції в кількостях 90, 400, 110 т. відповідно. Споживачі *B1, B2, B3* повинні отримати цю продукцію в кількостях 140, 300, 160 т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення була б мінімальною. Витрати по перевезенню 1 т. продукції задані матрицею С у (грош.од.):

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4

Для поліпшення фінансового положення фірма ухвалила рішення про збільшення випуску конкурентоздатної продукції, для чого в одному з цехів необхідно встановити додаткове обладнання, що вимагає 19/3 м2 площі. На придбання додаткового обладнання фірма виділила 10 тис. грош. од., при цьому вона може купити обладнання двох видів. Придбання одного комплекту обладнання 1-го вигляду коштує 1 тис. грош.од., 2-го вигляду – 3 тис. грош.од. Придбання одного комплекту обладнання 1-го вигляду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 грош.од., а одного комплекту обладнання 2-го вигляду – на 4грош. од. Знаючи, що для установки одного комплекту обладнання 1-го вигляду вимагається 2 м2 площі, а для обладнання 2-го вигляду – 1 м2 площі, визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Варіант 5

Для виробництва *столів* і *шаф* меблева фабрика використовує деревину виду А, деревину виду В. На виготовлення одного *столу* йде 0,2 м2 деревини виду А, 0,1 м2 деревини виду В і витрачається 1,2 людино-години. На виготовлення однієї *шафи* йде 0,1 м2 деревини виду А, 0,3 м2 деревини виду В і витрачається 1,5 людини-години. Фабрика має 40 м2 деревини виду А, 60 м2 деревини виду В і людський ресурс 371,4 людино-години. Прибуток від реалізації одного столу складає 6 грн., а однієї шафи 8 грн. Необхідно визначити кількість столів і шаф, яку слід виготовити фабриці, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

Варіант 6

Для виробництва двох видів виробів *А* і В використовують токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу вигляду А складають 10 станко-часів на фрезерному обладнанні, 5 с-ч на токарному обладнанні і 6 с-ч на шліфувальному обладнанні. Витрати часу на обробку одного виробу виду В складають 8 с-ч на фрезерному обладнанні, 10 с-ч на токарному обладнанні і 12 с-ч на шліфувальному обладнанні. Загальний фонд робочого часу складає 168ч на фрезерному обладнанні, 180ч на токарному обладнанні і 144ч на шліфувальному обладнанні. Прибуток від реалізації одного виробу виду А складає 141грн, а виробу В – 8 грн. Необхідно скласти оптимальний план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток .

Варіант 7

Фірма здійснює постачання пляшок на чотири заводи, які займаються випуском прохолодних напоїв. Вона має три склади, причому на складі 1 знаходиться 6000 пляшок, на складі 2 – 3000 пляшок і на складі 3 – 4000 пляшок. Першому заводу потрібно 4000 пляшок, другому – 5000 пляшок, третьому – 1000 пляшок, четвертому – 3000 пляшок. Вартість перевезення

однієї пляшки від кожного складу кожному заводу задана матрицею С у (грош.од.):

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Як слід організувати доставку пляшок на заводи, щоб вартість перевезення була мінімальною.

Варіант 8

Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три типи технологічного обладнання. Кожен з виробів повинен пройти обробку на даному типі обладнання. Час обробки кожного виду виробу, витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, дані в таблиці.

Тип обладнання	**Витрати часу на обробку одного виробу, ч.**	
	A	*B*
I	2	8
II	1	1
III	12	3
прибуток від реалізації 1 виробу (тис.грош.од.)	2	3

Обладнання I і III типів підприємство може використовувати не більше 26 і 39 ч відповідно, обладнання II типу доцільно використовувати не менше 4 ч. Визначити, скільки виробів кожного виду слід виготовити підприємству, щоб отримати максимальний прибуток .

Варіант 9

Меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізувати заготовки трьох видів – відповідно 24, 31, 18 *шт*. Кожен лист фанери можна розрізати на заготовки двома способами. Кількість отримуваних заготовок з одного листа 1-м способом складає 2шт I виду, 5шт II виду, 2шт III виду, а 2-м способом - 6шт I виду, 4шт II виду, 3шт III виду. Площа відходів при обох способах розкрою одного листа фанери однакова і складає 16 см2 з листа. Необхідно визначити, кількість листів фанери, розкроєних кожним із способів так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних загальних відходах.

Варіант 10

На звіроферми можуть вирощуватися чорно-білі лисиці і песці. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовується три види кормів I, II, III. 2 од. корма I витрачається на утримання однієї лисиці і 3 од. – на утримання одного песця, причому запас цього виду корму складає 180 од. Для корму вигляду II відповідно 5 од. лисиця і 4 од. песець, запас 240 од. Для корму вигляду III відповідно 6 од. лисиця і 4 од. песець, запас 426 од. Прибуток від реалізації однієї шкірки лисиці

складає 16 грн., а від реалізації песця – 12 грн. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб прибуток від реалізації шкірок був максимальним.

Варіант 11

Необхідно перевезти вантажі від трьох постачальників до чотирьох споживачів. Постачальники мають запаси 240, 40, 110т. відповідно. У споживачів наступні запити - 90, 190, 40 і 130 т. Вартості перевезень одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задані матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти такий план перевезення вантажу, щоб витрати на перевезення були мінімальні.

Варіант 12

Для виготовлення різних виробів *A*, *B*, *C* підприємство використовує три різні види сировини I, II, III. Норми витрати сировини виду I складають на виробництво виробу А 18 кг, виробу В 15кг, виробу С 12кг, загальна кількість сировини (запас сировини, який може бути використаний підприємством) виду I складає 360кг. Норми витрати сировини виду II складають на виробництво виробу А 6 кг, виробу В 4 кг, виробу С 8 кг, загальна кількість сировини виду II складає 192 кг. Норми витрати сировини виду III складають на виробництво виробу А 5 кг, виробу В 3 кг, виробу С 3 кг, загальна кількість сировини виду III складає 180 кг. Вартість одного виробу А складає 9 грн., В – 10 грн., З – 16 грн. Необхідно скласти план виробництва виробів, при якому собівартість виробництва одиниці продукції буде мінімальною. Врахувати, що собівартість це *відношення загальної вартості* виробів до їх *кількості*.

Варіант 13

На швейній фабриці тканина може бути розкроєна чотирма способами *A*, *B*, *C*, *D* для виготовлення виробів трьох видів. У таблиці приведені кількості виробів *i–го* виду (*i* =1, 3) і величина відходів при *j-м* варіанті (*j* = 1, 2, 3, 4) розкрою 1 *м2*. У ній же вказані необхідні кількості кожного виду виробів, які необхідно виготовити фабриці в планованому періоді. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб загальні відходи були мінімальні.

Вид виробу	**Кількість виробів з 1 *м2* тканини**				**Планова кількість виробів (*м2*)**
	A	*B*	*C*	*D*	
I	3	4	1	5	327
II	4	5	1	3	198
III	2	4	6	2	285
Величина відходів	0,1	0,13	0,15	0,13	

Варіант14

На швейній фабриці для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрат тканин всіх артикулів на пошиття одного виробу приведені в таблиці. У ній же вказані загальні кількості тканин кожного артикулу, що є у розпорядженні фабрики і ціна одного виробу кожного виду. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб вартість виготовлення продукції була мінімальною.

Артікул ткані	**Норми витрати тканини на один виріб, *м***				**Загальна к-ть тканини, *кг***
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Ціна виробу, *грн.*	9	6	4	7	

Варіант15

На підприємстві є три групи верстатів, кожна з яких може виконувати п'ять операцій по обробці деталей (операції можуть виконуватися у будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів, відповідно, дорівнює 100, 250, 180 ч. Кожна операція повинна виконуватися, відповідно, 100, 120, 70, 130, 110 ч. Визначити, скільки часу на яку операцію потрібно використовувати кожній групі верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожну операцію задана матрицею C

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант16

Борошномельний комбінат реалізує борошно двома способами: уроздріб через магазин і оптом через торгових агентів. При продажі x_1 кг борошна через магазин витрати на реалізацію складають x_1^2 грош.од., а при продажі x_2 кг борошна за допомогою торгових агентів – $3x_2^2 + 2x_2$ грош.од. Визначити, скільки кг борошна слід продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо в добу для продажу виділяється 5000 кг борошна.

Варіант17

Підприємство випускає три види продукції і використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне і шліфувальне. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів обладнання приведені в таблиці. У ній же вказані загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду. Визначити такий обсяг випуску кожного з виробів, при якому загальний прибуток від їх реалізації є максимальним.

Тип обладнання	**Витрати часу, *станко-ч***			**Загальною фонд роб. часу, *станко-ч***
	1	2	3	
Токарне	2	1	1	310
Шліфувальне	1	2	1	240
Прибуток від реалізації од. продукції, *грн.*	3	5	2	

Варіант18

Фірма випускає два види морозива: вершкове і шоколадне. Для виготовлення мороженого використовуються продукти: молоко і рідкий шоколад, витрати яких на 1кг морозива і добові запаси продуктів дані в таблиці. Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на вершкове морозиво перевищує попит на шоколадне не більше ніж на 100 кг .Крім того, встановлено, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350 кг в добу. Відпускна ціна 1 кг вершкового морозива 16 ден. од., шоколадного – 14 ден. од. Необхідно визначити кількість вершкового і шоколадного морозива, яке слід випускати фірмі, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним.

Продукти	**Витрата продуктів на 1кг морозива**		**Запас (*кг*)**
	Вершкове	*Шоколадне*	
Молоко	0,8	0,5	400
Шоколад	0,4	0,8	365

Варіант19

Для перевезень вантажу на трьох лініях можуть бути використані судна трьох типів. Продуктивність судів при використанні їх на різних лініях характеризується даними, приведеними в таблиці. У ній же вказані загальний час, протягом якого суду кожного типу знаходяться в експлуатації, і мінімально необхідні об'єми перевезень на кожній лінії.

Визначити, які судна, на якій лінії і протягом якого часу слід використовувати, щоб забезпечити максимальне за часом завантаження судів з урахуванням можливого часу їх експлуатації.

Тип судна	**Продуктивність судів на лінії (*млн.тонно-миль в добу*)**			**Загальний час експлуатації судів (*сут.*)**
	A	*B*	*C*	
I	8	14	11	280
II	6	15	13	320
III	12	12	4	340
Мінімальний об'єм перевезень (*млн. тонно-миль*)	3000	5400	3300	

Варіант 20

Підприємство отримує деяку сировину трьома способами: I, II, III. При отриманні кількості сировини I-м способом, витрати складають $3x_1^2+2$ грош.од., при отриманні кількості сировини II-м способом – $4x_2^2+x_2$ грош.од., а при отриманні кількості сировини III-м способом – x_3^2 грош.од. Визначити скільки сировини і яким способом слід отримувати, щоб витрати були мінімальними, якщо відомо, що протягом деякого інтервалу часу підприємство може отримати точно 6000 од. сировини.

Варіант 21

Аналіз рекламної діяльності за останні роки показав, що засоби, що вкладаються, приводять до збільшення прибутку: від реклами на телебаченні на 3 грош. од., від реклами на радіо – 2 грош. од., від реклами в газетах – 6 грош. од., від вуличних рекламних щитів – 1 грош.од., від розклеювання оголошень – 1,5 грош.од. з розрахунку на 1 грош.од., витрачену на рекламу. Фірма може виділити на рекламу 10 грош.од. у рік, причому на телевізійну рекламу передбачається виділити не більше 50%, на радіорекламу – не більше 30%, на газети і вуличні рекламні щити – не більше 15% від загальної суми, виділених засобів. Необхідно визначити величину грошових коштів, що виділяються фірмою на засоби масової інформації для отримання максимального прибутку від реклами.

Варіант 22

Підприємство має в своєму розпорядженні три виробничі ресурси (сировину, обладнання, електроенергію) і може організувати виробництво продукції двома різними способами. Витрати ресурсів і амортизація обладнання за один місяць і загальний ресурс при кожному способі виробництва задані в таблиці (у ден. од.). При першому способі виробництва

підприємство випускає за 1 місяць 3 тис. виробів, при другому 4 тис. виробів. Скільки місяців повинне працювати підприємство по кожному з цих способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продукції?

Виробничий ресурс	**Витратм ресурсів за 1 місяць при роботі**		**Загальний ресурс**
	по 1 способу	по 2 способу	
Сировина	2	2	7
Обладнання	4	1	3
Електроенергія	3	5	6

Варіант 23

Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції використовують сировину, що знаходиться в трьох пунктах. Потреби у сировині кожного з підприємств відповідно рівні 120, 50, 190, і 110 од. Запаси сировини в кожному з трьох пунктів відправлення відповідно дорівнюють 160, 140, 170 од. На кожне з підприємств сировина може завозитися з будь-якого пункту відправлення. Тарифи перевезень є відомими величинами і задаються матрицею $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ (у усл.од.). Скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість є мінімальною.

Варіант 24

Є два способи виробництва деякого продукту I–й і II–й. Витрати на виробництво x_1 оед. продукту I–м способом виражаються залежністю $3_1^2 + 2x_1 - 1$ Витрати на виробництво x_2 од. продукту II–м способом виражаються залежністю $2x_2^2 - 3x_2 - 2$. За деякий звітний проміжок часу необхідно проізвести рівно 4000 од. продукції, розподіливши її між двома способами так, щоб мінімізувати загальні витрати.

Варіант 25

Фірма випускає три види виробів, маючи в своєму розпорядженні при цьому сировину чотирьох типів А, Б, В, Г відповідно, в кількостях 18, 16, 8 і 6 т. Норми витрат кожного типу сировини на 1 од. виробу першого виду складають, відповідно, 1, 2, 1, 0, другого виду – 2, 1, 1, 1 і третього вигляду – 1, 1, 0, 1. Прибуток від реалізації 1 од. виробу першого виду 3 грош.од., другого – 4 грош.од., третього – 2 грош.од. Необхідно визначити план виробництва трьох видів виробів, що має максимальний прибуток.

Варіант 26

Підприємство для виконання чотирьох видів робіт може використовувати (придбати) обладнання трьох типів А, В і С. Собівартість використання одиниці обладнання різного типу на різних видах робіт і обмеження за сумарною собівартістю різних робіт приведені в таблиці.

Тип робіт	Собівартість використання од. обладнання (*тис. грн*)			Обмеження на сумарну собівартість (*тыс.грн*)
	A	*B*	*C*	
I	2	4	5	120
II	1	8	6	280
III	7	4	5	240
IV	4	6	7	360
Ефект від использ. од. обладнання (*тис. грн*)	10	14	12	

Потрібно визначити кількість одиниць обладнання кожного типу, що задовольняють обмеженням за собівартістю і що дають максимальний сумарний ефект при виконанні всіх робіт у повному обсязі.

Варіант 27

На центральний склад вантаж поступає від чотирьох підприємств відповідно в об'ємах 70, 120, 90 і 150 одиниць. Наявний парк транспортних засобів складається з машин трьох типів в кількостях 50, 35 і 20 і вантажопідйомності 5, 12 і 20 од. відповідно. Витрати при здійсненні доставки вантажу однією одиницею кожному з трьох типів машин від кожного з чотирьох підприємств задані матрицею $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}5 & 5 & 4 & 6\\ 3 & 3 & 5 & 2\\ 4 & 5 & 4 & 2\end{bmatrix}$. Потрібно скласти оптимальний план виділення транспортних засобів для підприємств, що забезпечує постачання вантажу у вказаних об'ємах

Варіант 28

Хай є *5* робіт і 5 кандидатів для виконання цих робіт. Призначення кандидата *i* на роботу *j* пов'язане з витратами c_{ij}, $i, j=\overline{1,5}$. Потрібно знайти призначення кандидатів на всі роботи, що дає мінімальні сумарні витрати. При цьому кожного кандидата можна призначити тільки на одну роботу і кожна робота може бути зайнята тільки одним кандидатом. Матриця витрат має вигляд: $\mathbf{C}=\begin{Bmatrix}6 & 8 & 5 & 7 & 6\\ 9 & 4 & 4 & 8 & 5\\ 3 & 6 & 4 & 8 & 5\\ 7 & 5 & 7 & 4 & 8\\ 6 & 9 & 3 & 4 & 7\end{Bmatrix}$.Факт призначення *i-го* кандидата на *j–ю* роботу позначте змінной $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\text{–й кандидат назначается на } j\text{–ю роботу,}\\ 0, & \text{в протилежному випадку.}\end{cases}$

Варіант 29

Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції використовують однорідні комплектуючі. Потреби в

комплектуючих кожного з підприємств відповідно рівні 110, 70, 180 і 120 од. Комплектучі зосереджені в трьох місцях їх відправлення, а запаси їх відповідно рівні 190, 130, 160 од. На кожне з підприємств комплектучі можуть завозитися з будь-якого пункту їх відправлення. Тарифи перевезень є відомими величинами і задаються матрицею $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (у ус.од.). Скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість є мінімальною.

Варіант 30

Впродовж п'яти років можливе здійснення восьми дослідницьких проектів. Очікуваний ефект від реалізації кожного проекту, відповідно складає 155, 130, 140, 120, 180, 175, 160 145 тис. у.о. Витрати за кожен *і-й* рік на здійснення проекту *j* відомі і приведені в матриці

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 10 & 5 & 30 & 30 & 20 & 10 \\ 15 & 10 & 15 & 5 & 30 & 40 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 20 & 5 & 30 & 50 & 20 & 10 \\ 20 & 15 & 25 & 5 & 30 & 0 & 20 & 15 \\ 20 & 10 & 20 & 5 & 20 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Загальний ліміт капіталовкладень, що виділяється на дослідження в *і-м* року, відповідно рівний 100, 150, 150, 150 і 100 тис.у.од. Потрібно вказати максимально ефективний набір проектів, що не виводить за межі вкладень, які відпускаються. Врахувати, що змінна x_j рівна 1, якщо j-й проект здійснюється, і рівна 0 в протилежному випадку.

Завдання для контрольної роботи з теми "Лінійне програмування: графічний метод"

Варіант 1

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 2

За допомогою графічного методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 3

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 4

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40, \\ x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 5x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 5

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 - x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 11, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 6

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 6x_1 + 10x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 \le 5, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 7

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 5x_1 - x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 8

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -x_1 - x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 9

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 10

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 11

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 12

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 13

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 3x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 11, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 14

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 15

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 16

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 17

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -x_1 + 4x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 18

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 - 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 19

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 5x_1 + x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 20

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 - x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 21

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 13, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 22

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -x_1 - x_2 \to \max;$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 23

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 3x_2 \ge -16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 24

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 25

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 26

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 19, \\ 4x_1 + x_2 \le 22, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 27

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 - x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 28

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -x_1 - x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 8, \\ -x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 29

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 - x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Варіант 30

За допомогою графічного методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Завдання для контрольної роботи з теми “Лінійне програмування: симплекс-метод”

Варіант 1

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 7x_1 - 2x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + x_2 \ge -3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 3

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 4

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq -6 \\ 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 5

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 6

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 7

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 8

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 9

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 10

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 11

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 12

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 13

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 14

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 15

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 16

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 17

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 18

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 19

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 20

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 21

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 22

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 23

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 - 4x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 27 \\ -3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 24

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ -x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 25

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 26

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 27

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + x_2 \ge -3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 28

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -6 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 29

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq -6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 30

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Завдання для контрольної роботи з теми "Лінійне програмування: диференційний алглритм"

Варіант 1

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad + 4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \qquad - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 2

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \qquad - x_4 + 4 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 3

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \quad + 4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 \qquad - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 4

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \quad - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 4 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 5

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \qquad - x_5 - 4 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 6

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \qquad - x_5 + 8 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 7

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 4 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 8

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 8 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 8 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 9

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 10

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 10 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 + 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 11

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 6 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 12

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 12 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 - 6 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 13

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 13 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 14

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 14 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 15

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 15 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_5 + 10 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 16

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 16 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 10 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 17

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 17 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 18

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 18 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 19

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 19 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + 10 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 20

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 20 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 10 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 21

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 21 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + 16 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 22

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 22 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 15 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 23

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 23 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 15 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 24

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 24 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 16 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 - 4 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 25

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 25 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 6 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 26

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 26 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 + 6 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 27

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 - x_2 + 8x_3 + 27 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 28

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 28 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

:

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - x_5 + 5 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 29

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 30

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 30 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Завдання для контрольної роботи з теми "Теорія двоїстості"

Для виготовлення m видів продукції використовують n видів сировини. Запаси сировини,колічество одиниць сировини, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, а також величина прибутка, отримувана від реалізації одиниці продукції приведені в таблиці. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

1. Скласти план виробництва m видів продукції , щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.
2. За вихідними даними задачі сформулювати другу економічну задачу (двоїсту до даної).
3. Знайти оптимальне рішення двоїстої задачі.
4. Визначити дефіцитність сировини.

Варіант1

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	5
Б	2	3	6
В	3	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 2

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	1
Б	5	1	3
В	3	1	3
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 3

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	6
Б	2	1	4
В	1	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 4

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	2	1	4
Б	1	1	6
Г	3	1	18
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 5

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	2	4
В	1	1	6
Г	2	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 6

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	3	6
В	1	1	3
Г	2	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 7

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	2	1	3
В	1	2	5
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	5	

Варіант 8

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	2	4
В	2	3	10
Г	2	1	12
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 9

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	8
Б	2	1	4
В	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 10

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	2	6
В	1	1	5
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	1	

Варіант 11

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	2	1	3
В	1	2	4
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 12

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	4
В	1	1	6
Г	1	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 13

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	3
Б	1	1	6
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 14

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	8
Б	2	1	6
В	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	2	

Варіант 15

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	8
В	1	1	8
Г	2	3	10
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	2	

Варіант 16

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	6
В	1	2	4
Г	2	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 17

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	3
В	1	2	4
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 18

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	3
В	1	1	6
Г	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	1	

Варіант 19

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	2	3
Б	1	1	6
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 20

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	8
Б	1	1	6
Г	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	1	

Варіант 21

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	8
Б	3	1	9
Г	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	5	

Варіант 22

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	2	18
В	1	1	8
Г	0	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 23

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	3
В	5	3	27
Г	3	2	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	4	

Варіант 24

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	2	1	4
Б	2	1	6
В	1	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 25

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	2	4
В	2	3	10
Г	2	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 26

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	3
В	1	2	5
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	5	

Варіант 27

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	1
Б	5	1	3
В	3	1	3
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 28

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	6
В	2	1	4
Г	1	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 29

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	4
В	1	1	6
Г	1	2	12
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 30

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	6
В	1	2	4
Г	2	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Список літератури

1. Самойленко М.І. Математичне програмування. – Харків: Основа, 2002. – 424с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов. – Киев: Вища школа.,1989, – 392с.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В. Математическое программирование. –М.: Высш.шк., 1980.
4. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2001.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 496с.:ил.
6. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике.. – М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Долгопятов Т.Г., Суворов Б.Г. Математическое моделирование экономических процессов МГУ, 1990, – 262с.
8. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. К. :Вища школа. - 1990. – 239с.
9. Плис А.И., Сливина Н.А. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999.
10. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. СПб.: Питер, 2002. – 176с.
11. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. СПб.: Питер, 2002.
12. Самойленко М.І., Білогурова Г.В., Штельма О.М., Гавриленко І.О. Методичні вказівки до самостійного вирішення задач та виконання розрахункових завдань з курсу “Математичного програмування“. ХДАМГ, - 2006.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до проведення практичних занять і виконання самостійної роботи (частина 1) з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.030504 - “ Економіка підприємства»).

Укладачі: Микола Іванович Самойленко,
Ольга Миколаївна Штельма,
Ганна Викторівна Білогурова,
Валентина Петрівна Протопопова

Редактор: М.З Аляб’єв

План 2009, поз. 536м

Підп. до друку 15/12/09	Формат 60х84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі.	Умовн.—друк. арк. 3,1	Обл.— вид. арк. 3,5
Замовл. №	Тираж 50 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ,
61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12