

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківська національна академія міського господарства

В.П.Шпачук, М.С.Золотов, В.О.Пушня, О.І.Рубаненко, А.О.Гарбуз

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ДИНАМІКА

(Конспект лекцій для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за
напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701
«Електротехніка», 6.060103 «(Гідротехніка) Водні ресурси»,
6. 030601 «Транспортні системи»)

ХАРКІВ – ХНАМГ – 2009

УДК 351.1

Теоретична механіка. Динаміка: Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямками 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка», 6.060103 «(Гідротехніка) Водні ресурси», 6.030601 «Транспортні системи») / За заг. ред. В.П.Шпачука . – Х.: ХНАМГ, 2009. – 217 с.

Автори: В.П.Шпачук, М.С.Золотов, В.О.Пушня, О.І.Рубаненко, А.О.Гарбуз

Рецензенти:

М.Ф.Пацегон, проф., д-р ф.-м. наук (Харківський національний університет ім. В.М.Каразіна);

О.К.Морачковський, проф., д-р техн. наук, завідувач кафедри теоретичної механіки (Харківський національний технічний університет «ХПТ»).

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних, електромеханічних, екологічних і транспортних спеціальностей вузів при підготовці до занять, заліків та іспитів з розділу «Динаміка» курсу теоретичної механіки.

Він містить такі основні питання динаміки точки, механічної системи та твердого тіла, як закони динаміки, диференціальні рівняння динаміки точки, твердого тіла та системи, основні теореми динаміки точки та системи, теореми про зміну кінетичної енергії, теорію потенціального силового поля, метода кінетостатики, коливань матеріальної точки, елементарної теорії удару та основи аналітичної механіки. У кожному розділі наведено приклади задач, методики їх розв'язання та контрольні питання.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
Протокол № 1 від 28.08.2009 р.

© ХНАМГ, В.П.Шпачук, М.С.Золотов,
В.О.Пушня, О.І.Рубаненко, А.О.Гарбуз, 2009

ВСТУП

Динамікою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних тіл під дією сил. В цьому найбільш важливому розділі теоретичної механіки викладаються загальні методи дослідження механічного руху будь-який матеріальних об'єктів, які можуть бути описані за допомогою моделей: матеріальна точка, система матеріальних точок, абсолютно тверде тіло. Крім того, в динаміці вивчаються стійкість рівноваги і руху матеріальних об'єктів і їх механічні коливання, рух матеріальних об'єктів змінної маси (ракетна динаміка), елементи теорії удару.

Динаміка має важливе прикладне значення. За допомогою її рівнянь і методів визначаються закони руху різних матеріальних тіл – снарядів, ракет, супутників, планет, елементів вимірювальних приладів, будівельних механізмів, будівельних конструкцій, промислового устаткування, турбоагрегатів тощо. На основі її законів створені складні гіроскопічні прилади керування, на базі яких здійснюється динамічна або інерційна навігація. Методи дослідження стійкості руху є фундаментом динаміки систем автоматичного регулювання. Методи і варіаційні принципи аналітичної динаміки після відповідного узагальнення використовують для дослідження динаміки електричних ланцюгів, у задачах електродинаміки, квантової механіки, термодинаміки та інших наук.

В основі динаміки лежать закони Ньютона, які є постулатами або аксіомами, на яких будується вся система висновків, доказів і методів динаміки. Ці закони є об'єктивними законами природи, бо встановлені на основі чисельних дослідів і спостережень Ньютона і його попередників, достовірність яких перевірена дослідом і практикою.

Динаміка спирається на поняття, теореми, методи і результати двох попередніх розділів – статички (визначення і перетворення систем сил, у тому числі реакцій в'язей) і кінематики (способи завдання руху, співвідношення між координатами, швидкостями і прискореннями, кінематичний аналіз механізмів). Проте динаміка не є простим синтезом двох попередніх розділів. Її

основним змістом є складання (за допомогою понять статички і кінематики) диференціальних рівнянь руху і їх розв'язання математичними методами з метою визначення законів руху матеріальних тіл, а також встановлення загальних законів і принципів динаміки, які визначають механічний рух. При цьому в динаміці вводиться ряд важливих понять: маса, центр мас, момент інерції, кількість руху, кінетична і потенційна енергії, робота, потужність, сила інерції, можливе переміщення та ін.

Необхідною умовою розв'язання задач динаміки є знання апарату вищої математики, зокрема таких її розділів як диференціальні рівняння у звичайних і частинних похідних, похідні функцій одній і кількох змінних, криволінійні і кратні інтеграли та ін.

Розробка основ динаміки відноситься до XVI-XVII ст., коли суспільна практика, зокрема судноплавство і військова справа, поставила перед вченими низку проблем. Найбільш значний внесок в розвиток динаміки внесли: Леонардо да Вінчі (1452-1519) - вивчав траєкторію тіла, що було кинуте під кутом до горизонту, рух тіла по площині і явище тертя, вперше сформулював закон інерції; Микола Копернік (1473-1543) - відкрив геліоцентричну систему світу; Галілео Галілей (1564-1642) - встановив основні закони вільного падіння тіл, ввів поняття про нерівномірний рух і прискорення точки, сформулював закон інерції, принцип відносності класичної механіки і дослідив дію сил на тіла, що рухаються; Іоганн Кеплер (1571-1630) - відкрив закони руху планет; Рене Декарт (1596-1650) - ближче до своїх сучасників підійшов до правильного формулювання закону інерції, вперше увів поняття кількості руху матеріальної точки і дослідив питання про складання довільного числа рухів точки; Христіан Гюйгенс (1629-1695) – розробив теорію коливань фізичного маятника і визначив центр його коливання, довів теореми про відцентрову силу, експериментально визначив прискорення сили тяжіння, дослідив проблему удару двох тіл.

Одне з перших місць в розвитку механіки займає Готфрід Лейбніц (1646-1716), котрий розробив і застосував до задач механіки диференціальне і

інтегральне числення, увів поняття кінетичної енергії і впритул наблизився до утворення варіаційного числення. Завершив встановлення основних законів динаміки великий англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643-1727). В своєму знаменитому творі "Математичні початки натуральної філософії" (1687) він сформулював основні поняття класичної механіки, її аксіоматику, а також низку фундаментальних теорем небесної механіки і закон всесвітнього тяжіння.

Період розвитку динаміки після Ньютона в значній мірі пов'язан з ім'ям Л.Ейлера (1707-1783), котрий більшу частину життя працював у Петербурзькій Академії наук. Л.Ейлер повністю завершив процес математизації механіки точки, був засновником механіки твердого тіла і сформулював закони динаміки для безперервного середовища.

Подальший розвиток динаміки проходив у зв'язку з вивченням руху системи матеріальних точок. Розвиток цього напрямку був дан працями Ж.Л.Даламбера (1717-1783), який сформулював принцип, за допомогою якого формально задачі динаміки зводились до задач статички (принцип Даламбера), і Ж.Л.Лагранжа (1736-1813). У видатному творі "Аналітична механіка" Ж.Л.Лагранж сформулював найбільш загальний принцип статички - принцип можливих переміщень, знайшов загальну закономірність механіки - загальне рівняння динаміки, і вивів у загальному вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи.

У подальшому працями видатних математиків і механіків: П.Л.Мопертюї (1698-1759), П.С.Лапласа (1749-1827), К.Ф.Гаусса (1777-1855), С.Пуассона (1781-1840), У.Гамільтона (1805-1865), К.Якобі (1804-1851), М.В.Остроградського (1801-1861) - завершилась математизація механіки системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла, вироблені специфічні для аналітичної механіки поняття (узагальнені координати, узагальнені швидкості, узагальнені сили) й розроблені математичні методи розв'язання багатьох задач.

Наступний розвиток динаміки характеризується поглибленим вивченням ряду її розділів і появою нових. Слід відмітити роботи С.М.Ковалевської (1850-

1891) і О.М.Ляпунова (1857-1918) з теорії обертання важкого твердого тіла навколо нерухомої точки, які стали початковою точкою для прикладної теорії гіроскопів. Значний внесок в розвиток механіки неголономних систем, яка має чисельні застосування в кібернетиці, теорії автоматичного керування, динаміці машин зробили Д.Гіббс (1839-1903), С.А.Чаплигін (1863-1945) та інші вчені. Теорія стійкості рівноваги та руху, яка була тісно пов'язана з проблемою точного приладобудування, створена і розвинута працями Е.Рауса (1831-1907), М.Є.Жуковського (1847-1921), О.М.Ляпунова, А.Пуанкаре (1854-1912). Найбільш суттєві результати в теорії гіроскопів, які є основою навігаційних приладів, були отримані Л.Фуко (1819-1868), О.М.Криловим (1863-1945), В.В.Булгаковим (1901-1952) та іншими механіками.

Проблема боротьби з небезпечними вібраціями машин і споруд призвела до розробки теорії малих коливань, де значні результати були отримані Релєєм (1842-1919), А.Пуанкаре, О.М.Криловим.

Основи механіки тіла змінної маси, яка є фундаментом вивчення реактивного польоту, були закладені в працях І.В.Мещерського (1859-1935), К.Е.Цюлковського (1857-1935) і розвинуті С.П.Корольовим (1907-1966). Подальший розвиток цього розділу механіки працями А.Лоренца (1853-1928), А.Пуанкаре і А.Ейнштейна (1879-1955) призвів до встановлення положень теорії відносності, яка створила нову, після І.Ньютона, систему просторово-часових відношень.

Наприкінці XIX ст. під впливом розвитку кораблебудування і авіації почалася розробка проблем гідро- та аеродинаміки, де найбільш значні результати пов'язані з іменами М.Є.Жуковського, С.А.Чаплигіна, Л.Прандтля (1875-1953), Т.Кáрмана (1881-1963). Динаміка стала основою теорії автоматичного регулювання, значний внесок в розвиток якої зробив І.А.Вишнеградський (1831-1895).

У другій половині XX ст. інтенсивного розвитку набула теорія нелінійних коливань, основоположниками якої були Ван-дер-Поль, О.О.Андронов (1901-1952), М.М.Крилов (1879-1955), М.М.Боголюбов та ін. Методи, розроблені

математиками, механіками, фізиками в області нелінійної динаміки, дозволяють вивчати процеси і явища в самих різних галузях науки – від механіки, фізики, хімії, біології до соціології, кліматології, астрофізики. За словами відомого бельгійського вченого, лауреата Нобелівської премії в галузі динамічних систем І.Пригожина «...шляхи розвитку термодинамічної теорії необернених явищ, теорії динамічних систем (нелінійної динаміки) і класичної механіки, що були протягом багатьох років паралельними, в решті решт зійшлися». Узагальнення, зроблені вченими-динаміками за останні роки, привели до суттєвої зміни наших уявлень про фундаментальні властивості світу, що є навколо нас.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ. ЗАКОНИ ДИНАМІКИ

Динамікою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальної точки, матеріальних тіл під дією сил.

У класичній механіці задачі динаміки поділяють традиційно умовно на два типи задач.

У першому типі задач звичайний рух тіла (або механічної системи) є заданим і треба визначити сили під дією яких здійснюється цей рух (пряма задача динаміки).

Другий тип задач за умовою звичайно має протилежний зміст: в них заданими є сили, а шуканим – рух тіла (обернена задача динаміки).

1.1. Основні поняття і визначення

У теоретичній механіці під *матеріальною точкою* розуміють тіло кінцевої маси, розмірами і різницею в русі окремих точок якого можна знехтувати. Наприклад, тіло, що поступально рухається, можна розглядати матеріальною точкою з масою, рівною масі всього тіла. Звичайно матеріальну точку моделюють геометричною точкою, яку наділяють кінцевою масою.

Класична механіка Ньютона використовує поняття *«абсолютна» система координат* і *«абсолютний» час*.

«Абсолютна» система координат – це абсолютно нерухома система координат, до якої справедлив закон інерції Галілея. Тобто система координат, по відношенню до якої виконується закон інерції називається *інерціальною*.

«Абсолютний» час – це час, який не залежить від руху тіл і систем відліку, тобто однаковий для всіх спостерігачів, де б вони не знаходились і як би не рухались.

Досвід і спостереження показують, що інерціальною системою координат є геліоцентрична система, полюс якої знаходиться в центрі мас Сонця, а осі направлено на нерухомі зірки.

Будь-яка система координат, що рухається по відношенню до інерціальної нерухомої системи координат поступально, прямолінійно і рівномірно, також виявляється інерціальною (див. розділ 2.4).

1.2. Закони динаміки

В основі динаміки лежать три закони І.Ньютона, викладені в «Математических началах натуральной философии» (1687 р.). Закони Ньютона встановлені шляхом узагальнення і систематизації незлічених результатів досвідів і спостережень.

Перший закон динаміки (закон інерції Галілея). В якості першого закону динаміки в класичній механіці прийнято перший закон Ньютона. Він, в свою чергу, є узагальненням принципу інерції Галілея на базі понять абсолютно нерухомої системи координат і абсолютного часу.

Згідно з першим законом динаміки: ізолювана матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Властивість ізолюваної матеріальної точки зберігати стан рівномірного і прямолінійного руху при відсутності сил називається рухом за інерцією.

Закон інерції відображає одне із основних властивостей матерії – перебувати незмінно в русі.

З закону інерції також виходить: якщо сила, що діє на точку, дорівнює нулю ($\vec{F} = 0$), то точка перебуває у стані спокою ($\vec{V} = 0$) або рухається з постійною за величиною і напрямом швидкістю ($\vec{V} = const$). Прискорення точки при цьому дорівнює нулю ($\vec{a} = 0$).

Другий закон динаміки (основний закон динаміки). Якщо рух точок ні є рівномірним і прямолінійним, то на точку діє сила. Закон встановлює, як змінюється швидкість точки при дії на неї сили. Ним визначається кількісний зв'язок між прикладеною силою та викликаємым прискоренням.

У теоретичній механіці другий закон динаміки сформульовано на базі

другого закону Ньютона: сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке пропорційне величині сили і має однаковий з нею напрям.

Другий закон динаміки, як і перший, має місце лише по відношенню до інерціальної системи координат.

Математично цей закон виражається у вигляді наступного основного рівняння динаміки вільної матеріальної точки:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (1.1)$$

де m, \bar{a} – маса і прискорення точки; \bar{F} – сила, що діє на точку (сила \bar{F} у загальному випадку є рівнодійною активних сил і реакцій в'язей).

Рівняння (1.1) виражає кількісне співвідношення між трьома фізичними величинами: силою, масою і прискоренням. Відповідно, точки при дії однакових сил отримують однакові прискорення лише тоді, коли будуть рівними їх маси. При різних масах точка з більшою масою отримує менше прискорення. Тому маса матеріальної точки є мірою її інертних властивостей. Під *інертністю* розуміють властивості точки отримувати під дією сили більше прискорення при меншій масі.

Експериментально доведено, що поблизу земної поверхні маса тіл визначається виразом

$$m = \frac{P}{g}, \quad (1.2)$$

де P – сила ваги тіла; g – прискорення вільного падіння.

У міжнародній системі (СІ) за одиницю маси приймають 1 кг (один кілограм), за одиницю довжини, часу і сили, відповідно, 1 м (один метр), 1 с (одну секунду), 1 Н (один Ньютон). Тому, з урахуванням (1.1), один Ньютон – це сила, що надає масі в 1 кг прискорення 1 м/с^2 : $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2$.

Третій закон динаміки (закон рівності дії і протидії). В теоретичній механіці у якості третього закону динаміки застосовується третій закон Ньютона. Ним встановлюється характер механічної взаємодії між матеріальними тілами.

На відміну від перших двох, третій закон динаміки справедливий у будь-якій системі координат, а не тільки в інерціальній, бо він не містить кінематичних характеристик руху тіл.

Для двох матеріальних точок (рис. 1.1) він формулюється таким чином: сили взаємодії двох точок (дія і протидія) рівні за величиною, протилежно напрямлені і мають загальну лінію дії. Тут m_1, m_2 – маси точок, що взаємодіють;

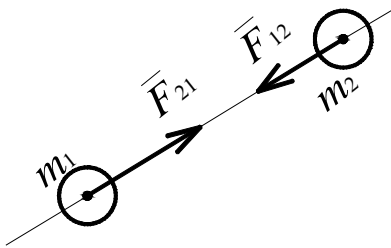


Рис. 1.1

\bar{F}_{12} – сила, що діє на тіло 2 з боку тіла 1, а \bar{F}_{21} – навпаки. Слід зазначити, що сила \bar{F}_{12} і \bar{F}_{21} , тобто ця взаємодія, не створює зрівноважену систему сил (двійку сил [1]), тому що прикладені до різних об'єктів.

Четвертий закон динаміки (закон незалежності дії сил або принцип суперпозиції). Якщо на точку діє водночас декілька сил $\bar{F}_k (k = 1, \dots, n)$, то вони

еквівалентні одній силі [1] – рівнодійної $\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$.

Припустимо, що прикладені до точки сили діють незалежно одна від одної. Тоді, використовуючи основне рівняння динаміки точки (1.1), отримаємо

$$m\bar{a} = \bar{R},$$

де $\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k$ – прискорення точки; \bar{a}_k – прискорення, яке отримує точка при дії

k -ої сили \bar{F}_k .

Згідно з четвертим законом динаміки: прискорення матеріальної точки, що виникає при дії на неї декількох сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, яких надають точці окремі сили.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте закони Ньютона.
2. Яка система відліку називається інерціальною?
3. Який закон називається основним законом динаміки?
4. Що розуміють під «інертністю» матеріальної точки?

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

2.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної точки мають форму, що залежить від способу завдання її руху. Тому розглянемо кожен з форм окремо.

Векторна форма

Положення точки M масою m в інерціальній системі координат $Oxyz$

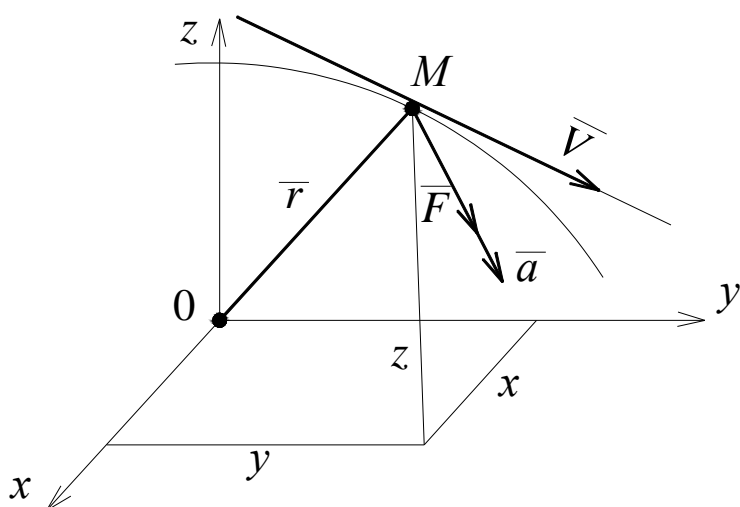


Рис. 2.1

визначимо радіусом-вектором \bar{r} (рис. 2.1). У загальному випадку сила $\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}})$, що діє на точку, може залежати від часу t , положення \bar{r} і швидкості $\bar{V} = \dot{\bar{r}}$. Тому рівняння (1.1) набере вигляду

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}).$$

Координатна форма

Якщо рух точки M задано в координатній формі (рис. 2.1) рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то спроектувавши рівняння (2.1) на координатні осі, отримаємо

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (2.2)$$

При русі точки в площині, наприклад Oxy , одержимо $z = 0$, $F_z = 0$ і наступні два рівняння руху:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y.$$

У випадку руху точки вздовж прямої лінії, що співпадає з віссю, наприклад Ox , отримаємо одне диференційне рівняння прямолінійного руху: $m\ddot{x} = F_x$.

Натуральна форма

Спроекуємо основне рівняння динаміки (1.1) на натуральні осі і врахувавши, що прискорення $a_\tau = \dot{V}_\tau$, $a_n = V^2 / \rho$, $a_b = 0$, одержуємо:

$$m\dot{V}_\tau = F_\tau, \quad mV^2 / \rho = F_n, \quad 0 = F_b, \quad (2.3)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії в точці M (рис. 2.2).

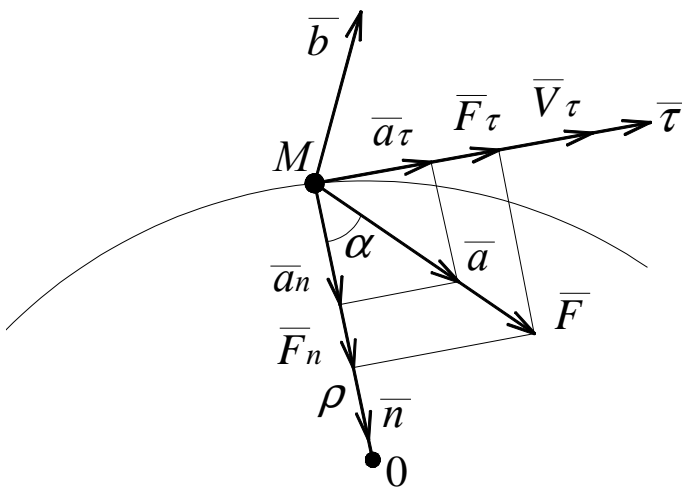


Рис. 2.2

Якщо траєкторія точки є плоскою, то отримаємо

$$m\dot{V}_\tau = F_\tau, \quad mV$$

Рівняння (2.3) називаються також диференційними рівняннями руху точки у формі Ейлера [3].

2.2. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

При дослідженні руху матеріальної точки розглядаються і розв'язуються звичайно дві основні задачі динаміки.

Пряма (перша) задача динаміки: задано масу m і закон руху точки, треба визначити рівнодійну прикладених до точки сил.

Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), то враховуючи рівняння (2.2) проєкції рівнодійної визначаються за формулами

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Отже модуль (величина) і напрямні косинуси рівнодійної сили будуть наступними:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, Ox}) = F_x / F; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, Oy}) = F_y / F; \\ \cos(\widehat{\vec{F}, Oz}) = F_z / F.$$

Якщо рух матеріальної точки задано в натуральній формі, то за рівняннями (2.3) і рис. 2.2 отримаємо:

$$F_\tau = m\dot{V}_\tau = m\ddot{\sigma}; \quad F_n = mV^2 / \rho,$$

де σ – дугова координата точки.

Модуль сили і напрям визначимо (рис. 2.2) при цьому за формулами

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Друга (обернена) задача динаміки: задано масу m точки, прикладену до неї силу \vec{F} , а також початкове положення (x_0, y_0, z_0) точки та її початкова швидкість $(V_{0x} = \dot{x}_0, V_{0y} = \dot{y}_0, V_{0z} = \dot{z}_0)$, треба визначити рівняння руху точки.

Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференційних рівнянь руху матеріальної точки (2.1), (2.2) і (2.3).

В загальному випадку, якщо рух точки задано в координатній формі (2.2), друга задача динаміки призводить до необхідності розв'язання системи трьох взаємозалежних диференційних рівнянь другого порядку:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \quad (2.4)$$

Проінтегрувавши систему рівнянь (2.4) отримаємо розв'язок у вигляді

$$x = x(t, C_1, \dots, C_6), \\ y = y(t, C_1, \dots, C_6), \\ z = z(t, C_1, \dots, C_6), \quad (2.5)$$

де C_{1-6} – сталі інтегрувальні.

Кількість сталих інтегрування в окремому розв'язку системи (2.5) визначається в кожному конкретному випадку ступенем взаємозв'язності рівнянь початкової системи (2.4). Ця кількість може змінюватися від двох до шести.

Сталі інтегрування у розв'язку (2.5) визначаються завданням початкових умов руху точки, тобто значень координат точки і проєкцій її швидкості в початковий момент часу $t = t_0$ (звичайно приймають $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

За для використання початкової швидкості точки при визначенні сталих інтегрування продиференціюємо за часом рівняння руху (2.5):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, \dots, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Якщо тепер в (2.5) і (2.7) підставимо початкові умови руху точки (2.6), то одержимо систему шести алгебраїчних рівнянь з шістьма невідомими сталими інтегрування:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{x}_0 &= \dot{x}(t_0, C_1, \dots, C_6); \\ y_0 &= y(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{y}_0 &= \dot{y}(t_0, C_1, \dots, C_6); \\ z_0 &= z(t_0, C_1, \dots, C_6); & \dot{z}_0 &= \dot{z}(t_0, C_1, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно сталих C_i ($i = 1, \dots, 6$), знайдемо

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (2.5), одержимо закон руху точки, що відповідає заданим початковим умовам (2.6):

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned}$$

Розглядаючи рух точки в натуральній формі для розв'язання другої задачі динаміки застосовують рівняння (2.3). Початковими умовами руху в цьому разі є значення дугової координати $\sigma(t_0) = \sigma_0$ і початкової швидкості $V_\tau(t_0) = \dot{\sigma}_0$ при $t = t_0$. Розв'язок першого з рівнянь (2.3) стосовно дугової координати матиме вигляд

$$\sigma = \sigma(t, C_1, C_2). \quad (2.9)$$

Постійні інтегрування знаходимо з рівнянь

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma(t_0, C_1, C_2), \\ \dot{\sigma}_0 &= \dot{\sigma}(t_0, C_1, C_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Розв'язок алгебраїчних рівнянь (2.10) надає сталі інтегрування

$$C_i = C_i(t_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0) \quad (i = 1, 2), \quad (2.11)$$

що залежать від заданих початкових умов σ_0 і $\dot{\sigma}_0$.

Підставивши співвідношення (2.11) у вираз (2.9) одержимо закон зміни дугової координати за часом:

$$\sigma = \sigma(t_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0).$$

Далі визначають звичайно радіус кривини ρ траєкторії рухомої точки з другого рівняння (2.3), приймаючи

$$V_\tau = \dot{\sigma}(t, \sigma_0, \dot{\sigma}_0).$$

Отже, узагальнена методика розв'язання другої задачі динаміки матеріальної точки включає наступні етапи:

- 1) складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовою задачі;
- 2) інтегрування одержаних рівнянь;
- 3) визначення відповідних значень сталих інтегрування;
- 4) знаходження закону руху точки, а також інших шуканих в задачі величин.

2.3. Диференціальні рівняння руху невіЛЬНОЇ матеріальної точки

Рух точки, на який накладено певні обмеження з боку накладених в'язей, є невольним [1]. Отже, будемо називати матеріальну точку невольною, а її рух – невольним рухом, якщо внаслідок тих чи інших обмежень вона виконує рух в строго фіксованій частині простору: по строго фіксованій лінії, площині, або поверхні.

При вивченні невольного руху точки застосовують звичайно теорему при звільненні від в'язей [1], замінюючи їх дію реакціями в'язей. В такому випадку точку можна вважати вільною, але такою, на яку діють не тільки активні сили \bar{F} , а також і реакції в'язей \bar{R} .

В даному випадку основне рівняння динаміки (1.1) у векторній формі можна записати у вигляді

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}. \quad (2.12)$$

Векторному рівнянню (2.12) при координатній формі завдання руху точки відповідають, враховуючи (2.12), рівняння

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (2.13)$$

Особливістю цих рівнянь є те, що в них реакції в'язей R_x, R_y, R_z є невідомими функціями часу. Тому розв'язати їх неможливо. В даному разі треба скласти ще три додаткових рівняння, які враховували б властивості в'язей, та їх відповідні реакції.

Тому розглянемо особливості розв'язання задач динаміки невольної точки, коли, наприклад, вона рухається по ідеальній гладкій нерухомій поверхні, по ідеально гладкій нерухомій кривій.

Рух невольної точки по ідеально гладкій нерухомій поверхні

Для вивчення руху матеріальної точки M по ідеально гладкій нерухомій поверхні під дією сили \bar{F} застосуємо наступне положення статички [1]: реакція \bar{R} абсолютно гладенької поверхні S спрямована завжди (рис. 2.3) перпендикулярно до поверхні у точці стику.

У випадку координатного способу завдання руху точки M використовуємо рівняння (2.2):

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y, \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \quad (2.14)$$

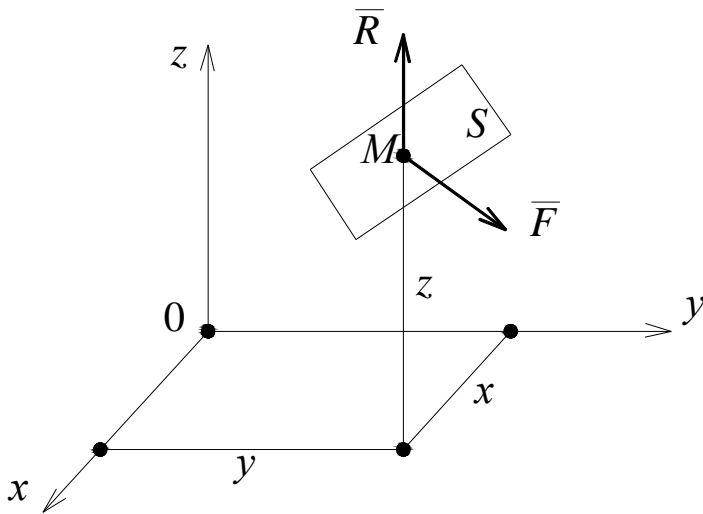


Рис. 2.3

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (2.16)$$

де λ – коефіцієнт, що відповідає умовам колінеарності векторів \overline{R} та $\overline{\text{grad} f}$.

З урахуванням (2.16) рівняння (2.14) набуває вигляду

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2.17)$$

Приєднуючи до цих рівнянь рівняння в'язі (2.15), отримаємо систему з чотирма невідомими: x, y, z і λ .

Рівняння (2.17), з урахуванням (2.15), називаються рівняннями Лагранжа першого роду.

Після знаходження невідомих x, y, z, λ , а також за формулами (2.16) проєкцій реакції в'язі, визначають її модуль

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Рух невільної точки по ідеально гладкій нерухомій кривій

Врахуємо, що криволінійна траєкторія точки M утворюється внаслідок перетину двох поверхонь (рис. 2.4):

$$f_1(x, y, z) = 0; \quad f_2(x, y, z) = 0. \quad (2.18)$$

Тут координати точки $M(x, y, z)$ повинні задовольняти рівнянню поверхні S :

$$f(x, y, z) = 0. \quad (2.15)$$

Додатково використаємо влас

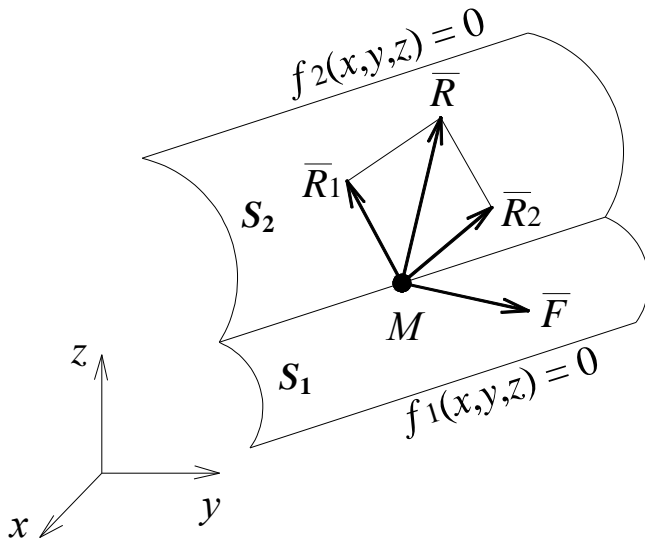


Рис. 2.4

Приєднаємо до рівнянь (2.20) два рівняння в'язей (поверхонь) та умови ідеальності в'язей (колінеарності векторів \bar{R}_1 і $\overline{grad}f_1$ [3]) отримаємо дев'ять рівнянь з дев'ятьма невідомими. З цих рівнянь виключимо проекції в'язей, використавши доданки Лагранжа λ_1 та λ_2 :

$$F_{1x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}; \quad F_{1y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}; \quad F_{1z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z};$$

$$F_{2x} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \quad F_{2y} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \quad F_{2z} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

В результаті рівняння (21) наберуть вигляду

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y};$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \quad (2.21)$$

Система рівнянь (2.21) разом з рівняннями в'язей (2.18) утворює систему п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$.

В цьому випадку в рівняннях (2.14) реакцію \bar{R} слід розглядати як суму реакцій:

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2, \quad (2.19)$$

де \bar{R}_1, \bar{R}_2 – реакції поверхонь S_1 і S_2 .

Тому диференційні рівняння:

$$m\ddot{x} = F_x +$$

2.4. Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки

В класичній механіці диференціальні рівняння (2.1), (2.2), (2.3) і (2.12) описують абсолютний рух вільної або невольної матеріальної точки незмінної маси в інерціальній нерухомій системі координат. Однак на практиці часто виникає необхідність дослідити рух матеріальної точки відносно довільної неінерціальної системи координат, тобто визначення диференціальних рівнянь відносного руху точки в системі координат, що зв'язана з тілом, котре виконує в загальному випадку складний рух.

Тому представимо абсолютний рух точки сукупністю відносного та переносного рухів. При цьому, відповідно до теореми про додавання прискорень (теореми Коріоліса), абсолютне прискорення точки \bar{a}_a дорівнює векторній сумі відносного \bar{a}_r , переносного \bar{a}_e прискорень та прискорення Коріоліса \bar{a}_c [2]:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (2.22)$$

Уявимо далі інерційну систему координат $Oxyz$ (рис. 2.5), яку вважатиме нерухомою. Відносно неї рухається система координат $O_1x_1y_1z_1$, зв'язана з деяким несучим тілом. Розглянемо рух матеріальної точки M масою m , на яку діють активна сила \bar{F} і реакція в'язі \bar{R} з боку несучого тіла. Рух цієї точки відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ є абсолютним, а відносно рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ – відносним. Характер переносного руху точки встановлюється при цьому рухом рухомої системи координат відносно нерухомої.

Підставимо далі (2.22) в диференціальне рівняння руху (2.12) невольної матеріальної точки:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c) = \bar{F} + \bar{R},$$

звідки одержимо

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c, \quad (2.23)$$

де $\bar{\Phi}_e = -ma_c$, $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ – відповідно переносна і коріолісова сила інерції.

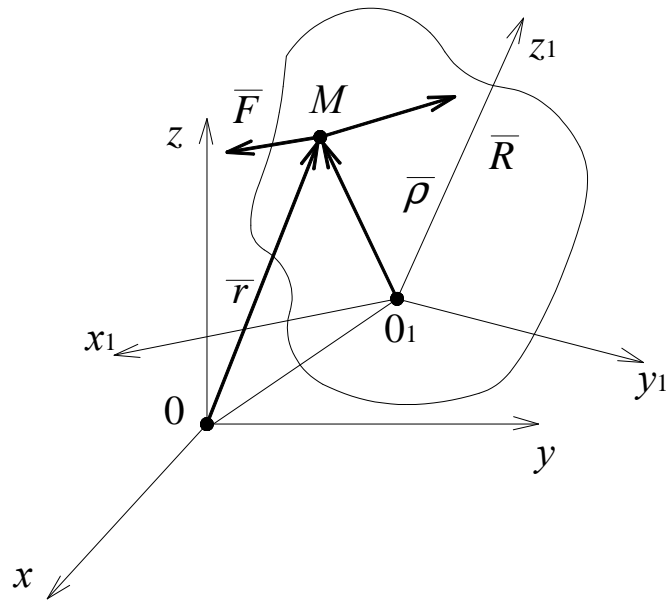


Рис. 2.5

Рівняння (2.23) називається *основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки*. На відміну від звичайних сил (наприклад, сили ваги) переносна $\bar{\Phi}_e$ і коріолісова $\bar{\Phi}_c$ сили інерції залежать від вибору неінерціальної системи координат $O_1x_1y_1z_1$, її розташування на несучому тілі. Їх прикладають до точки фіктивно, виключно за для моделювання рівняння (2.23) у формі другого закону Ньютона.

Розглянемо окремі випадки відносного руху точки.

Якщо матеріальна точка відносно рухомої системі координат $O_1x_1y_1z_1$ рухається рівномірно та прямолінійно, то відносна швидкість $\bar{V}_r = const$, а відносне прискорення $\bar{a}_r = 0$. Тому за (2.23) матиме

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c = 0.$$

Якщо матеріальна точка перебуває у стані спокою відносно рухомої системи координат, то її відносні швидкості і прискорення та коріолісове прискорення дорівнюють нулю. Отже дістанемо рівність

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0,$$

що виражає умову відносної рівноваги матеріальної точки.

Якщо рухома система координат здійснює відносно інерціальної системи координат поступальний, рівномірний та прямолінійний рух, то у цьому разі переносна та коріолісова сили інерції дорівнюють нулю. Тоді основне рівняння динаміки відносно руху набере вигляду

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R}. \quad (2.24)$$

Це рівняння за формою збігається з рівнянням (2.12) для невідільної точки. Тобто прискорення точки відносно рухомої і інерційної систем координат співпадають. Отже, другий закон Ньютона справедливий у даному випадку і для відносного руху матеріальної точки. Тому рухома система координат $O_1x_1y_1z_1$, що рухається поступально, рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної нерухомої системи координат $Oxyz$ є також інерціальною. Ця особливість виражає принцип відносності класичної механіки, який стверджує: за однакових початкових умов механічні явища в різних інерціальних системах координат відбуваються однаково.

Приклад 2.1. Важка точка M піднімається по шорсткій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. У початковий момент швидкість точки дорівнювала 15 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$. Який шлях пройде точка до зупинки? За який час точка пройде цей шлях?

Розв'язання

Нарисуємо ділянку руху AB і зобразимо матеріальну точку M в довільному положенні (рис. 2.6).

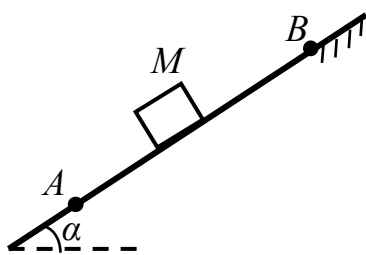


Рис. 2.6

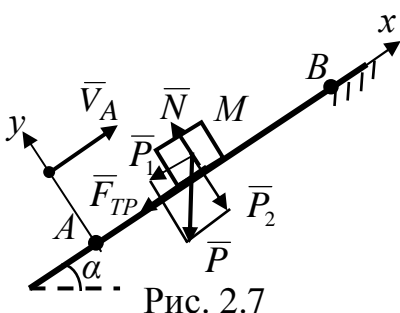


Рис. 2.7

Виберемо систему координат Axu , помістивши її початок у початковій точці A ділянки AB і спрямував вісь Ax уздовж прямої AB у бік руху (рис. 2.7). При такому виборі системи координат початкові умови будуть наступними:

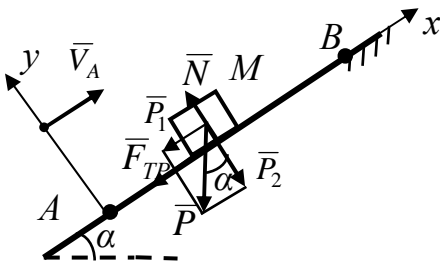
$$x_0 = 0, \quad V_{0x} = V_{Ax} = V_A.$$

В кінцевій точці B ділянки (1.6):

$$x_B = AB, \quad V_{Bx} = V_B = 0,$$

де $V_B = 0$, тому що точка M за умовою задачі зупиняється в кінцевій точці B ділянки.

Покажемо швидкість \bar{V}_A на схемі руху. Швидкість $V_B = 0$, тому на схемі руху її не показано.



Покажемо сили і реакції в'язей (рис. 2.8).

На точку M будуть діяти: сила ваги \bar{P} , яку розкладемо на координатні складові \bar{P}_1 ($P_1 = P \cdot \sin \alpha$) і \bar{P}_2 ($P_2 = P \cdot \cos \alpha$), нормальна реакція поверхні \bar{N} ; сила тертя ковзання \bar{F}_{TP} ($F_{TP} = fN$) спрямована убік, протилежний руху точки.

Рис. 2.8

Складемо диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P_1 - F_{TP}; \\ 0 = N - P_2 \Rightarrow N = P_2 = P \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.25)$$

Спочатку виразимо силу ваги $P = mg$ через масу точки m і прискорення вільного падіння g , а силу тертя визначимо, скориставшись другим рівнянням системи (2.25):

$$F_{TP} = fN = fP \cos \alpha = fmg \cos \alpha.$$

Тоді перше рівняння (2.25) набуде вигляду

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

Скоротимо обидві частини рівняння на m :

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Для інтегрування отриманого диференціального рівняння замінимо \ddot{x} на $\frac{d\dot{x}}{dt}$ і розділимо змінні:

$$d\dot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot dt.$$

Візьмемо невизначені інтеграли від обох частин рівняння:

$$\int d\dot{x} = \int -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot dt.$$

Вираз $-g(\sin \alpha + f \cos \alpha) = const$, тому його можна винести з-під знака інтеграла. У результаті одержимо

$$\dot{x} = V_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1, \quad (2.26)$$

де C_1 - постійна інтегрування.

Представивши $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ і зробивши аналогічні дії, одержимо

$$x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad (2.27)$$

де C_2 - постійна інтегрування.

Підставимо початкові умови ($V_{ox} = V_A$, $x_0 = 0$) у вирази (2.26) і (2.27):

$$\begin{cases} V_A = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 \\ 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2. \end{cases} \quad (2.28)$$

Розв'язавши рівняння (2.28), визначимо постійні інтегрування:

$$C_1 = V_A; \quad (2.29)$$

$$C_2 = 0.$$

Підставивши (2.29) у (2.26) і (2.27), одержимо:

$$\dot{x} = V_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot t + V_A; \quad (2.30)$$

$$x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + V_A t.$$

Підставимо далі умови в кінцевій точці B ділянки ($V_B = 0$, $x_B = AB$) у вираз (2.30):

$$\begin{cases} 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \tau + V_A \\ AB = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau. \end{cases} \quad (2.31)$$

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (2.31), визначимо шукані величини τ й AB .

З першого рівняння (2.31)

$$\tau = \frac{V_A}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{15}{10 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,87)} = \frac{15}{5,87} = 2,5 \text{ (с)}.$$

З другого рівняння (2.30):

$$\begin{aligned} AB &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau = -5,87 \cdot \frac{15^2}{2 \cdot 5,87^2} + 15 \cdot \frac{15}{5,87} = \\ &= \frac{15^2}{5,87} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{15^2}{5,87 \cdot 2} = \frac{225}{11,74} = 20 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Відповідь: Точка до зупинки пройде шлях $AB = 20$ м за час $\tau = 2,5$ с.

Питання для самоконтролю

1. Які рівняння називаються диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
2. Які рівняння називаються натуральними рівняннями руху вільної матеріальної точки?
3. Сформулюйте дві основні задачі динаміки матеріальної точки.
4. Яка різниця між диференціальними рівняннями вільної і невільної матеріальної точки?
5. Як зміниться диференціальне рівняння руху невільної матеріальної точки при її складному русі?

3. СИСТЕМА МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

3.1. Основні поняття

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємозв'язані. За третім законом Ньютона сили взаємодії точок механічної системи між собою попарно рівні й протилежно напрямлені. Ця взаємодія є причиною того, що рух і положення кожної точки системи залежить від руху й положення інших точок.

Розрізняють *вільні й невільні механічні системи*. Якщо немає перешкод для того, щоб точки системи займали довільні положення в просторі й мали довільні швидкості, то таку систему називають вільною. Механічну систему називають невільною, якщо її точки через певні обмеження не можуть займати довільні положення в просторі й мати будь-які швидкості.

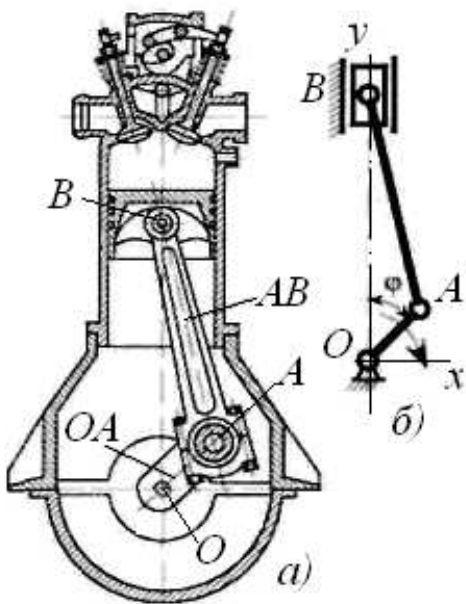


Рис. 3.1

Класичним прикладом вільної механічної системи є сонячна система, в якій всі тіла вільно рухаються і які зв'язані силами взаємного тяжіння, причому Сонце і планети розглядаються як матеріальні точки. Це пояснюється тим, що відстані між Сонцем і планетами дуже великі порівняно з їхніми розмірами.

Прикладом невільної механічної системи може бути будь-яка машина, механізм або конструкція, в яких тіла зв'язані стержнями, шарнірами й ін.. Так, у кривошипно-шатунному механізмі (двигун внутрішнього згорання), що показаний на рис. 3.1,а, кривошип OA обертається навколо точки O , а палець шарніра A рухається по дузі кола радіуса OA . Повзун B рухається по прямій OB , а шатун AB – в площині xOy (рис. 3.1,б). Обмеження рухів зумовлене фізичною взаємодією між тілами системи й

іншими тілами, які можуть належати чи не належати до даної системи. У технічних задачах зустрічаються в основному невільні системи.

Тверде тіло це теж незмінна механічна система, маса якої розподілена по усьому об'єму тіла.

У динаміці, так само як і в статиці, сили, які прикладені до точок системи можуть поділятися так:

- 1) *сили внутрішні і зовнішні;*
- 2) *активні сили і реакції в'язей.*

Сили внутрішні і зовнішні.

Нагадаємо, що *внутрішніми* називаються сили взаємодії між матеріальними точками однієї й тієї самої системи.

Сили, які діють на точки системи при взаємодії їх з тілами, що не належать до складу системи, називаються *зовнішніми*.

Внутрішні сили будемо позначати верхнім індексом „*i*”, а зовнішні сили індексом „*e*” (відповідно перші літери від французьких слів: *interieur* – внутрішній і *exterieur* – зовнішній): \bar{F}^i – внутрішня сила, \bar{F}^e – зовнішня сила.

Слід зазначити, що введені класифікації сил є відносними. Так, залежно від того, що ми приймаємо за систему, одна й та сама сила може бути як внутрішньою, так і зовнішньою.

Звернемося до такого прикладу. Трамвай складається з двох вагонів. Внутрішніми силами тут є сили зчеплення між вагонами, обертаючий момент двигуна й ін., зовнішніми - сили ваги, реакції рейок, сили опору повітря. Якщо в розглядувану систему ввести рейки, то реакції рейок на колеса будуть внутрішніми силами. Для останньої системи к зовнішнім силам необхідно додати реакції шпал на рейки і вагу рейок.

Активні сили і реакції в'язей.

За другою класифікацією, сили поділяють на активні та реакції в'язей.

Активні або задані сили – це сили, які відомі і які не залежать від в'язей. Реакціями в'язей називають сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок або на окремі її точки [1].

Реакції в'язей, на відміну від активних сил є невідомими величинами, і в загальному випадку залежать від закону руху механічної системи. Зазначимо, що реакції в'язей уводяться на основі аксіоми статички про звільнення від в'язей.

Ця класифікація застосовується в разі невідільної системи матеріальних точок.

Розробка методів визначення реакцій в'язей є однією із задач динаміки невідільної системи. Таким чином, за допомогою аксіоми про звільнення від в'язей невідільна система перетворюється у вільну, але на яку поряд з активними силами діють реакції в'язей.

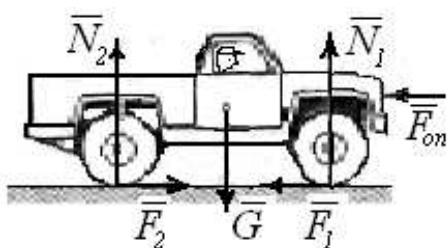


Рис. 3.2

Для ілюстрації введених понять і умовності класифікації сил розглянемо, наприклад, сили, що прикладені до автомобіля (або трамвая), який рухається по горизонтальній дорозі (рис. 3.2). На автомобіль діє сила ваги \bar{G} ,

яка є зовнішньою силою, оскільки вона викликана реакцією дороги, тобто тіла, що не входить до даної матеріальної системи (автомобіля). Одночасно ця сила є активною силою, оскільки вона не залежить від в'язей. До активних зовнішніх сил відноситься також аеродинамічна сила опору повітря \bar{F}_{on} . Вона теж не залежить від в'язей і зумовлена опором оточуючого середовища.

Застосуємо тепер принцип звільнення від в'язей і замінимо дію в'язи (дороги) її реакціями $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2$. Перші дві сили \bar{N}_1 і \bar{N}_2 є рівнодійними нормальних складових реакцій дороги до передніх і задніх коліс, а сили \bar{F}_1, \bar{F}_2 – рівнодійні сил тертя, які викликані обертанням ведучих задніх і ведених передніх коліс [1]. Сили $\bar{G}, \bar{F}_{on}, \bar{N}_1, \bar{N}_2$ і \bar{F}_1, \bar{F}_2 – зовнішні, оскільки вони зумовлені дією дороги, Землі і повітря, що в систему не входять.

Сила тиску газів на поршні двигуна, сили тиску поршнів на шатуни й шатунів на кривошипи колінчастого вала, сили тертя на осях коліс, тощо - це все внутрішні сили системи.

3.2. Центр мас системи

Масою системи називається сума мас точок, які складають систему:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k, \quad (3.1)$$

де m_k – маса матеріальної точки за номером k , а n – число точок системи.

Центром мас або центром інерції системи матеріальних точок називається геометрична точка C , радіус-вектор \bar{r}_C якої визначається рівністю:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k, \quad (3.2)$$

тобто точка, положення якої визначається координатами

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k. \quad (3.3)$$

Тут \bar{r}_k, x_k, y_k, z_k – відповідно радіус-вектор і координати матеріальної точки за номером k .

Як бачимо з формул (3.3), координати центра мас залежать тільки від розподілу мас у системі. У випадку суцільного середовища, наприклад, абсолютно твердого тіла, формули (3.2), (3.3) набувають вигляду

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} \bar{r} dm, \\ x_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} x dm, \quad y_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} y dm, \quad z_C = \frac{1}{M} \int_{(M)} z dm, \quad (3.4)$$

де \bar{r}, x, y, z – відповідно радіус-вектор і координати частинки тіла з масою dm .

Геометрично центр мас системи збігається з його центром ваги. Дійсно, якщо помножити чисельник й знаменник формули (3.2) на модуль прискорення сили ваги g (прискорення вільного падіння тіла), то одержимо вираз, який збігається з рівнянням для визначення центра ваги:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{gM} \sum_{k=1}^n g m_k r_k = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n p_k r_k,$$

де $P = mg$, $p_k = m_k g$ – відповідно вага системи й k -ї точки.

Тобто, при визначенні центра мас можна використовувати способи [1], які встановлені для визначення центра ваги (спосіб симетрії, спосіб розбиття й ін.).

Поняття центра мас є більш загальним ніж поняття центра ваги – поняття центра ваги пов'язане з припущенням про однорідність поля сил ваги поблизу поверхні Землі, а поняття центра мас не залежить від будь-яких умов.

Зауважимо, що положення центра мас в твердому тілі чи незмінній системі є незмінним і ця точка не залежить від вибору системи координат і від закону її руху. Якщо ж система складається з точок, що рухаються одна відносно інших, то положення центра мас системи відносно її точок може змінюватись.

3.3. Властивості внутрішніх сил

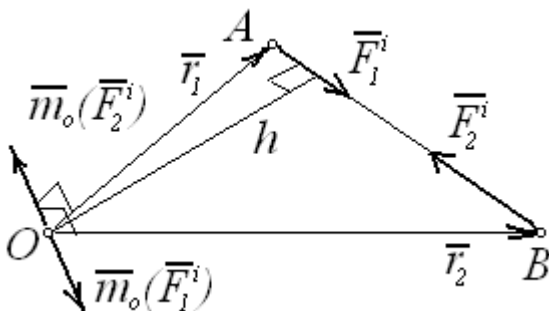


Рис. 3.3

Внутрішні сили, які діють на точки механічної системи, у систему входять попарно. Отже, якщо точка A діє на точку B з силою \bar{F}_1^i , то точка B діє на точку A з силою \bar{F}_2^i і ці сили рівні і протилежно напрямлені (рис. 3.3):

$$\bar{F}_1^i = -\bar{F}_2^i. \quad (3.5)$$

З цієї рівності одержимо такі властивості внутрішніх сил:

1. *геометрична сума усіх внутрішніх сил механічної системи (головний*

вектор внутрішніх сил системи $\bar{F}_0^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i$) дорівнює нулю;

2. *геометрична сума моментів внутрішніх сил механічної системи відносно будь-якої точки (головний момент внутрішніх сил системи*

$$\bar{M}_o^i = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{F}_k^i) \text{ дорівнює нулю.}$$

Дійсно, для системи з двох точок (рис. 3.3) обчислимо головний вектор і головний момент внутрішніх сил, що діють на точки A і B :

$$\bar{F}_0^i = \bar{F}_1^i + \bar{F}_2^i = 0, \quad \bar{M}_o^i = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1^i + \bar{r}_2 \times \bar{F}_2^i = 0.$$

Тут враховано, що виконується рівність (3.5) і ці сили мають відносно будь-якої точки O однакове плече h .

Отже, тому, що внутрішні сили входять в систему попарно, то маємо для будь-якої системи:

$$\bar{F}_0^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0, \quad (3.6)$$

$$\bar{M}_o^i = \sum_{k=1}^n m_o (\bar{F}_k^i) = 0. \quad (3.7)$$

Властивості внутрішніх сил доведені.

Слід зазначити, що умови (3.6), (3.7) не можна розглядати як достатні умови рівноваги внутрішніх сил. При розгляді руху змінюваної системи матеріальних точок питання про рівновагу внутрішніх сил не має фізичного змісту, оскільки сили взаємодії прикладені до різних тіл і до них не можна застосовувати першу аксіому [1] статички про рівновагу двох сил, хоча внутрішні сили діють попарно, мають загальну лінію дії, рівні за модулем і протилежно напрямлені.

Як показано в статичці, внутрішні сили врівноважуються або утворюють нульову систему лише тоді, коли вони прикладені до абсолютно твердого тіла.

3.4. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок

Розглянемо систему n матеріальних точок. Застосуємо аксіому статички про звільнення від в'язей і зобразимо реакції в'язей [1]. Позначимо \bar{F}_k^e і \bar{F}_k^i рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до k -ї точки. Кожну точку можна вважати вільною і для довільної точки матеріальної системи рівняння руху має вигляд:

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \quad (k= 1,2,\dots n), \quad (3.8)$$

де $m_k, \bar{a}_k = \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}$, \bar{r}_k – відповідно маса, прискорення і радіус-вектор точки за номером k .

Систему n диференціальних рівнянь другого порядку (3.8) називають диференціальними рівняннями руху матеріальної системи у векторній формі.

Проектуючи (3.8) на нерухомі координатні осі, дістанемо систему диференціальних рівнянь другого порядку в координатній формі:

$$\left. \begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= F_{kx}^e + F_{kx}^i; \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= F_{ky}^e + F_{ky}^i; \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= F_{kz}^e + F_{kz}^i. \end{aligned} \right\} (k= 1,2,\dots n) \quad (3.9)$$

Тут x_k, y_k, z_k – координати матеріальної точки за номером k .

При інтегруванні системи рівнянь (3.9) одержимо $3n$ сталих інтегрування, які визначаються з початкових умов руху для кожної точки. Знаходження невідомих функцій x_k, y_k, z_k із системи рівнянь (3.9), загалом, пов'язане зі значними, а інколи й нездоланими математичними труднощами. Це обумовлено тим, що в ці рівняння можуть входити невідомі внутрішні сили, які попередньо потрібно визначити. Крім того, складності розв'язання системи рівнянь можуть виникати через її високий порядок і взаємозв'язок окремих рівнянь системи, бо сили, що входять у ці рівняння, можуть залежати від координат не тільки однієї матеріальної точки системи.

Подолати ці труднощі допомагають загальні теореми динаміки (див. розділ 4.1), які дають можливість одержати залежності між різними характеристиками руху точок системи, не інтегруючи диференціальні рівняння (3.9).

Приклад 3.1. Два тіла вагою P і Q зв'язані тросом, перекинутим через блок (рис. 3.4). Нехтуючи силами тертя, а також масою троса і блока, знайти прискорення руху тіл і натяг троса.

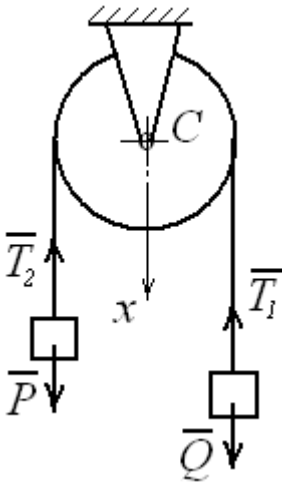


Рис. 3.4

Розв'язання. Система складається із двох матеріальних точок (тіла системи рухаються поступально), які рухаються вертикально. Отже, маємо два диференціальних рівняння руху системи в проекціях на вісь Cx . Приймаємо, що вантаж Q рухається вниз з прискоренням \ddot{x}_1 , тоді вантаж P буде рухатися вгору з прискоренням $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$. Вважаємо обидва вантажі вільними й зображуємо реакції троса \bar{T}_1 і \bar{T}_2 . Складаємо диференціальні рівняння руху:

$$m_1 \ddot{x}_1 = Q - T_1; \quad m_2 \ddot{x}_2 = P - T_2.$$

Урахуємо, що $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$, $m_1 = Q/g$, $m_2 = P/g$, $T_1 = T_2 = T$.

Тоді дістанемо: $\frac{Q}{g} \ddot{x}_1 = Q - T$, $-\frac{P}{g} \ddot{x}_1 = P - T$.

З цих рівнянь знаходимо $\ddot{x}_1 = \frac{Q-P}{Q+P}g$ і $T = 2 \frac{QP}{Q+P} = 2 \frac{P}{1+P/Q}$.

Із цього розв'язку видно, що вантаж Q рухається зі сталим прискоренням, яке напрямлено вниз, якщо $Q > P$, або вгору, якщо $Q < P$. При $Q = P$ вантажі знаходяться в стані спокою, або рухаються рівномірно. Зауважимо, що натяг троса при $Q \neq P$ не співпадає з вагою вантажу Q або P .

3.5. Теорема про рух центра мас

Теорема. Центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил.

Доведення. Нехай система складається з n матеріальних точок, маси яких позначимо m_k ($k= 1, 2, \dots, n$). Звільнимо систему від в'язей і прикладемо до її точок сили, що дорівнюють реакціям в'язей. Позначимо \bar{F}_k^e і \bar{F}_k^i рівнодійні внутрішніх і зовнішніх сил, що прикладені до точки за номером k .

Рівняння руху системи (3.8) мають вигляд

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i \quad (k= 1, 2, \dots, n).$$

Склавши ліві та праві частини цих рівнянь, одержимо

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i. \quad (3.10)$$

З формули (3.2) маємо

$$M \bar{r}_C = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k. \quad (3.11)$$

Урахуємо також, що згідно з формулою (3.6) головний вектор внутрішніх сил $\bar{F}_0^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i$ дорівнює нулю, а $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{F}_0^e$ – головний вектор зовнішніх сил.

В результаті для лівої частини рівняння (3.10) матимемо

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = \frac{d^2}{dt^2} M \bar{r}_C = M \bar{a}_C,$$

де M , \bar{a}_C – маса системи і прискорення центра мас.

Остаточно отримаємо:

$$M \bar{a}_C = \bar{F}_0^e. \quad (3.12)$$

Теорема доведена.

Якщо незмінна система рухається поступально, то теорема про рух центра мас дає можливість цілком визначити закон руху центра мас. Тобто, для абсолютно твердого тіла рівняння (3.12) можна розглядати як векторне диференціальне рівняння поступального руху тіла.

Векторній рівності (3.12) відповідають три диференціальні рівняння в координатній формі. Проектуючи (3.12) на осі координат, дістанемо:

$$M \ddot{x}_C = R_x^e; M \ddot{y}_C = R_y^e; M \ddot{z}_C = R_z^e, \quad (3.13)$$

Рівняння (3.12), (3.13) за своїм складом не відрізняються від відповідних рівнянь динаміки точки.

Рівняння (3.13) є також диференціальними рівняннями поступального руху абсолютно твердого тіла.

Внутрішні сили у рівняннях (3.12), (3.13) відсутні. Отже, внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас, але внутрішні сили в ряді випадків є причиною появи зовнішніх сил, прикладених до точок системи, що є рухомими. Так, внутрішні сили двигуна, що приводять в обертальний рух ведучи колеса автомобіля, викликають появу зовнішніх сил зчеплення колеса з дорогою (рис. 3.2). В результаті чого автомобіль рухається.

Із теореми випливають такі наслідки.

1. Внутрішніми силами неможливо змінити рух центра мас системи.

Отже, внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас, але внутрішні сили в ряді випадків є причиною появи зовнішніх сил, прикладених до точок системи, які можуть змінити характер руху центра мас.

2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас системи перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно.

Дійсно, якщо $\bar{F}_0^e = 0$, то із (3.12) випливає, що прискорення центра мас $\bar{a}_C = \frac{d\bar{v}_C}{dt} = 0$ або $d\bar{v}_C = 0$. Інтегруючи, одержимо

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{oC} = \overline{const}, \quad (3.14)$$

де \bar{v}_{oC} – початкова швидкість центра мас.

Якщо додатково $\bar{v}_{oC} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} = 0$, то отримаємо радіус-вектор центра мас $\bar{r}_{oC} = \overline{const}$. Тобто, центр мас не рухається.

Цей результат виражає закон збереження руху центра мас системи.

3. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил на будь-яку вісь

нерухомої системи координат дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас на цю вісь не змінюється.

Цей висновок випливає безпосередньо з рівнянь (3.13). Наприклад, якщо $\bar{F}_{0x}^e = 0$, то з (3.13) маємо $\ddot{x}_C = \frac{dv_{Cx}}{dt} = 0$. Тобто швидкість центра мас системи

$$v_{Cx} = v_{Cx}(0) = \text{const},$$

де $v_{Cx}(0)$ – проекція на вісь швидкості центра мас у початковий момент.

При $v_{Cx}(0) = 0$ дістанемо $x_C = \text{const}$.

Останнє рівняння виражає закон збереження руху проекції центра мас системи на відповідну вісь.

Тобто, якщо в початковий момент часу швидкість центра мас або її проекція на вісь дорівнює нулю, то точки системи мають можливість рухатися тільки так, щоб радіус-вектор центра мас \bar{r}_C або відповідна координата центра мас залишалися незмінними.

4. *Пара сил, що прикладена до вільного твердого тіла, не може змінити характер руху його центра мас.*

Дійсно, рівнодійна пари сил дорівнює нулю. Саме тому пара сил може спричинити лише обертання тіла навколо центра мас.

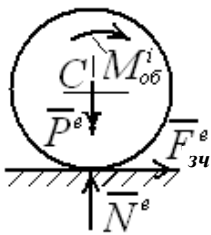
Розглянемо деякі приклади, що ілюструють використання закону збереження руху центра мас.

Реактивний рух. Теорема про рух центра мас використовується для розрахунків реактивних рухів. Газоподібні продукти горіння викидаються із сопла ракети під дією тиску внутрішніх сил, тому їх рух не може вплинути на рух центра мас всієї системи, до якої входять продукти горіння і корпус ракети. Рух продуктів згорання компенсується рухом корпусу ракети в протилежному напрямі.

Рух людини по горизонтальній площині. При русі людини по горизонтальній площині її центр ваги переміщується під дією сил тертя між підшвами її взуття й площиною. Ці сили напрямлені в бік руху людини і є для

неї зовнішніми. Вони виникають при відповідному напруженні м'язів, які є внутрішніми силами. Якби зчеплення не було, тобто площина була б абсолютно гладкою (наприклад, при ожеледі), то людина не змогла б рухатись.

Рух трамвая (автомобіля). Обертальна пара сил від двигуна $M_{об}^i$, які є внутрішніми силами для трамвая, за допомогою трансмісії намагається обертати ведучи колеса трамвая (рис. 3.5). Виникає сила зчеплення [1] колеса з рейкою $\bar{F}_{зч}^e$, яка є зовнішньою силою.



Ця зовнішня сила i є причиною руху трамвая. Зрозуміло, що коли сила зчеплення недостатня або відсутня (при змащенні рейок, ожеледі), то ведучи колеса пробуксовуватимуть і трамвай не буде рухатись.

Рис. 3.5

Приклад 3.2. На одному кінці нерухомого човна, у точці

A , стоїть людина (рис. 3.6,*a*). Нехтуючи опором води, визначити, на яку відстань s переміститься човен, коли людина перейде на інший кінець човна у точку B . Маса людини m_1 , маса човна m_2 , довжина човна $AB = l$.

Розв'язання. Система човен – людина знаходиться у стані спокою і складається з двох матеріальних точок, однією з яких є людина, а другою – човен. Уздовж прямої AB зобразимо вісь Ox , взявши за початок координат деяку точку O .

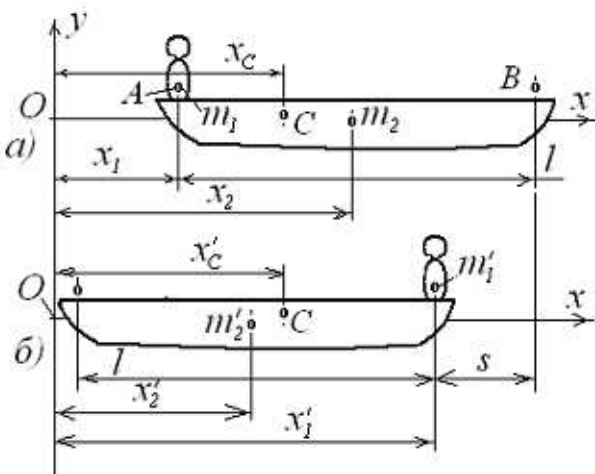


Рис. 3.6

Зовнішніми силами тут є вертикальні сили ваги людини й човна, а також реакція води (архімедова сила), які знаходяться у стані рівноваги. Крім того, початкова швидкість центра мас C системи дорівнює нулю.

Позначимо x_1 і x_2 координати центрів мас окремих тіл системи (рис. 3.6,*a*). Обчислимо координату центра мас цієї системи за формулою (3.3):

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Тому що проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь Ox нерухомої системи координат дорівнює нулю і одночасно початкова швидкість центра мас системи дорівнює нулю, то, згідно третього наслідку з теореми про рух центра мас системи, координата x_C центра мас є незмінною. Тобто, при русі людини вправо човен буде рухатися вліво, а центр мас системи залишиться в спокої (не буде рухатися вздовж осі Ox) (рис. 3.6,б). Координати центра мас людини й човна будуть в цьому разі такі:

$$x'_1 = x_1 + l - s; \quad x'_2 = x_2 - s.$$

Координата центра мас системи в новому положенні

$$x'_C = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(x_1 + l - s) + m_2(x_2 - s)}{m_1 + m_2}.$$

Тому, що повинна виконуватися умова $x_C = x'_C = const$, то маємо:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(x_1 + l - s) + m_2(x_2 - s)}{m_1 + m_2}$$

або
$$m_1 l - m_1 s - m_2 s = 0.$$

З цього рівняння обчислюємо переміщення човна

$$s = l \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Тобто переміщення човна прямо пропорційно масі людини й обернено пропорційно масі усієї системи.

3.6. Моменти інерції механічної системи (геометрія мас)

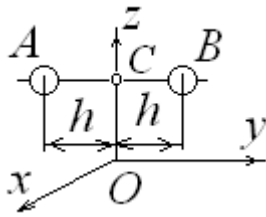


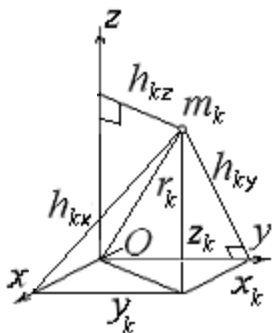
Рис. 3.7

Рух механічної системи суттєво залежить від розподілу маси в ній. Положення центра мас характеризує розподіл маси в системі не повністю. Розглянемо, наприклад, систему, що складається з двох однакових куль A і B (рис. 3.7). Центр мас C такої системи знаходиться на осі Oz . Якщо відстань h від осі z кожної з

куль змінити, то положення центра мас системи не зміниться, а розподіл мас стане іншим і це відобразиться на русі системи. Тому для повної характеристики розподілу мас вводиться ще поняття моментів інерції.

Розрізняють моменти інерції відносно осі, полюса, площини (планарні) і відцентрові.

Моментом інерції системи матеріальних точок (осьовий момент інерції), яка складається з n точок, відносно осі називають суму добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней (наприклад для осі Oz (рис. 3.8) – h_{kz}) від точок до осі:



$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kx}^2, \\ I_y &= \sum_{k=1}^n m_k h_{ky}^2, \\ I_z &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Рис. 3.8

У частинному випадку однієї матеріальної точки маємо

$$I_x = mh_x^2, \quad I_y = mh_y^2, \quad I_z = mh_z^2. \quad (3.16)$$

Отже, момент інерції системи відносно осі дорівнює сумі моментів інерції відносно цієї ж осі окремих її точок.

Момент інерції твердого тіла відносно осі визначається за формулою (3.15) для елементарних мас Δm_k або як інтеграл, що поширений на всю масу тіла:

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta m_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \Delta m_k h_{kz}^2 = \int_{(M)} h_z^2 dm, \\ I_x &= \int_{(M)} h_x^2 dm, \\ I_y &= \int_{(M)} h_y^2 dm, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

де h – відстань (з індексом відповідної осі) від осі до частинки тіла з масою dm .

Осьовий момент інерції за визначенням величина додатна, що дорівнює нулю тільки в одному частинному випадку, коли усі точки системи знаходяться на осі.

У ряді випадків для обчислення моментів інерції користуються поняттям радіуса інерції. Радіусом інерції ρ_z називають відстань, на якій від осі z треба розмістити масу m тіла, зосередивши її в одній точці, щоб ця точка мала той самий момент інерції, що й розглядуване тіло:

$$I_z = m\rho_z^2. \quad (3.18)$$

Тобто, радіус інерції знаходиться за формулою

$$\rho_z = \sqrt{I_z / m}. \quad (3.19)$$

Для обчислення осьового моменту інерції тіла його масу множать на квадрат радіуса інерції для відповідної осі, отже використовують формулу (3.18).

Осьовий момент інерції тіла – це фізична величина, що характеризує міру інертності тіла під час обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Поряд з осьовими моментами інерції розглядають *полярні* I_o (відносно полюса O), *планарні* (I_{xOy} відносно площини xOy і т. ін.) моменти інерції. Відповідно до рис. 3.8, маємо

$$I_o = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2, \quad I_{xOy} = \sum_{k=1}^n m_k z_k^2, \quad I_{xOz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2, \quad I_{yOz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2. \quad (3.20)$$

Тут r_k – відстань від k -ї матеріальної точки системи відповідно до полюса, а x_k, y_k, z_k – до заданої площини.

За визначенням полярний момент інерції I_o залежить тільки від вибору полюса і не залежить від напрямку координатних осей.

Для твердого тіла формули (3.20) мають вигляд

$$I_o = \int_{(M)} r^2 dm, \quad I_{xOy} = \int_{(M)} z^2 dm, \quad I_{xOz} = \int_{(M)} y^2 dm, \quad I_{yOz} = \int_{(M)} x^2 dm. \quad (3.21)$$

У рівняннях (3.15) і (3.21) квадрати відстань точок від початку координат (полюса) і осей (рис. 3.8) відповідно становить

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2, \quad h_{kx}^2 = y_k^2 + z_k^2, \quad h_{ky}^2 = x_k^2 + z_k^2, \quad h_{kz}^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Отже моменти інерції матеріальної системи відносно початку координат (полюса O) і координатних осей можна подати в такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} I_o &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2); \\ I_x &= \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2); \quad I_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Для твердого тіла будемо відповідно мати

$$\left. \begin{aligned} I_o &= \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) dm, \\ I_x &= \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Знайдемо залежність між полярними, осьовими й планарними моментами інерції. Складаючи окремо ліві й праві частини виразів осьових моментів інерції (3.22) і планарних (3.20), а також враховуючи значення полярного моменту інерції (3.22), дістанемо

$$\frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = I_o, \quad (3.24)$$

$$I_{xOy} + I_{xOz} + I_{yOz} = I_o. \quad (3.25)$$

Тобто, *полярний момент інерції дорівнює півсумі осьових моментів інерції і сумі планарних моментів інерції.*

Відзначимо ще деякі властивості моментів інерції відносно трьох координатних осей.

1. Суми осьових і планарних моментів інерції не залежать від орієнтації осей координат в розглядуваній точці, а є величинами інваріантними по відношенню до напрямку осей координат. Ця властивість безпосередньо випливає з рівнянь (3.24) і (3.25).

2. Момент інерції відносно будь-якої з осей координат менший суми моментів інерції відносно двох інших осей, але більший за їх різницю.

Дійсно, наприклад,

$$I_x + I_y - I_z = 2 \int_{(M)} z^2 dm \geq 0,$$

$$I_x - I_y - I_z = -2 \int_{(M)} x^2 dm \leq 0.$$

Звідси маємо:

$$\left. \begin{aligned} I_z &\leq I_x + I_y; & I_x &\leq I_y + I_z; \\ I_z &\geq I_x - I_y; & I_y &\leq I_x - I_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Тобто, не можна довільно задавати моменти інерції тіла відносно трьох взаємно перпендикулярних осей; вони мають задовольняти співвідношенням (3.26).

Моменти інерції відносно точок, осей, площин – величини додатні, оскільки вони виражаються через квадрати координат.

Для повної характеристики розподілу маси в механічній системі відносно даної системи координат вводяться ще *відцентрові моменти інерції*.

Відцентровими моментами інерції тіла називаються величини, які для матеріальної системи виражаються рівностями

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \quad I_{xz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k. \quad (3.27)$$

Для твердого тіла відповідно

$$I_{xy} = \int_{(M)} xy dm, \quad I_{xz} = \int_{(M)} xz dm, \quad I_{yz} = \int_{(M)} yz dm. \quad (3.28)$$

Відцентрові моменти інерції, як видно із співвідношень (3.27), (3.28), симетричні відносно своїх індексів:

$$I_{xy} = I_{yx}; \quad I_{xz} = I_{zx}; \quad I_{yz} = I_{zy}. \quad (3.29)$$

Відцентрові моменти інерції також не можна задавати довільно.

Дійсно, з нерівності

$$\int_{(M)} (x - y)^2 dm \geq 0$$

випливає, що
$$\int_{(M)} (x^2 + y^2) dm \geq 2 \int_{(M)} xy dm,$$

або
$$I_{xy} \leq 1/2 I_z.$$

Аналогічно
$$I_{yz} \leq 1/2 I_x; \quad I_{xz} \leq 1/2 I_y.$$

Відцентрові моменти інерції залежать від напрямку координатних осей і вибору початку координат. Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю й мати будь-який знак (плюс чи мінус).

Якщо відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, то осі називають *головними осями інерції тіла в даній точці*. Якщо ця точка додатково розміщується в центрі мас, то осі є *головними і центральними осями інерції*.

Відцентрові моменти інерції мають важливе значення при визначенні тиску на підшипники при обертанні тіла навколо нерухомих осей. Вони є характеристиками симетрії розподілу мас у системі.

3.7. Обчислення моментів інерції деяких тіл

Момент інерції однорідного тонкого стержня. Довжина стержня (рис. 3.9) l , маса m . Стержень має постійний поперечний переріз s .

Обчислимо момент інерції стержня відносно осі Oz , яка перпендикулярна до стержня. Зобразимо систему координат Oxz . Для доведення виділимо на відстані x від осі Oz елемент стержня dx .

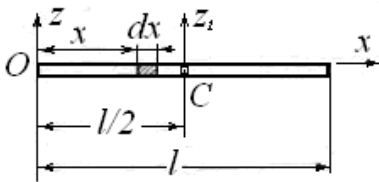


Рис. 3.9

Маса одиниці довжини стержня буде m/l , а елементарна маса довжини dx

$$dm = m dx / l.$$

Момент інерції стержня

$$I_{Oz} = \int_{(M)} x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx.$$

Інтегруючи, маємо

$$I_{Oz} = \frac{1}{3} ml^2. \quad (3.30)$$

Момент інерції однорідного циліндра. Висота циліндра h , радіус основи R , маса m . Визначимо моменти інерції циліндра відносно поздовжньої центральної осі Cz (рис. 3.10), яка проходить через центр мас C циліндра, і осей Cx , Cy .

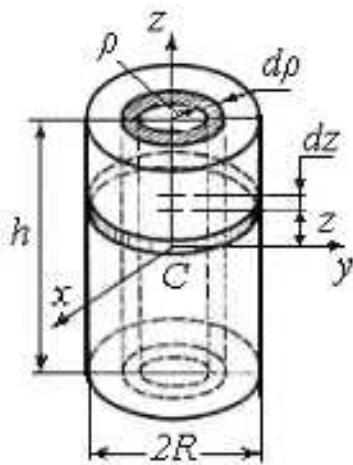


Рис. 3.10

Побудуємо циліндричну трубку, радіус якої позначимо ρ , а товщину стінки $d\rho$. За елементарну масу dm візьмемо масу цієї трубки, що визначається таким чином

$$dm = \gamma dv = \frac{m}{V} 2\pi\rho h d\rho = \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi\rho h d\rho = \frac{2m\rho d\rho}{R^2},$$

$$\text{де } \gamma = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} \text{ – густина матеріалу, } V = \pi R^2 h \text{ –}$$

об'єм циліндра, $dv = 2\pi\rho^2 h d\rho$ – об'єм трубки.

За означенням осьового моменту інерції знаходимо

$$I_z = \int_{(M)} \rho^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho.$$

Остаточно обчислюємо

$$I_z = mR^2/2. \quad (3.31)$$

Виведемо також формулу для обчислення моменту інерції циліндра відносно однієї з поперечних центральних осей, наприклад осі Cx . Оскільки осі Cx і Cy лежать у площині симетрії циліндра, то $I_x = I_y$. Маємо

$$I_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = I_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm \quad (3.32)$$

крім того,
$$I_x - I_y = \int_{(M)} x^2 dm - \int_{(M)} y^2 dm = 0,$$

або
$$\int_{(M)} x^2 dm = \int_{(M)} y^2 dm = \frac{1}{2} \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm =$$

$$= 1/2 I_z = mR^2/4. \quad (3.33)$$

Обчислимо далі інтеграл $\int_{(M)} z^2 dm$. Для цього розглянемо елемент циліндра у вигляді тонкого диска завтовшки dz , що віддалений від площини xCy на відстань z . Маса цього диска $dm = \gamma\pi R^2 dz$. Отже,

$$\int_{(M)} z^2 dm = \gamma\pi R^2 \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \gamma\pi R^2 h^2 / 12 = mh^2 / 12. \quad (3.34)$$

Підставляючи значення інтегралів (3.33) і (3.34) у (3.32), дістанемо

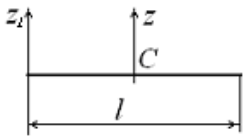
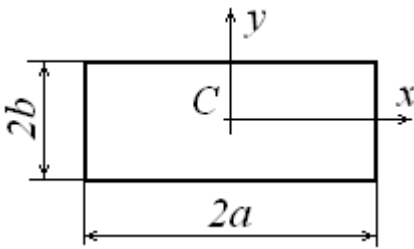
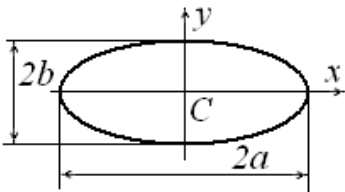
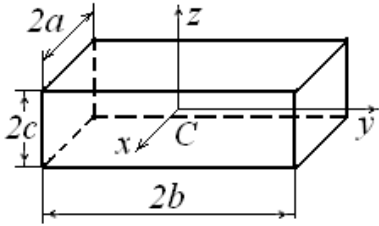
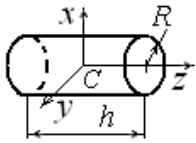
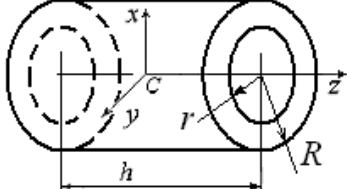
$$I_x = I_y = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right). \quad (3.35)$$

Момент інерції однорідного порожнистого циліндра. Момент інерції порожнистого циліндра зовнішнім R і внутрішнім r радіусами відносно осі Cz , яка проходить через центр мас, можна визначити як різницю моментів інерції суцільних циліндрів з радіусами R і r . Наведемо остаточний результат:

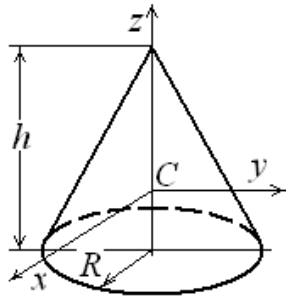
$$I_z = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2). \quad (3.36)$$

Вирази для моментів інерції інших тіл найпростішої форми наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Моменти інерції тіл найпростішої форми

Тіло	Момент інерції
<p style="text-align: center;">Стержень</p> 	$I_{z1} = \frac{1}{3}ml^2, \quad I_{Cz} = \frac{1}{12}ml^2$
<p style="text-align: center;">Прямокутник</p> 	$I_x = \frac{1}{3}mb^2, \quad I_y = \frac{1}{3}ma^2,$ $I_{Cz} = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$
<p style="text-align: center;">Еліпс</p> 	$I_x = \frac{1}{4}mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4}ma^2,$ $I_{Cz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$
<p style="text-align: center;">Прямокутний паралелепіпед</p> 	$I_x = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{1}{3}m(a^2 + c^2),$ $I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$
<p>Прямий коловий циліндр</p> 	$I_x = I_y = \frac{1}{12}m(h^2 + 3R^2), \quad I_z = \frac{1}{2}mR^2$
<p>Прямий коловий порожнистий циліндр</p> 	$I_x = I_y = \frac{1}{12}m(h^2 + 3[R^2 + r^2]),$ $I_z = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$

Прямий коловий конус



$$I_x = I_y = \frac{3}{20} m \left(\frac{1}{4} h^2 + R^2 \right), \quad I_z = \frac{3}{10} m R^2$$

3.8. Теорема Гюйгенса-Штейнера про моменти інерції

Моменти інерції системи матеріальних точок (твердого тіла) відносно різних осей будуть взагалі різними. Доведемо теореми, як, знаючи момент інерції тіла відносно будь-якої осі, що проходить через центр мас, знайти момент інерції відносно паралельній осі.

Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей (теорема Гюйгенса-Штейнера). Момент інерції системи матеріальних точок або твердого тіла відносно деякої осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас, складеному з добутком маси системи (тіла) на квадрат відстані між осями.

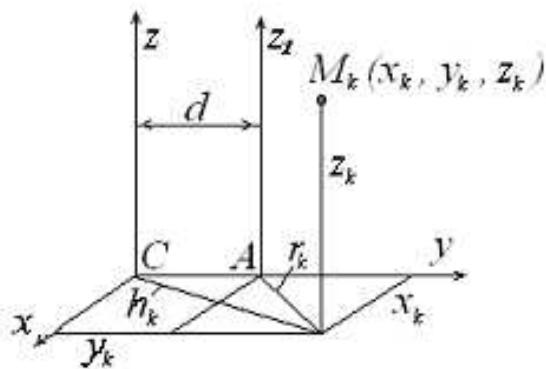


Рис. 3.11

Доведення. Нехай центр мас C є початком системи координат $Cx_0y_0z_0$ (рис. 3.11). Тут вісь Az_1 паралельна центральній осі Cz . Розглянемо довільну точку системи $M_k(x_k, y_k, z_k)$, маса якої m_k , відстань якої від осі Cz дорівнює h_k , а від осі Az_1 – r_k . Відстань між осями дорівнює d . Обчислимо момент інерції системи

відносно осі Az_1 :

$$I_{z_1} = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k [(y_k - d)^2 + x_k^2] =$$

$$= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) + d^2 \sum_{k=1}^n m_k - 2d \sum_{k=1}^n m_k y_k . \quad (3.37)$$

Тут $r_k^2 = (y_k - d)^2 + x_k^2$; $\sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_z$ – момент інерції системи

відносно осі C_z (див. (3.22)); $\sum_{k=1}^n m_k = M$ – маса системи; крім того, згідно

формули (3.3) маємо $\sum_{k=1}^n m_k y_k = M y_C = 0$, тому, що $y_C = 0$ в системі координат

C_{xyz} .

Тобто:

$$I_{z_1} = I_z + M d^2 , \quad (3.38)$$

що і треба було довести.

Із (3.38) також видно, що вісь, яка проходить через центр мас (інерції), є віссю найменшого моменту інерції серед усіх паралельних осей.

Приклад 3.3. Обчислити момент інерції тонкого стержня відносно осі C_{z_1} , яка перпендикулярна до стержня (рис. 3.9).

Розв'язання. Момент інерції стержня відносно осі O_z див. (3.30) дорівнює:

$$I_{O_z} = \frac{1}{3} m l^2 .$$

Використаємо, урахувавши індекси і позначення рис. 3.9, формулу (3.38) теореми Гюйгенса – Штейнера відносно паралельних осей:

$$I_{O_z} = I_{C_{z_1}} + m(0,5l)^2 .$$

Звідки знаходимо момент інерції стержня відносно осі C_{z_1} :

$$I_{C_{z_1}} = I_{O_z} - m(0,5l)^2 = \frac{1}{3} m l^2 - \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{12} m l^2 .$$

Теорема про відцентрові моменти інерції відносно двох паралельних осей.

Відцентрові моменти інерції тіла відносно довільних осей координат дорівнюють відцентровим моментам інерції відносно центральних осей координат, які паралельні осям заданої системи координат, складеними із

добутком маси тіла на відповідні координати центра мас у заданій системі координат.

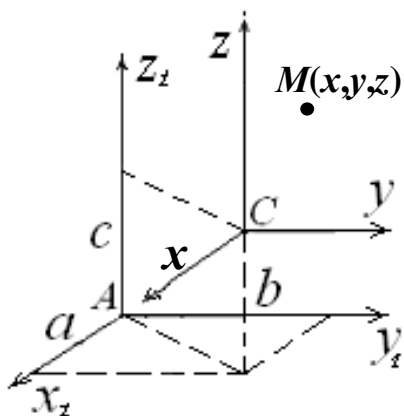


Рис. 3.12

Доведення. Зобразимо дві системи координат $Ax_1y_1z_1$ і $Cxyz$ осі яких паралельні, де C – центр мас тіла (рис. 3.12). Позначимо a, b, c координати точки C у системі координат $Ax_1y_1z_1$. Тоді маємо для довільної точки, координати якої в системі координат $Cxyz$ відповідно x, y, z :

$$x_1 = a + x, \quad y_1 = b + y, \quad z_1 = c + z.$$

Згідно з формулою (3.28) маємо:

$$I_{x_1y_1} = \int_{(M)} x_1 y_1 dm = \int_{(M)} (a + x)(b + y) dm$$

або

$$I_{x_1y_1} = ab \int_{(M)} dm + a \int_{(M)} y dm + b \int_{(M)} x dm + \int_{(M)} xy dm.$$

Перший інтеграл дорівнює масі M тіла, другий і третій – дорівнюють нулю (згідно формулам (3.4) – $\int_{(M)} y dm = My_C$, $\int_{(M)} x dm = Mx_C$, де $x_C = 0$ и $y_C = 0$).

Останній інтеграл дорівнює I_{xy} . Тобто остаточно маємо (друга й третя формули отримані відповідно):

$$I_{x_1y_1} = Mab + I_{xy}, \quad I_{y_1z_1} = Mbc + I_{yz}, \quad I_{x_1z_1} = Mac + I_{xz}. \quad (3.39)$$

Теорема доведена.

3.9. Момент інерції відносно довільної осі, що проходить через дану точку

Установимо залежність між моментом інерції твердого тіла відносно довільної осі OL , що проходить через початок координат, і моментами інерції відносно координатних осей $Oxyz$ (рис. 3.13).

Позначимо кути між віссю OL і осями x, y, z відповідно α, β, γ (на рисунку не зображені).

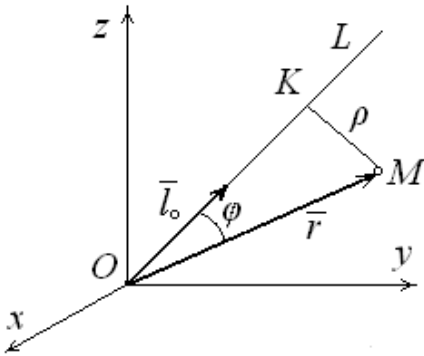


Рис. 3.13

Виберемо будь-яку точку тіла $M(x, y, z)$, маса якої dm , опустимо з неї перпендикуляр MK на пряму OL . Момент інерції тіла відносно осі OL визначається рівністю

$$I_L = \int_{(M)} \rho^2 dm, \quad (3.40)$$

де ρ – відстань MK .

Із трикутника OMK знаходимо

$$\rho = r \sin \varphi = |\bar{l}_o \times \bar{r}|,$$

де \bar{l}_o – одиничний вектор осі OL . Тут враховано, що векторний добуток $|\bar{l}_o \times \bar{r}| = r \sin \varphi$.

$$\begin{aligned} \text{Маємо} \quad \bar{l}_o \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (z \cos \beta - y \cos \gamma) \bar{i} + (x \cos \gamma - z \cos \alpha) \bar{j} + (y \cos \alpha - x \cos \beta) \bar{k}, \end{aligned}$$

де α, β, γ – напрямляючі косінуси вектора \bar{l}_o .

Звідси, враховуючи [1], що $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$, знаходимо

$$\rho^2 = |\bar{l}_o \times \bar{r}|^2 = (z \cos \beta - y \cos \gamma)^2 + (x \cos \gamma - z \cos \alpha)^2 + (y \cos \alpha - x \cos \beta)^2$$

$$\begin{aligned} \text{або} \quad \rho^2 &= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - \\ &\quad - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha. \end{aligned}$$

З урахуванням (3.31) одержимо

$$\begin{aligned} I_L &= \cos^2 \alpha \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int_{(M)} (z^2 + x^2) dm + \cos^2 \gamma \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm - \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \int_{(M)} xy dm - 2 \cos \beta \cos \gamma \int_{(M)} yz dm - 2 \cos \gamma \cos \alpha \int_{(M)} zx dm. \end{aligned}$$

Ураховуючи формули моментів інерції (3.23) і (3.28), остаточно

$$I_L = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (3.41)$$

Формула (3.41) дозволяє обчислити момент інерції тіла відносно будь-якої осі, проведеної через початок координат, якщо відомі моменти інерції відносно осей координат I_x, I_y, I_z і відцентрові моменти інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} .

Використовуючи тепер комбінацію теорем Гюйгенса – Штейнера й вираз (3.41) можна обчислити моменти інерції відносно довільної осі.

Осьові і відцентрові моменти інерції часто позначаються першими літерами латинського алфавіту:

$$I_x = A; I_y = B; I_z = C; I_{yz} = D; I_{zx} = E; I_{xy} = F. \quad (3.42)$$

Матриця, складена з осьових моментів інерції I_x, I_y, I_z і взятих з оберненими знаками відцентрових моментів інерції I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} , називається *тензором інерції* в даній точці:

$$I = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix}. \quad (3.43)$$

Тензор інерції характеризує розподіл маси тіла відносно даної точки. Компоненти тензора інерції залежать не тільки від вибору точки, але й від орієнтації осей координат. У силу симетрії відцентрових моментів інерції цей тензор має шість складових.

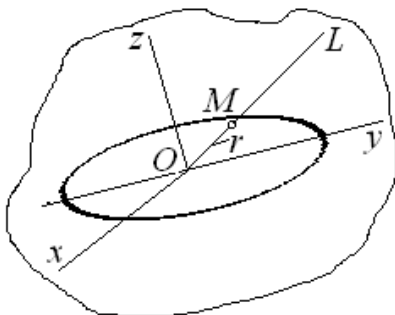


Рис. 3.14

3.10. Еліпсоїд інерції

Виберемо в тілі точку O і проведемо ось OL (рис. 3.14). Нехай момент інерції тіла відносно цієї осі дорівнює I . Розглянемо як буде змінюватись момент інерції I при зміні напрямку осі OL . Позначимо на осі OL точку M , що розміщена на

відстані

$$OM = r = 1/\sqrt{I} \quad (3.44)$$

від початку координат. Побудуємо систему координат $Ox_1y_1z_1$ (на рисунку осі не зображені). Позначимо координати точки M у цій системі координат через x_1, y_1, z_1 . Виразимо напрямні косинуси осі OL :

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r} = x_1\sqrt{I}; \quad \cos\beta = \frac{y_1}{r} = y_1\sqrt{I}; \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{r} = z_1\sqrt{I},$$

де α, β, γ – кути, що визначають напрям осі OL .

Підставивши значення $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ у вираз (3.41) і поділивши на I отримаємо:

$$I_{x_1}x_1^2 + I_{y_1}y_1^2 + I_{z_1}z_1^2 - 2I_{x_1y_1}x_1y_1 - 2I_{y_1z_1}y_1z_1 - 2I_{z_1x_1}z_1x_1 = 1. \quad (3.45)$$

Рівність (3.45) визначає поверхню, по якій переміщується точка M , при зміні напрямку осі OL . Ця поверхня є еліпсоїдом, оскільки відстань від будь-якої точки M до точки O завжди скінченна ($I \neq 0$). Такий еліпсоїд називається *еліпсоїдом інерції*. Три *осі симетрії еліпсоїда інерції називаються головними осями інерції тіла в точці O* , а моменти інерції відносно цих осей називаються *головними моментами інерції тіла*.

Якщо за осі координат взяти головні осі інерції, то в рівнянні еліпсоїда інерції зникнуть члени, які мають добуток координат, і воно прийме вигляд

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1, \quad (3.46)$$

де I_x, I_y, I_z мають нові значення, які дорівнюють моментам інерції тіла відносно головних осей в данній точці, а відцентрові моменти інерції відносно кожної пари координатних осей дорівнюють нулю. На рис. 3.14 зображено еліпсоїд інерції, що побудовано в точці O , й система координат $Oxyz$, для якої рівняння еліпсоїда інерції має вигляд (3.46).

Отже, для кожної точки існують три головні осі інерції. Обернення в нуль відцентрових моментів інерції – необхідна й достатня умова, того, що відповідні осі координат є головними осями інерції.

Знання головних осей інерції дає змогу спростити рівняння руху твердого тіла. Якщо осі координат є головними осями інерції, то формула (3.41) набуває вигляду

$$I_L = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma. \quad (3.47)$$

Маючи еліпсоїд інерції для деякої точки O , можна визначити момент інерції тіла відносно будь-якої осі OL за формулою (3.44):

$$I_L = 1/(OM_1)^2,$$

де OM_1 – відрізок від початку координат до точки M_1 , у якій вісь OL перетинає еліпсоїд інерції.

Еліпсоїд інерції, який відповідає центру ваги тіла, називається центральним еліпсоїдом інерції, а його осі симетрії – головними центральними осями інерції.

Властивості головних і головних центральних осей інерції

Наведемо без доведення основні властивості головних і головних центральних осей інерції.

1. Якщо одна із осей координат, наприклад Oz , є головною віссю інерції для точки O (рис. 3.15), а дві інші – осі Ox і Oy – довільні, то два відцентрових моменти інерції, які мають індекс головної осі інерції Oz , перетворюються в нуль, тобто $I_{xz} = 0$ і $I_{yz} = 0$.

Таким чином, перетворення в нуль відцентрових моментів інерції (I_{xz} і I_{yz} , або якоїсь іншої пари) є необхідною і достатньою умовою, щоб відповідна вісь була головною віссю інерції для заданої точки.

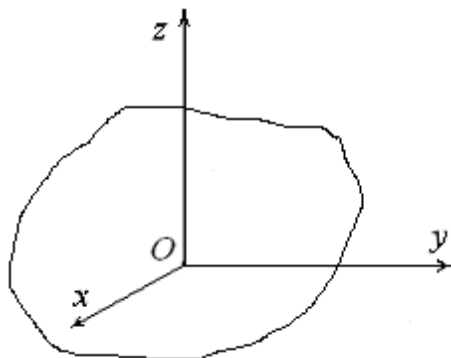


Рис. 3.15

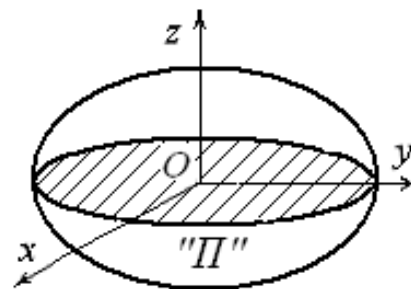
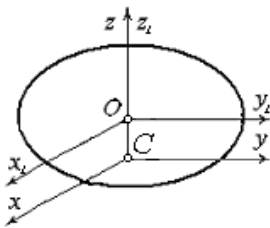


Рис. 3.16

2. Якщо однорідне тіло має площину симетрії (Π) або неоднорідне тіло має площину матеріальної симетрії (рис. 3.16), то для будь-якої точки O , що лежить у цій площині на осі Oz , яка перпендикулярна до площини симетрії (Π), є головною віссю інерції а дві другі головні осі інерції (Ox і Oy) розташовані в цій площині.

3. Якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то ця вісь є головною центральною віссю інерції.



4. Головні осі інерції Ox_1 і Oy_1 (рис. 3.17) для точки O , яка розміщена на головній центральній осі інерції Oz_1 , паралельні головним центральним осям інерції Cx і Cy (тут C – центр мас).

Рис. 3.17

Тобто, головна центральна вісь інерції є головною віссю інерції для всіх своїх точок.

Приклад 3.3. Обчислити момент інерції відносно осі Az і відцентрові моменти інерції I_{xy} , I_{xz} і I_{yz} крана. Кран має стрілу KF , довжина якої L , противагу D і вантаж E , вага яких відповідно G, Q і P . Стріла розташована під кутом α до вертикалі. Уважати противагу D і вантаж E матеріальними точками, а стрілу однорідною тонкою балкою.

Осі координат і геометричні розміри крана зображені на рис. 3.18; осі координат x і x_1 перпендикулярні площині рисунка.

Розв'язання. Система складається з трьох тіл: стріли KF , противаги D і вантажу E . Момент інерції системи відносно осі Az визначається як

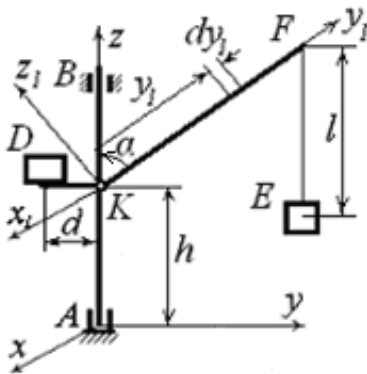


Рис. 3.18

$$I_z = I_z^{KF} + I_z^D + I_z^E.$$

Для точок D і E маємо

$$I_z^D = Qd^2/g, \quad I_z^E = PL^2 \sin^2 \alpha/g,$$

де g – прискорення вільного падіння.

Момент інерції стріли KF відносно осі обертання крана Az обчислимо за формулою (3.47):

$$I_z^{KF} = I_{x1}^{KF} \cos^2(\hat{x}_1, z) + I_{y1}^{KF} \cos^2(\hat{y}_1, z) + I_{z1}^{KF} \cos^2(\hat{z}_1, z) = \frac{Q}{3g} \sin^2 \alpha L^2.$$

Тут $\cos(\hat{x}_1, z) = 0$, $\cos(\hat{z}_1, z) = \sin \alpha$, $I_{y1}^{KF} = 0$ (стріла – тонка балка). Отже перший і другий доданок дорівнюють нулю, а $I_{z1}^{KF} = \frac{Q}{3g} L^2$ – див. табл. 3.1.

Тобто момент інерції крана відносно осі обертання Az дорівнює

$$I_z = Qd^2/g + (P + G/3)L^2 \sin^2 \alpha/g.$$

Відцентрові моменти інерції I_{xy} і I_{xz} дорівнюють нулю, тому що механічна система знаходиться у площині yz .

Обчислимо далі I_{yz} :

$$I_{yz} = I_{yz}^{KF} + I_{yz}^D + I_{yz}^E.$$

Для мас D і E знаходимо

$$I_{yz}^D = Qy_D z_D / g = -Qdh / g,$$

$$I_{yz}^E = P y_E z_E / g = PL \sin \alpha (h - l + L \cos \alpha) / g,$$

де $y_D = -d$, $z_D = h$, $y_E = L \sin \alpha$, $z_E = h - l + L \cos \alpha$ – відповідні координати точок D і E .

Відцентровий момент інерції стріли I_{yz}^{KF} знайдемо шляхом інтегрування.

Зобразимо елемент стріли dy_1 (рис. 3.18), маса якого

$$dm = G dy_1 / (gL),$$

а координати $y = y_1 \sin \alpha$, $z = y_1 \cos \alpha + h$. Маємо

$$I_{yz}^{KF} = \int_M yz dm = \frac{G}{gL} \int_0^L (h + y_1 \cos \alpha) y_1 \sin \alpha dy_1 = \frac{GL}{g} \sin \alpha \left(\frac{h}{2} + \frac{L}{3} \cos \alpha \right).$$

Для всієї системи знаходимо відцентровий момент інерції

$$I_{yz} = \frac{L}{g} \sin \alpha \left(\frac{GL}{3} \cos \alpha + P(L \cos \alpha - l) \right) + \frac{h}{g} \left(PL \sin \alpha + \frac{GL}{2} \sin \alpha - Qd \right).$$

Питання для самоконтролю

1. Що називають центром мас системи і за якими формулами обчислюють його координати?
2. Які методи використовують для визначення координат центра мас системи?
3. Які дві класифікації сил застосовують у механіці? У чому їх умовність?
4. Як позначають і які властивості мають внутрішні сили системи?
5. Чому дорівнює головний вектор і головний момент внутрішніх сил для твердого тіла?
6. Як записуються диференціальні рівняння руху невідільної системи матеріальних точок?
7. Як формулюється теорема про рух центра мас системи матеріальних точок?
8. Запишіть диференціальні рівняння поступального руху абсолютно твердого тіла.
9. Як записуються диференціальні рівняння руху центра мас?
10. Сформулюйте наслідки з теореми про рух центра мас системи матеріальних точок.
11. Як класифікують і що характеризують моменти інерції системи матеріальних точок, твердого тіла?
12. Як визначається осьовий і відцентровий момент інерції системи матеріальних точок, твердого тіла?
13. Як визначається полярний момент інерції системи матеріальних точок, твердого тіла?
14. За якими формулами обчислюються планарні (відносно площини xOy і т. ін.) моменти інерції?
15. Як формулюється теорема Гюйгенса-Штейнера про осьові моменти інерції відносно паралельних осей?
16. Як обчислити момент інерції відносно осі, що проходить через початок координат, але не збігається ні з одною із координатних осей, якщо відомі осьові

і відцентрові моменти інерції системи відносно координатних осей?

17. Які осі називаються головними осями інерції, головними центральними осями інерції?

18. Як визначається і використовується радіус інерції?

19. Сформулюйте залежність між полярними, осьовими й планарними моментами інерції.

20. Як називають координатні осі, якщо відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю?

21. Сформулюйте властивості головних і головних центральних осей інерції.

22. Що зображує еліпсоїд інерції?

4. ОСНОВНІ (ЗАГАЛЬНІ) ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

Розв'язання диференціальних рівнянь пов'язане з труднощами, викликаними з визначенням внутрішніх сил, а також знаходженням загального інтеграла системи диференціальних рівнянь високого порядку. Про те існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про всі властивості досліджуваного руху системи і застосування диференціальних рівнянь. До таких задач належать, наприклад, задачі, пов'язані з визначенням зовнішніх сил, що діють на матеріальні точки системи, і задачі, що потребують визначення кінематичних рівнянь руху не всіх матеріальних точок системи, а тільки центра мас або визначення мір механічного руху системи (головного вектора кількості руху, головного моменту кількості руху, кінетичної енергії). Такі задачі часто виникають у техніці. До методів розв'язання цих задач належать загальні або основні теореми динаміки, що встановлюють співвідношення між мірами механічного руху системи матеріальних точок (або однієї матеріальної точки) і силами, що характеризують динамічний ефект дії оточуючих тіл на кожен матеріальну точку системи.

Основні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух. При розв'язанні задач динаміки, що потребують визначення окремих властивостей руху системи, основні теореми динаміки є найбільш ефективними методами дослідження.

У динаміці системи матеріальних точок розглядають чотири основні теореми - про рух центра мас, про зміну кількості руху, про зміну кінетичного моменту і про зміну кінетичної енергії. У динаміці матеріальної точки - три основні теореми (про зміну кількості руху, про зміну моменту кількості руху і про зміну кінетичної енергії).

Загальні, або основні, теореми динаміки можна подати як у диференціальній, так і в інтегральній формі.

4.1. Міри механічного руху

На практиці міри механічного руху підрозділяють на основні і допоміжні.

У якості основних використовують наступні міри:

1) перша основна міра:

а) кількість руху матеріальної точки: векторна функція $\bar{q} = m\bar{V}$;

б) кількість руху механічної системи: векторна функція $\bar{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i$;

2) друга основна міра:

а) кінетична енергія матеріальної точки: скалярна функція

$$T = mV^2 / 2;$$

б) кінетична енергія механічної системи: скалярна функція

$$T = \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 / 2.$$

До допоміжних мір механічного руху відносять:

а) момент кількості руху матеріальної точки відносно полюса O :

векторна функція $\bar{K}_0 = \bar{r} \cdot \bar{q}$;

б) момент кількості руху механічної системи відносно полюса O :

векторна функція $\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^n r_i \cdot q_i$.

4.2. Кількість руху точки, системи матеріальних точок

Кількістю руху матеріальної точки називається вектор, який дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості

$$\bar{q} = m\bar{v}. \quad (4.1)$$

Кількістю руху системи матеріальних точок називається головний вектор (векторна сума) кількостей руху матеріальних точок, що входять у систему:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n \bar{q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i. \quad (4.2)$$

Виходячи з цього визначення кількості руху системи, доведемо наступну теорему.

Теорема. *Кількість руху системи матеріальних точок (твердого тіла) дорівнює добутку маси системи (твердого тіла) на швидкість її (його) центра мас.*

Доведення. На основі визначення центра мас механічної системи маємо

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = M \bar{v}_C, \quad (4.3)$$

де $M = \sum_{i=1}^n m_i$ – маса системи.

Підставивши це співвідношення в (4.2), одержимо

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C, \quad (4.4)$$

що і треба було довести.

Векторній рівності (4.4) відповідають три рівності в координатній формі:

$$Q_x = M \bar{v}_{C_x}; \quad Q_y = M \bar{v}_{C_y}; \quad Q_z = M \bar{v}_{C_z}. \quad (4.5)$$

Як бачимо з формули (4.4), *кількість руху системи матеріальних точок дорівнює кількості руху однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі системи, а швидкість дорівнює швидкості центра мас.*

4.3. Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній та інтегральній формах

Теорема. *Похідна за часом від кількості руху механічної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок системи.*

Доведення. Нехай система складається з n матеріальних точок. На довільну i -ту точку системи діють зовнішні й внутрішні сили \bar{F}_i^e і \bar{F}_i^i . Кількість руху цієї точки дорівнює $m_i \bar{v}_i$. За другим законом Ньютона маємо

$$\frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Склавши ліві та праві частини цих рівнянь, на основі формул (4.2), (4.4), враховуючи, що $\bar{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i$, одержимо

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^e + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Другий доданок у правій частині останнього рівняння, як головний вектор внутрішніх сил, дорівнює нулю, а $\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^e = \bar{F}^e$ – головний вектор зовнішніх сил.

На основі цих співвідношень остаточно одержимо теорему про зміну руху механічної системи у диференціальній формі:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}^e, \quad (4.8)$$

що і треба було довести.

Векторній рівності (4.8) відповідають три в координатній формі:

$$\frac{d\bar{Q}_x}{dt} = \bar{F}_x^e, \quad \frac{d\bar{Q}_y}{dt} = \bar{F}_y^e, \quad \frac{d\bar{Q}_z}{dt} = \bar{F}_z^e \quad (4.9)$$

де $\bar{F}_x^e = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e$, $\bar{F}_y^e = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e$, $\bar{F}_z^e = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e$ – проекції головного вектора зовнішніх сил на осі декартових координат.

Неважко доказати, що коли в (4.8) у випадку незмінної маси системи замість \bar{Q} підставити його значення $\bar{Q} = M\bar{v}_C$, то одержимо *теорему про рух центра мас*:

$$M\bar{a}_C = \bar{F}^e. \quad (4.10)$$

Зазначимо, що теорему про зміну кількості руху системи у формі рівняння (4.8) можна застосувати і до системи зі змінною масою, наприклад, у випадку реактивних сил, тим часом як теорему про рух центра мас – лише до систем незмінної маси.

Із теореми про зміну кількості руху системи, записаної у векторній (4.8) або скалярній (4.9) формах впливають три наслідки, які називаються *законами збереження кількості руху системи матеріальних точок*.

Наслідок 1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кількість руху системи.

Цей наслідок є очевидним, тому, що внутрішні сили в рівнянні (4.8) зміни за часом кількості руху системи не входять.

Наслідок 2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю $\bar{F}^e = 0$, то кількість руху матеріальної системи залишається незмінною.

Дійсно, у випадку, коли $\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0$ отримаємо $\bar{Q} = const.$

Наслідок 3. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил, прикладених до системи, на деяку нерухому в інерціальній системі координат вісь дорівнює нулю $\bar{F}_x^e = 0$, то проекція кількості руху на цю вісь залишається незмінною:

при $\frac{dQ_x}{dt} = 0$ будемо мати $Q_x = const.$

Доведемо далі теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі або, як ще її називають, теорему імпульсів для системи.

Теорема. *Приріст кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу $[t_0, t]$ дорівнює головному вектору імпульсів зовнішніх сил, прикладених до точок системи за той самий проміжок часу.*

Доведення. Представимо рівність (4.8) у вигляді

$$d\bar{Q} = \bar{F}^e dt. \quad (4.11)$$

Інтегруючи цю рівність у межах від t_0 до t , одержимо

$$\bar{Q}(t) - \bar{Q}(t_0) = \int_{t_0}^t \bar{F}^e dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \bar{F}_i^e dt = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i^e, \quad (4.12)$$

де \bar{S}_i^e – імпульс зовнішньої сили \bar{F}_i^e .

Права частина формули (4.12) представляє собою головний вектор імпульсів зовнішніх сил системи:

$$\bar{S}^e = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i^e. \quad (4.13)$$

Підставивши (4.13) у співвідношення (4.12), одержимо

$$\bar{Q}(t) - \bar{Q}(t_0) = \bar{S}^e \quad (4.14)$$

або

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e.$$

Рівність (4.14) виражає теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок в *інтегральній формі*.

Векторна рівність (4.14) в координатній формі має вигляд:

$$\bar{Q}_x - \bar{Q}_{0x} = \bar{S}_x^e, \quad \bar{Q}_y - \bar{Q}_{0y} = \bar{S}_y^e, \quad \bar{Q}_z - \bar{Q}_{0z} = \bar{S}_z^e. \quad (4.15)$$

Зазначимо, що теорема імпульсів застосовується в теорії удару елементів та вузлів будівельної і транспортної техніки та інш.

4.4. Теорема Ейлера про рух рідини

Припустимо, що механічна система становить собою суцільне середовище, наприклад рідину, що тече по трубі та заповнює у певний момент часу деякий об'єм між двома перерізами труби, площі яких s_1 і s_2 (рис. 4.1). Позначимо через \bar{v}_1 і \bar{v}_2 середні швидкості рідини у зазначених перерізах. Густина середовища в перерізах позначимо через ρ . Тоді маси рідини, що протікає через зазначені перерізи за одиницю часу, відповідно дорівнюватимуть: $\rho_1 v_1 s_1$ і $\rho_2 v_2 s_2$. Якщо вважати, що течія рідини стала, то в цьому разі через кожен переріз за одиницю часу протікатиме однакова кількість рідини:

$$\mu = \rho_1 v_1 s_1 = \rho_2 v_2 s_2, \quad (4.16)$$

де через μ позначена секундна маса рідини, що протікає через будь-який переріз труби.

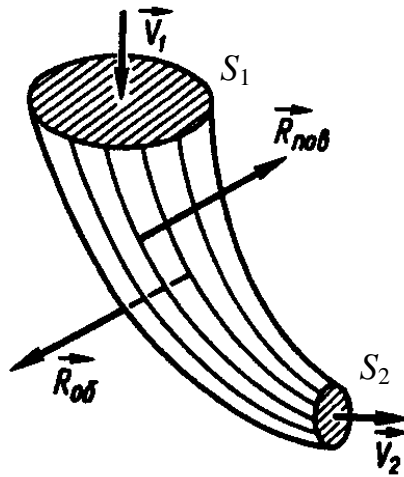


Рис. 4.1

Оскільки течія стала, то за час dt через перерізи s_1 і s_2 пройдуть маси μdt . Їхні кількості руху будуть $\mu dt v_1$ і $\mu dt v_2$, а зміна кількості руху $d\bar{Q}$ маси середовища, що розглядається, за той самий час визначиться співвідношенням

$$d\bar{Q} = \mu dt \bar{v}_2 - \mu dt \bar{v}_1. \quad (4.17)$$

Звідси

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \mu(\bar{v}_2 - \bar{v}_1). \quad (4.18)$$

Крім того, за теоремою про зміну кількості руху: похідна за часом від кількості руху дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на систему. У даному випадку на середовище діють дві групи сил:

- 1) сили *масові*, або *об'ємні*, $\bar{F}_{об}$, що діють на кожну частинку всередині виділеного об'єму (до таких сил належать насамперед сили тяжіння);
- 2) сили *поверхневі* $\bar{F}_{нов}$, що діють лише на частинки, які лежать на поверхні об'єму (це сили тиску стінок на середовище, сили тертя середовища і стінок).

Тоді, застосовуючи до середовища, що розглядається, теорему про зміну кількості руху і враховуючи рівність (4.18), одержимо

$$\mu(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{F}_{об} + \bar{F}_{нов}. \quad (4.19)$$

Перенісши всі члени цього виразу в один бік, запишемо його у формі

$$\mu\bar{v}_1 - \mu\bar{v}_2 + \bar{F}_{об} + \bar{F}_{нов} = 0. \quad (4.20)$$

Ця рівність є математичним записом *теорема Ейлера*, яка формулюється так: *сума головних векторів об'ємних, поверхневих сил і напрямлених всередину певного об'єму секундних кількостей рухів рідини, що протікає через два поперечні перерізи труби, дорівнює нулю.*

Ця теорема застосовується в задачах водопостачання і водовідведення.

4.5. Момент кількості руху матеріальної точки. Теорема про зміну моменту кількості руху точки

Перша основна міра механічного руху $t\bar{v}$ характеризує поступальний рух тіла. Для характеристики обертального руху застосовується допоміжна міра руху – момент кількості руху.

Моментом кількості руху (кінетичним моментом) точки відносно центра O називається величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора \bar{r} матеріальної точки, проведеного з цього центра, на кількість її руху:

$$\bar{k}_O = \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times t\bar{v}. \quad (4.21)$$

Співвідношення між моментом кількості руху і моментом сили встановлюється на основі теорема про зміну моменту кількості руху.

Теорема. *Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра O (або осі) дорівнює моменту \bar{M}_O рівнодійної \bar{R} прикладених до точки сил, відносно того самого центра (або осі).*

Доведення. Нехай матеріальна точка M масою t рухається зі швидкістю \bar{v} під дією сили \bar{R} (рис. 4.2). Кількість руху цієї точки дорівнює $t\bar{v}$. Радіус-вектор точки M позначимо \bar{r} .

Із статички [1] відомо, що момент рівнодійної \bar{R} відносно центра O дорівнює $\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{R}$. За визначенням, момент кількості руху матеріальної точки (кінетичний момент точки) відносно того самого центра O буде

$$\bar{k}_O = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (4.22)$$

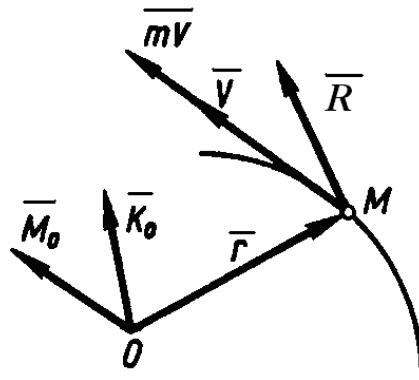


Рис. 4.2

Взявши першу похідну за часом від моменту кількості руху і враховуючи,

що $\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{R}$, знайдемо

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O(\bar{R}), \quad (4.23)$$

або векторний добуток $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$.

Остаточно одержимо

$$\frac{d\bar{k}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{R}), \quad (4.24)$$

що і треба було довести.

Векторній рівності (4.23) відповідають три рівності в координатній формі, якщо спроектувати її на осі деякої системи координат, наприклад, $Oxyz$:

$$\frac{d}{dt} K_{0x} = M_{0x}(\bar{R}); \quad \frac{d}{dt} K_{0y} = M_{0y}(\bar{R}); \quad \frac{d}{dt} K_{0z} = M_{0z}(\bar{R}),$$

або через декартові координати радіус-вектора \bar{r} , швидкість \bar{V} і рівнодійної \bar{R} :

$$m \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \bar{R}_x & \bar{R}_y & \bar{R}_z \end{vmatrix}, \quad (4.25)$$

звідси отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d}{dt} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = yR_z - zR_y, \\ m \frac{d}{dt} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = zR_x - xR_z, \\ m \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = xR_y - yR_x, \end{array} \right. \quad (4.26)$$

де x, y, z – координати матеріальної точки; $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ – проекції швидкості цієї точки на осі координат; $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ – проекції рівнодійної на ті самі осі координат.

Наведемо далі закони збереження моменту кількості руху матеріальної точки, як висновок з наведеної теореми про зміну моменту кількості руху точки (вони аналогічні законам збереження кількості руху точки):

1) якщо момент \bar{M}_O рівнодійної \bar{R} відносно нерухомого центра O дорівнює нулю ($\bar{M}_O = 0$), то, згідно з (4.24), момент кількості руху точки зберігається незмінним;

2) якщо момент \bar{M}_z рівнодійної сил \bar{R} відносно деякої осі, наприклад Oz , дорівнює нулю ($\bar{M}_z = 0$), то момент кількості руху точки відносно цієї осі буде незмінним.

4.6. Кінетичний момент системи матеріальних точок відносно центра і відносно координатних осей. Кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання

Кінетичним моментом \bar{K}_O матеріальної системи, або головним моментом кількості руху системи матеріальних точок відносно центра O , називається векторна сума моментів кількостей руху всіх точок системи відносно того самого центра:

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \bar{k}_{Oi} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i, \quad (4.27)$$

де \bar{k}_O – момент кількості руху i -ї точки системи; $m_i \bar{v}_i$ – кількість руху i -ї точки; \bar{r}_i – радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр O з i -ю точкою системи.

Проектуючи вектор $\bar{K}_O = K_{Ox} \cdot \bar{i} + K_{Oy} \cdot \bar{j} + K_{Oz} \cdot \bar{k}$ на координатні осі Ox , Oy , Oz , отримаємо:

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= \sum_{i=1}^n m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right), \\ K_{Oy} &= \sum_{i=1}^n m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right), \\ K_{Oz} &= \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

де K_{Ox}, K_{Oy}, K_{Oz} – кінетичні моменти механічної системи відносно координатних осей; x_i, y_i, z_i – координати i -ї точки системи; $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$ – проекції швидкості цієї точки.

Знайдемо тепер кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання тіла, наприклад Oz , тобто K_z . Нехай тверде тіло обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ (рис. 4.3). Розглянемо елементарний об'єм тіла масою dm , віддалений від осі обертання на відстань r . Швидкість цього об'єму становитиме $v = r\omega$, кількість руху – $dQ = vdm = r\omega dm$, а елементарний кінетичний момент відносно осі Oz – $dK_z = rdQ = rvd m = r^2 \omega dm$. Для всього тіла кінетичний момент буде $K_z = \omega \int_{(m)} r^2 dm$, де інтегрування поширено на масу усього тіла.

Інтеграл $\int_{(m)} r^2 dm$ за всією масою тіла, який залежить лише від характеру розподілу маси в тілі, є моментом інерції тіла відносно осі обертання і

позначається $I_z = \int_{(m)} r^2 dm$. З урахуванням цього позначення вираз для кінетичного моменту тіла K_z відносно осі Oz запишемо у вигляді

$$K_z = I_z \omega. \quad (4.29)$$

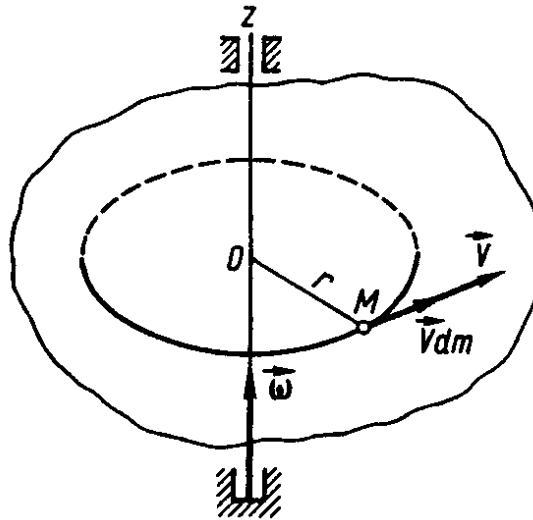


Рис. 4.3

Отже, кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно нерухомої осі обертання на кутову швидкість.

4.7. Кінетичний момент системи матеріальних точок при складному русі

Установимо зв'язок між кінетичним моментом системи матеріальних точок при розгляді руху в нерухомій $A\xi\eta\zeta$ і в рухомій $Ox_2y_2z_2$ системах координат, яка незмінно зв'язана з деяким тілом або системою матеріальних точок.

Радіус-вектор i -ї точки M в системі координат $Ax_2y_2z_2$ (рис. 4.4) позначимо \bar{r}_i , а в системі координат $Ox_1y_1z_1$ – $\bar{\rho}_i$; радіус-вектор точки O позначимо \bar{r}_O . Очевидно, що для i -ї точки системи

$$\bar{r}_i = \bar{r}_O + \bar{\rho}_i \quad (4.30)$$

Знайдемо формулу для визначення кінетичного моменту \bar{K}_A відносно початку A нерухомої системи координат $Ax_2y_2z_2$, якщо рухома система координат $Ox_1y_1z_1$ здійснює поступальний рух разом з полюсом O , а система координат $Oxyz$ – обертальний навколо нього. За визначенням кінетичного моменту системи відносно центра A , маємо

$$\bar{K}_A = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i. \quad (4.31)$$

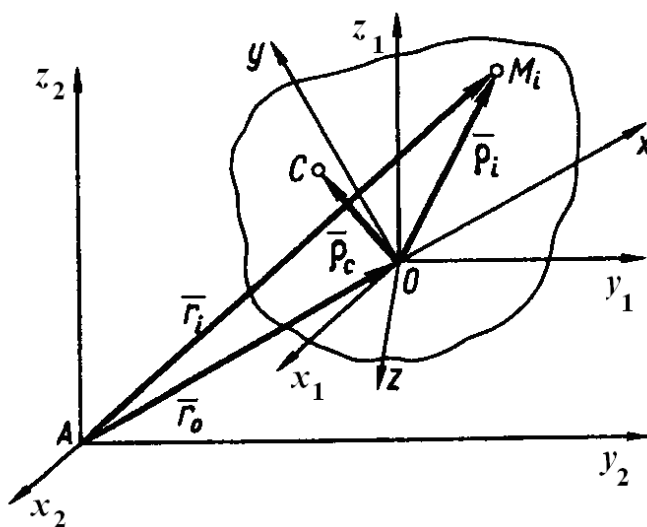


Рис. 4.4

Підставивши вираз для $\bar{r}_i = \bar{r}_0 + \bar{\rho}_i$ у попередню формулу, одержимо

$$\bar{K}_A = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_0 + \bar{\rho}_i) \times m_i \bar{v}_i. \quad (4.32)$$

Враховуючи, що \bar{r}_0 не залежить від індексу підсумовування i , його можна винести за знак суми, а також те, що з визначення центра мас випливає

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = M \bar{V}_C = \bar{Q} \quad (M, \bar{V}_C - \text{маса, швидкість центра мас системи; } \bar{Q} - \text{кількість}$$

руху системи), попередню формулу можна перетворити до вигляду

$$\bar{K}_A = \bar{r}_0 \times \bar{Q} + \bar{K}_O, \quad (4.33)$$

де $\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_i$ – кінетичний момент системи відносно центра O .

Зазначимо, що формула (4.33) збігається за формою з відомими зі статyki [1] і кінематики [2] формулами для обчислення моменту сили або моменту кутової швидкості при зміні центра.

Розглянемо більш докладно кінетичний момент системи \bar{K}_O відносно рухомого центра O , враховуючи, що швидкість i -ї точки тіла визначається відомим із кінематики [2] співвідношенням

$$\bar{v}_i = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i + \frac{d'\bar{\rho}_i}{dt}. \quad (4.34)$$

Підставивши це співвідношення у вираз для \bar{K}_O , знайдемо

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i + \frac{d'\bar{\rho}_i}{dt}). \quad (4.35)$$

Враховуючи, що \bar{v}_O і $\bar{\omega}$ не залежать від індексу підсумовування (їх можна винести за знак суми), тому $\sum_{i=1}^n m_i \bar{\rho}_i = M \bar{\rho}_C$, формулу (4.35) остаточно можна записати у вигляді

$$\bar{K}_O = M \bar{\rho}_C \times \bar{v}_O + \bar{K}_O^\omega + \bar{K}_O^r. \quad (4.36)$$

Тут $\bar{\rho}_C$ – радіус-вектор центра мас тіла в рухомій системі координат $Oxyz$,

$$\begin{aligned} \bar{K}_O^r &= \sum_{i=1}^n m_i \bar{\rho}_i \times \frac{d'\bar{\rho}_i}{dt}, \\ \bar{K}_O^\omega &= \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i), \end{aligned} \quad (4.37)$$

\bar{K}_O^ω – кінетичний момент, зумовлений лише обертанням системи відносно точки O . Цю особливість підкреслює індекс ω .

Найбільший інтерес для практики має випадок, коли матеріальна система, що розглядається, незмінна, тобто випадок твердого тіла. Тоді

$$\frac{d'\bar{\rho}_i}{dt} = 0, \quad \bar{K}_O^r = 0. \quad (4.38)$$

При цьому співвідношення (4.33) можна записати у вигляді

$$\bar{K}_A = \bar{r}_O \times \bar{Q} + \bar{\rho}_C \times M \bar{v}_O + \bar{K}_O^\omega. \quad (4.39)$$

В окремому випадку, якщо початок координат рухомої системи лежить у центрі мас C , то $\bar{\rho}_C = 0$ і співвідношення (4.39) спрощується

$$\bar{K}_A = \bar{r}_O \times \bar{Q} + \bar{K}_C^\omega. \quad (4.40)$$

Одержані вирази (4.39) і (4.40) можна сформулювати у вигляді наступних висновків для *твердого тіла*.

1. *Кінетичний момент тіла відносно нерухомого центра A дорівнює моменту кількості руху тіла, прикладеному в полюсі O , відносно того самого центра A ($\bar{r}_O \times \bar{Q}$), складеному з векторним добутком $\bar{\rho}_C \times m\bar{v}_O$, а також з моментом кількості руху тіла в обертальному русі навколо полюса O (\bar{K}_O^ω).*

2. *Якщо початок рухомої системи координат збігається з центром мас, то кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомого центра A дорівнює сумі моменту кількості руху тіла відносно того самого центра A ($\bar{r}_O \times \bar{Q}$) у припущенні, що вся маса тіла зосереджена в центрі мас і моменту кількості руху тіла в обертальному русі навколо центра мас C (\bar{K}_C^ω).*

4.8. Теорема про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній та інтегральній формах

Теорема про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок, так само як і теорема про зміну кількості руху системи, може записуватися як у диференціальній, так і в інтегральній формі (у формі моменту імпульсів зовнішніх сил).

Доведемо спочатку теорему про зміну кінетичного моменту системи в диференціальній формі.

Теорема. *Похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомого центра O дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того самого центра.*

Доведення. Нехай система складається з n матеріальних точок. На i -ту точку системи діють внутрішня \bar{F}_i^i і зовнішня \bar{F}_i^e сили. Тоді вираз (4.24), що відображає теорему про зміну кінетичного моменту для точки, подамо у вигляді

$$\frac{d\bar{k}_{Oi}}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}_i^e) + \bar{M}_O(\bar{F}_i^i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.41)$$

Підсумовуючи ліві та праві частини цієї рівності до n , одержимо

$$\frac{d\sum_{i=1}^n \bar{k}_{Oi}}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i^e) + \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i^i), \quad (4.42)$$

де $\sum_{i=1}^n \bar{k}_{Oi} = \bar{K}_O$ – кінетичний момент системи або головний момент її кількості

руху. Враховуючи, що головний момент внутрішніх сил $\sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i^i) = 0$ і

головний момент зовнішніх сил $\bar{M}_O^e = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_i^e)$, останньому виразу надамо

вигляду

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e, \quad (4.43)$$

що і треба було довести.

Цій векторній рівності відповідають три рівності в координатній формі

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dK_{Ox}}{dt} = M_{Ox}^e, \\ \frac{dK_{Oy}}{dt} = M_{Oy}^e, \\ \frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^e. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Доведемо далі теорему про зміну кінетичного моменту в *інтегральній формі* або у *формі теорему моменту імпульсів зовнішніх сил*.

Теорема. Приріст кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомого центра O за деякий проміжок часу $[t_0, t]$ дорівнює головному моменту імпульсів зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.

Доведення. Рівність (4.43) перепишемо у вигляді

$$d\bar{K}_O = \bar{M}_O^e dt.$$

Інтегруючи це співвідношення у межах від t_0 до t , одержимо

$$\bar{K}_O(t) - \bar{K}_O(t_0) = \int_{t_0}^t \bar{M}_O^e dt. \quad (4.45)$$

Розглянемо докладніше праву частину (4.45) з урахуванням виразів (4.12), (4.13) для повного та елементарного імпульсів сил.

Оскільки головний момент зовнішніх сил

$$\bar{M}_O^e = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i^e, \quad (4.46)$$

то, підставивши (4.46) у (4.45) і враховуючи вираз $d\bar{S}^e = \bar{F}^e dt$, дістанемо

$$\bar{K}_O(t) - \bar{K}_O(t_0) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i^e dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times d\bar{S}_i^e = \bar{S}_O^e. \quad (4.47)$$

де $\bar{S}_O^e = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times d\bar{S}_i^e$ – головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно центра O . Отже, остаточно одержимо

$$\bar{K}_O(t) - \bar{K}_O(t_0) = \bar{S}_O^e, \quad (4.48)$$

що і треба було довести.

Зазначимо, що цією теоремою користуються при вивченні елементарної теорії удару.

Для практичного застосування наведених формул при розв'язанні конкретних задач їх необхідно записувати в проекціях на осі систем координат жорстко зв'язаних з тілами, рух яких вивчається, бо саме в цих системах координат їхні моменти інерції є незмінними.

4.9. Обчислення кінетичного моменту при обертанні тіла відносно полюса

Головною величиною, що входить у рівняння обертального руху твердого тіла, є момент кількості обертального руху відносно полюса \bar{K}_O^ω .

Розглянемо його більш детально. Із формули (4.37) маємо

$$\bar{K}_O^\omega = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i). \quad (4.49)$$

Як бачимо, для того щоб дослідити вектор \bar{K}_O^ω , потрібно розкрити подвійний векторний добуток, враховуючи, що $\bar{\rho} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \bar{\omega} \cdot \bar{\rho}^2 - \bar{\rho} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{\omega})$. З урахуванням цього перетворимо вираз (4.49) до форми

$$\begin{aligned} \bar{K}_O^\omega &= \bar{i} K_{Ox}^\omega + \bar{j} K_{Oy}^\omega + \bar{k} K_{Oz}^\omega = \\ &= \bar{i} \sum_{i=1}^n m_i [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i] + \\ &+ \bar{j} \sum_{i=1}^n m_i [-\omega_x y_i x_i + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z y_i z_i] + \\ &+ \bar{k} \sum_{i=1}^n m_i [-\omega_x z_i x_i + \omega_y z_i y_i - \omega_z (x_i^2 + y_i^2)]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

У виразі (4.50) проекції кутових швидкостей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ не залежать від індексу підсумовування, тому їх можна винести за знак суми. Тоді під знаком суми залишаться вирази, які відповідають поняттю моментів інерції, оскільки інтеграли - це граничні переходи від сум, коли матеріальні точки неперервно заповнюють простір.

З урахуванням цього із (4.50) отримаємо наступні вирази для проекцій вектора \bar{K}_O^ω кінетичного моменту обертання тіла відносно полюса O :

$$\begin{aligned} K_{Ox}^\omega &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ K_{Oy}^\omega &= -I_{yx} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ K_{Oz}^\omega &= -I_{zx} \omega_x - I_{zy} \omega_y + I_z \omega_z \end{aligned} \quad (4.51)$$

або у векторно-матричній формі

$$\bar{K}_O^\omega = J_O \bar{\omega},$$

де J_O – тензор інерції (див. п. 3).

Або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} K_{Ox}^\omega \\ K_{Oy}^\omega \\ K_{Oz}^\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_z & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Вираз (4.52) використовують при дослідженні обертання твердого тіла, що має одну нерухому точку.

Питання для самоконтролю

1. Які три величини називають динамічними параметрами механічної системи і які дві з них називають мірами механічного руху?
2. У чому суть теореми про рух центра мас системи і які наслідки випливають із неї?
3. Сформулюйте наслідки з теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок.
4. Які групи сил діють на рідину, що тече по трубі?
5. Який вигляд має теорема про зміну кількості руху, якщо застосувати її для середовища (теорема Ейлера)?
6. Що називають моментом кількості руху точки і системи, і за якими формулами їх обчислюють?
7. Сформулюйте закони збереження моменту кількості руху матеріальної точки.
8. Як саме і чому основні теореми динаміки дають змогу виключити з розгляду внутрішні сили системи?
9. Що називають кінетичним моментом системи матеріальних точок?
10. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла, що обертається відносно нерухомої осі?
11. Визначити кінетичний момент твердого тіла при його складному русі.
12. Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок в диференціальній та інтегральній формах.
13. Як визначається кінетичний момент твердого тіла при його обертанні навколо полюса?

5. КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ТОЧКИ І СИСТЕМИ. ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

Теорема про зміну кінетичної енергії відноситься до числа основних теорем динаміки. Вона встановлює залежність між зміною загальної міри руху системи матеріальних точок – кінетичною енергією, та мірою дії сил на протязі шляху руху точок системи, тобто їх роботою.

Однак на відміну від кількості руху і моменту кількості руху зміна кінетичної енергії матеріальної системи залежить від роботи як зовнішніх, так і внутрішніх сил. Це дозволяє зробити висновок про характер і розраховувати величини витрат механічної енергії системи, наприклад, викликаних внутрішнім тертям.

5.1. Кінетична енергія матеріальної точки і системи.

Теорема Кеніга

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{mV^2}{2}. \quad (5.1)$$

Кінетична енергія дорівнює нулю лише при умові, що точка знаходиться в стані спокою.

Залежно від способу завдання руху точки формула (5.1) матиме різний вигляд.

При завданні руху точки у *векторній формі* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, швидкість точки буде $\bar{V} = \dot{\bar{r}}$, а кінетична енергія $T = \frac{m}{2} \bar{V} \cdot \bar{V} = \frac{m}{2} (\dot{\bar{r}})^2 = \frac{m}{2} \dot{r}^2$.

Якщо рух точки задано в *координатній формі* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то швидкість точки $\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}$.

Отже,

$$T = \frac{m}{2}(V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k})(V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}) =$$

$$= \frac{m}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

У випадку завдання руху точки в *натуральній формі* $\sigma = \sigma(t)$, швидкість $\bar{V} = V_{\tau} \bar{\tau} = \dot{\sigma} \bar{\tau}$ і $T = \frac{m}{2}(V_{\tau} \bar{\tau})(V_{\tau} \bar{\tau}) = \frac{m}{2} V_{\tau}^2 = \frac{m}{2} V^2 = \frac{m}{2} (\dot{\sigma})^2$.

Відповідно до виразу (5.1) кінетична енергія є скалярною додатною величиною і має розмірність в системі СІ

$$[T] = \left[\text{кг} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \right] = [\text{Н} \cdot \text{м}] = [\text{Дж}].$$

Кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює арифметичній сумі кінетичної енергії всіх точок системи:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}, \quad (5.2)$$

де \bar{V}_k – абсолютна швидкість k -ї точки системи в інерціальній системі координат.

На практиці звичайно абсолютний рух системи розглядають як складний: відносний в рухомій системі координат і переносний сумісно з попередньою системою координат.

Розглянемо рухому систему координат $Oxyz$, що переміщується поступально відносно інерціальної системи координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 5.1).

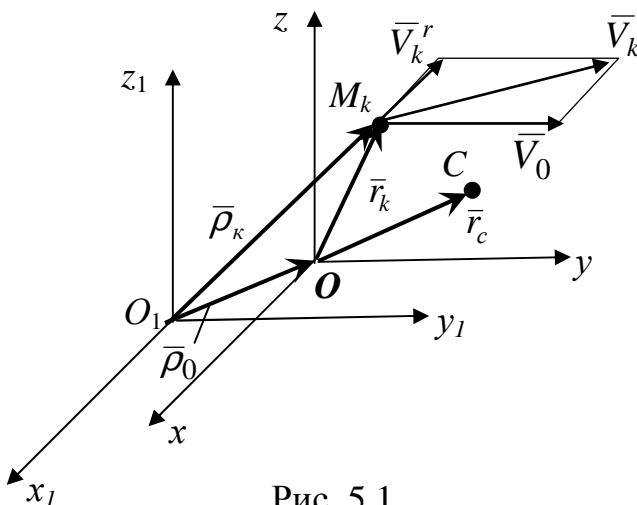


Рис. 5.1

Тоді для k -ої точки механічної системи матимемо:

$$\bar{\rho}_k = \bar{\rho}_0 + \bar{r}_k$$

і відповідно $\bar{V}_k = \bar{V}_0 + \bar{V}_k^r$,

де \bar{V}_0 – швидкість полюса рухомої системи координат $Oxyz$ (однакова для всіх точок системи); \bar{V}_k^r – відносна швидкість точки M_k .

Підставивши швидкість \bar{V}_k в вираз (5.2) кінетичної енергії отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{V}_0 + \bar{V}_k^r) \cdot (\bar{V}_0 + \bar{V}_k^r) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{V}_0^2 + 2\bar{V}_0 \cdot \bar{V}_k^r + (\bar{V}_k^r)^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_0^2 + \sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_0 \cdot \bar{V}_k^r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{V}_k^r)^2. \quad (5.3)$$

В виразі (5.3) $\sum_{k=1}^n m_k = M$ (маса всієї системи), $\sum_k m_k \bar{V}_k^r = M\bar{V}_c^r$ (\bar{V}_c^r –

швидкість центра мас в системи координат $Oxyz$), тому

$$T = \frac{1}{2} M \bar{V}_0^2 + M \bar{V}_0 \cdot \bar{V}_c^r + T_0^r,$$

де $T_0^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{V}_k^r)^2$ – кінетична енергія відносного руху.

Отже, кінетична енергія системи матеріальних точок в її абсолютному русі дорівнює сумі кінетичної енергії ($\frac{1}{2} M \bar{V}_0^2$) переносного (поступального) руху разом з полюсом O , кінетичної енергії (T_0^r) системи в її русі відносно системи координат $Oxyz$, що поступально рухається в інерційному просторі, та взаємної кінетичної енергії ($M \bar{V}_0 \cdot \bar{V}_c^r$), що зумовлена як переносним рухом разом із системою координат $Oxyz$, так і відносним рухом із швидкістю \bar{V}_c^r .

В окремих випадках є корисним прийняти за початок рухомої системи координат центр мас C (точка C на рис 5.1) системи, що рухається. Тоді $\bar{V}_0 = \bar{V}_c$, а $\bar{V}_c^r = 0$ (швидкості точки „центра мас” відносно її самої не існує) і вираз спрощується:

$$T = \frac{1}{2} M \bar{V}_c^2 + T_c^r. \quad (5.4)$$

Останнє рівняння формулюється як теорема Кеніга: кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює сумі кінетичної енергії центра мас, припускаючи, що в ньому зосереджена маса всієї системи, і кінетичної енергії системи в її відносному русі навколо центра мас.

5.2. Кінетична енергія твердого тіла

В випадку поступального руху твердого тіла всі його точки рухаються з однаковими швидкостями, які дорівнюють швидкості \bar{V}_c центра мас.

Тому отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_c^2 = \frac{1}{2} M V_c^2. \quad (5.5)$$

Отже, кінетична енергія твердого тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості його центра мас.

При обертальному русі тіла навколо нерухомої осі Oz швидкість будь-якої його точки $V_k = \omega h_k$, де ω – кутова швидкість тіла, h_k – відстань точки від осі обертання. Тоді матимемо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\omega h_k)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (5.6)$$

де $J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$ – момент інерції тіла відносно осі обертання Oz .

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла при обертальному русі навколо нерухомої осі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

В випадку плоскопаралельного руху кінетичну енергію твердого тіла визначимо за теоремою Кеніга, прийнявши за полюс системи координат, що поступально рухається, центр мас C тіла.

З урахуванням (5.5), (5.6) матимемо

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (5.7)$$

де J_c – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно площині руху; ω – кутова швидкість обертального руху тіла навколо полюса C .

Отже, кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі складається із кінетичної енергії поступального руху тіла разом з центром мас і кінетичної

енергії тіла в його обертальному русі навколо осі, що проходить через центр мас тіла і перпендикулярна площині руху.

Якщо у якості полюса вибрати миттєвий центр швидкостей тіла і врахувати теорему Гюйгенса-Штейнера про момент інерції тіла відносно паралельних осей, то вираз (5.7) набуде вигляду

$$T = \frac{1}{2} M (\omega \cdot CP)^2 + \frac{1}{2} (J_p - M \cdot CP^2) \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M \omega^2 (CP)^2 + \frac{1}{2} J_p \omega^2 - \frac{1}{2} M \omega^2 (CP)^2 = \frac{1}{2} J_p \omega^2, \quad (5.8)$$

де CP – відстань між центром мас тіла і його миттєвим центром швидкостей. В формулі (5.8) враховано, що лінійна швидкість центра мас дорівнює: $V_c = \omega \cdot CP$.

5.3. Робота і потужність сили

Для характеристики ефекту дії сили на матеріальну точку на деякому шляху вводиться мера, яка називається роботою сили.

Нехай матеріальна точка M під дією сили \vec{F} виконала елементарне переміщення $d\vec{r}$ (рис. 5.2). Тоді *елементарною роботою* сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{r}$ називають скалярний добуток сили \vec{F} на елементарне переміщення точки її прикладання:

$$d'A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \alpha, \quad (5.9)$$

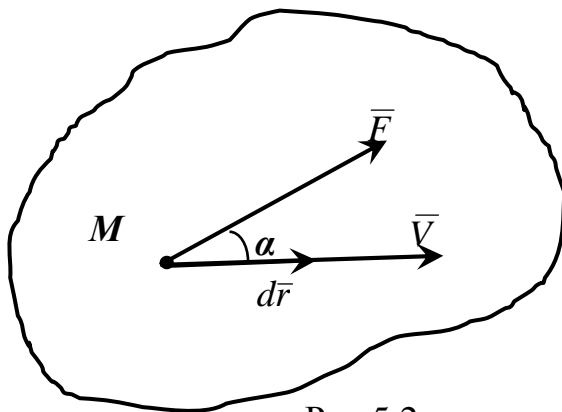


Рис.5.2

де α – кут між напрямками векторів \vec{F} і $d\vec{r}$.

Так як $d\vec{r} = \vec{V} dt$, де \vec{V} – швидкість точки, то запишемо ще один вираз елементарної роботи:

$$d'A = \vec{F} \vec{V} dt = FV \cos \alpha dt. \quad (5.10)$$

Із формули (5.9) елементарної роботи випливає, що ця величина може бу-

ти додатня, від'ємна або дорівнювати нулю. Якщо кут α між векторами \vec{F} і $d\vec{r}$ або \vec{V} гострий ($\cos \alpha > 0$), то елементарна робота додатня. Якщо кут α тупий

($\cos \alpha < 0$), то елементарна робота від'ємна. Якщо кут α прямий ($\cos \alpha = 0$), то елементарна робота дорівнює нулю.

Позначимо далі проекції сили \vec{F} на осі декартової системи координат через F_x, F_y, F_z , а проекції елементарного переміщення $d\vec{r}$ через dx, dy, dz . Тоді вираз елементарної роботи матиме вигляд:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (5.11)$$

У випадку, коли до точки M прикладена система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, яка має рівнодійну $\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$, то елементарна робота рівнодійної на переміщенні $d\vec{r}$ дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт сил системи на тому ж переміщенні:

$$\vec{R} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^n d'A_k.$$

Робота сили на кінцевому переміщенні

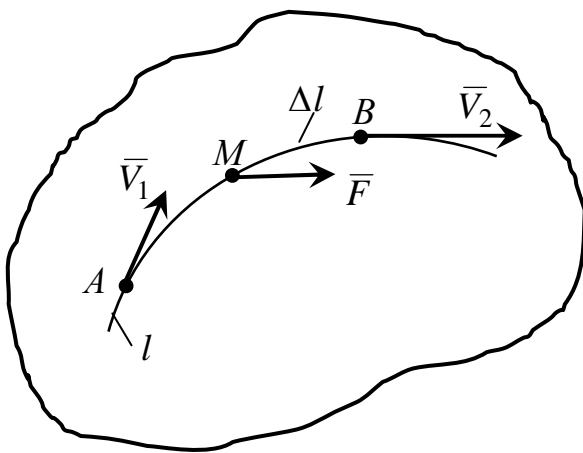


Рис. 5.3

Нехай матеріальна точка M під дією сили \vec{F} перемістилась із точки A в точку B вздовж кривої l (рис. 5.3). Розіб'ємо криву l на нескінченне число елементарних відрізків Δl і визначимо на кожному із них елементарну роботу сили \vec{F} . Алгебраїчна сума усіх цих елементарних робіт і буде повною ро-

ботою сили \vec{F} на кінцевому переміщенні AB точки її прикладання вздовж кривої l , тобто

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n d'A_k.$$

Отримана сума є інтегральною і може бути замінена криволінійним інтегралом, що береться вздовж кривої l на переміщенні AB . Тоді повна робота матиме вигляд

$$A = \int_A^B d'A = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (5.12)$$

Від криволінійного інтеграла (5.12) можна перейти до визначеного інтеграла, якщо врахувати, що $d\bar{r} = \bar{V}dt$, $dx = V_x dt$, $dy = V_y dt$, $dz = V_z dt$:

$$A = \int_0^t \bar{F} \cdot \bar{V} dt = \int_0^t (F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z) dt, \quad (5.13)$$

де момент часу $t = 0$ відповідає моменту знаходження точки M в положенні A , а момент t – моменту знаходження точки M в положенні B . Останній запис особливо корисний в тому випадку, коли сила задана, як функція часу.

За одиницю роботи сили в системі СІ беруть джоуль (Дж) – 1 Дж = 1 Н·м. В техніці часто роботу виражають у кіловат-годинах (1 квт·год = 3600 Дж).

Застосуємо далі одержані вирази для визначення повної роботи таких найбільш поширених силових факторів, як сила ваги, сила ньютонівського тяжіння, пружності.

Робота сили ваги

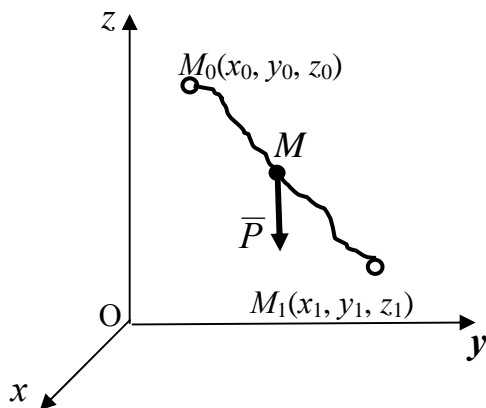


Рис. 5.4

Нехай точка M , на яку діє сила ваги $\bar{P} = m\bar{g}$, перемістилась із положення M_0 із координатами x_0, y_0, z_0 в положення M_1 з координатами x_1, y_1, z_1 (рис. 5.4). Визначимо елементарну і повну роботу сили \bar{P} на цьому переміщенні. Поблизу поверхні Землі силу тяжіння можна вважати сталою і спрямованою вздовж вертикалі вниз, тому вона має проекції $P_x = P_y = 0$,

$P_z = -P = -mg$. Її елементарна робота згідно з (5.11) дорівнює

$$d'A = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -P dz.$$

Повна робота сили \bar{P} на переміщенні M_0M_1

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = -P(z_1 - z_0) = P(z_0 - z_1),$$

Оскільки різниця $z_1 - z_0$ може бути додатною і від'ємною, то позначивши $z_1 - z_0 = \pm h$ отримаємо

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \quad (5.14)$$

Отже, робота сили ваги додатна, якщо початкова точка M_0 є вищою порівняно з кінцевою точкою M_1 (тобто коли точка опускається), і від'ємна, у випадку, коли початкова точка M_0 нижче кінцевої точки M_1 (тобто коли точка піднімається). Робота сили ваги на замкненому шляху буде, звичайно, дорівнювати нулю.

Зазначимо, що робота сили ваги не залежить від форми траєкторії матеріальної точки і довжині її шляху.

Робота сили ньютонівського тяжіння

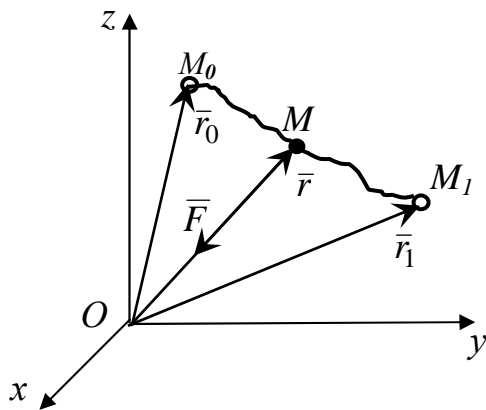


Рис. 5.5

Нехай на матеріальну точку M (рис. 5.5) діє сила тяжіння \vec{F} , яка притягує точку до нерухомого центру O і модуль якої дорівнює

$$F = \frac{km}{r^2},$$

де m – маса точки; r – модуль радіуса-вектора точки відносно центра тяжіння; k – коефіцієнт пропорційності.

Такий тип сил називається центральною силою, якщо лінія дії її під час руху матеріальної точки проходить через фіксовану точку простору.

В векторній формі силу тяжіння можна записати у такому вигляді:

$$\vec{F} = -\frac{km}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{km}{r^3} \cdot \vec{r},$$

де $\frac{\vec{r}}{r}$ – одиничний вектор радіуса-вектора точки M . Елементарна робота цієї сили дорівнює

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = -\frac{km}{r^3} \cdot \bar{r} \cdot d\bar{r}.$$

Тут $\bar{r} \cdot d\bar{r} = \frac{d(\bar{r} \cdot \bar{r})}{2} = \frac{dr^2}{2} = r \cdot dr$, тому отримаємо $d'A = -\frac{km}{r^2} \cdot dr$.

Якщо точка M перемістилася із початкового положення M_0 в кінцеве положення M_1 , то повна робота сили тяжіння на цьому переміщенні дорівнює

$$A = \int_{M_0}^{M_1} d'A = -\int_{r_0}^{r_1} km \frac{dr}{r^2} = km \frac{1}{r} \Big|_{r_0}^{r_1}$$

або остаточно
$$A = km \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (5.15)$$

Робота додатна, якщо $r_0 > r_1$, тобто якщо точка наближається до центру тяжіння.

Робота сили пружності

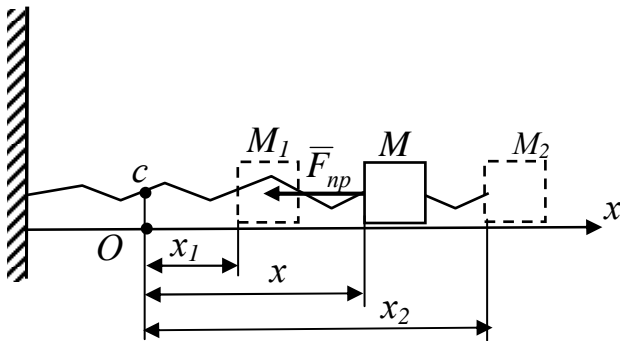


Рис. 5.6

Розглянемо вантаж M , який лежить на горизонтальній гладенькій площині, прикріплений до нерухомої опори пружиною з жорсткістю c (рис. 5.6) і має можливість переміщуватись в напрямку осі Ox . За початок координат візьмемо точку O , яка відповідає

положенню вантажу при недеформованій пружині. Поточне положення M вантажу визначимо координатою x .

Визначимо роботу, яку виконує сила пружності пружини \bar{F}_{np} при переміщенні вантажу із положення M_1 з координатою x_1 в положення M_2 з координатою x_2 .

Знайдемо спочатку проєкції сили \bar{F}_{np} : $F_{npy} = F_{npz} = 0$; $F_{npx} = -cx$.

Елементарну роботу визначимо за формулою (5.11):

$$d'A = F_{npx} dx + F_{npy} dy + F_{npz} dz = -Cxdx.$$

Повна робота сили пружності, відповідно до (5.12), буде дорівнювати

$$A = \int_{M_1}^{M_2} d'A = - \int_{x_1}^{x_2} cxdx = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2),$$

або
$$A = \frac{c}{2}(x_1^2 - x_2^2). \quad (5.16)$$

Робота сили пружності додатна, якщо початкова деформація пружини x_1 більше кінцевої x_2 , тобто вантаж переміщується до точки O (кінця недеформованої пружини). У випадку, коли (на рис. 5.6) положення точки M_1 співпадає з кінцем недеформованої пружини (точкою O), то $x_1 = 0$, а робота сили пружності буде

$$A = -\frac{c\Delta^2}{2},$$

де $\Delta = x_2$ – повне подовження пружини.

Як і в випадку сили ваги, робота сили пружності не залежить від форми траєкторії точки M , а залежить тільки від крайніх її положень M_1 і M_2 .

5.4. Робота сили, прикладеної до твердого тіла

Робота зовнішньої сили, прикладеної до твердого тіла

В загальному випадку руху тіла [2] швидкість точки M , до якої прикладена сила \bar{F} (рис. 5.7) дорівнює

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + (\bar{\omega} \times \bar{\rho}),$$

де \bar{V}_0 – швидкість точки O ; $\bar{\omega}$ – вектор кутової швидкості тіла; $\bar{\rho}$ – радіус-вектор точки M .

Елементарна робота цієї сили

$$d'A = \bar{F} \cdot \bar{V}dt = \bar{F} \cdot \bar{V}_0dt + \bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho})dt.$$

Враховуємо, що $\bar{V}_0dt = d\bar{r}_0$, а

$$\bar{F} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \bar{\omega} \cdot (\bar{\rho} \times \bar{F}) = \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}).$$

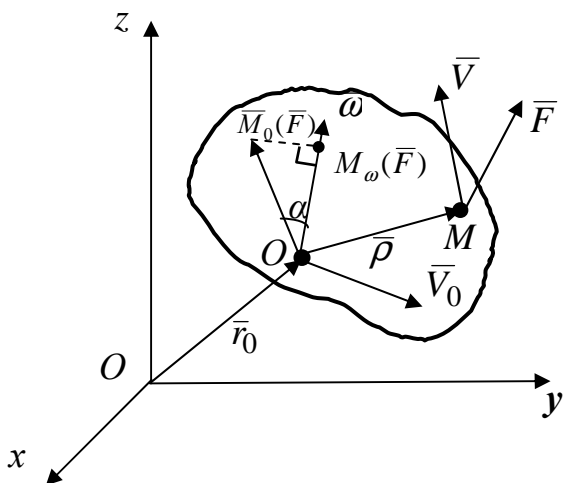


Рис. 5.7

Тоді отримаємо

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_0(\bar{F}) dt =$$

$$= \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + \omega dt M_0(\bar{F}) \cos \alpha,$$
де α – кут між векторами $\bar{\omega}$ і $\bar{M}_0(\bar{F})$.

Але $M_0(\bar{F}) \cos \alpha = M_\omega(\bar{F})$ є момент сили відносно миттєвої осі відносного обертання тіла навколо точки O , а $\omega dt = d\varphi$ є елементарний кут повороту навколо цієї осі.

Тоді остаточно

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + M_\omega(\bar{F}) d\varphi. \quad (5.17)$$

Таким чином, елементарна робота сили, що прикладена до твердого тіла у загальному випадку його руху, складається із елементарної роботи сили на елементарному переміщенні $d\bar{r}_0$ точки O і елементарної роботи моменту цієї сили, обчисленої відносно точки O , на елементарному обертальному переміщенні $d\varphi$ навколо осі, що проходить через цей полюс.

При поступальному русі твердого тіла маємо $d\varphi = 0$ і, відповідно,

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

де $d\bar{r}$ – елементарне переміщення, однакове для всіх точок тіла.

На кінцевому переміщенні тіла

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

де M_1, M_2 – початкове і кінцеве положення точки прикладання сили на її траєкторії.

В випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, наприклад Oz , елементарна робота зовнішньої сили буде

$$d'A = M_z(\bar{F}) \cdot d\varphi. \quad (5.18)$$

Робота сили на кінцевому кутовому переміщенні

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z(\bar{F}) \cdot d\varphi,$$

або при

$$M_z(\bar{F}) = \text{const}$$

$$A = M_z(\bar{F}) \cdot (\varphi_1 - \varphi_0).$$

Формулу (5.17) також можна застосувати і для плоско-паралельного руху твердого тіла. В цьому випадку

$$d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}_0 + M_z d\varphi, \quad (5.19)$$

де M_z – момент сили відносно осі Oz , що проходить через полюс O і перпендикулярна до площини руху.

5.5. Робота внутрішніх сил системи

Нехай між точками A і B механічної системи, положення яких відносно нерухомої точки O визначимо радіусами-векторами \bar{r}_A і \bar{r}_B , діють внутрішні сили взаємодії \bar{F}_A^i і \bar{F}_B^i (рис. 5.8). Відповідно до закону рівності дії і протидії $\bar{F}_A^i = -\bar{F}_B^i$. Сума елементарних робіт цих сил на будь-якому переміщенні дорівнює

$$\sum_{k=1}^2 d'A_k^i = \bar{F}_A^i \cdot \bar{V}_A dt + \bar{F}_B^i \cdot \bar{V}_B dt = \bar{F}_B^i (\bar{V}_B - \bar{V}_A) dt.$$

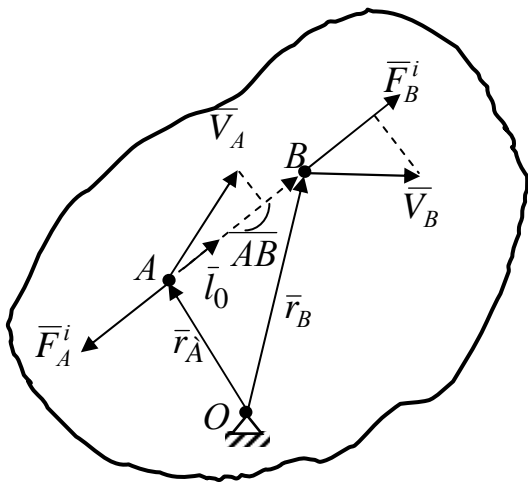


Рис. 5.8

Для кожного моменту часу

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} = \bar{r}_A + AB \cdot \bar{l}_0,$$

де \bar{l}_0 – одиничний вектор, який спрямований вздовж прямої AB .

Візьмемо похідну за часом від цієї рівності:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(AB)}{dt} \bar{l}_0 + AB \frac{d\bar{l}_0}{dt}$$

або після перетворень

$$\bar{V}_B - \bar{V}_A = \frac{d(AB)}{dt} \bar{l}_0 + AB \frac{d\bar{l}_0}{dt}.$$

Тоді сума елементарних робіт внутрішніх сил запишеться у вигляді

$$\sum_{k=1}^2 d'A_k^i = \bar{F}_B^i \cdot \bar{l}_0 \frac{d(AB)}{dt} dt + \bar{F}_B^i \cdot \frac{d\bar{l}_0}{dt} AB dt.$$

Так як похідна від одиничного вектора \bar{l}_0 за часом перпендикулярна йому, то вона буде перпендикулярна і прямій АВ, а отже і силі \bar{F}_B^i . Тому скалярний добуток $\bar{F}_B^i \cdot \frac{d\bar{l}_0}{dt} = 0$. Крім того, $\bar{F}_B^i \cdot \bar{l}_0 = F_B^i$, так що остаточно маємо

$$\sum_{k=1}^2 d'A_k^i = F_B^i \cdot d(AB). \quad (5.20)$$

Із отриманого виразу витікає, що якщо при русі системи відстані між її точками змінюються ($d(AB) \neq 0$), то і сума робіт внутрішніх сил системи відрізняється від нуля. Якщо відстань поміж точками системи при русі не змінюється, то ($d(AB) = 0$). Такі системи мають назву *незмінних* і сума робіт її внутрішніх сил дорівнює нулю. Прикладом незмінної системи є абсолютно тверде тіло, система твердих тіл, з'єднаних ідеальними стержнями, шарнірами без тертя, ідеальною ниткою, канатом, тросом або ланцюгом.

5.6. Потужність сили

Потужність сили визначається роботою, що виконує сила за одиницю часу. Так, якщо за час dt сила виконує роботу, яка дорівнює $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}$, то потужності сили

$$N = \frac{d'A}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{V} = |\bar{F}| \cdot |\bar{V}| \cos \alpha, \quad (5.21)$$

тобто потужність сили – це величина, яка дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки прикладання цієї сили.

Якщо сила прикладена до тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, то її потужність дорівнює (5.18):

$$N = \frac{M_z(\bar{F}) \cdot d\varphi}{dt} = M_z(\bar{F}) \omega = \frac{M_z(\bar{F}) \pi n}{30}, \quad (5.22)$$

де n – кількість обертів тіла за хвилину.

Тобто потужність дорівнює добутку моменту обертання на кутову швидкість тіла.

В випадку коли тіло рухається плоско-паралельно, то потужність сили, враховуючи (5.19) дорівнює

$$N = \bar{F} \cdot \bar{V}_0 + M_z \omega. \quad (5.23)$$

Одиницею виміру потужності є ват ($1\text{Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}}$). В техніці за одиницю потужності часто використовують кінську силу: $1\text{к.с.} = 736\text{Вт}$.

5.7. Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Запишемо для матеріальної точки масою m , що рухається під дією рівнодійної сили \bar{F} диференціальне рівняння руху точки в векторній формі:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}.$$

Помножимо обидві частини цього співвідношення скалярно на диференціал радіуса-вектора точки $d\bar{r}$:

$$m \cdot d\bar{V} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad \text{або} \quad m\bar{V} \cdot d\bar{V} = \bar{F} \cdot d\bar{r},$$

де $\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ – швидкість точки.

Враховуючи, що $d'A = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ є елементарна робота, отримаємо

$$m\bar{V} \cdot d\bar{V} = d'A.$$

Оскільки $m\bar{V} \cdot d\bar{V} = d\left(\frac{mV^2}{2}\right)$, то остаточно маємо

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = d'A \quad (5.24)$$

або, враховуючи (5.1), $dT = d'A$.

Остання рівність являє собою теорему про зміну кінетичної енергії точки: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сили, що діє на точку.

Якщо обидві частини (5.24) поділити на dt і врахувати формулу (5.21), то теорему можна надати у вигляді:

$$\frac{dT}{dt} = N, \quad (5.25)$$

тобто похідна за часом від кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює потужності сили, що діє на цю точку.

Нехай рухома точка, що рухається під дією сили \vec{F} вздовж деякої криволінійної траєкторії, має в положенні А швидкість \vec{V}_1 , а в положенні В – швидкість \vec{V}_2 (рис. 5.3). Візьмемо у визначених границях інтеграл від рівності (5.24):

$$\int_{V_1}^{V_2} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Остаточно з врахуванням (5.13) отримаємо

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_{1,2}. \quad (5.26)$$

або $T_2 - T_1 = A_{1,2}$,

де $A_{1,2}$ є робота сили на кінцевій ділянці криволінійної траєкторії АВ.

Рівність (5.26) являє собою теорему про зміну кінетичної енергії в кінцевій (інтегральній) формі: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякій кінцевій ділянці траєкторії дорівнює роботі сили, що діє на цю точку, на тій же ділянці траєкторії.

5.8. Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Розглянемо механічну систему, яка складається з n матеріальних точок масою m_n , на кожна з котрих діють рівнодійні зовнішніх \bar{F}_n^e і внутрішніх \bar{F}_n^i сил.

За теоремою про зміну кінетичної енергії для k -ої матеріальної точки механічної системи (5.24) маємо

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Виходячи з означення кінетичної енергії системи (5.2) і підсумовуючи, отримаємо

$$d\left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

або
$$dT = d'A^e + d'A^i, \quad (5.27)$$

де $d'A^e = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k$, $d'A^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k$ – відповідно суми елементарних робіт діючих на систему зовнішніх і внутрішніх сил.

Останнє співвідношення являє собою теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи.

Поділивши обидві частини рівності (5.27) на dt , отримаємо другу, також диференціальну, форму теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{d'A_k^e}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{d'A_k^i}{dt},$$

але відповідно до (5.21) $\sum_{k=1}^n \frac{d'A_k^e}{dt} = N^e$ – потужність зовнішніх сил,

$\sum_{k=1}^n \frac{d'A_k^i}{dt} = N^i$ – потужність внутрішніх сил системи. З урахуванням цих

позначень, отримаємо

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \quad (5.28)$$

тобто похідна за часом від кінетичної енергії системи дорівнює сумі потужностей всіх зовнішніх та внутрішніх сил, що діють на цю систему.

Проінтегрувавши обидві частини рівності (5.28) поміж двома положеннями системи – початковим А і кінцевим В (рис. 5.3), в яких кінетична енергія відповідно дорівнює T_1 і T_2 , матимемо

$$T_2 - T_1 = \int_A^B d'A^e + \int_A^B d'A^i$$

або
$$T_2 - T_1 = A^e + A^i, \quad (5.29)$$

де A^e , A^i – відповідно роботи зовнішніх та внутрішніх сил, що прикладені до системи на її переміщенні з положення А до В.

Вираз (5.29) являє собою теорему про зміну кінетичної енергії системи в кінцевій або інтегральній формі: зміна кінетичної енергії системи при її кінцевому переміщенні із одного положення в друге дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх зовнішніх та внутрішніх сил, діючих на систему.

Якщо механічна система є незмінною або складається із твердих тіл, які з'єднані ідеальними в'язями, то сума робіт внутрішніх сил системи дорівнює

нулю $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$. Тоді теорема про зміну кінетичної енергії незмінної механічної

системи або твердого тіла набуває вигляду:

а) у диференціальній формі: $dT = d'A^e$; (5.30)

б) у інтегральній (кінцевій) формі: $T_1 - T_0 = A^e$. (5.31)

Таким чином на відміну від раніше розглянутих загальних теорем динаміки системи в рівняння теорема про зміну кінетичної енергії можуть входити і внутрішні сили. Тобто безпосередньо за рахунок внутрішніх сил неможливо змінити ані кількість руху системи, ані кількість моменту руху, але можливо змінити її кінетичну енергію.

Питання для самоконтролю

1. Що називається кінетичною енергією матеріальної точки?
2. Що називається кінетичною енергією системи?
3. Чому дорівнює кінетична енергія твердого тіла при поступальному, обертальному і плоскопаралельному русі?
4. Яку розмірність має кінетична енергія T та потужність сили N в системі СІ?
5. Чому дорівнює диференціал кінетичної енергії системи і її похідна за часом?
6. Чи залежить кінцевий приріст кінетичної енергії системи від траєкторії, по якій переміщується точка?
7. Наведіть формули обчислення кінетичної енергії твердого тіла в диференціальній та інтегральній формах.
8. Як визначається величина елементарної роботи сили?
9. Як визначається робота сили на кінцевому переміщенні?
10. Чому дорівнює елементарна робота сили, прикладеної до твердого тіла?
11. Чому дорівнює робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається?
12. Чи входять до рівняння, що визначає теорему про зміну кінетичної енергії системи, внутрішні сили цієї системи?
13. В якому випадку в рівняння, що визначає теорему про зміну кінетичної енергії системи, не входять внутрішні сили?

14. Сформулюйте теорему Кеніга для складного руху матеріальної точки.
15. Як визначається робота сили ваги?
16. Як визначається робота сили ньютонівського тяжіння?
17. Як визначається робота сили пружності?
18. Що називається потужністю сили та як вона визначається?
19. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній та інтегральній формах.

6. ПОТЕНЦІАЛЬНЕ СИЛОВЕ ПОЛЕ

6.1. Силоне поле. Силова функція

Робота сили на кінцевому переміщенні точки її прикладення в загальному випадку залежить від траєкторії цієї точки, часу, а іноді й від закону її руху вдовж траєкторії. Однак, дуже часто робота сили залежить тільки від початкового й кінцевого положення точки. В даному випадку мають місце сили, залежні лише від координат матеріальних точок, що рухаються.

Силоним полем називають частину простору, у якому на матеріальну точку діє сила, залежна від координат точки і часу, але не залежить від її швидкості (рис. 6.1):

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}) = \vec{F}(t, x, y, z). \quad (6.1)$$

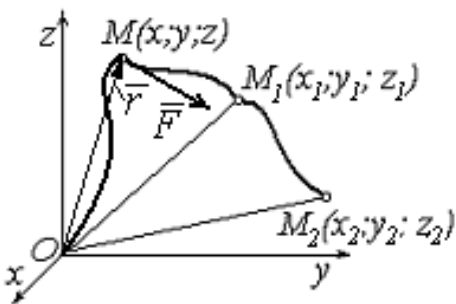


Рис. 6.1

Якщо сила явно не залежить від часу, то силоне поле називають *стаціонарним*, якщо залежить – *нестаціонарним*. Силоними полями є електричні, магнітні, електромагнітні поля, поле гравітації Землі, пружні середовища.

У проекціях на осі системи координат $Oxyz$ залежність (6.1) для стаціонарного силового поля прийме вигляд:

$$F_x = F_x(x, y, z); \quad F_y = F_y(x, y, z); \quad F_z = F_z(x, y, z). \quad (6.2)$$

Стаціонарне силоне поле називають потенціальним, якщо робота сил поля не залежить від форми її траєкторії, а є однозначною функцією координат початкового і кінцевого положень точки.

У цьому разі кожній точці такого поля відповідає певне значення роботи, яку виконують сили поля під час переходу матеріальної точки з початку координат O у деяку точку поля $M(x, y, z)$ (рис. 6.1). Отже, маємо

$$A_{OM} = U(\vec{r}) = U(x, y, z). \quad (6.3)$$

В (6.3) функцію $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$ називають *силовою функцією*. Фізичний зміст силової функції $U(x, y, z)$ полягає в тому, що вона дорівнює роботі, яку

виконують потенціальні сили поля під час переходу матеріальної точки із початкового положення в задане.

Розглянемо властивості силової функції.

Для цього обчислимо роботу сил поля при переміщенні точки з початкового положення M_1 у кінцеве M_2 (рис. 6.1).

Позначимо силові функції, що відповідають цим положенням, через $U_1(x_1, y_1, z_1)$ і $U_2(x_2, y_2, z_2)$. Враховуючи, що U_1 відповідає роботі сил поля під час переходу матеріальної точки з початку координат O у точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а U_2 – роботі сил поля під час переходу тієї самої матеріальної точки з початку координат O у точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$, для обчислення роботи $A_{M_1M_2}$ виберемо шлях від точки O до точки M_2 , що проходить через точку M_1 , розбиваючи траєкторію OM_1M_2 на ділянки OM_1 і M_1M_2 .

$$\text{Тоді} \quad A_{OM_2} = A_{OM_1} + A_{M_1M_2}$$

$$\text{або} \quad U_2 = U_1 + A_{M_1M_2},$$

де $A_{M_1M_2}$ – робота сили поля \bar{F} на відрізку траєкторії M_1M_2 .

З останнього співвідношення маємо

$$A_{M_1M_2} = U_2 - U_1, \quad (6.4)$$

Отже, *робота сили, що діє на матеріальну точку під час її руху в потенціальному полі, дорівнює різниці силових функцій в її кінцевому і початковому положеннях.*

Із залежності (6.4) випливає, що *під час руху матеріальної точки по замкнених траєкторіях у потенціальному силовому полі робота сил поля на цих траєкторіях дорівнює нулю:*

$$A_{M_1M_2M_1} = 0. \quad (6.5)$$

Якщо розглядати елементарне переміщення матеріальної точки по траєкторії, враховуючи, що нескінченно малий приріст функції з точністю до нескінченно малих величин другого порядку малості збігається з диференціалом цієї функції, то очевидно, що елементарна робота сили в

потенціальному силовому полі дорівнює повному диференціалу силовій функції:

$$d'A = dU. \quad (6.6)$$

Тобто, приходимо до висновку, що в потенціальному силовому полі елементарна робота є повним диференціалом силовій функції.

Інтегруючи (6.6), визначаємо силову функцію

$$U = \int d'A + C = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C, \quad (6.7)$$

де $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ – елементарна робота сили в напрямку осей Ox, Oy, Oz ; C – стала інтегрування.

Еквіпотенціальними поверхнями або поверхнями однакового рівня називають геометричне місце точок, на якому силова функція залишається сталою:

$$U(x,y,z) = C = \text{const}. \quad (6.8)$$

Якщо надати сталій C різні значення, отримаємо сім'ю еквіпотенціальних поверхонь. При $U(x,y,z) = 0$ еквіпотенціальну поверхню називають поверхнею нульового рівня. Оскільки силова функція, згідно з (6.7), визначається з точністю до довільного постійного доданка, то за нульовий рівень можна взяти будь-яку еквіпотенціальну поверхню.

Скористаємося співвідношенням (6.6), щоб за відомою силовою функцією визначити силу. При цьому елементарну роботу виразимо за формулою

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

а повний диференціал силовій функції трьох змінних $U(x, y, z)$ подамо в вигляді:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Оскільки $d'A = dU$ і диференціали dx, dy, dz довільні та лінійно незалежні, то коефіцієнти при диференціалах мають відповідно дорівнювати одне одному. Тобто маємо

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (6.9)$$

Отже, проєкції сили дорівнюють частинним похідним від силової функції за відповідними координатами.

Визначаємо:

модуль сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (6.10)$$

напрямні косинуси

$$\cos(\bar{F}, \bar{i}) = F_x / F, \quad \cos(\bar{F}, \bar{j}) = F_y / F, \quad \cos(\bar{F}, \bar{k}) = F_z / F,$$

де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орти координатних осей,

і вектор сили

$$\bar{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \quad (6.11)$$

Встановимо критерій існування силової функції.

Користуючись формулами (6.9) обчислюємо другі змішані частинні похідні від силової функції $U(x,y,z)$ за змінними x, y, z . Дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}; & \frac{\partial F_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial F_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Порівнюючи відповідні вирази (6.12), отримаємо співвідношення

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \quad (6.13)$$

Рівності (6.13) є ознакою потенціальності силового поля. Якщо ці умови не виконуються, то силове поле не є потенціальним. У випадку коли умови (6.13) виконуються, то елементарна робота $d'A$ є повним диференціалом деякої функції і поле буде потенціальним.

Приклад 6.1. Проекції сили $F_x = 2xy$; $F_y = xy^2$. Чи потенціальним є силове поле, в якому діє сила?

Розв'язання. Користуючись аналітичним критерієм (6.13), визначимо частинні похідні від проекцій сили за відповідними координатами. Маємо $\partial F_x / \partial y = 2x$; $\partial F_y / \partial x = y^2$. Як бачимо, зазначений критерій не виконується, оскільки $\partial F_x / \partial y \neq \partial F_y / \partial x$.

Отже, розглядуване силове поле не є потенціальним.

Приклад 6.2. Знайти такі значення n , при яких силове поле є потенціальним, якщо $F_x = x y^n$, $F_y = x^n y$, $F_z = z^n$.

Розв'язання. Згідно з критерієм потенціальності силового поля (6.13), знайдемо

$$\partial F_x / \partial y = n x y^{n-1}; \quad \partial F_y / \partial x = n x^{n-1} y; \quad \partial F_x / \partial z = 0; \quad \partial F_y / \partial z = 0; \quad \partial F_z / \partial x = 0; \quad \partial F_z / \partial y = 0.$$

З аналізу частинних похідних бачимо, що рівності (6.13) можливі лише при $n = 2$ і $n = 0$. Тоді $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy$; і $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$.

Отже, силове поле, сили якого задовольняють умови задачі, буде потенціальним лише при $n = 2$ або $n = 0$.

6.2. Потенціальна енергія

Для характеристики властивостей механічного руху в потенціальному силовому полі вводять ще одну функцію $\Pi(x, y, z)$, яка називається *потенціальною енергією* матеріальної точки або системи матеріальних точок. Потенціальна енергія дорівнює силовій функції зі знаком мінус:

$$\Pi = -U. \quad (6.14)$$

Згідно з формулою (6.7),

$$\Pi = -\int d'A + C = -\int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + C. \quad (6.15)$$

На основі рівності (6.6) маємо

$$d'A = dU = -d\Pi. \quad (6.16)$$

Звідси випливає, що робота при переміщенні точки із положення O в M (рис. 6.1) обчислюється за формулою

$$A_{OM} = - \int_{\Pi_0}^{\Pi} d\Pi = \Pi_0 - \Pi, \quad (6.17)$$

де Π_0 , Π – відповідна потенціальна енергія в початковому (O) і кінцевому (M) положенні точки (рис. 6.1).

Тобто, повна робота сили під час руху в потенціальному полі дорівнює різниці потенціальної енергії в початковому і кінцевому положеннях точки.

Прийmemo, що в початковому положенні матеріальної точки значення потенціальної енергії $\Pi_0 = 0$, а рух матеріальної точки виконується із заданого положення в її початкове положення. Згідно з формулою (6.17) маємо

$$A_{MO} = \Pi. \quad (6.18)$$

Скориставшись співвідношенням (6.9) і враховуючи (6.14), виразимо проекції сили через потенціальну енергію:

$$F_x = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = - \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (6.19)$$

Якщо в потенціальному силовому полі рухається система із n матеріальних точок, то маємо:

силова функція і потенціальна енергія поля

$$U = -\Pi = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n); \quad (6.20)$$

сили поля, які діють на кожну матеріальну точку

$$\overline{F}_i = \overline{F}_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n); \quad (6.21)$$

проекції сил поля

$$F_{x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; \quad F_{y_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}; \quad F_{z_i} = \frac{\partial U}{\partial z_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}; \quad (6.22)$$

елементарна робота сил поля на елементарному переміщенні системи матеріальних точок

$$d'A = dU = - d\Pi; \quad (6.23)$$

робота сил поля на переміщенні системи під час переходу системи з початкового положення 1 в кінцеве 2

$$A_{1,2} = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2.$$

6.3. Приклади обчислення силових функцій і потенціальної енергії

Якщо відома силова функція, то на підставі (6.14) буде відома й потенціальна енергія. Визначимо силові функції і потенціальні енергії сил ваги і пружності.

Однорідне поле сили ваги

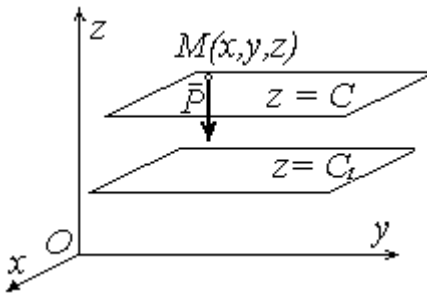


Рис. 6.2

Направимо вісь Oz (рис. 6.2) вертикально вгору. Проекції сили ваги $\bar{P} = -m\bar{g}$ на осі координат дорівнюють:

$$P_x=0; \quad P_y=0; \quad P_z=-mg.$$

Можна переконатись, що умови (6.13) виконуються і, отже, точка, маса якої дорівнює

m , знаходиться в потенціальному силовому полі.

Обчислимо елементарну роботу сили \bar{P} :

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mg dz.$$

Так як елементарна робота є повним диференціалом силової функції, то силове поле сили ваги є потенціальним і силова функція визначається за формулою (6.7):

$$U = -\int mg dz + C = -mg z + C.$$

Потенціальна енергія сили ваги відповідно запишеться у вигляді

$$\Pi = -U = mg z + C_1. \quad (6.24)$$

З виразу (6.24) слідує, що рівняння екіпотенціальних поверхонь буде $U = const$ або $z = const$, тобто поверхнею однакового рівня є горизонтальна площина.

Сила пружності

Прийmemo за початкову точку M_0 положення кінця недеформованої пружини, у якій потенціальна енергія дорівнює нулю (рис. 6.3). Нехай довжина пружини в недеформованому стані дорівнює $|\bar{r}_0| = r_0$, а в положенні $M - |\bar{r}| = r$. Тоді

$$|\bar{F}| = -c(r - r_0) = -c\lambda,$$

де \bar{F} – сила пружності пружини; c – коефіцієнт жорсткості пружини, $r - r_0 = \lambda$ – деформація пружини.

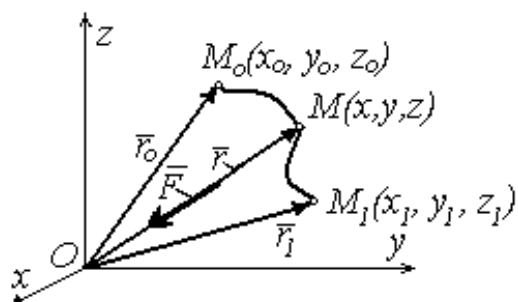


Рис. 6.3

При $r < r_0$ пружна сила є відштовхуючою, а при $r > r_0$ – що притягує.

Перевіримо, що умови (6.13) тут виконуються. Сила \bar{F} – це центральна сила (див. п. 5.3), модуль якої залежить тільки від відстані r до центра O і лінія дії якої завжди перетинає центр.

Помістимо початок системи координат у центр O . Тоді центральну силу можна записати так

$$\bar{F}(r) = F(r) \frac{\bar{r}}{r},$$

а її проекції на осі координат дорівнюють:

$$F_x = F(r) \frac{x}{r}; \quad F_y = F(r) \frac{y}{r}; \quad F_z = F(r) \frac{z}{r},$$

де $F(r)$ – залежність модуля сили від модуля вектора \bar{r} , проекції котрого на осі координат x, y, z ; $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ – напрямні косинуси одиничного вектора $\frac{\bar{r}}{r}$.

Крім того, маємо

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \text{ отже, } r dr = x dx + y dy + z dz.$$

Обчислюємо умови (6.13):

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left[\frac{F(r)}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{F(r)}{r} \right], \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left[\frac{F(r)}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{F(r)}{r} \right].$$

Тобто виконується рівність $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$. Інші рівності (6.13) також

виконуються і тому силове поле потенціальне.

Елементарна робота сили пружності

$$d'A = -c\lambda d\lambda.$$

Силу функцію й потенціальну енергію сили пружності визначаємо за формулами

$$U = -\int_0^{\lambda} c\lambda d\lambda = -c\frac{\lambda^2}{2} = -\frac{c(r-r_0)^2}{2},$$

$$\Pi = -U = \frac{c\lambda^2}{2} = \frac{c(r-r_0)^2}{2}.$$

Поверхня рівня $U = C = const$ є сфера радіуса $r = const$.

Знайдемо також згідно (6.4) роботу сили пружності при переміщенні кінця пружини із деякого початкового положення M_0 в кінцеве положення M_1 :

$$A_{M_0M_1} = U_2 - U_1 = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2),$$

де λ_0, λ_1 – деформації пружини, які відповідають точкам M_0, M_1 .

Аналогічно визначимо силову функцію й потенціальну енергію пружного стержня при його крученні. Маємо

$$U = -\Pi = -k\frac{\varphi^2}{2} + C,$$

де k – жорсткість при крученні, φ – кутова деформація.

6.4. Закон збереження механічної енергії точки

Для матеріальної точки можна подати теорему про зміну кінетичної енергії в вигляді:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}.$$

Якщо матеріальна точка рухається в стаціонарному потенціальному силовому полі, то робота сил поля (див. 6.17) $A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2$.

Отже

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Pi_1 - \Pi_2 \text{ або } \frac{mv_2^2}{2} + \Pi_2 = \frac{mv_1^2}{2} + \Pi_1 = const.$$

Позначимо через E повну механічну енергію точки, яка складається з її кінетичної й потенціальної енергій, тоді отримаємо

$$E = \frac{mv^2}{2} + \Pi = const. \quad (6.25)$$

Таким чином, закон збереження механічної енергії для матеріальної точки можна сформулювати так: *під час руху матеріальної точки в потенціальному силовому полі повна механічна енергія є сталою величиною.*

6.5. Закон збереження механічної енергії системи

Відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок (див. п. 5.8), маємо $dT = \sum_{k=1}^n d'A_k$.

Тут T – кінетична енергія системи, $\sum_{k=1}^n dA_k = \sum_{k=1}^n d'A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n d'A_k^{(i)}$ – сума елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил системи. Якщо всі зовнішні і внутрішні сили, які діють на систему, є потенціальними то

$$\sum_{k=1}^n dA_k = -d\Pi,$$

де $d\Pi$ – диференціал потенціальної енергії зовнішніх і внутрішніх сил системи. Тому маємо

$$dT = -d\Pi.$$

Інтегруючи це співвідношення в границях, що відповідають переміщенню системи із деякого початкового положення, в якому кінетична і потенціальна енергія системи мають значення T_1 і Π_1 , в деяке кінцеве положення, де кінетична і потенціальна енергія дорівнюють T_2 і Π_2 , матимемо

$$T_2 - T_1 = -\Pi_2 + \Pi_1, \text{ або } T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2 = \text{const.}$$

Сума кінетичної T і потенціальної Π енергій матеріальної системи називається повною механічною енергією й позначається E .

Отже, при русі системи матеріальних точок в потенціальному силовому полі її механічна енергія залишається незмінною, тобто

$$E = T + \Pi = \text{const.} \quad (6.26)$$

Формула (6.26) виражає закон збереження механічної енергії консервативної системи. На основі закону збереження механічної енергії сили, що мають потенціал, називаються *консервативними*.

При наявності сил опору повна механічна енергія зменшується. Для цих сил умови закону збереження механічної енергії не виконуються. Отже, частина механічної енергії переходить в інші форми енергії, наприклад, теплову, електричну та ін. Таке явище має назву дисипації, тобто розсіювання механічної енергії, і дані сили мають назву дисипативних.

Енергія є загальною мірою різних форм руху матерії. Закон збереження і перетворення енергії стосується всіх процесів, які відбуваються в природі, – фізичних, хімічних, біологічних та інших і полягає в тому, що енергія, як загальна міра руху матерії під час перетворення однієї форми її в іншу, не зникає і не з'являється, а переходить в еквівалентних кількісних співвідношеннях. У законі збереження механічної енергії йдеться про перетворення кінетичної енергії в потенціальну й навпаки.

Питаній для самоконтролю

1. Які сили називають потенціальними?
2. Що називають силовою функцією?
3. Яке силове поле називають потенціальним?
4. Які умови існування силової функції?
5. Як визначається потенціальна енергія і як вона зв'язана із силовою функцією?
6. Як визначається робота сили при переміщенні точки в потенціальному полі?
7. Як записується критерій потенціальності силового поля?
8. Які поверхні називають екіпотенціальними?
9. Як формулюється теорема про зміну повної механічної енергії системи в потенціальному силовому полі?
10. Як виразити проекції сили, що діє на точку в потенціальному полі, через силову функцію і через потенціальну енергію?
11. Коли повна механічна енергія системи є сталою величиною?
12. Як змінюється механічна енергія системи при дії на неї дисипативних сил?

7. МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА

Принцип Д'Аламбера називають також методом кінетостатики і він дає узагальнений підхід до дослідження руху будь-якої матеріальної точки і механічної системи. Цей метод є особливо зручним, якщо треба визначити реакції в'язей при заданих законах руху точки і діючих сил.

7.1. Принцип Д'Аламбера для невідільної матеріальної точки

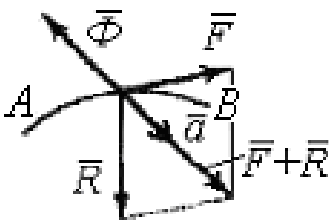


Рис. 7.1

Нехай на матеріальну точку, яка рухається вздовж траєкторії AB , діє рівнодіюча \bar{F} активних сил і рівнодіюча реакцій в'язей \bar{R} (рис. 7.1). Диференціальне рівняння руху точки має вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}.$$

Запишемо цю рівність як

$$\bar{F} + \bar{R} + (-m\bar{a}) = 0. \quad (7.1)$$

Доданок $(-m\bar{a})$ називають силою інерції матеріальної точки і позначають через $\bar{\Phi}$. Тому вектор сили інерції $\bar{\Phi}$ дорівнює добутку маси точки m на її прискорення \bar{a} і напрямлений він протилежно напрямку прискорення \bar{a} , тобто

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}. \quad (7.2)$$

З урахуванням цього позначення рівність (7.1) матиме вигляд

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (7.3)$$

Це рівняння і виражає розглядаємий принцип Даламбера: *для невідільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакцій в'язей і сили інерції дорівнює нулю.*

Це рівняння називають також рівнянням кінетостатики, а метод дослідження динаміки точки – методом кінетостатики.

Сили \bar{F} , \bar{R} , $\bar{\Phi}$ утворюють для точки систему збіжних сил і рівняння (7.3) виражає умову рівноваги цієї системи сил.

Отже, якщо до всіх діючих на матеріальну точку сил додати силу інерції (7.2), то в кожний момент руху отримаємо зрівноважену систему сил $\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}$. Зазначимо, що поняття «сила інерції» є формальним і не пов'язане з реальними силами, якими є лише активні сили і реакції в'язей. Сила інерції $\bar{\Phi}$ реально до точки не прикладена, її введено умовно (віртуально) виключно лише для моделювання умови статичної рівноваги матеріальної точки.

Тому метод кінетостатики є лише формальним віртуальним способом зведення рівнянь динаміки до рівнянь статики. Проте для розв'язання ряду практичних задач такий спосіб досить зручний.

Зазначимо, що сила інерції (7.2), яка дорівнює добутку маси точки на прискорення, завжди напрямлена в бік, протилежний прискоренню, але не руху. Тільки в разі уповільненого прямолінійного руху сила інерції збігатиметься з напрямком руху.

У проєкціях на осі інерціальної системи координат рівність (7.3) має вигляд

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0, \quad F_y + R_y + \Phi_y = 0, \quad F_z + R_z + \Phi_z = 0, \quad (7.4)$$

де $\Phi_x = -ma_x = -m\dot{v}_x = -m\ddot{x}$, $\Phi_y = -ma_y = -m\dot{v}_y = -m\ddot{y}$, $\Phi_z = -ma_z = -m\dot{v}_z = -m\ddot{z}$ – проєкції сили інерції $\bar{\Phi}$ на осі інерціальної системи координат Ox, Oy, Oz .

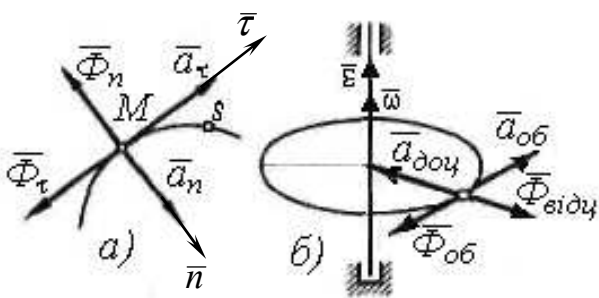


Рис. 7.2

Якщо спроектувати рівняння (7.3) на осі натурального тригранника (рис. 7.2,а), то отримаємо

$$\left. \begin{aligned} F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau &= 0, \\ F_n + R_n + \Phi_n &= 0, \\ F_b + R_b &= 0, \end{aligned} \right\} (7.5)$$

де $\Phi_\tau = -ma_\tau = -m \frac{d^2 s}{dt^2}$, $\Phi_n = -ma_n = -m \frac{v^2}{\rho}$ – дотична і нормальна сили інерції.

Проєкція сили інерції на бінормаль дорівнює нулю, тому що проєкція прискорення на цю вісь завжди дорівнює нулю ($a_b = 0$).

При рівномірному русі по будь-якій траєкторії буде $\Phi_\tau = 0$, тому що $a_\tau = 0$. Отже, сила інерції в такому разі визначається тільки нормальною силою інерції, яка напрямлена вздовж нормалі до траєкторії від центра кривизни.

Якщо матеріальна точка є однією з точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω і з кутовим прискоренням ε (рис. 7.2,б), то доцентрове прискорення буде збігатися з нормальним, а обертальне – з дотичним (тангенціальним). Відповідні до цих прискорень обертальну й відцентрову сили інерції:

$$\Phi_{об} = -ma_{об} = -m\varepsilon r, \quad \Phi_{відц} = -ma_{відц} = -m\omega^2 r,$$

де r – відстань точки від осі її обертання.

7.2. Принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок

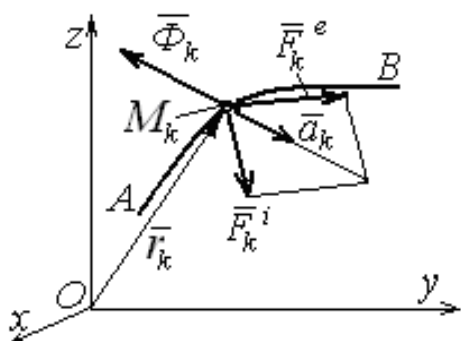


Рис. 7.3

Покажемо сили, що діють на деяку точку M_k системи, які дамо як рівнодійні зовнішніх \bar{F}_k^e і внутрішніх \bar{F}_k^i сил по відношенню до всієї системи (рис. 7.3). Запишемо для точки M_k рівняння Д'Аламбера (7.3):

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{\Phi}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (7.6)$$

Помножимо далі це рівняння зліва векторно на радіус-вектор \bar{r}_k , тобто визначимо моменти сил відносно центра O :

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (7.7)$$

Підсумовуючи для всієї системи рівняння (7.6) і (7.7) за індексом k і враховуючи, що внутрішні сили системи задовольняють умовам

$$\sum_1^n \bar{F}_k^i = 0, \quad \sum_1^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0,$$

дістанемо рівняння принципу Д'Аламбера для системи в такому вигляді:

$$\sum_1^n \bar{F}_k^e + \sum_1^n \bar{\Phi}_k = 0, \quad (7.8)$$

$$\sum_1^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) + \sum_1^n \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (7.9)$$

Визначимо далі головні вектори зовнішніх сил і сил інерції відповідно через

$$\bar{F}^e = \sum_1^n \bar{F}_k^e, \quad \bar{\Phi}^{in} = \sum_1^n \bar{\Phi}_k, \quad (7.10)$$

а головний момент зовнішніх сил і сил інерції відносно деякого центра O як

$$\bar{M}_O^F = \sum_1^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^e); \quad \bar{M}_O^{in} = \sum_1^n (\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k). \quad (7.11)$$

Вирази (7.8) і (7.9) запишемо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^e + \bar{\Phi}^{in} &= 0, \\ \bar{M}_O^F + \bar{M}_O^{in} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Рівняння (7.12) виражають принцип Д'Аламбера для системи матеріальних точок і можуть бути сформульовані так: *векторні суми головних векторів зовнішніх сил і сил інерції, а також головного моменту зовнішніх сил і головного моменту сил інерції відносно будь-якого центра O дорівнюють нулю.*

Спроекуємо рівняння (7.8), (7.9) на осі інерціальної системи координат:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n F_{kx}^e + \sum_1^n \Phi_{kx} &= 0, & \sum_1^n M_{0x}(\bar{F}_k^e) + \sum_1^n M_{0x}(\bar{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_1^n F_{ky}^e + \sum_1^n \Phi_{ky} &= 0, & \sum_1^n M_{0y}(\bar{F}_k^e) + \sum_1^n M_{0y}(\bar{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum_1^n F_{kz}^e + \sum_1^n \Phi_{kz} &= 0, & \sum_1^n M_{0z}(\bar{F}_k^e) + \sum_1^n M_{0z}(\bar{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Звісно, до зовнішніх сил належать активні сили \bar{F}_a й реакції в'язей \bar{R} :

$$\begin{aligned} \bar{F}^e &= \bar{F}^a + \bar{R}, \\ \bar{M}^{in} &= \bar{M}_0^a + \bar{M}_0^F. \end{aligned}$$

Щоб використовувати рівняння кінетостатики, треба мати вирази для головного вектора і головного моменту сил інерції системи матеріальних точок і, зокрема, твердого тіла.

Із першого рівняння (7.12) витікає, що головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил і напрямлений протилежно йому

$$\bar{\Phi}^{ih} = \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = -\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

а відповідно теореми про рух центра мас системи, головний вектор зовнішніх сил системи дорівнює

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = M\bar{a}_C,$$

де M – маса системи, \bar{a}_C – прискорення центра мас. Тому маємо

$$\bar{\Phi}^{ih} = \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = -M\bar{a}_C. \quad (7.14)$$

Тобто, головний вектор сил інерції системи дорівнює добутку маси системи на прискорення її центра мас, і спрямований у бік, протилежний цьому прискоренню.

Із другого рівняння (7.12) знаходимо, що головний момент сил інерції механічної системи відносно довільного центра O дорівнює

$$\bar{M}_O^{ih} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = -\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e).$$

Але з теореми про зміну моменту кількості руху системи маємо:

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = \frac{d\bar{K}_O}{dt},$$

і тому

$$\bar{M}_O^{ih} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = -\frac{d\bar{K}_O}{dt}. \quad (7.15)$$

Тобто, головний момент сил інерції механічної системи відносно довільного центра дорівнює похідній за часом, яка взята з від'ємним знаком, від моменту кількості руху системи відносно того ж центра.

Обчислимо тепер головний момент сил інерції твердого тіла, що рухається довільно. Виберемо за центр приведення центр мас C тіла. Тоді маємо, враховуючи (7.15),

$$\bar{M}_C^{ih} = -\frac{d'\bar{K}_C}{dt}.$$

Нехай система координат $Cxuz$ жорстко зв'язана з тілом. Тоді згідно з формулами, які визначають похідну за часом від моменту кількості руху твердого тіла, отримаємо

$$\bar{M}_C^{ih} = -\frac{d'\bar{K}_C}{dt} - \bar{\omega} \times \bar{K}_C. \quad (7.16)$$

Тут $\frac{d'\bar{K}_C}{dt} = \frac{d'K_{Cx}}{dt} \bar{i} + \frac{d'K_{Cy}}{dt} \bar{j} + \frac{d'K_{Cz}}{dt} \bar{k}$ – відносна похідна, $\bar{\omega}$ – кутова швидкість рухомої системи координат.

Спроектуємо рівняння (7.16) на осі координат

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^{ih} &= -\frac{d'K_{Cx}}{dt} - (\omega_y K_{Cz} - \omega_z K_{Cy}), \\ M_{Cy}^{ih} &= -\frac{d'K_{Cy}}{dt} - (\omega_z K_{Cx} - \omega_x K_{Cz}), \\ M_{Cz}^{ih} &= -\frac{d'K_{Cz}}{dt} - (\omega_x K_{Cy} - \omega_y K_{Cx}) \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

і врахуємо вирази (4.51) проєкцій моменту кількості руху, що обчислені для нерухомої точки (див. п. 4.9):

$$K_{Cx} = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z,$$

$$K_{Cy} = -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z,$$

$$K_{Cz} = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z.$$

Тоді отримаємо

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^{ih} &= -I_x \varepsilon_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\ M_{Cy}^{ih} &= -I_y \varepsilon_y + I_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{yx} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - \\ &\quad - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x, \\ M_{Cz}^{ih} &= -I_z \varepsilon_z + I_{xz} (\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) + I_{yz} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Наведені формули визначають головний момент сил інерції твердого тіла, що рухається довільно.

7.3. Сили інерції твердого тіла в часткових випадках його руху

Поступальний рух твердого тіла.

Якщо тіло рухається поступально, то воно не обертається навколо центра

мас і тому
$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^e) = 0.$$

Отже, з урахуванням (7.12) маємо $\bar{M}_C^{ih} = 0.$

При поступальному русі прискорення всіх точок тіла однакові і дорівнюють прискоренню центра мас. Отже, сили інерції цих точок складають систему паралельних сил, спрямованих в одну сторону. Така система сил приводиться до рівнодійної сили $\bar{\Phi}$, яка згідно (7.14) дорівнює головному вектору сил інерції, тобто

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C. \quad (7.19)$$

Лінія дії рівнодійної сили інерції проходить через центр мас, так як головний момент сил інерції точок тіла відносно центра мас дорівнює нулю.

Отже, *при поступальному русі твердого тіла сили інерції його точок приводяться до рівнодійної сили інерції, яка прикладена в центрі мас тіла, дорівнює за модулем добутку маси тіла на прискорення центру мас і напрямлена протилежно цьому прискоренню.*

Обертання тіла навколо нерухомої осі.

Виберемо за центр приведення сил інерції будь-яку точку O на осі обертання Oz , а осі Ox і Oy жорстко скріпимо з тілом. Вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ напрямлені вздовж осі обертання і тому

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_z = \pm\omega, \quad \varepsilon_z = \pm\varepsilon.$$

З (7.18) маємо проекції головного моменту сил інерції

$$M_{Ox}^{ih} = I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2, \quad M_{Oy}^{ih} = I_{xy}\varepsilon + I_{xz}\omega^2, \quad M_{Oz}^{ih} = -I_z\varepsilon.$$

Головний вектор сил інерції в точці O визначається за формулою (7.14):

$$\bar{\Phi}^{ih} = -M\bar{a}_C. \quad (7.20)$$

При обертанні тіла навколо нерухомої осі головний вектор сил інерції і проекції головного моменту сил інерції визначаються формулами.

Якщо центр мас C знаходиться на осі обертання z , то прискорення $\bar{a}_C = 0$, отже головний вектор сил інерції

$$\bar{\Phi}^{ih} = 0. \quad (7.21)$$

Проекції головного моменту сил інерції на осі координат у цьому випадку визначають за формулами:

$$M_{Cx}^{ih} = I_{xz} \varepsilon - I_{yz} \omega^2, \quad M_{Cy}^{ih} = I_{xy} \varepsilon + I_{xz} \omega^2, \quad M_{Cz}^{ih} = -I_z \varepsilon.$$

Якщо вісь обертання Cz є головною віссю інерції тіла, тобто $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$, то моменти сил інерції M_{Cx}^{ih} і M_{Cy}^{ih} дорівнюють нулю. У такому випадку головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}^{ih} = 0$ і сили інерції еквівалентні парі сил інерції, що лежить у площині, яка перпендикулярна осі обертання Cz . Момент цієї пари дорівнює

$$M_z^{ih} = -I_z \varepsilon. \quad (7.22)$$

Плоский рух тіла.

Виберемо за центр приведення сил інерції центр мас C тіла. Тоді головний вектор сил інерції обчислюють за формулою (див. 7.14):

$$\bar{\Phi}^{ih} = -M \bar{a}_C. \quad (7.23,a)$$

Головний момент сил інерції відносно центра мас C , котрий є рухомою точкою при плоскому русі тіла, отримаємо з формули (7.12). Відповідно принципу Д'Аламбера (7.12), головний момент сил інерції відносно центра мас задовольняє умові

$$\sum_1^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^e) + \bar{M}_C^{ih} = 0.$$

Але із теореми про зміну моменту кількості руху відносно центра мас (7.16) при абсолютному і відносному русі, тому що вектори $\bar{\omega}$ і \bar{K}_C співпадають за напрямом, маємо

$$\frac{d\bar{K}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e), \quad \frac{d'\bar{K}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e).$$

Із цих рівностей витікає

$$\bar{M}_C^{ih} = -\frac{d\bar{K}_C}{dt} = -\frac{d'\bar{K}_C}{dt}.$$

Тобто проєкції головного моменту сил інерції M_{Cx}^{ih} , M_{Cy}^{ih} , M_{Cz}^{ih} на осі координат, які рухаються поступально з початком в центрі мас визначаються за формулами:

$$M_{Cx}^{ih} = I_{xz}\varepsilon_z - I_{yz}\omega^2, \quad M_{Cy}^{ih} = I_{xy}\varepsilon_z + I_{xz}\omega^2, \quad M_{Cz}^{ih} = -I_z\varepsilon_z,$$

де вісь Cz перпендикулярна площині, паралельно котрій рухаються точки тіла.

Якщо вісь Cz є головною віссю інерції тіла, то проєкції моменту сил інерції $M_{Cx}^{(ih)} = 0$ і $M_{Cy}^{(ih)} = 0$.

Отже, в даному випадку, сили інерції еквівалентні головному вектору сил інерції в точці C , який визначається формулою (7.14):

$$\bar{\Phi}^{ih} = -M \bar{a}_C, \quad (7.23)$$

і головному моменту сил інерції, момент якого дорівнює

$$M_{Cz}^{ih} = -I_z\varepsilon. \quad (7.24)$$

7.4. Приклади розв'язання задач методом кінетостатики

За допомогою принципу Д'Аламбера розв'язують задачі, у котрих по заданому руху системи необхідно визначити реакції в'язів. При цьому виключаються всі наперед невідомі внутрішні сили. При визначенні реакцій внутрішніх в'язів системи необхідно розглядати окремі тіла системи.

Приклад 7.1. Два вантажі A і B вагою P і Q , зв'язані нерозтяжною ниткою, яка перекинута через невагомий блок, і рухаються вздовж граней нерухомої призми. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f . Визначити прискорення, з яким рухаються вантажі, і натяг нитки, якщо кути α і β відомі (рис. 7.4).

Розв'язання. Вантажі A і B рухаються поступально й прямолінійно. Припустимо, що вантаж A опускається з прискоренням \bar{a}_A . Вантажі A і B зв'язані нерозтяжною ниткою і тому вантаж B буде підніматися з прискоренням \bar{a}_B , котре за модулем дорівнює прискоренню \bar{a}_A , тобто маємо $a_A = a_B = a$.

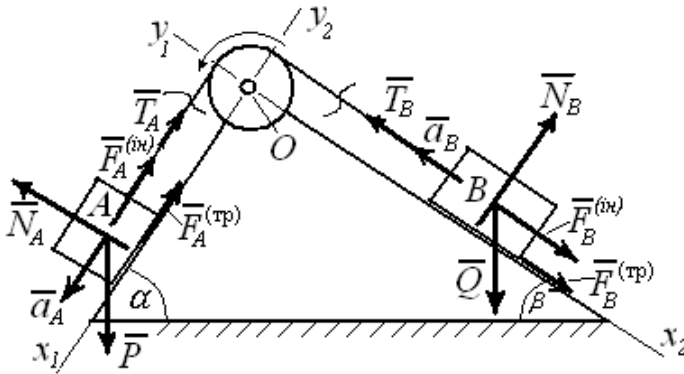


Рис. 7.4

Застосуємо принцип Д'Аламбера і покажемо зовнішні сили і сили інерції, які діють окремо на вантажі A і B : сили ваги \bar{P}, \bar{Q} ; нормальні реакції похилої площини \bar{N}_A, \bar{N}_B ; сили тертя $\bar{F}_A^{TP}, \bar{F}_B^{TP}$; натяг нитки \bar{T}_A, \bar{T}_B

(врахуємо, що за модулем $T_A = T_B = T$) і сили інерції, які при поступальному русі твердого тіла прикладені у центрі мас тіла, дорівнюють за модулем $F_A^{ih} = Pa/g, F_B^{ih} = Qa/g$ і напрямлені протилежно прискоренню центра мас кожного тіла (рис. 7.4).

Зобразимо системи координат для вантажу $A - O x_1 y_1$, а для вантажу $B - O x_2 y_2$. Тоді рівняння кінетостатики матимуть вигляд:

$$\text{для вантажу } A \quad \sum F_{kx} = P \sin \alpha - F_A^{TP} - F_B^{ih} - T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N_A - P \cos \alpha = 0;$$

$$\text{для вантажу } B \quad \sum F_{kx} = Q \sin \beta + F_B^{TP} + F_B^{ih} - T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N_B - Q \cos \beta = 0.$$

Із другого та четвертого знаходимо: $N_A = P \cos \alpha, N_B = Q \cos \beta$.

Обчислюємо сили тертя: $F_A^{TP} = fN_A = fP \cos \alpha, F_B^{TP} = fN_B = fQ \cos \beta$.

Підставивши значення сил тертя та сил інерції в перше й третє рівняння, отримаємо:

$$Pa/g + T = P \sin \alpha - fP \cos \alpha = P(\sin \alpha - f \cos \alpha);$$

$$T - Qa/g = Q \sin \beta + fQ \cos \beta = Q(\sin \beta + f \cos \beta).$$

Звідси знаходимо:
$$a = \frac{P(\sin \alpha - f \cos \alpha) - Q(\sin \beta + f \cos \beta)}{P + Q} g,$$

$$T = \frac{PQ[\sin \alpha + \sin \beta - f(\cos \alpha - \cos \beta)]}{P + Q} = \frac{2PQ}{P + Q} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + f \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Приклад 7.2. На барабан з нерухомою віссю обертання O , який можна вважати однорідним циліндром і який має радіус r і вагу P , намотана нерозтяжна нитка, до котрої підвішений вантаж A вагою P_1 (рис. 7.5,а). Знайти кутове прискорення барабана і натяг нитки, якщо вантаж A буде наданий самому собі. Силою тертя на осі барабана й масою нитки знехтувати.

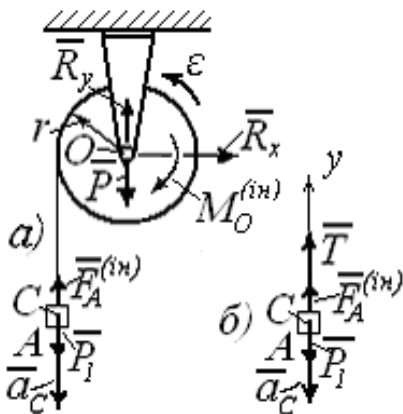


Рис. 7.5

Розв'язання. Розглянемо механічну систему, котра складається з вантажу A , що рухається поступально, і барабана, який обертається навколо нерухомої осі O . На тіла системи діють дві активні сили \bar{P} і \bar{P}_1 . Звільнимо систему від зовнішніх в'язів (підшипник O) – замінимо дію підшипника на барабан вертикальною й горизонтальною складовими реакціями \bar{R}_x , \bar{R}_y . Зобразимо також

прискорення \bar{a}_C центра ваги C вантажу й кутове прискорення ε барабана.

Застосуємо принцип Д'Аламбера і прикладемо умовно до тіл системи сили інерції (рис. 7.5,а). Вантаж рухається поступально – тому сила інерції вантажу \bar{F}_A^{in} спрямована протилежно прискоренню \bar{a}_C центра ваги C вантажу A , а по модулю

$$F_A^{in} = P_1 a_C / g = P_1 r \varepsilon / g,$$

де враховано, що $a_C = r \varepsilon$.

Ось обертання барабана O , який вважаємо однорідним циліндром, є головною віссю інерції тіла. У такому випадку головний вектор сил інерції $\bar{R}^{in} = 0$, а момент сили інерції еквівалентні парі сил інерції, що лежить у площині, яка перпендикулярна осі обертання. Пара сил інерції намагається

обертати барабан у напрямі протилежному напрямку кутового прискорення ε , а момент цієї пари згідно (7.22) дорівнює

$$M_O^{ih} = -I_O \varepsilon = -P r^2 \varepsilon / 2g,$$

де $I_O = P r^2 / 2g$ – момент інерції барабана відносно його осі O .

На підставі принципу Д'Аламбера беручи до уваги, що моменти відносно точки O сили P і сил реакцій барабана \bar{R}_x, \bar{R}_y дорівнюють нулю, отримаємо таке рівняння

$$P_1 r - F_A^{ih} r - M_O^{ih} = 0$$

або

$$P_1 r - P_1 r^2 \varepsilon / g - P r^2 \varepsilon / 2g = 0.$$

Звідки кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{2gP_1}{(2P_1 + P)r}.$$

Для визначення натягу нитки розглянемо окремо вантаж A , на який діє сила ваги \bar{P}_1 , натяг нитки \bar{T} і сила інерції \bar{F}_A^{ih} (рис. 7.5,б). На підставі принципу Д'Аламбера отримаємо

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = T + F_A^{ih} - P_1 = 0.$$

З цього рівняння натяг нитки

$$T = P_1 - \bar{F}_A^{ih} = P_1 \left(1 - \frac{r\varepsilon}{g}\right) = \frac{P_1 P}{2P_1 + P}.$$

Приклад 7.3. Вантаж M масою m_1 , опускається вертикально вниз і приводить до руху барабан A масою m_2 за допомогою гнучкої нерозтяжної нитки, що перекинута через блок O масою m_3 (рис. 8.6, а). Барабан котиться по похилій площині, яка складає кут α з горизонтом. Вважаючи блок і барабан однорідними круговими дисками, знайти прискорення центра ваги барабана і натяг лівої і правої частини нитки.

Розв'язання. Зобразимо на схемі системи, котра включає вантаж M , барабан A , гнучку нитку і блок O (рис. 7.6, а) зовнішні сили:

сили ваги $\bar{P} = m_1 \bar{g}$, $\bar{Q} = m_3 \bar{g}$, $\bar{G} = m_2 \bar{g}$ – це активні сили;

реакції в'язей $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{N}, \bar{F}_A^{mp}$.

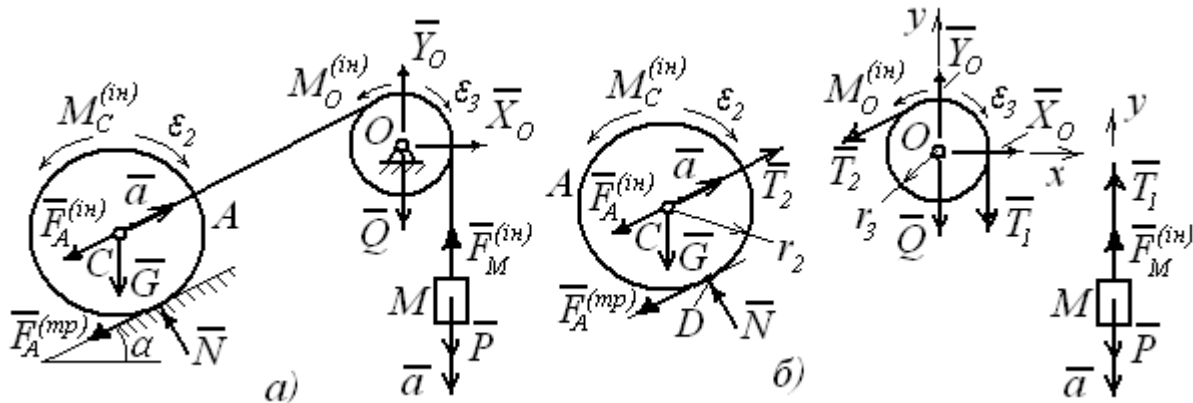


Рис. 7.6

Покажемо також сили інерції тіл системи.

Барабан A здійснює плоскопаралельний рух і його вісь Cz , яка перпендикулярна площині руху і рисунка, є головною віссю інерції тіла, отже, сили інерції еквівалентні головному вектору сил інерції в точці C , який визначається формулою (7.23),

$$\bar{F}_A^{in} = -m_2 \bar{a}$$

і головному моменту сил інерції, момент якого дорівнює (7.24)

$$M_C^{in} = -I_{Cz} \epsilon_2$$

$$M_C^{in} = -I_{Cz} \epsilon_2 = -\frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{a}{r_2} = -m_2 r_2 a / 2,$$

де $I_{Cz} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ – момент інерції барабана, що має радіус r_2 , відносно його осі Cz ,

$$\epsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_C}{r_2} \right) = \frac{dv_C}{r_2 dt} = \frac{a}{r_2} \quad - \text{кутове прискорення барабана, } \omega_2 = v_C / r_2 \quad -$$

кутова швидкість барабана.

Блок O має нерухому вісь обертання Oz , яка перпендикулярна площині руху і яка є головною віссю інерції тіла. У такому випадку головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}^{in} = 0$, а сили інерції еквівалентні парі сил інерції, модуль якої

$$M_O^{ih} = I_{Oz} \varepsilon_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} \cdot \frac{a}{r_1} = \frac{m_3 r_3 a}{2}.$$

Тут $I_{Oz} = \frac{m_3 r_3^2}{2}$ – момент інерції блока, радіус якого r_3 , відносно його осі

Oz , $\varepsilon_3 = \frac{a}{r_3}$ – кутове прискорення блока.

Вантаж M рухається поступально – тому головний вектор сил інерції вантажу дорівнює

$$F_M^{ih} = m_1 a.$$

На тіла системи (рис. 7.6,а) діють сили, які складають плоску систему сил, для рівноваги якої можна скласти три рівняння рівноваги. Але в ці рівняння входять п'ять невідомих ($\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{N}, \bar{F}_A^{mp}, \bar{a}$) (усі сили інерції і моменти сил інерції визначаються за допомогою невідомого прискорення \bar{a}) і тому для розв'язання задачі розглянемо за допомогою принципу Д'Аламбера окремо кожне тіло системи (рис. 7.6,б). Тут до зовнішніх сил і сил інерції, які діють на тіла, додамо реакцію натягу нитки: на ділянці AO – \bar{T}_2 , а на ділянці OM – \bar{T}_1 . Складемо для кожного тіла рівняння кінетостатики:

барабан A
$$\sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) = F_A^{ih} r_2 + M_C^{ih} + G r_2 \sin \alpha - T_2 r_2 = 0,$$

звідки
$$T_2 = F_A^{(ih)} + \frac{M_C^{ih}}{r_2} + G r_2 \sin \alpha = m_2 (a + a/2 + g \sin \alpha) =$$

$$= m_2 (3a/2 + g \sin \alpha);$$

вантаж M
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = T_1 + F_M^{ih} - P = 0,$$

отже
$$T_1 = m_1 (g - a);$$

блок O
$$\sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = T_2 r_3 + M_O^{ih} - T_1 r_3 = 0.$$

В останню рівність підставимо значення T_1 і T_2 і отримаємо

$$m_2 (3a/2 + g \sin \alpha) + m_3 a/2 - m_1 (g - a) = 0,$$

звідки

$$a = 2g \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2}.$$

Далі знаходимо натяг ниток:

$$T_1 = m_1 g \left(1 - 2 \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2} \right) = m_1 g \frac{m_3 + m_2 (3 + 2 \sin \alpha)}{2m_1 + m_3 + 3m_2};$$

$$T_2 = m_2 g \left(3 \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2} + \sin \alpha \right) = m_2 g \frac{m_1 (3 + 2 \sin \alpha) + m_3 \sin \alpha}{2m_1 + m_3 + 3m_2}.$$

7.5. Динамічні реакції при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі Az (рис. 7.7) зі сталою кутовою швидкістю ω , під дією сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, головний вектор яких дорівнює $\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_k$, а головний момент відносно точки A

дорівнює $\bar{M}_A = \sum_{k=1}^n \bar{M}_A(\bar{F}_k)$. Оскільки обертання рівномірне, то кутове

прискорення дорівнює нулю ($\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$) і тому проекція головного моменту

сил інерції на ось z також дорівнює нулю ($M_{Oz}^{(in)} = -I_z \varepsilon = 0$). Отже, проекція

головного моменту зовнішніх сил на вісь обертання з останнього рівняння

(7.13) дорівнює нулю, тобто $M_z = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0$ і тому \bar{M}_A лежить в площині Axy .

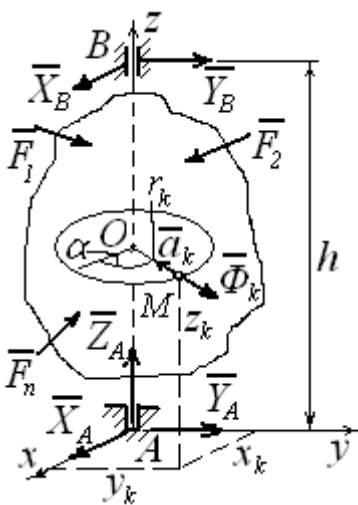


Рис. 7.7

Визначимо реакції підшипника B і підп'ятника A .

Зобразимо реакції в'язів $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ і прикладемо до кожної точки M тіла силу інерції $\bar{\Phi}_k$. Так як обертання тіла рівномірне, то $\varepsilon = 0$ і сила інерції (відцентрова) напрямлена вздовж радіуса r_k траєкторії точки протилежно її прискоренню a_k . Модуль сили інерції дорівнює

$$\Phi_k = m_k a_k = m_k r_k \omega^2,$$

де m_k – маса, $a_k = r_k \omega^2$ – доцентрове прискорення точки.

Запишемо рівняння кінетостатики:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_A + X_B + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} + Z_A &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) - Y_B h - \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} z_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + X_B h + \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} z_k &= 0, \end{aligned} \right\} (7.25)$$

де $\sum_{k=1}^n F_{kx}$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}$, $\sum_{k=1}^n F_{kz}$, $\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k)$, $\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k)$ – проекції головного вектора і головного моменту активних сил на осі координат.

Так як $\Phi_{kx} = m_k r_k \omega^2 \cos \alpha = m_k x_k \omega^2$, $\Phi_{ky} = m_k r_k \omega^2 \sin \alpha = m_k y_k \omega^2$, то маємо проекції головного вектора і головного моменту сил інерції відносно осей координат

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k \omega^2 = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k x_k = \omega^2 M x_C, \\ \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k \omega^2 = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k y_k = \omega^2 M y_C, \\ \sum_{k=1}^n \Phi_{kx} z_k &= \sum_{k=1}^n m_k y_k \omega^2 z_k = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = \omega^2 I_{yz}, \\ \sum_{k=1}^n \Phi_{ky} z_k &= \sum_{k=1}^n m_k x_k \omega^2 z_k = \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = \omega^2 I_{xz}, \end{aligned} \right\} (7.26)$$

де $\sum_{k=1}^n m_k x_k = M x_C$, $\sum_{k=1}^n m_k y_k = M y_C$, M – маса тіла, x_C , y_C – координати центра мас,

$\sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = I_{yz}$, $\sum_{k=1}^n m_k x_k z_k = I_{xz}$ – відцентрові моменти інерції тіла.

Після перетворень рівняння (7.25) приймають вигляд

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n F_{kx} + X_A + X_B + \omega^2 M x_C &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n F_{ky} + Y_A + Y_B + \omega^2 M y_C &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n F_{kz} + Z_A &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) - Y_B h - \omega^2 I_{yz} &= 0, \\
 \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) + X_B h + \omega^2 I_{xz} &= 0.
 \end{aligned} \right\} (7.27)$$

Рівняння (7.27) дають можливість визначити реакції опор, які, крім реакції Z_A , залежать від активних сил і від сил інерції. Тобто, кожна реакція має статичну складову, яка спричинена діючими активними силами, і динамічну складову, котра залежить від сил інерції.

Статичні реакції знаходять за умовою, що тіло не рухається, тобто $\omega = 0$, а динамічну складову реакцій обчислюють з тих же рівнянь, якщо прийняти, що активні сили відсутні, отже

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0.$$

При швидкому обертанні динамічні складові реакцій можуть мати порівняно зі статичними дуже великі значення, що небезпечно для працездатності механізму.

Для того, щоб обертання не викликало додаткових динамічних навантажень на підшипники повинні виконуватись умови

$$x_C = 0, y_C = 0, I_{yz} = 0, I_{xz} = 0. \quad (7.28)$$

Умови (7.28) означають, що:

- 1) центр мас тіла повинен знаходитись на осі обертання;
- 2) ось обертання повинна бути головною віссю інерції тіла.

Зауважимо, що отримані висновки справедливі і для нерівномірного обертання. Проблема ліквідації додаткових динамічних реакцій в підшипниках машин і механізмів є однією із важливіших в техніці.

Приклад 7.4. Лебідка, яка встановлена на балці AB , піднімає за допомогою троса вантаж вагою P . Радіус барабана, дорівнює r , а головний момент інерції відносно осі барабана разом з ротором електродвигуна I_z . Нехтуючи вагою троса й тертям, визначити динамічні реакції опор A і B балки, якщо вантаж піднімається з прискоренням a . Розміри показані на рис. 7.8,а.

Розв'язання. Застосуємо принцип Д'Аламбера й покажемо сили інерції (рис. 7.8,б). Сила інерції вантажу, який рухається поступально, за модулем дорівнює

$$\Phi^{in} = Pa/g$$

і спрямована протилежно прискоренню центра мас \bar{a} . Кутове прискорення барабана ε напрямлено за рухом годинникової стрілки, а головний момент сил інерції M_z^{in} спрямован протилежно кутовому прискоренню, тобто протилежно руху годинникової стрілки й дорівнює

$$M_z^{in} = I_z \varepsilon = I_z \frac{a}{r},$$

де $\varepsilon = \frac{a}{r}$.

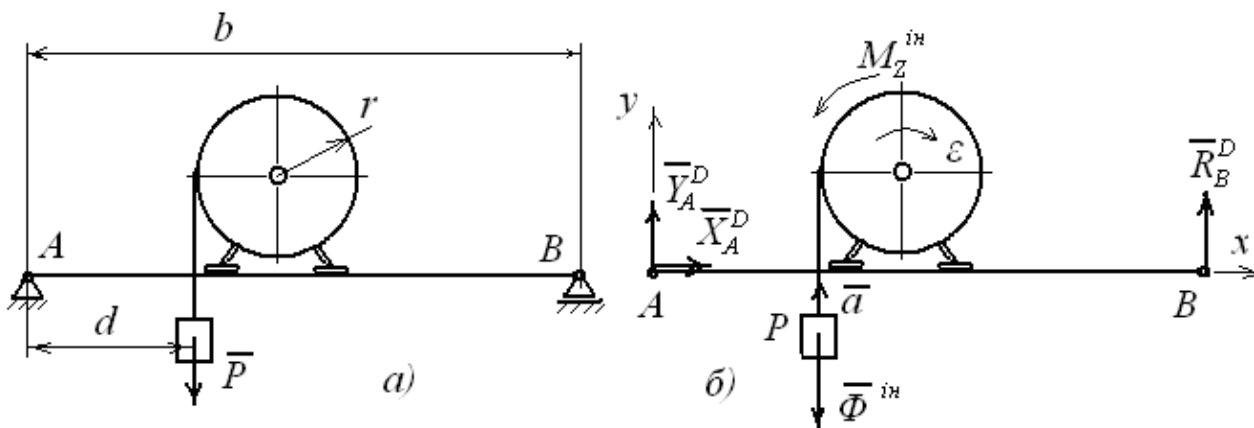


Рис. 7.8

Головний вектор сил інерції барабана дорівнює нулю, так як його центр мас знаходиться на осі обертання і тому прискорення центра мас дорівнює нулю. Активні сили не враховуємо (це вага вантажу, вага лебідки, обертаючий

момент двигуна та ін.). Зображаємо на рис. 7.8,б тільки динамічні реакції опор $\bar{X}_A^D, \bar{Y}_A^D, \bar{R}_B^D$ і складаємо рівняння кінетостатики:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_A^D = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{kA} = M_z^{ih} + R_B^D \cdot b - \Phi^{ih} d = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{xB}(\bar{F}_k) = M_z^{ih} - Y_A^D \cdot b + \Phi^{ih} (b-d) = 0.$$

Ураховуючи сили інерції, знаходимо динамічні реакції опор:

$$X_A^D = 0, Y_A^D = [I_z / r + P(b-d) / g] a / b, R_B^D = (Pa / g - I_z / r) a / b.$$

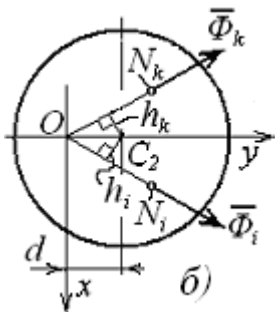
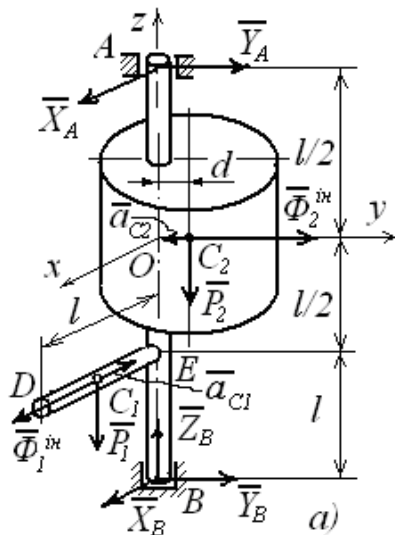


Рис. 7.9

Приклад 7.5. На вертикальній осі, яка закріплена в підшипнику A і підп'ятнику B , жорстко закріплено тонкий стержень DE , довжина якого l і вага P_1 , та круглий однорідний циліндр вагою P_2 . Ось циліндра паралельна AB , а ексцентриситет до осі обертання дорівнює відстані $OC_2 = d$. Стержень DE розташовано перпендикулярно площині ABC_2 . Конструкція обертається навколо осі AB зі сталою кутовою швидкістю ω . Нехтуючи діаметром осі AB і стержня DE , визначити реакції опор A і B . Розміри указані на рис. 7.9, a .

Розв'язання. Проведемо осі координат, як показано на рис. 8.9, a , тобто ось z співпадає з прямою AB , ось y з OC_2 і ось x паралельно стержню ED . Покажемо реакції підшипника A –

\bar{X}_A, \bar{Y}_A і реакції підп'ятника B – $\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{Z}_B$.

Застосуємо принцип Д'Аламбера. Відомо, що при $\omega = const$, буде $\varepsilon = 0$, а сили інерції точок для циліндра і стержня DE будуть спрямовані протилежно доцентровому прискоренню їх точок.

Для циліндра приведена до центра час C_2 сила інерції

$$\Phi_2^{ih} = m_2 a_{C_2} = P_2 d \omega^2 / g,$$

де $a_{C_2} = d \omega^2$ – прискорення центра мас.

Для стержня DE сила інерції

$$\Phi_1^{ih} = m_1 a_{C_1} = P_1 l \omega^2 / (2g),$$

де $a_{C_1} = l \omega^2 / 2$ – прискорення центра мас.

Запишемо рівняння кінетостатики:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_A + X_B + \Phi_1^{ih} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_A + Y_B + \Phi_2^{ih} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = Z_A - P_1 - P_2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = -P_2 d - Y_A l / 2 + 1,5 \cdot l Y_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = X_A l / 2 - 1,5 X_B l + P_1 l / 2 - \Phi_1^{ih} l / 2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0$$

або
$$X_A + X_B = -P_1 l \omega^2 / (2g); \quad Y_A + Y_B = -P_2 d \omega^2 / g;$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_A - 3Y_B = -2P_2 d / l; \quad X_A - 3X_B = -P_1 + P_1 l \omega^2 / (2g).$$

З цих рівнянь знаходимо реакції опор:

$$X_B = P_1 (1 - l \omega^2 / g) / 4; \quad X_A = -P_1 (1 + l \omega^2 / g) / 4;$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_B = P_2 d (2/l - \omega^2 / g) / 4; \quad Y_A = P_2 d (2/l + 3\omega^2 / g) / 4.$$

Питання для самоконтролю

1. Чому дорівнює і як спрямована сила інерції матеріальної точки?
2. Як визначається і як спрямована сила інерції матеріальної точки, що рівномірно рухається по дузі кола?
3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для вільної матеріальної точки?
4. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для механічної системи, якщо розглядаються зовнішні й внутрішні сили, що діють на точки системи.
5. Чи враховуються внутрішні сили механічної системи при використанні принципу Д'Аламбера для механічної системи?
6. Чому дорівнює головний вектор і головний момент сил інерції при поступальному русі твердого тіла?
7. Чому дорівнює проекція головного моменту сил інерції твердого тіла на нерухому вісь обертання?
8. Як визначаються головний вектор і головний момент сил інерції при плоскому русі тіла, котре має головну вісь інерції тіла, що перпендикулярна площині руху?
9. Які умови повинні виконуватись при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі, щоб динамічні реакції підшипників дорівнювали нулю?

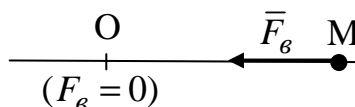
8. ПРЯМОЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються *механічними коливаннями*. При цьому на матеріальну точку можуть діяти відновлююча сила (сила, що залежить від положення точки і намагається повернути точку в положення рівноваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, та збурююча сила, задана функцією часу. Розглянемо один з простіших випадків руху – прямолінійні коливання матеріальної точки.

Залежно від комбінації цих сил в лінійних системах розрізняють такі види коливального руху: вільні незатухаючі, затухаючі і вимушені.

8.1. Вільні незатухаючі коливання

Існує клас сил, що називаються *відновлюючими*, модулі яких в лінійних задачах є пропорційними відхиленню точки від положення, де ці сили дорівнюють нулю, і напрямленими до цього положення:


$$F_g = c \cdot MO, \quad (8.1)$$

де c – коефіцієнт пропорційності.

Як буде показано в подальшому, відновлюючі сили надають руху точки коливальний характер. Коливання, які відбуваються під дією тільки відновлюючої сили, називаються *вільними незатухаючими*.

Фізична природа відновлюючих сил може бути різною. Це може бути пружна сила пружини, сила Архімеда у випадку тіла, що плаває на поверхні рідини та ін. В подальшому у якості відновлюючої будемо розглядувати силу пружності пружини, за допомогою якої, до речі, моделюються пружні властивості реальних тіл. В лінійних задачах сила пружності відповідає закону Гука:

$$F_{np} = c \cdot \lambda, \quad (8.2)$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини, що показує, яку силу треба прикласти до кінця пружини для її деформації на одиницю довжини; λ - деформація

пружини (різниця між довжиною пружини у даному стані (розтягнутому або стиснутому) і недеформованому).

Розглянемо вертикальні коливання вантажу маси m , що підвішений до пружини жорсткості c і здійснює поступальний рух. В такому випадку вантаж можна вважати матеріальною точкою маси m . Визначимо рівняння руху точки.

Для цього зобразимо точку на розрахунковій схемі у довільному положенні (рис. 8.1). Тут \bar{P} – сила ваги ($P = m \cdot g$); \bar{F}_{np} – сила пружності.

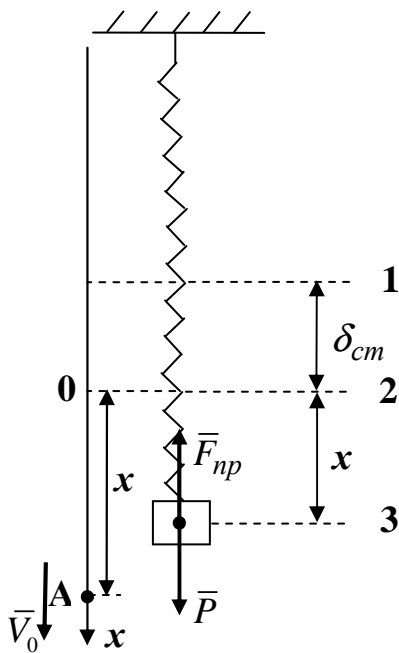


Рис. 8.1

Послідовно відмітимо на схемі три характерних рівня.

Рівень 1 – відповідає вільному кінцю недеформованої пружини (в цьому положенні $F_{np} = 0$);

Рівень 2 – положення статичної рівноваги точки, рух якої досліджується (це положення буде нижчим за рівень 1, оскільки при приєднанні вантажу до кінця недеформованої пружини остання буде розтягнутою під дією сили ваги \bar{P} точки). Відстань між рівнями 1 (недеформованої пружини) і 2 (статичної рівноваги точки) називається *статичною деформацією пружини* і позначається δ_{cm} .

В положенні рівноваги точки $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$, або $P - F_{np} = 0$. Остання рівність, враховуючи формулу (8.2), де деформація пружини $\lambda = \delta_{cm}$, набуде вигляду

$$P - c \cdot \delta_{cm} = 0. \quad (8.3)$$

Рівень 3 – довільне положення точки під час коливань (звичайно рівень 3 зображують так, щоб рівні 1, 2, 3 йшли на схемі послідовно).

Початок системи координат вибираємо в положенні рівноваги точки (рівень 2), а вісь x направляємо у бік зростання цифр 1, 2, 3 на схемі (рис. 8.1). В

такому разі довільне положення буде знаходитись в області додатних значень координати x .

Складемо диференціальне рівняння руху точки. Для цього спроектуємо основне рівняння динаміки

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

на вісь x :

$$m\ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{ст} + x),$$

де $\lambda = \delta_{ст} + x$ - повна деформація пружини у довільному положенні. З урахуванням рівності (8.3) права частина останнього рівняння спроститься:

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (8.4)$$

Після перетворень *диференціальне рівняння вільних коливань* матеріальної точки набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.5)$$

де $\omega_0 = \sqrt{c/m}$.

Таким чином, рух матеріальної точки під дією тільки відновлюючої сили описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння (8.5). Оскільки корені характеристичного рівняння $z^2 + \omega_0^2 = 0$, що відповідає рівнянню (8.5), є уявними ($z_{1,2} = \pm i\omega_0$, де $i = \sqrt{-1}$), то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (8.5) буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \quad (8.6)$$

де C_1, C_2 - сталі інтегрування.

Отримаємо далі похідну за часом від координати x :

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (8.7)$$

Сталі інтегрування C_1, C_2 визначимо склавши початкові умови. Припустимо, що матеріальна точка почала рухатись, маючи додатні значення початкової координати (точка А на рис. 8.1) і проекції швидкості:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0. \quad (8.8)$$

Підставляючи умови (8.8) у вирази функцій координати (8.6) і швидкості (8.7) точки, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}$.

Після підставки сталих інтегрування вираз (8.6), набуде вигляду

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (8.9)$$

Рівняння (8.9) називається *рівнянням вільних незатухаючих коливань* матеріальної точки.

Проаналізуємо їх властивості.

Для зручності аналізу перетворимо рівняння (8.6) (або (8.9)), вводячи позначки $C_1 = A \cdot \sin \varphi_0$, $C_2 = A \cdot \cos \varphi_0$, у форму

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.10)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ (або з урахуванням початкових умов $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0}{V_0}$).

В законі коливань точки (8.10) параметр A є *амплітудою коливань* (найбільше відхилення точки від положення рівноваги), аргумент $\omega_0 t + \varphi_0$ називається *фазою коливань*, а величина φ_0 – *початковою фазою*. Параметр ω_0 має назву *колової частоти коливань* (або *власної частоти*). Колова частота визначає число коливань за проміжок часу 2π секунд і вимірюється у *рад/с* (або *1/с*). Слід зазначити, що в технічній літературі використовується і звичайна частота f , яка визначає число коливань за 1 секунду, вимірюється в *Гц* (Герц) і зв'язана з коловою частотою співвідношенням $\omega_0 = 2\pi f$.

Побудуємо графік вільних коливань (функції (8.10)).

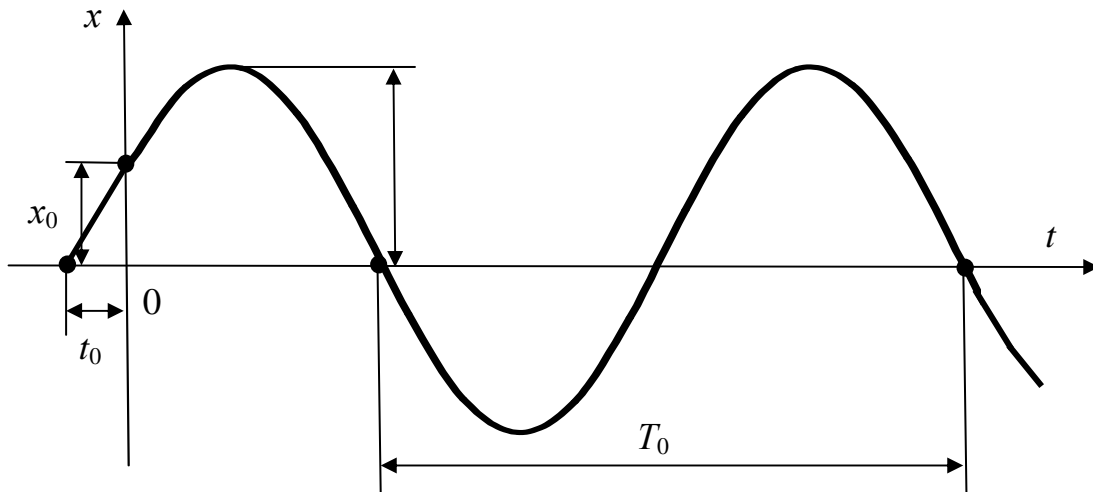


Рис. 8.2

На рис. 8.2 маємо: x_0 - початкове відхилення точки від положення її рівноваги; A - амплітуда коливань; t_0 - інтервал часу, $t_0 = \varphi_0 / \omega_0$; T_0 - період коливань (проміжок часу, протягом якого відбувається повне коливання).

Залежність між періодом і коловою частотою визначається з умови періодичності руху і має вид

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f}. \quad (8.11)$$

Вільні коливання мають наступні властивості.

1. Згідно з формулою (8.10) вільні коливання є незатухаючими гармонійними, бо здійснюються за законом синуса з власною частотою ω_0 . Це обумовлено дією на точку лише консервативної сили \bar{F}_{np} пружини. Тому розглянута на рис. 8.1 механічна система називається *консервативною*.

2. Як видно з формул (8.4) і (8.11), власна частота ω_0 і період T_0 від початкових умов не залежать, а визначаються тільки параметрами системи (жорсткістю c і масою m). Така властивість механічної системи має назву *ізохронності* коливань.

3. Амплітуда A і початкова фаза φ_0 , як витікає зі співвідношень (8.10), залежать від початкових умов. При $x_0 = 0$; $V_0 = 0$ коливання не виникають.

На практиці в реальних вузлах, агрегатах машин пружини (амортизатори), які з'єднують вантаж з основою, можуть утворювати систему паралельно, послідовно і паралельно-послідовно (змішано) з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку початкові механічні схеми системи необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість c_e . Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при паралельному з'єднанні пружних елементів (рис. 8.3,а) буде мати жорсткість $c_e = c_1 + c_2$ (рис. 8.3,б). При послідовному з'єднанні пружних елементів (рис. 8.4) еквівалентна жорсткість $c_e = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2)$. При змішаному з'єднанні елементів (рис. 8.4) отримаємо $c_e = (c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3) / (c_1 + c_2 + c_3)$ (рис. 8.5).

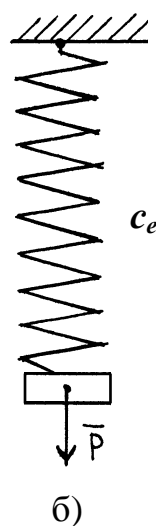
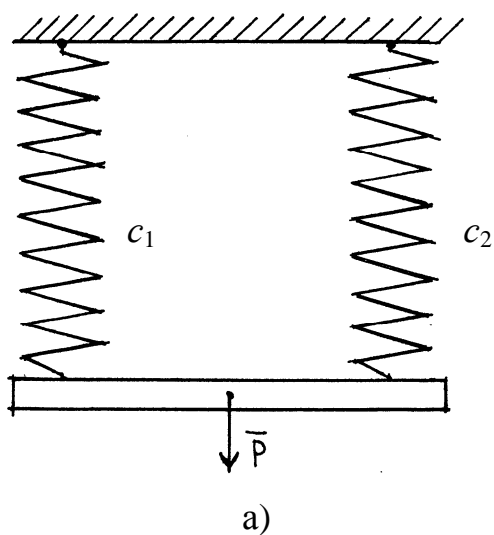


Рис. 8.3

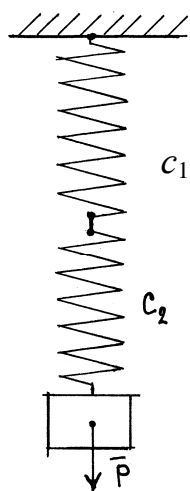


Рис. 8.4

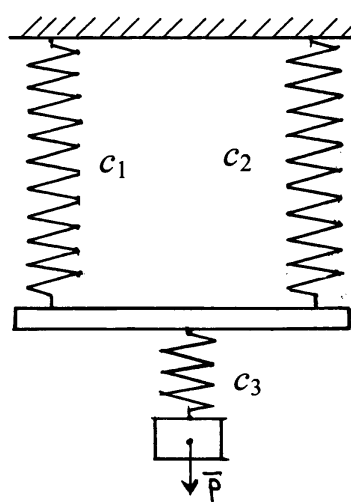


Рис. 8.5

8.2. Вільні коливання при наявності сил опору (затухаючі коливання)

У випадку з'єднання вантажу з основою за допомогою металевих амортизаторів, а також при русі в середовищі (рідині) на матеріальну точку діє сила опору, яку при малих швидкостях руху вважають прямо пропорційною швидкості точки і напрямленою в бік, протилежний швидкості: $\bar{R} = -b\bar{V}$, де b - коефіцієнт опору середовища, його розмірність Н·с/м або кг/с. Коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору (в'язкого тертя), називаються *затухаючими*, а механічна схема називається дисипативною.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як і на рис. 8.1, тільки додається сила опору \bar{R} (при зображенні сили опору вважаємо, що точка рухається в бік додатного напрямку осі x) (рис. 8.6). Умовні позначення на рис. 8.1 і 8.6 співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки буде мати вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R}$$

або

$$m\ddot{x} = P - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x},$$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad (8.12)$$

де h - коефіцієнт демпфірування коливань, його розмірність c^{-1} .

Тоді диференціальне рівняння вільних коливань при наявності сил опору набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.13)$$

Характеристичне рівняння для (8.13) має

вигляд

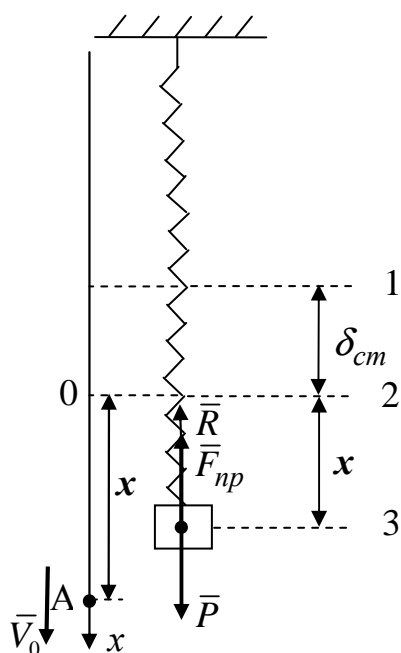


Рис. 8.6

$$z^2 + 2hz + \omega_0^2 = 0,$$

а його корені дорівнюють

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \quad (8.14)$$

Із (8.14) видно, що характер руху точки істотним чином залежить від співвідношення h і ω_0 : якщо $h \geq \omega_0$, то корені характеристичного рівняння дійсні, якщо $h < \omega_0$ - то комплексні. Розглянемо ці випадки.

При $h > \omega_0$ (випадок великого опору) загальний розв'язок диференціального рівняння (8.13) матиме вид

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (8.15)$$

Це рівняння описує *апериодичний (не коливальний) затухаючий рух*. Координата x точки при $t \rightarrow \infty$ монотонно зменшується по експоненті (оскільки корені p_1 і p_2 від'ємні), і точка наближається до положення статичної рівноваги. Графіки функції (8.15) при різних початкових умовах (криві 1, 2, 3 при $V_0 > 0$; $V_0 \leq 0$ і $|V_0| < |p_2| x_0$; і $V_0 > 0$ і $|V_0| > |p_2| x_0$ відповідно) наведені на рис. 8.7.

Якщо $h = \omega_0$ (граничний випадок), то загальний розв'язок диференціального рівняння (8.13) матиме вид

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t), \quad (8.16)$$

де $C_1 = x_0$; $C_2 = \dot{x}_0 + h \cdot x_0$.

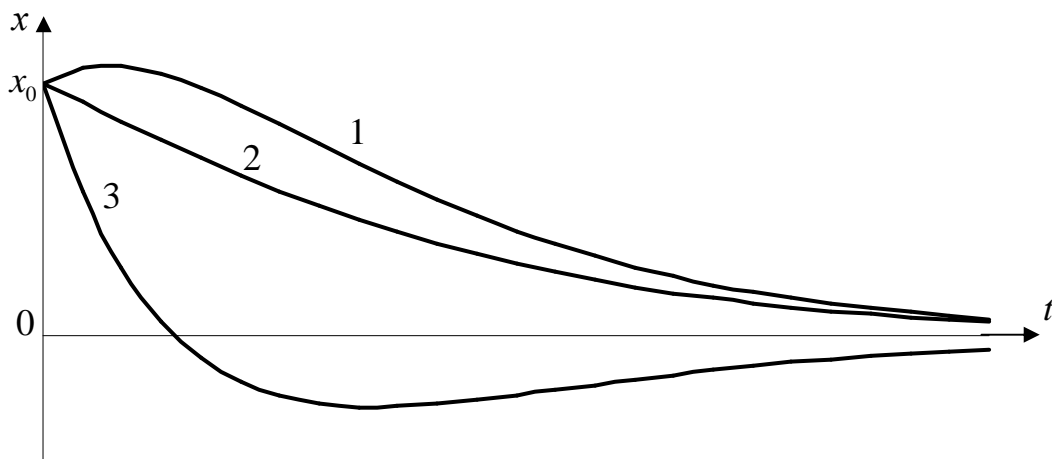


Рис. 8.7

Такий рух також є *аперіодичним затухаючим* ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

При $h < \omega_0$ (випадок *малого опору*) загальний розв'язок диференціального рівняння (8.13) матиме вид

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t), \quad (8.17)$$

де C_1, C_2 - сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов ($C_1 = x_0; C_2 = (V_0 + hx_0) / \omega_0^*$), а величина

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}. \quad (8.18)$$

Рівняння (8.17) називається рівнянням *затухаючих коливань* матеріальної точки. Для зручності графічного аналізу перетворимо рівняння (8.18), аналогічно (8.10), у форму

$$x = A \cdot e^{-ht} \cdot \sin(\omega_0^* t + \varphi_0), \quad (8.19)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$ (або з урахуванням початкових умов

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + hx_0)^2}{\omega_0^{*2}}}, \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \cdot \omega_0^*}{V_0 + hx_0}.$$

З рівняння (8.19) видно, що рух точки має *затухаючий коливальний характер* (оскільки $e^{-ht} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$), а величина ω_0^* є *коловою частотою затухаючих коливань*. Графік функції (8.19) наведений на рис. 8.8.

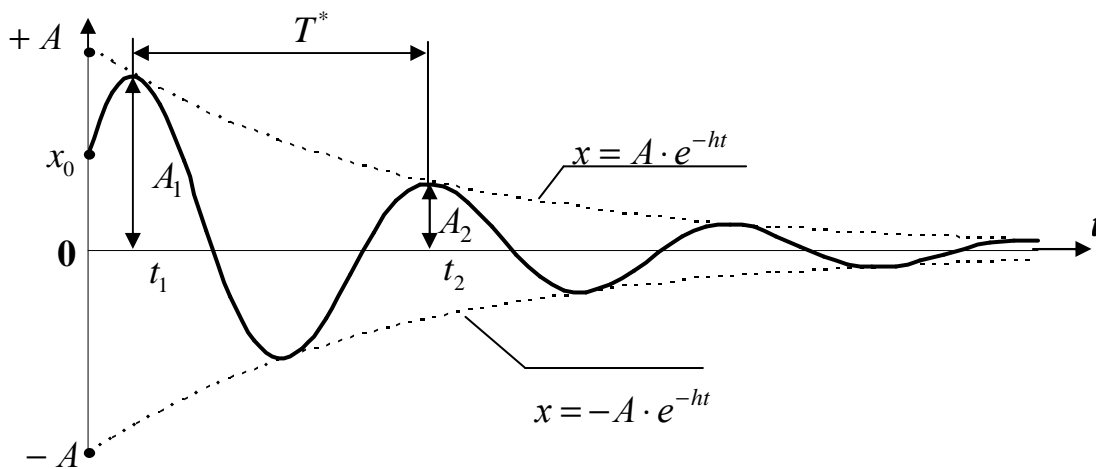


Рис. 8.8

На рис. 8.8 $x_0 = A \cdot \sin \varphi_0$, а криві $x = A \cdot e^{-ht}$ і $x = -A \cdot e^{-ht}$ є границями області, усередині якої розташовується графік руху. Рух точки є коливальним, але не періодичним, оскільки з часом послідовні максимальні відхилення точки від положення рівноваги A_1, A_2, \dots зменшуються. Проте проміжок часу T^* між цими відхиленнями є величиною сталою і дорівнює

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (8.20)$$

Величину T^* умовно називають *періодом затухаючих коливань*. Зрівнюючи формули (8.11) і (8.20), можна зробити висновок, що період затухаючих коливань більший за період відповідних вільних незатухаючих коливань точки, тобто завжди $T^* > T$.

Розглянемо відношення послідовних максимальних відхилень точки від положення рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{\cancel{A} \cdot e^{-ht_2} \cdot \sin(\omega_0^* t_2 + \varphi_0)}{\cancel{A} \cdot e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-h(t_1+T^*)} \cdot \sin(\omega_0^*(t_1+T^*) + \varphi_0)}{e^{-ht_1} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \\ &= \frac{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot e^{-hT^*} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + 2\pi + \varphi_0)}{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot \sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)} = \frac{e^{-hT^*} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)}}{\cancel{e^{-ht_1}} \cdot \cancel{\sin(\omega_0^* t_1 + \varphi_0)}} = e^{-hT^*}. \end{aligned}$$

Таким чином, відношення послідовних амплітуд затухаючих коливань стає і дорівнює

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = e^{-hT^*}. \quad (8.21)$$

Величина η (знаменник геометричної прогресії, за якою спадають амплітуди затухаючих коливань) називається *декрементом затухаючих коливань*, а модуль натурального логарифма цієї величини

$$\Lambda = |\ln \eta| = hT^* \quad (8.22)$$

називається *логарифмічним декрементом затухаючих коливань*. Поняття про декремент затухаючих коливань використовують при експериментальному визначенні коефіцієнта опору середовища.

8.3. Вимушені коливання

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім відновлюючої сили, діє збурювання, яке змінюється за часом, або якщо відбувається переміщення точки прикріплення до основи пружини чи пружного тіла.

8.3.1. Силове збудження коливань

В даному випадку коливання виникають у разі безпосередньої дії на точку збурюючої сили. Ця сила може бути довільною функцією часу, проте розглянемо простіший, але практично важливий випадок, коли сила змінюється за гармонійним законом

$$Q = H_B \cdot \sin \omega_B t, \quad (8.23)$$

де H_B , ω_B – амплітуда і колова частка збурюючої сили.

8.3.1.1. Випадок консервативної системи

Механічна система, яка моделює такий випадок коливань зображена на рис. 8.11. Умовні позначення на рис. 8.1 і 8.11 співпадають, однак тут до матеріальної точки окрім сил ваги \bar{P} і пружності \bar{F}_{np} прикладена збурююча сила \bar{Q} .

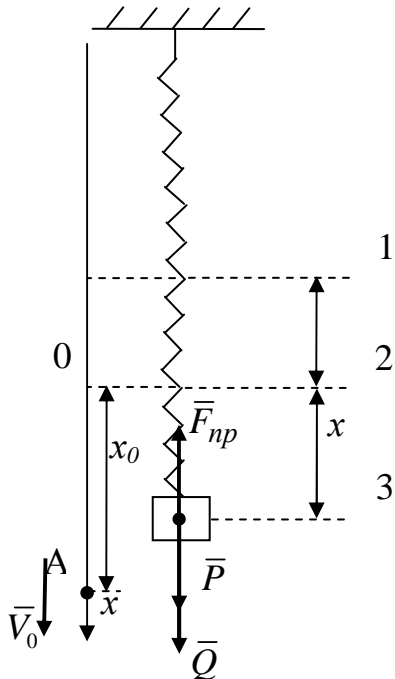


Рис. 8.11

Отже рівняння динаміки точки матиме вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_y + \bar{Q}$$

$$\text{або } m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) + H_B \sin \omega_B t,$$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + cx = H_B \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{H_B}{m}. \quad (8.24)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (8.25)$$

Рівняння (8.25) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (8.25) подамо у вигляді

$$x = x_1 + x_2, \quad (8.26)$$

де x_1 - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; x_2 - частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид (8.6):

$$x_1 = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t. \quad (8.27)$$

При визначенні частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_B \neq \omega_0; \quad \omega_B \approx \omega_0; \quad \omega_B = \omega_0.$$

У випадку $\omega_B \neq \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота механічної системи різні) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot \sin \omega_B t. \quad (8.28)$$

Підставляючи (8.28) у (8.25), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$-\omega_B^2 A_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_0^2 A_B \cdot \sin \omega_B t = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Це рівняння виконується для будь якого t , якщо

$$A_B = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2}. \quad (8.29)$$

Підставляючи (8.29) у (8.28), а (8.28) і (8.27) у (8.26), отримаємо загальний розв'язок рівняння (8.25):

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (8.30)$$

Визначимо сталі інтегрування C_1, C_2 , які входять у формулу (8.30), за допомогою початкових умов (8.8). Для цього продиференціюємо за часом формулу (8.30):

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t. \quad (8.31)$$

Підставляючи початкові умови (8.8) у вирази (8.30) і (8.31), отримаємо

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

З останніх рівнянь сталі інтегрування будуть:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right).$$

Підставляючи знайдені сталі інтегрування у вираз (8.30), отримаємо

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t. \quad (8.32)$$

Рівняння (8.32) називається *рівнянням вимушених коливань* матеріальної точки без урахування сил опору або рівнянням вимушених коливань консервативної систем.

Проаналізуємо *властивості вимушених коливань*:

- вимушені коливання є *бігармонійними* (типовий графік коливань наведено на рис. 8.10), тобто складаються з вільних коливань з частотою ω_0 (описуються першими двома доданками рівняння (8.32)) і чисто вимушених коливань з частотою збудуючої сили ω_B (останній доданок рівняння (8.32));

- особливим є те, що при наявності збудуючої сили вільні коливання збуджуються і при нульових умовах (коли $x_0 = 0, V_0 = 0$);

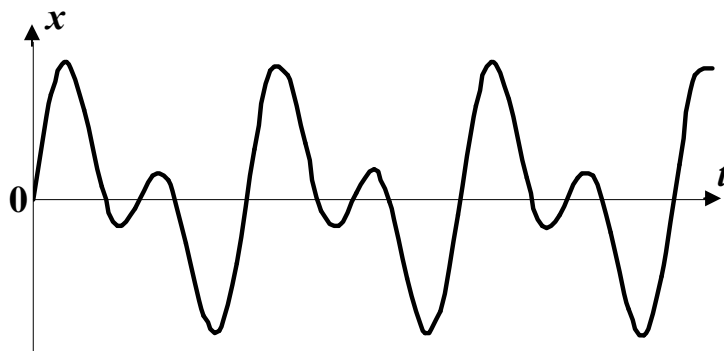


Рис. 8.10

- амплітуда чисто вимушених коливань (модуль виразу (8.29)) не залежить від початкових умов, а визначається параметрами збурюючої сили і механічної системи.

Розглянемо далі випадок, коли частота збурюючої сили і власна частота близькі за значенням: $\omega_B \approx \omega_0$.

Припустимо, що початкові умови нульові ($x_0 = 0, V_0 = 0$). Тоді, поклавши $\omega_B/\omega_0 \approx 1$, але $\omega_0^2 - \omega_B^2 \neq 0$ і $\omega_0 + \omega_B \approx 2\omega_B$, з виразу (8.32) отримаємо

$$x = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot (\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t) = 2 \cdot \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t. \quad (8.33)$$

Графік цього руху наведено на рис. 8.11.

Такий рух називається *биттям*: коливальних рух, який відбувається з частотою ω_B збурюючої сили та амплітудою, що є періодичною (з частотою $(\omega_B - \omega_0)/2$) функцією часу.

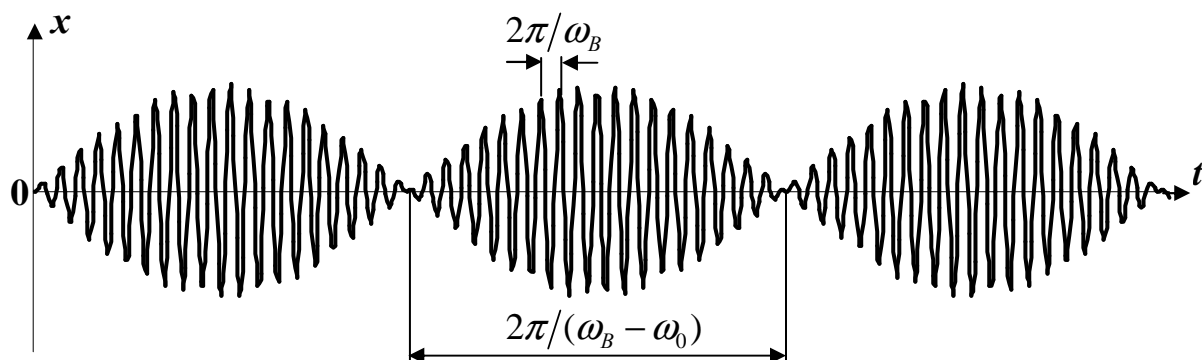


Рис. 8.11

При виконанні $\omega_B = \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота співпадають) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_2 = A_B \cdot t \cdot \cos \omega_B t. \quad (8.34)$$

Підставляючи (8.34) у (8.25), отримаємо рівняння для визначення A_B

$$A_B \cdot (-t \cdot \omega_B^2 \cdot \cos \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t - \omega_B \cdot \sin \omega_B t + \omega_B^2 \cdot t \cdot \cos \omega_B t) = H \cdot \sin \omega_B t.$$

Оскільки $\sin \omega_B t \neq 0$ для довільного t , то справедливе рівняння

$$A_B(-2\omega_B) = H,$$

звідки

$$A_B = -\frac{H}{2\omega_B}. \quad (8.35)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (8.25) матиме вид:

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{H \cdot t}{2\omega_B} \cdot \cos \omega_B t. \quad (8.36)$$

Як неважко помітити, амплітуда чисто вимушених коливань $\frac{H \cdot t}{2\omega_B}$

збільшується прямо пропорційно часу і при $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається *резонансом*, а рівність $\omega_B = \omega_0$ - *умовою резонансу*. Графік залежності частинного розв'язка (8.36) від часу показаний на рис. 8.12.

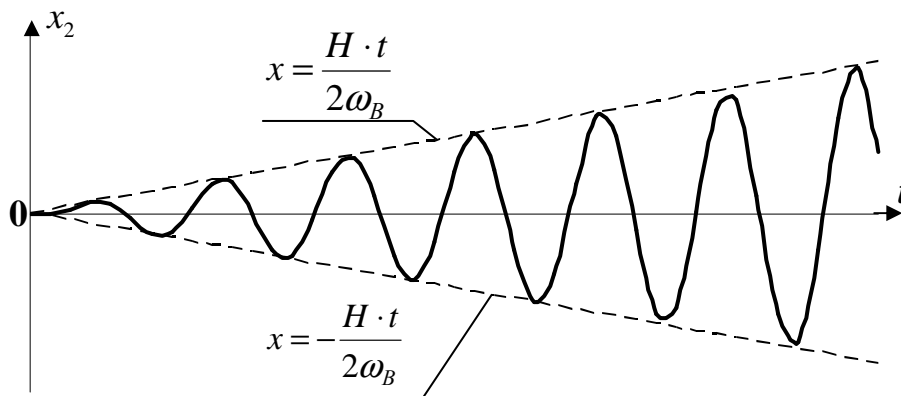


Рис. 8.12

В реальних будівельних конструкціях транспортних машин, явище резонансу може служити причиною їхнього руйнування. Однак в вібраційних машинах технологічного призначення його використовують за для зменшення потужності, що споживається.

8.3.1.1. Випадок дисипативної системи

Механічна система, яка моделює (рис. 8.13) в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), має такий же вид, як на рис. 8.11, тільки додається сила опору \bar{R} . Умовні позначення на рис. 8.11 і 8.13 співпадають.

Рівняння динаміки точки має вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np} + \bar{R} + \bar{Q}$$

$$\text{або } m\ddot{x} = mg - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x} + H_B \sin \omega_B t,$$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H_B \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad H = \frac{H_B}{m}. \quad (8.37)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань з урахуванням опору набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (8.38)$$

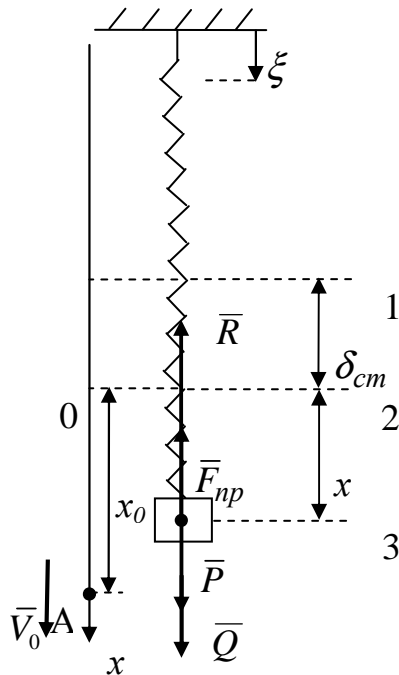


Рис. 8.13

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (8.38) складається з суми розв'язків

$$x = x_1 + x_2, \quad (8.39)$$

де x_1 - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, x_2 - частинний розв'язок неоднорідного рівняння. В даному випадку загальний розв'язок x_1 визначається отриманим раніше виразом (8.17). Частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x_2 = A_B \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B).$$

Амплітуду A_B і початкову фазу φ_B розв'язку x_2 визначимо методом комплексних амплітуд [9].

Для цього праву частину виразу (8.38) представимо в комплексній формі:

$$H \cdot \sin \omega_B t = \text{Im}(H \cdot e^{j\omega_B t}) = \text{Im}(H \cos \omega_B t + jH \sin \omega_B t),$$

де j – уявна одиниця; Jm – уявна частина комплексного числа.

Відповідно до [9] отримаємо

$$x_2 = Jm \left(\frac{H}{|D(j\omega_B)|} \cdot e^{j\varphi_B} \cdot e^{j\omega_B t} \right), \quad (8.40)$$

де $|D(j\omega_B)| = \left((\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2 \right)^{1/2}$ – модуль комплексного числа

$$D(j\omega_B) = (\omega_0^2 - \omega_B^2) + j2h\omega_B;$$

$$\varphi_B = -\arctg \frac{Jm(D(j\omega_B))}{Re(D(j\omega_B))} = -\arctg \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2};$$

$Re(D(j\omega_B)) = \omega_0^2 - \omega_B^2$, $Jm(D(j\omega_B)) = 2h\omega_B$ – дійсна і уявна частини комплексного числа $D(j\omega_B)$.

У формулі (8.40) комплексне число $D(j\omega_B)$ отримується, якщо підставити в операторну форму $D(p) = p^2x + 2hpx + \omega_0^2x$ лівої частини рівняння (8.38) замість оператора p вираз: $p = j\omega_B$.

Після перетворень (8.40) матиме

$$x_2 = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2}} \sin(\omega_B t + \varphi_B) = A_B \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B), \quad (8.41)$$

де $A_B = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2}}$, $\varphi_B = -\arctg \frac{2h\omega_B}{(\omega_0^2 - \omega_B^2)}$ – амплітуда і зсув фаз вимушених коливань точки.

Підставляючи (8.41) у (8.39) отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2\omega_B^2}} \cdot \sin(\omega_B t + \varphi_B). \quad (8.42)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо за допомогою початкових умов (8.8). Після перетворень матиме:

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} \cdot \sin \varphi_B;$$

$$C_2 = \frac{V_0 + x_0 h}{\omega_0^*} - \frac{h \cdot \sin \varphi_B + \omega_B \cdot \cos \varphi_B}{\omega_0^*} \cdot \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}}.$$

З рівняння руху (8.42) витікає, що коливання точки є бігармонійними (двочастотними): вони відбуваються одночасно як з частотою ω_0^* затухаючих коливань, так і з частотою ω_B чисто вимушених коливань. На відміну від вільних коливань (8.19) згасаючі коливання матеріальної точки з частотою ω_0^* виникають і в випадку рівності нулю початкових умов x_0 і V_0 . Наявність множника e^{-ht} у першому доданку призводить до швидкого затухання коливального руху точки з частотою ω_0^* . Проте чисто вимушені коливання з частотою збурюючої сили ω_B (другий доданок в рівнянні (8.42)) відбуваються постійно, незалежно від часу, з амплітудою $A_B = \frac{H}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}}$ і зсувом

фази $\varphi_B = -\arctg \left(\frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right)$, величини яких визначаються параметрами системи і збурюючої сили.

8.3.2. Кінематичне збудження коливань

При кінематичному збудженні коливань заданий рух здійснює основа у точці прикріплення до нього кінця пружини за законом

$$\xi = A_\xi \cdot \sin \omega_B t, \quad (8.43)$$

де A_ξ - амплітуда переміщення основи, ω_B - її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу (матеріальної точки), зображена на рис. 8.14. Умовні позначення на рис. 8.1 і 8.14 співпадають.

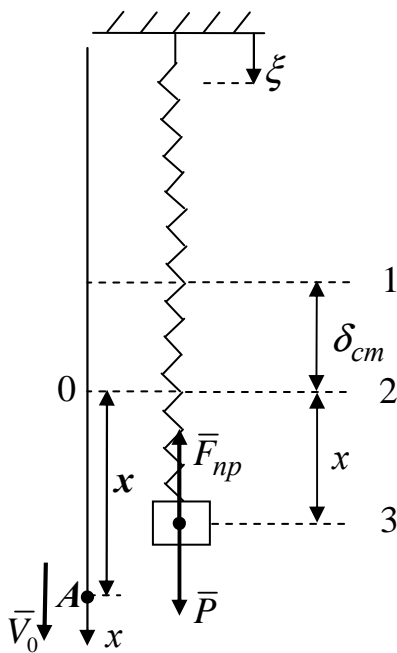


Рис. 8.14

Для консервативної системи диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

або
$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x - \xi),$$

або, враховуючи (8.3),

$$m\ddot{x} + cx = c \cdot a_{\xi} \cdot \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad H = \frac{c \cdot a_{\xi}}{m}. \quad (8.44)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t. \quad (8.45)$$

Диференціальне рівняння повністю співпадає з рівнянням (8.25). Отже, закон вимушених коливань консервативної системи при кінематичному збудженні і його властивості будуть такими же, як і при силовому (див. п. 8.3.1).

8.3.3. Частотні і динамічні характеристики коливальних систем

При дослідженні динамічної поведінки, визначенні очікуваних параметрів вібрації, власних частот, форм і коефіцієнтів демпфірування коливальних механічних систем аналізують звичайно залежності амплітуди і звусу фаз процесу $x(t)$ від частоти збуджуючої сили $\bar{Q}(t)$. З виразу (8.42) отримаємо функції

$$W(\omega) = \frac{1}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2h\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2},$$

які мають назву: відповідно амплітудно-частотна (АЧХ) і фазово-частотна (ФЧХ) характеристики. Вказані характеристики не залежать від параметрів збурюючої сили \bar{Q} , тому є універсальними для механічної системи.

На практиці використання АЧХ і ФЧХ дозволяє визначити амплітуду і зсув фаз чисто вимушених коливань матеріальної точки, збільшивши амплітуду і фазу коливань збурюючої сили у $W(\omega_B)$ раз і на $\varphi(\omega_B)$ відповідно.

Графіки залежностей $W(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ наведено на рис. 8.15. Аналіз графіків дисипативної системи (рис. 8.15,а) показує наступне.

При частоті збурюючої сили $\omega_B = 0$ отримуємо $W(0) = \frac{1}{c}$ і зсув фаз $\varphi(0) = 0$.

При частоті збурення $\omega_B = \omega_0$ буде $\varphi(\omega_0) = -\arctg \frac{2h\omega_0}{0} = -\frac{\pi}{2}$. В системі виникає явище резонансу.

При частоті збудження $\omega_B \rightarrow \infty$ маємо $W(\omega_B) \rightarrow 0$, а $\varphi(\omega_B) \rightarrow -\pi$.

Дослідження на екстремум функції $W(\omega)$ надає наступні значення частоти ω_{\max} , АЧХ і ФЧХ:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}; \quad W(\omega_{\max}) = \frac{1}{2mh\omega_0}; \quad \varphi(\omega_{\max}) = -\arctg \frac{\omega_{\max}}{h}.$$

У випадку консервативної системи (враховуючи (8.40) і умову $h \rightarrow 0$) отримуємо наступні вирази для частотних характеристик:

$$W(\omega) = \frac{1}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}; \quad \varphi(\omega_{\max}) = -\arctg \frac{Im(D(j\omega_B))}{Re(D(j\omega_B))},$$

залежність яких від частоти зображено на рис. 8.15,б.

АЧХ і ФЧХ консервативної системи мають наступні особливості. В діапазоні частот $\omega_B \in [0; \omega_0)$ виконується $Im(D(j\omega_B)) = 0$, а $Re(D(j\omega_B)) \in [\omega_0^2; 0)$

і залишається завжди більше нуля, тому зсув фаз $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{0}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = 0$ для

будь якого значення частоти збурюючої сили.

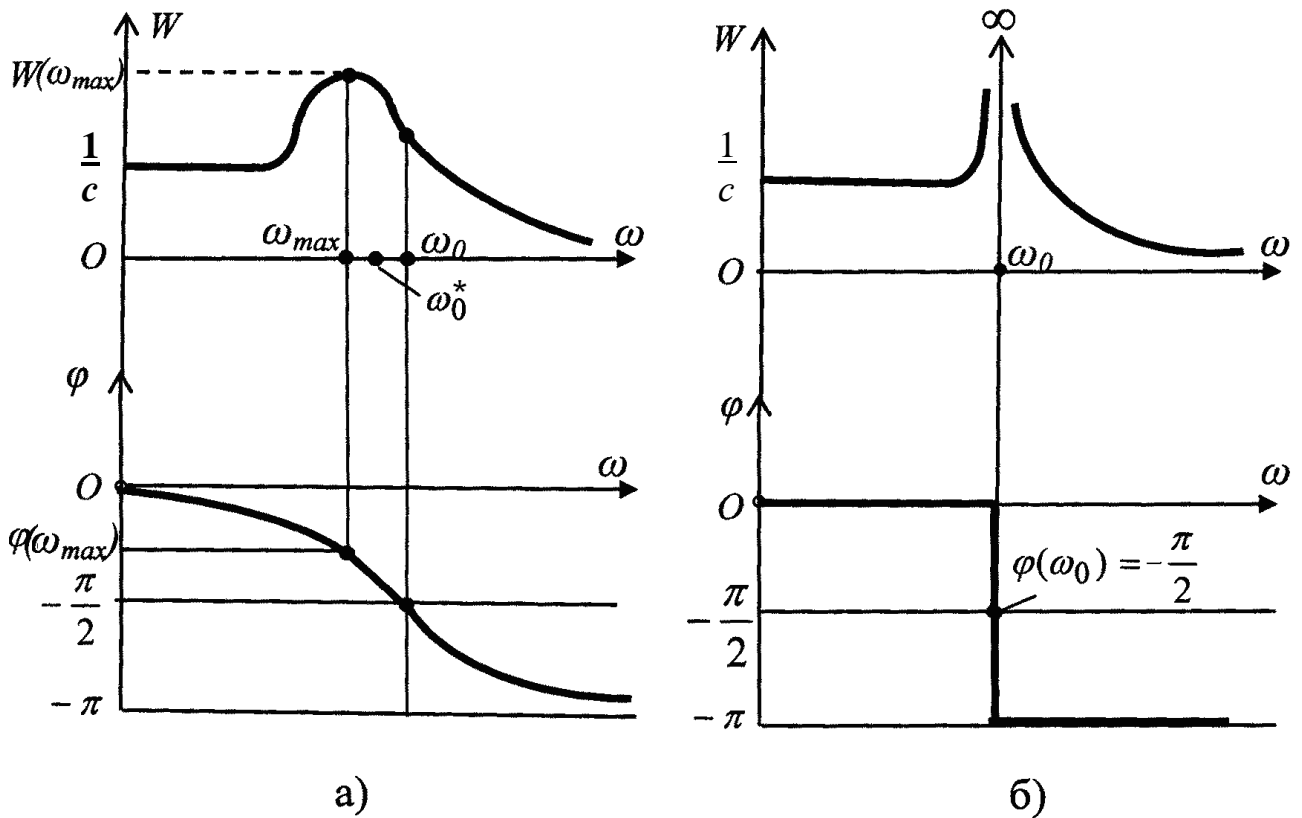


Рис. 8.15. АЧХ і ФЧХ дисипативної (а) і консервативної (б) систем

При частоті збудження $\omega_B = \omega_0$ отримаємо при $h \rightarrow 0$, що

$$\text{Im}(D(j\omega_B)) \rightarrow 0, \quad \text{Re}(D(j\omega_B)) = 0, \quad \text{а} \quad \varphi(\omega_B = \omega_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Якщо $\omega_B \in (\omega_0, +\infty)$, то буде $\text{Im}(D(j\omega_B)) = 0$ і $\text{Re}(D(j\omega_B)) \in (0; -\infty)$, а зсув фаз $\varphi(\omega) = -\pi$ для частоти $\omega_B > \omega_0$.

На практиці при розв'язанні прикладних задач теорії коливань і, зокрема, задач віброзахисту використовують поняття коефіцієнта динамічності механічної системи. За для цього перетворюють вираз амплітуди чисто вимушених коливань A_B , помноживши і поділивши її праву частину на величину ω_0^2 :

$$A_B = \frac{\frac{H}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{h^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}}}.$$

Величина у чисельнику $\frac{H}{\omega_0^2} = \frac{H \cdot t}{c} = \frac{H_B}{c} = x_{cm}$ є статичним переміщенням точки під дією сталої сили H_B , що дорівнює амплітуді збурюючої сили (8.23).

Введемо позначення: $z = \frac{\omega_B}{\omega_0}$ - безрозмірна частота коливань; $\beta = \frac{h}{\omega_0}$ - безрозмірний коефіцієнт демпфірування.

Тоді

$$A_B = \frac{x_{cm}}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (8.46)$$

Коефіцієнтом динамічності μ називається відношення амплітуди вимушених коливань (8.46) до статичного переміщення x_{cm} :

$$\mu = \frac{A_B}{x_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}. \quad (8.47)$$

Він є власною характеристикою коливальної системи, яка не залежить від амплітуди збурення, і показує, у скільки разів амплітуда вимушених коливань перевершує статичне переміщення, тобто характеризує динамічний ефект стосовно амплітуди коливань, що викликається збурюючою силою. Графік залежності $\mu(z)$ при вирівнюванні коефіцієнта демпфірування β наведений на рис. 8.16.

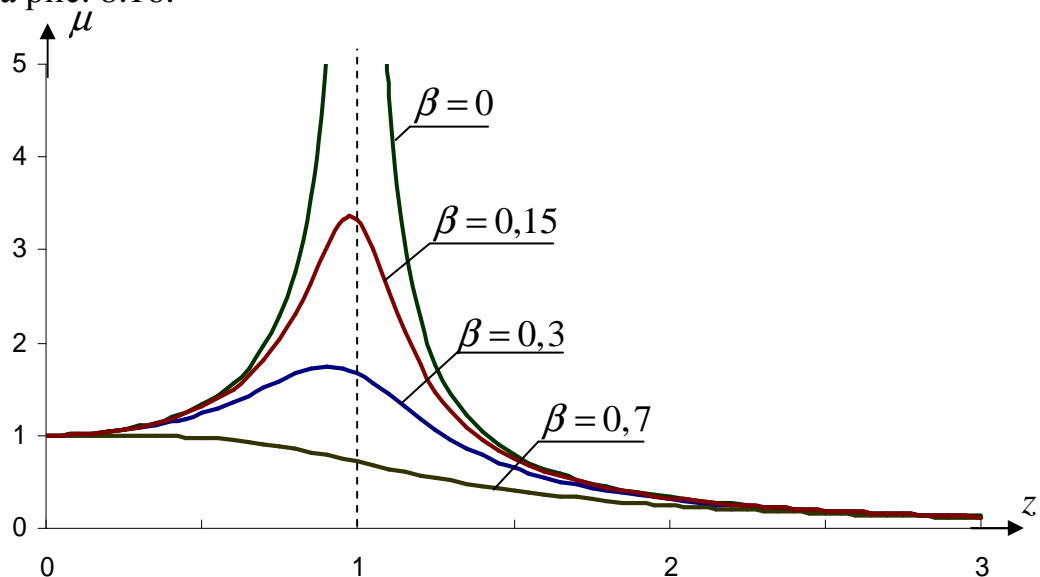


Рис. 8.16

Аналізуючи рис. 8.16, можна зробити такі висновки:

1) коефіцієнт динамічності набуває максимуму при значенні $z = \sqrt{1 - 2\beta^2}$;

2) При значенні коефіцієнта опору $\beta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ зростання амплітуди

вимушених коливань в зоні резонансу не відбувається, більше того, за будь-якою частоти збурюючої сили амплітуда вимушених коливань не перевищує статичне переміщення $x_{ст}$.

8.4. Приклади розв'язання задач з дослідження коливального руху матеріальної точки

Приклад 1. Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі x з моменту дотику ним плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рухи плити та основи вважати поступальними (рис. 8.17).

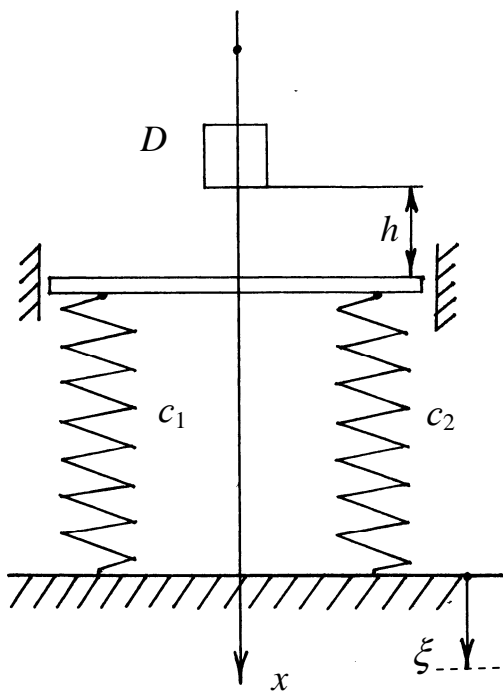


Рис. 8.17

Умови задачі. Пролетівши без початкової швидкості відстань $h = 0,2$ м, вантаж D ($m_D = 20$ кг) з'єднується у момент часу $t = 0$ з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 100$ Н/см, $c_2 = 200$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа починає здійснювати рух за законом $\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t = 0,5 \cdot \sin 30t$ (см).

Розв'язання

Спочатку розглянемо допоміжну задачу про вільне падіння матеріальної точки (вантаж) з висоти $h = A_0A$ до моменту дотику з плитою.

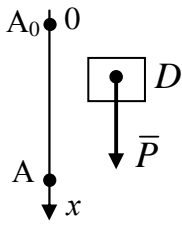


Рис. 8.18

Розрахункова схема цієї задачі наведена на рис. 8.18. Диференціальне рівняння руху має вид: $m_D \ddot{x} = P$ або $m_D \ddot{x} = m_D g$, або $\ddot{x} = g$. Інтегруючи за часом обидві частини останнього рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = gt + C_1, \\ x = gt^2/2 + C_1t + C_2. \end{cases}$$

При нульових початкових умовах сталі інтегрування C_1, C_2 дорівнюють нулю. Записуючи функції \dot{x}, x у кінцевій точці А відрізка руху A_0A , матимемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} V_A = g\tau, \\ h = g\tau^2/2, \end{cases}$$

звідки, виключаючи час руху на відрізка падіння τ , отримаємо розрахункову формулу для швидкості точки в момент дотику з плитою

$$V_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} = 2 \text{ (м/с)}.$$

Розглянемо основну задачу про коливання матеріальної точки (вантаж).

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 8.19, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу і його довільне положення під час коливань, точка А – положення вантажу в момент дотику плити, $\delta_{ст}$ - статична деформація пружини під дією вантажу, $\bar{P}, \bar{F}_{пр}$ - відповідно сила ваги вантажу та сила пружності пружини, ξ - напрямок кінематичного збудження в точці кріплення пружини до рухомої опори.

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис. 8.3):

$$c = c_1 + c_2 = 100 + 200 = 300 \text{ Н/см} = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}.$$

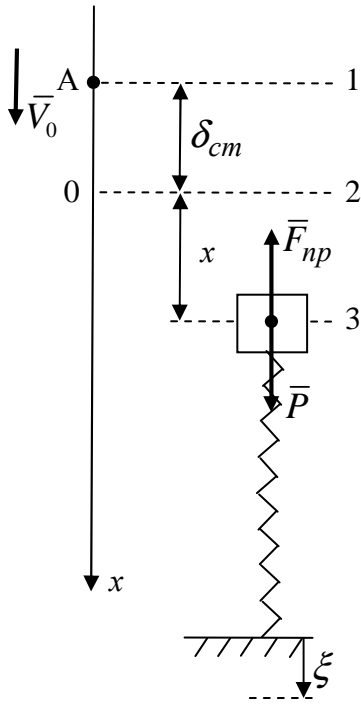


Рис. 8.19

Складемо диференціальне рівняння руху

точки:

$$\begin{aligned} m_D \ddot{x} &= P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x - \xi) = \\ &= P - c\delta_{cm} - cx + c\xi = -cx + ca_\xi \sin \omega_B t, \end{aligned}$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = ca_\xi \sin \omega_B t$$

або

$$\ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = \frac{ca_\xi}{m_D} \sin \omega_B t.$$

Позначимо $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$, $H = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D}$, тоді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \sin \omega_B t.$$

Отримане рівняння має форму (8.25) диференціального рівняння вимушених коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (8.30), (8.31):

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови. В точці A на рис. 8.19:

$$x|_{t=0} = -\delta_{cm}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$:

$$\begin{cases} -\delta_{cm} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = -\delta_{cm}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right).$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримуємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -\delta_{cm} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_0 t.$$

Визначимо далі

$$\text{величину статичної деформації } \delta_{ст} = \frac{g \cdot m_D}{c} = \frac{10 \cdot 20}{3 \cdot 10^4} = 0,67 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\text{значення власної частоти } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^4}{20}} = 38,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$H = \frac{c \cdot a_{\xi}}{m_D} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{20} = 7,5 \frac{\text{М}}{\text{с}^2},$$

$$\frac{H}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{7,5}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} = \frac{7,5}{1500 - 900} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot V_0 - \frac{H \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{1}{38,7} \cdot \left(2 - \frac{7,5 \cdot 30}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} \right) = \frac{1}{38,7} \cdot (2 - 0,375) = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t \text{ (м)}.$$

Перевірка: При $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,67 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з

величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Графік залежності координати x від часу t наведено на рис. 8.20.

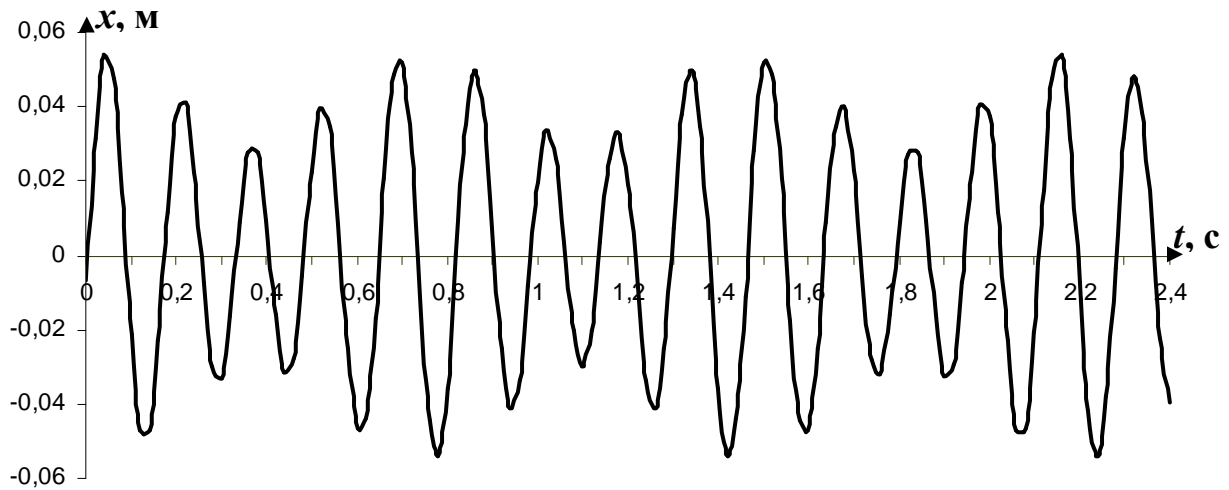


Рис. 8.20

Відповідь: Вантаж здійснює вимушені коливання за законом $x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t$ (м), з коловими частотами 38,7 і 30 $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Приклад 2. Знайти рівняння коливального руху вантажу D по гладенькій похилій площині у напрямку осі x , що співпадає з віссю двох послідовно з'єднаних пружин (рис. 8.21).

Умова задачі. Система встановлених на пружинах вантажів D ($m_D = 20$ кг) і E ($m_E = 10$ кг) знаходиться в положенні статичної рівноваги.

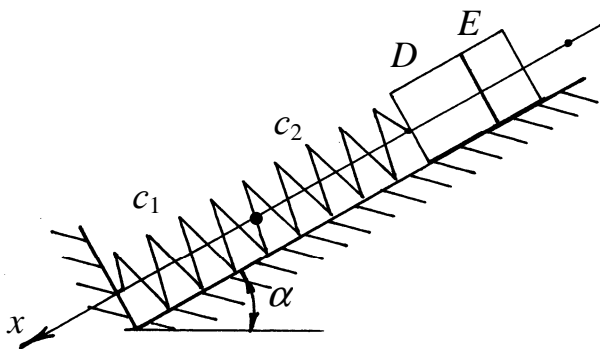


Рис. 8.21

У момент часу $t = 0$ вантаж E знімають з вантажу D . Одночасно вантажу D надають початкову швидкість $V_0 = \dot{x}_0 = 0,1$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x . Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють $c_1 = c_2 = 400$ Н/см. Кут $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 8.22, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D в момент початку коливань (положення рівноваги системи вантажів D і E), δ_{cm_D} – статична деформація пружини під дією вантажу D , $\bar{P}_D, \bar{N}, \bar{F}_{np}$ – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні та сила пружності пружини.

В даній схемі в положенні статичної рівноваги вантажу D сила пружності \bar{F}_{np} пружини зрівноважує не всю силу ваги вантажу \bar{P}_D , а тільки її складову $P_{Dx} = P_D \cdot \sin \alpha$ у напрямку осі Ox , яка співпадає з віссю пружини.

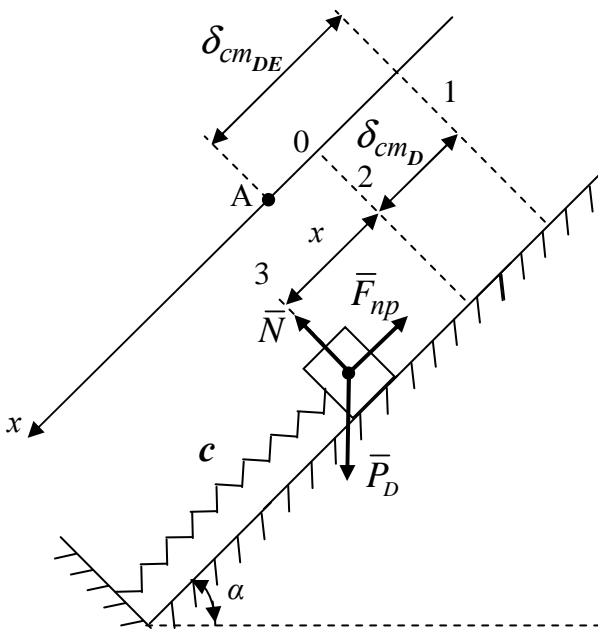


Рис. 8.22

Знаходимо еквівалентну жорст-

кість c (див. рис. 8.4):

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{400 \cdot 400}{400 + 400} = 200 \text{ Н/см} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне

рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = P_D - F_{np} = P_D \cdot \sin \alpha - c(\delta_{cm_D} + x) = P_D \cdot \sin \alpha - c\delta_{cm_D} - cx = -cx,$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

$$\text{або } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{де } \omega_0^2 = \frac{c}{m_D}.$$

Отримане рівняння має форму (8.5) диференціального рівняння вільних коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид (8.6), (8.7)

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 8.22):

$$x|_{t=0} = \delta_{cm_{DE}} - \delta_{cm_D} = \delta_{cm_E}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$:

$$\begin{cases} \delta_{cm_E} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0; \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = \delta_{cm_E}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = \delta_{cm_E} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

величина статичної деформації

$$\delta_{cm_E} = \frac{m_E g \cdot \sin \alpha}{c} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

значення власної частоти

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{20}} = \sqrt{1000} = 31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

величину

$$\frac{V_0}{\omega_0} = \frac{0,1}{31,6} = 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t \text{ (м)}.$$

Перевірка: При $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь: Вантаж здійснює вільні коливання за законом $x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t$ (м), з коловою частотою $31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Графік залежності координати x від часу t приведений на рис. 8.23.

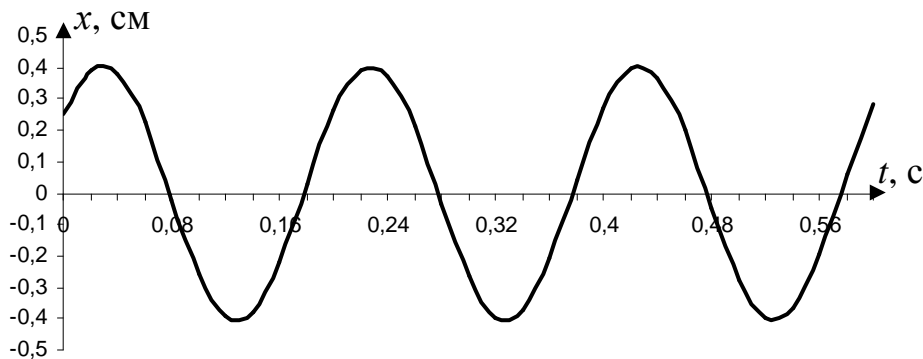


Рис. 8.23

Приклад 3. Знайти рівняння коливального руху вантажу D (рис. 8.24), вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі x . Брусок, який зв'язує пружину і демпфер, є невагомим. Рух бруска, який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним.

Умова задачі. Маса вантажу $m_D = 4$ кг. Коефіцієнти жорсткості двох пружин $c_1 = 2$ Н/см, $c_2 = 3$ Н/см, коефіцієнт опору демпфера $b = 16$ Н·с/м.

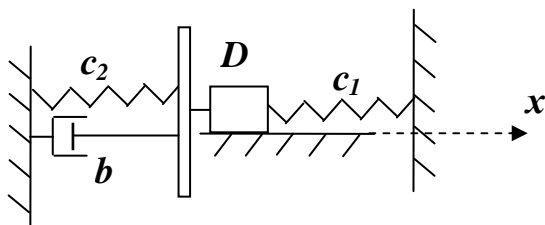


Рис. 2.24

Перед початком руху вантаж відхиляють на величину $\lambda = 3$ см у напрямку від'ємного відліку координати x , надаючи йому у момент часу $t = 0$ початкову швидкість $V_0 = 0,6$ м/с, спрямовану вліво.

Розв'язання

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рис. 8.25, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно

вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D (яке для горизонтальної пружини співпадає з рівнем 1; в цьому разі $\delta_{cm} = 0$) і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D в момент початку коливань, \vec{V}_0 – вектор початкової швидкості, $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{np}, \vec{R}$ – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні, сила пружності пружини та сила опору. Демпфер на рис. 8.25 не показано.

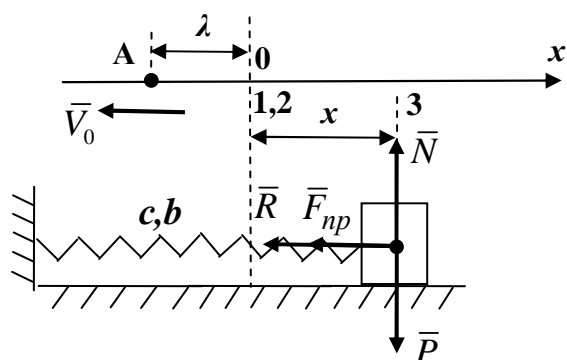


Рис. 8.25

Схема розташування вантажу між двома пружинами еквівалентна паралельному з'єднанню пружних елементів (див. рис. 8.3).

Знаходимо еквівалентну жорсткість c :

$$c = c_1 + c_2 = 2 + 3 = 5 \text{ Н/см} = 5 \cdot 10^2 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = -F_{np} - R = -cx - b\dot{x},$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \text{ або } \ddot{x} + \frac{b}{m_D} \dot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0,$$

$$\text{або } \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{c}{m_D}, \quad 2h = \frac{b}{m}.$$

Отримане рівняння має форму (8.13) диференціального рівняння вільних коливань при наявності опору. Підрахуємо значення власної частоти вільних

коливань
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^2}{4}} = \sqrt{125} = 11,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

та коефіцієнта демпфірування
$$h = \frac{b}{2m} = \frac{16}{2 \cdot 4} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Зрівнюючи ці параметри, маємо $h < \omega_0$ - випадок малого опору. В цьому разі функція $x(t)$ і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вид

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t),$$

$$\dot{x} = -h \cdot e^{-ht} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega_0^* t + C_2 \cdot \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin \omega_0^* t + C_2 \cdot \cos \omega_0^* t).$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 8.25):

$$x|_{t=0} = -\lambda, \quad \dot{x}|_{t=0} = -V_0.$$

Підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\lambda = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ -V_0 = -h \cdot e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0). \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування

$$C_1 = -\lambda; \quad C_2 = \frac{-V_0 - h\lambda}{\omega_0^*}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -e^{-ht} \cdot \left(\lambda \cdot \cos \omega_0^* t + \frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} \cdot \sin \omega_0^* t \right).$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

значення власної частоти затухаючих коливань

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{125 - 4} = \sqrt{121} = 11 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

величину
$$\frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} = \frac{0,6 + 2 \cdot 0,03}{11} = \frac{0,66}{11} = 0,06 \text{ м.}$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t) \text{ (м)}.$$

Перевірка: При $t = 0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,03$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь: Вантаж здійснює затухаючі коливання за законом $x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t)$ (м) з коловою частотою $11 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t приведений на рис. 8.26.

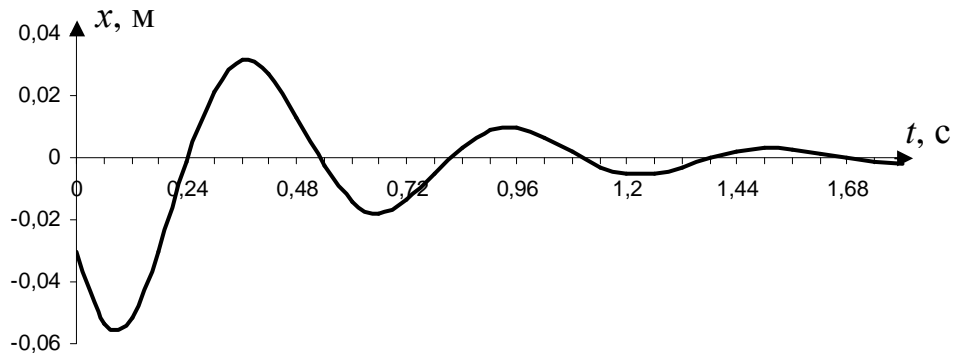


Рис. 8.26

Питання для самоконтролю

1. Під дією якої сили здійснюються вільні коливання матеріальної точки?
2. Який вид має диференціальне рівняння вільних коливань і який його загальний розв'язок?
3. В якому положенні доцільно розміщувати початок відліку?
4. Що називається амплітудою, періодом і частотою вільних коливань матеріальної точки і від чого вони залежать?
5. Який вид має графік вільних коливань матеріальної точки?
6. Який вид має диференціальне рівняння затухаючих коливань і який його загальний розв'язок?
7. Який вид має загальний розв'язок диференціальне рівняння затухаючих коливань при $h = \omega_0$, $h < \omega_0$ і $h > \omega_0$.
8. Що називається декрементом і логарифмічним декрементом коливань?
9. Який вид мають графіки затухаючих коливань і періодичного руху матеріальної точки?

10. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки без урахування сил опору і який його загальний розв'язок?
11. При якій умові виникає резонанс і який вид мають рівняння і графік вимушених коливань матеріальної точки при резонансі?
12. Надайте визначення кінематичного збудження коливань матеріальної точки.
13. Який вид мають графіки АЧХ і ФЧХ дисипативної і консервативної систем?
14. Чому дорівнюють значення ω_{\max} , $W(\omega_{\max})$ і $\varphi(\omega_{\max})$ при дослідженні АЧХ на екстремум?
15. Надайте поняття, формулу властивості коефіцієнта динамічності механічної системи.

9. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

9.1. Основні задачі динаміки твердого тіла

Як і в динаміці матеріальної точки, в динаміці твердого тіла звичайно виділяють дві категорії задач, що розрізняються за своєю постановкою. *Перша* (пряма) полягає в тому, що за заданим рухом твердого тіла і його масою необхідно визначити систему сил, під дією яких відбувається цей рух. У *другій* (оберненій) задачі за заданою системою сил, масою тіла і початковими умовами необхідно визначити рівняння руху тіла, а для невідомого тіла також знайти реакції в'язей. Розв'язання цих задач пов'язане з аналізом диференціальних рівнянь руху твердого тіла.

Для визначення диференціальних рівнянь руху твердого тіла скористаємося загальними теоремами динаміки механічної системи - про рух центра мас і про зміну кінетичного моменту у відносному русі по відношенню до системи координат, що рухається поступально і має початок у центрі мас тіла:

$$Ma_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e, \quad (9.1)$$

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_c(\bar{F}_k^e). \quad (9.2)$$

Ці рівняння дають можливість розв'язувати основні задачі динаміки твердого тіла.

9.2. Поступальний рух твердого тіла

При поступальному русі кутова швидкість тіла і момент кількості його руху відносно центра мас дорівнюють нулю. З рівняння (9.2) випливає, що при цьому буде виконуватись рівняння

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e) = 0. \quad (9.3)$$

Рівняння (9.3) виражає необхідну умову поступального руху тіла. Можна показати, що *необхідною і достатньою умовою поступального руху тіла* буде рівність нулю геометричної суми моментів усіх зовнішніх сил відносно центра мас і початкової кутової швидкості обертання тіла

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e) = 0, \quad \omega|_{t=0} = 0. \quad (9.4)$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рівнянням (9.1), яке в проєкціях на осі нерухомої декартової системи координат має вигляд

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \\ M \ddot{y}_C &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \\ M \ddot{z}_C &= \sum_{k=1}^n F_{kz}^e, \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

де x_C, y_C, z_C – координати центра мас у нерухомій системі координат.

Рівняння (9.5) є диференціальними рівняннями поступального руху твердого тіла.

Оскільки поступальний рух тіла повністю визначається рухом однієї його точки, то динаміка поступального руху тіла зводиться до динаміки матеріальної точки, що розглянута в п. 2.

9.3. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю ω (рис. 9.1).

Проектуючи теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи (4.43) на ось z

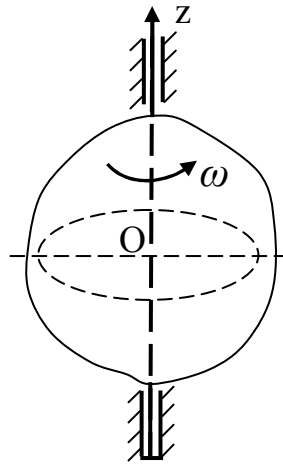


Рис. 9.1

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e)$$

і враховуючи формулу (4.29) для кінетичного моменту твердого тіла відносно осі обертання, отримаємо

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e),$$

або

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e). \quad (9.6)$$

Рівняння (9.6) являє собою **диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі**.

Тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, є прикладом невільного тіла, положення якого у просторі визначається одним параметром – кутом повороту φ . Таким чином, якщо не ставиться за мету визначення реакцій в'язей, рівняння (9.6) дозволяє розв'язати першу і другу задачі динаміки твердого тіла.

Приклад 9.1. Визначити рівняння і період малих коливань фізичного маятника.

Розв'язання

Фізичним маятником називається тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі під дією сили ваги (рис. 9.2).

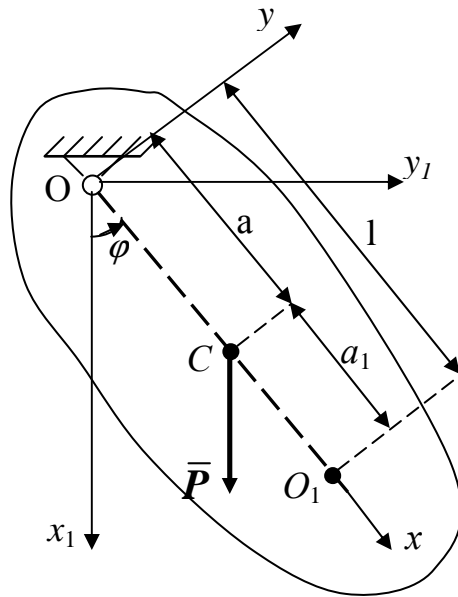


Рис. 9.2

Розглянемо випадок, коли вісь обертання горизонтальна. Проведемо через центр ваги C тіла площину, що перпендикулярна до осі обертання. Точка перетину O цієї площини з віссю обертання називається *точкою підвішування* маятника. Прийнемо цю точку за початок нерухомої $Ox_1y_1z_1$ і рухомої $Oxyz$ (жорстко зв'язаною з тілом) систем координат. Осі z_1 і z направимо по осі обертання. Кут відхилення від вертикалі при довільному положенні маятника позначимо φ . На маятник діє одна зовнішня активна сила – сила ваги $\bar{P} = M\bar{g}$. Складемо диференціальне рівняння обертального руху (9.6):

$$I_z \ddot{\varphi} = -Mga \cdot \sin \varphi, \quad (9.7)$$

де $a = OC$ – відстань від точки підвішування до центра ваги тіла; M – маса тіла; I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання. Диференціальне рівняння (9.7) є нелінійним.

Розглянемо випадок малих коливань, коли можна прийняти $\sin \varphi \approx \varphi$. Тоді, розділивши обидві частини рівняння (9.7) на I_z , запишемо його у вигляді

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (9.8)$$

де $\omega_0^2 = \frac{Mga}{I_z}$ – квадрат частоти власних коливань маятника.

Загальних розв'язок диференціального рівняння (9.8) має вигляд

$$\varphi = A \sin(\omega_0 t + \varepsilon), \quad (9.9)$$

де A – амплітуда, ε – початкова фаза коливань, що визначаються за допомогою початкових умов.

Рівняння (9.9) є рівнянням малих вільних коливань фізичного маятника з періодом, що дорівнює

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}}. \quad (9.10)$$

Формулу (9.10) звичайно зрівнюють з періодом коливань математичного маятника

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_{36}}{g}},$$

де довжину математичного маятника l_{36} , період малих коливань якого збігається з періодом малих коливань фізичного маятника, називають *зведеною довжиною фізичного маятника*, що дорівнює

$$l_{36} = \frac{I_z}{Ma}. \quad (9.11)$$

Представимо момент інерції тіла відносно осі z за теоремою Гюйгенса-Штайнера у вигляді

$$I_z = I_{zc} + Ma^2,$$

Тоді формулу (9.11) можна подати у вигляді

$$l_{36} = \frac{I_z}{Ma} = \frac{I_{zc}}{Ma} + a = a_1 + a. \quad (9.12)$$

Відкладаючи по лінії відрізка ОС від центра ваги відстань a_1 (у бік, протилежний до відрізка ОС), отримаємо точку O_1 , що називається *центром хитання*. Центр хитання має *властивість взаємності* з точкою підвішування: якщо новою точкою підвішування зробити центр хитання, то стара точка підвішування стане новим центром хитання [3].

Зазначимо, що центр хитання відіграє важливу роль при аналізі умов, за яких динамічні складові реакцій в'язей при ударних діях на фізичний маятник дорівнюють нулю.

9.4. Статичне і динамічне зрівноважування твердого тіла при його обертальному русі

У випадку необхідності визначення реакцій в'язей тіла, що обертається навколо нерухомої осі, ці реакції треба додати до зовнішніх сил і розглядати тіло як вільне. В цьому разі векторні рівняння (9.1), (9.2) зручно проектувати на осі рухомої системи координат $Oxyz$, де вісь z співпадає з віссю обертання, а осі x, y жорстко зв'язані з тілом (рис. 9.3). При такому виборі системи відліку координати центра мас тіла і його моменти інерції будуть сталими величинами.

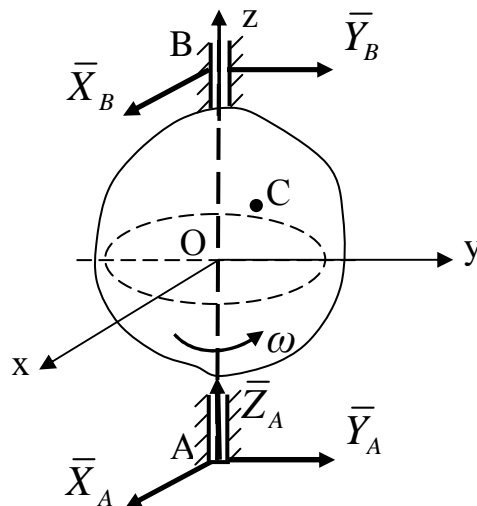


Рис. 9.3

Проекції рівнянь (9.1), (9.2) на осі $Oxyz$ мають вигляд [3]

$$\begin{aligned}
 -M y_C \ddot{\phi} - M x_C \dot{\phi}^2 &= F_x^e + R_x^{cm} + R_x^{\text{дин}}, \\
 M x_C \ddot{\phi} - M y_C \dot{\phi}^2 &= F_y^e + R_y^{cm} + R_y^{\text{дин}}, \\
 0 &= F_z^e + R_z^{cm}, \\
 -I_{xz} \ddot{\phi} + I_{yz} \dot{\phi}^2 &= M_x^e + M_x (\bar{R}^{cm}) + M_x (\bar{R}^{\text{дин}}), \\
 -I_{yz} \ddot{\phi} - I_{xz} \dot{\phi}^2 &= M_y^e + M_y (\bar{R}^{cm}) + M_y (\bar{R}^{\text{дин}}), \\
 I_z \ddot{\phi} &= M_z^e,
 \end{aligned}
 \tag{9.13}$$

де $F_x^e, F_y^e, F_z^e, M_x^e, M_y^e, M_z^e$ – проєкції відповідно головного вектора і головного моменту зовнішніх активних сил на осі координат; $\bar{R} = \bar{R}^{cm} + \bar{R}^{\partial ин}$ – головний вектор реакцій в'язей, який можна представити у вигляді суми двох складових: *статичної* (що визначається зовнішніми активними силами) і *динамічної* (що залежить від закону руху тіла і положення осі обертання відносно його центра мас). Наприклад, для тіла, що зображено на рис. 9.3, складові головного вектора реакцій в'язей матимуть вигляд $R_x^{cm} = X_A^{cm} + X_B^{cm}$, $R_x^{\partial ин} = X_A^{\partial ин} + X_B^{\partial ин}$, $R_y^{cm} = Y_A^{cm} + Y_B^{cm}$, $R_y^{\partial ин} = Y_A^{\partial ин} + Y_B^{\partial ин}$, $R_z^{cm} = Z_A^{cm}$.

Як показує практика, динамічні складові реакцій можуть у багато разів перевищувати статичні. Тому визначення умов, за яких динамічні складові реакції дорівнюють нулю, є важливою задачею динаміки твердого тіла.

Рівняння (9.13) можна представити у вигляді двох систем рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= F_x^e + R_x^{cm}, \\ 0 &= F_y^e + R_y^{cm}, \\ 0 &= F_z^e + R_z^{cm}, \\ 0 &= M_x^e + M_x(\bar{R}^{cm}), \\ 0 &= M_y^e + M_y(\bar{R}^{cm}), \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

$$\left. \begin{aligned} -M_{y_c} \ddot{\phi} - M_{x_c} \dot{\phi}^2 &= R_x^{\partial ин}, \\ M_{x_c} \ddot{\phi} - M_{y_c} \dot{\phi}^2 &= R_y^{\partial ин}, \\ -I_{xz} \ddot{\phi} + I_{yz} \dot{\phi}^2 &= M_x(\bar{R}^{\partial ин}), \\ -I_{yz} \ddot{\phi} - I_{xz} \dot{\phi}^2 &= M_y(\bar{R}^{\partial ин}), \\ I_z \ddot{\phi} &= M_z^e. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

Таким чином, статичні складові реакцій в'язей визначаються з рівнянь (9.14), які подібні до рівнянь рівноваги нерухомого тіла.

Динамічні складові реакцій визначаються першими чотирма рівняннями системи (9.15) (у п'яте рівняння вони не входять). Проаналізуємо, за яких умов

ці складові реакцій будуть дорівнювати нулю. Очевидно, це буде тоді, коли ліві частини перших чотирьох рівнянь системи (9.15) дорівнюватимуть нулю:

$$\begin{aligned} -My_C\ddot{\phi} - Mx_C\dot{\phi}^2 &= 0, & -I_{xz}\ddot{\phi} + I_{yz}\dot{\phi}^2 &= 0, \\ Mx_C\ddot{\phi} - My_C\dot{\phi}^2 &= 0, & -I_{yz}\ddot{\phi} - I_{xz}\dot{\phi}^2 &= 0, \end{aligned}$$

Після деяких алгебраїчних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 x_C + \ddot{\phi} y_C &= 0, & \ddot{\phi} I_{xz} - \dot{\phi}^2 I_{yz} &= 0, \\ \ddot{\phi} x_C - \dot{\phi}^2 y_C &= 0, & \dot{\phi}^2 I_{xz} + \ddot{\phi} I_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Рівняння (9.16) являють собою систему однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} , що розпадаються на дві незалежні між собою системи рівнянь з однаковим визначником, що не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{vmatrix} = -(\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2) \neq 0,$$

оскільки для тіла, що обертається, кутові швидкість $\dot{\phi}$ і прискорення $\ddot{\phi}$ одночасно на нуль не перетворюються. Отже, рівняння (9.16) мають єдиний розв'язок

$$x_C = y_C = 0, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0. \quad (9.17)$$

Перша умова рівнянь (9.17) $x_C = y_C = 0$ означає, що центр мас тіла знаходиться на осі обертання. В цьому випадку говорять, що тіло *статично зрівноважене* (збалансоване).

Друга умова $I_{xz} = I_{yz} = 0$ означає, що вісь обертання Oz є головною віссю інерції, а при виконанні першої умови рівнянь (9.17) ця вісь є також центральною віссю інерції. Якщо виконуються обидві умови рівнянь (9.17), говорять, що тіло *динамічно зрівноважене*. Це означає, що динамічні складові реакцій в'язей дорівнюють нулю.

Отже, для того щоб при обертанні тіла навколо нерухомої осі не виникали динамічні складові реакцій в'язей, необхідно і достатньо, щоб вісь обертання була головною центральною віссю інерції.

Зазначимо, що коли тіло зрівноважене динамічно, то воно зрівноважене і статично. Якщо тіло зрівноважене статично, то динамічно воно може бути і не зрівноважене.

З наведених розміркувань витікає механічний смисл відцентрових моментів інерції. Відцентрові моменти інерції I_{xz} , I_{yz} характеризують ступінь динамічної незрівноваженості мас тіла при його обертанні.

9.5. Плоскопаралельний рух твердого тіла

У кінематиці було встановлено, що положення тіла при плоскопаралельному (плоскому) русі визначається трьома параметрами. За ці параметри зручно вибрати координати центра мас тіла і кут повороту тіла відносно осі, що перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас тіла. Сумістимо площину $O_1x_1y_1$ нерухомої системи координат з площиною руху (рис. 9.4). Начало рухомої системи координат $Oxyz$ помістимо у центр мас тіла, а вісь z направимо перпендикулярно до площини руху.

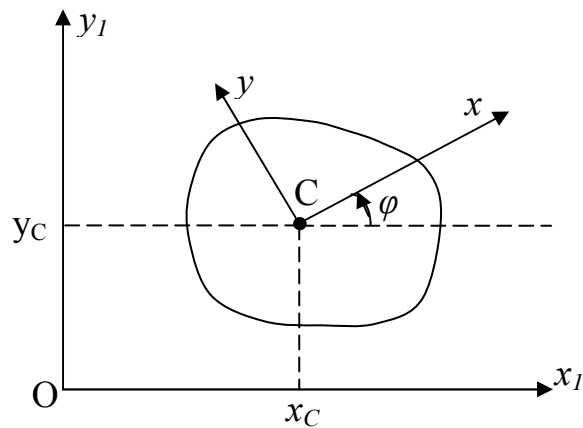


Рис. 9.4

Проектуючи векторне рівняння (9.1) на осі нерухомої системи координат, а рівняння (9.2) на вісь z рухомої системи координат, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_{1C} &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \\ M\ddot{y}_{1C} &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \\ M\dot{\varphi} &= \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k^e). \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Рівняння (9.18) являють собою диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла. Ці рівняння дозволяють розв'язувати основні задачі динаміки твердого тіла.

Зауваження 1. Якщо тіло здійснює невільний плоский рух, до рівнянь (9.18) слід додати ще рівняння в'язей.

Зауваження 2. Для здійснення вільного плоского руху потрібно, щоб маса тіла була розподілена симетрично відносно площини руху, що проходить через центр мас тіла (тоді $I_{xz} = I_{yz} = 0$), початкові швидкості всіх точок тіла були розміщені в площинах, що паралельні площині руху, а всі зовнішні сили лежали у цій площині. Зазначимо, що умови динамічної зрівноваженості тіла, що здійснює обертальний рух, співпадають з умовами реалізацій вільного плоского руху тіла.

Приклад 9.2. Суцільний однорідний циліндр скочується під дією власної ваги по похилій шорсткій площині з кутом нахилу α (рис. 9.5). Визначити прискорення центра циліндра a_C і найменший коефіцієнт тертя f циліндра о площину, при якій можливе кочення без ковзання. Визначити також прискорення центра циліндра і його кутове прискорення у випадку, коли циліндр буде котитись з ковзанням.

Розв'язання

Розглянемо циліндр у довільному положенні на площині. На циліндр, як вільне тіло, діють сила ваги \bar{P} , нормальна реакція поверхні \bar{N} і сила тертя $\bar{F}_{тр}$. Осі нерухомої системи координат $O_1x_1y_1$ виберемо так, як показано на рис. 9.5. На основі рівнянь (9.18) дістанемо

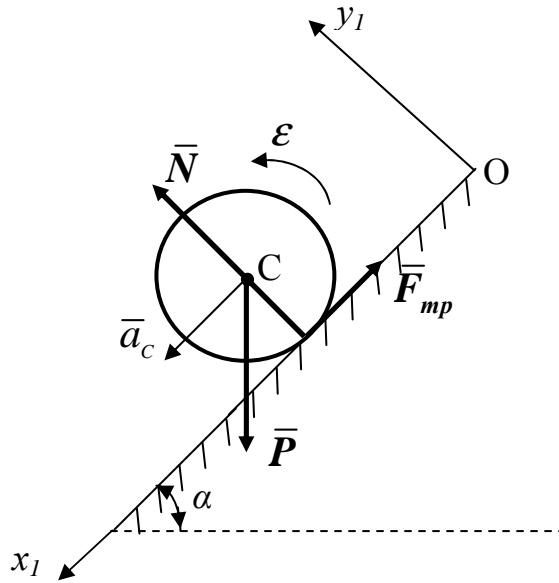


Рис. 9.5

$$\left. \begin{aligned} Ma_c &= P \sin \alpha - F_{mp}, \\ 0 &= N - P \cos \alpha, \\ I_{zc} \varepsilon &= F_{mp} r, \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

де r - радіус циліндра, $\ddot{x}_{1C} = a_{cx_1} = a_c$, $\ddot{y}_{1C} = a_{cy_1} = 0$, $\ddot{\varphi} = \varepsilon$. При складанні третього рівняння системи (9.19) було враховано, що моменти сил додатні, якщо вони напрямлені у бік кутового прискорення тіла.

Отримаємо відповідь на перше питання. В систему рівнянь (9.19) входять чотири невідомі: a_c , ε , N , F_{mp} (при ковченні без ковзання сила тертя не досягає граничного значення, а задовольняє нерівності $F_{mp} \leq fN$). Додаткове рівняння отримаємо, враховуючи кінематичну залежність між швидкістю центра мас і кутовою швидкістю тіла при відсутності ковзання, тобто коли миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці торкання циліндра і площини: $V_C = \omega r$. Диференціюючи цю залежність за часом, отримаємо $a_c = \varepsilon r$. Тоді третє рівняння з урахуванням формули моменту інерції циліндра $I_{zc} = \frac{Mr^2}{2}$

набуде вигляду

$$\frac{Mr^2}{2} \frac{a_c}{r} = F_{mp} r.$$

Звідки

$$F_{mp} = \frac{Ma_c}{2}. \quad (9.20)$$

Підставляючи (9.20) в перше рівняння системи (9.19), отримаємо

$$Ma_c = Mg \sin \alpha - \frac{Ma_c}{2}.$$

Розв'язуючи це рівняння, матимемо вираз для прискорення центра циліндра

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (9.21)$$

Тепер з рівняння (9.20) знайдемо силу тертя

$$F_{mp} = \frac{Ma_c}{2} = \frac{Mg \sin \alpha}{3}. \quad (9.22)$$

Оскільки при коченні без ковзання сила тертя задовольняє нерівності $F_{mp} \leq fN$, а з другого рівняння системи (9.19) витікає, що $N = P \cos \alpha = Mg \cos \alpha$, отримаємо нерівність

$$\frac{Mg \sin \alpha}{3} \leq fMg \cos \alpha,$$

звідки отримаємо умову, якій повинен задовольняти коефіцієнт тертя для можливості кочення циліндра без ковзання

$$f \geq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}.$$

Отже, найменший коефіцієнт тертя f циліндра о площину дорівнює

$$f = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}. \quad (9.23)$$

Отримаємо далі відповідь на друге питання. При коченні циліндра з ковзанням рівність $V_c = \omega r$ не буде виконуватись, оскільки точка торкання циліндра і поверхні не буде миттєвим центром швидкостей. Проте сила тертя досягає граничного значення, тобто буде виконуватись співвідношення

$F_{mp} = fN = fMg \cos \alpha$. Тоді перше та третє рівняння системи (9.19) набудуть вигляду

$$Ma_c = Mg(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

$$\frac{Mr^2}{2} \varepsilon = fMg \cos \alpha \cdot r,$$

звідки

$$a_c = g(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

$$\varepsilon = \frac{2fg \cos \alpha}{r}. \quad (9.24)$$

Відповідь. Найменше значення коефіцієнта тертя, при якому відбувається кочення циліндра без ковзання $f = \frac{tg\alpha}{3}$, при цьому прискорення його центра мас дорівнює $a_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha$. При менших значеннях коефіцієнта тертя циліндр буде котитись з ковзанням, а прискорення центра мас і кутове прискорення визначаються співвідношеннями (9.24).

Питання для самоконтролю

1. В чому полягають перша і друга задачі динаміки твердого тіла?
2. На основі яких теорем отримують диференціальні рівняння руху твердого тіла?
3. Записати диференціальні рівняння поступального руху тіла.
4. Який вигляд має диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?
5. Яким умовам задовольняє статично зрівноважене тіло, що обертається?
6. За яких умов динамічні складові реакцій в'язей тіла, що обертається, дорівнюють нулю?
7. Який вигляд мають диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла?

10. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ УДАРУ

Явище удару досить часто зустрічається в техніці і може мати як бажаний характер, наприклад, як елемент технологічних процесів (дроблення крихких тіл, ковка, штамповка, забивання палів), так і небажаний (удари морських хвиль об корабель, ударні дії на залізничні вагони або мостові споруди при проходженні стиків рейок, удари при падінні тіл і вибухи при аваріях тощо).

Механізм ударної взаємодії є досить складним процесом, який потребує урахування фізичних властивостей тіл під час їх зіткнення. Але в першому наближенні можна використати положення, що ґрунтуються на дослідженнях Ньютона. Це наближення є достатньо добрим, якщо під час удару відбувається тільки місцева деформація поблизу точки контакту тіл.

10.1. Основні визначення і рівняння теорії удару матеріальної точки

При русі матеріальної точки під дією зовнішніх сил її швидкість змінюється в часі безперервно: кожному малому проміжку часу $\Delta t = \tau$ відповідає малий приріст швидкості $\Delta \bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}_0$. У цьому можна переконатись, якщо застосувати теорему про середнє до правої частини теореми про зміну кількості руху точки:

$$m(\bar{V}_1 - \bar{V}_0) = \int_0^{\tau} \bar{F} \cdot dt = \bar{F}_{cp} \cdot \tau. \quad (10.1)$$

Якщо сила, що діє на точку, буде достатньо великою (мати порядок $1/\tau$), то приріст швидкості $\Delta \bar{V}$ за малий проміжок часу τ буде скінченною величиною.

Явище, при якому швидкість точки за малий проміжок часу τ змінюється на скінченну величину, називається *ударом*. Проміжок часу τ , протягом якого відбувається удар, називається *часом удару*. Сила, яка діє протягом часу удару і досягає значної величини, називається *ударною силою*. Як правило, точний

закон зміни за часом ударної сили невідомий, але наближений графік її модуля має вигляд, як показано на рис. 10.1.

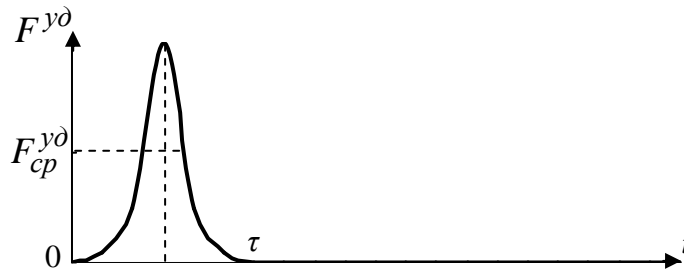


Рис. 10.1

Зважаючи на те, що ударні сили змінюються за короткий проміжок часу досить значно, в теорії удару як *міру взаємодії точок* (або тіл) розглядають не самі сили, а їх *імпульси*. Вектор

$$\bar{S}^{y\delta} = \int_0^{\tau} \bar{F}^{y\delta} \cdot dt = \bar{F}_{cp}^{y\delta} \cdot \tau \quad (10.2)$$

називається *ударним імпульсом*. Ударний імпульс $\bar{S}^{y\delta}$ при малому часі удару τ є скінченною величиною.

Розглянемо матеріальну точку, що рухається відносно інерціальної системи відліку і на яку, крім звичайних, діють ударні сили. Позначимо її швидкість до удару \bar{v} , а після удару \bar{u} . Тоді за час удару для неї буде справедливою теорема про зміну кількості руху:

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^{y\delta}, \quad (10.3)$$

де n – кількість ударних сил. У праву частину рівняння (10.3) не входять імпульси неударних сил (які є сталими, або за час удару змінюються незначно, наприклад, сила ваги точки), оскільки при малому часі удару їх імпульси будуть малими в порівнянні з імпульсами ударних сил.

Рівняння (10.3) є *основним рівнянням теорії удару матеріальної точки* і формулюється наступним чином: *зміна кількості руху матеріальної точки під час удару дорівнює геометричній сумі діючих на точку ударних імпульсів*.

Відмітимо властивість переміщення точки під час удару. За визначенням, $\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\tau}$, звідки $\Delta\bar{r} = \bar{V}_{cp} \cdot \tau$. Це означає, що при малому часі удару τ переміщення точки за цей час $\Delta\bar{r}$ є малою величиною.

Отже, наведемо *основні результати елементарної теорії удару* матеріальної точки:

1) зміна швидкості точки під час удару визначається основним рівнянням теорії удару (10.3);

2) дією неударних сил під час удару можна нехтувати;

3) переміщенням точки під час удару можна нехтувати.

Основними завданнями теорії удару матеріальної точки є визначення її швидкості після удару при відомій швидкості до удару, а також визначення ударних імпульсів.

Зауваження. Наведені результати можна застосовувати не тільки до ударних сил, що виникають у точці контакту тіл, але й до будь-яких інших, закон зміни за часом яких має вигляд функції на рис. 10.1. Такі сили виникають при вибуху в порожнині, при розповсюдженні пружних хвиль у суцільному середовищі, при розривах у потоці рідини або газу.

10.2. Гіпотеза Ньютона про коефіцієнт відновлення при ударі

Розглянемо процес удару двох тіл. При їх зіткненні у точці контакту виникають ударні сили, які діють на кожне тіло, є рівними за модулем, протилежними за напрямом і лежать на спільній лінії дії (третій закон Ньютона).

Введемо припущення:

1) ударні сили і їх імпульси $\bar{S}_{12}, \bar{S}_{21}$ напрямлені уздовж спільної нормалі до поверхонь тіл у точці їх контакту (рис. 10.2);

2) силами тертя у точці контакту можна нехтувати;

3) при ударі необхідно враховувати деформування тіл.

Процес удару можна поділити на дві фази.

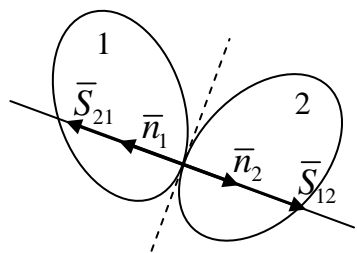


Рис. 10.2

Перша фаза – зближення тіл по спільній нормалі, проекція відносної швидкості точки контакту на нормаль зменшується до нуля, кінетична енергія руху переходить у внутрішню потенціальну енергію деформації тіл.

Друга фаза – тіла, що відновлюють свою форму, віддаляються одне від одного, проекція відносної швидкості точки контакту на нормаль збільшується, але не досягає свого значення до удару, внутрішня потенціальна енергія деформації знов переходить у кінетичну енергію руху, проте частина її уходить на нагрівання тіл і залишкові деформації.

Як показують досліди, в першому наближенні можна прийняти *гіпотезу Ньютона*: відношення модуля нормальної складової відносної швидкості точки контакту тіл після удару до її значення до удару є величиною сталою, яка в певних межах не залежить від відносної швидкості і мас тіл, а визначається тільки матеріалом тіл, що стикаються. Цю сталу величину, яку позначимо через k , називають *коефіцієнтом відновлення при ударі*

$$k = \frac{|u_n^r|}{|v_n^r|}. \quad (10.4)$$

Значення коефіцієнта відновлення знаходяться в межах $0 \leq k \leq 1$.

При $k = 0$ удар називають *абсолютно непружним*. У цьому разі весь процес удару відбувається в першій фазі удару. Форма тіл не відновлюється. Обидва тіла після удару рухаються як одне ціле, втративши частину кінетичної енергії на деформацію і тепло.

При $k = 1$ удар називають *абсолютно пружним*. Втрати кінетичної енергії не відбувається і тіла у другій фазі удару повністю відновлюють свою форму. Це – граничні випадки.

В інших випадках $0 < k < 1$ і удар називають *не зовсім пружним* або просто *пружним*.

Наведемо значення коефіцієнта відновлення для деяких матеріалів: дерево – 0,5; сталь – 0,56; скло – 0,94.

Приклад 1. Експериментальне визначення коефіцієнта відновлення.

Розв'язання

На масивну плиту з висоти h_1 кидають кульку без початкової швидкості. Плита і кулька виготовлені з того самого матеріалу. Кулька ударяється об плиту зі швидкістю $v = \sqrt{2gh_1}$ (цю формулу можна отримати за допомогою, наприклад, теореми про зміну кінетичної енергії точки). Після удару кулька відскочить на висоту h_2 зі швидкістю $u = \sqrt{2gh_2}$. Оскільки ці швидкості нормальні до поверхні плити, то

$$k = \frac{|u_n^r|}{|v_n^r|} = \frac{|u|}{|v|} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (10.5)$$

Таким чином, заміряючи висоти падіння h_1 і відскоку кульки від поверхні h_2 , можна визначити коефіцієнт відновлення k .

Приклад 2. Матеріальна точка маси m падає на горизонтальну поверхню з того самого матеріалу зі швидкістю v під кутом падіння α . Коефіцієнт відновлення дорівнює k . Потрібно визначити кут відбиття β , швидкість точки після удару u і ударний імпульс $S^{y\delta}$ реакції поверхні (рис. 10.3).

Розв'язання

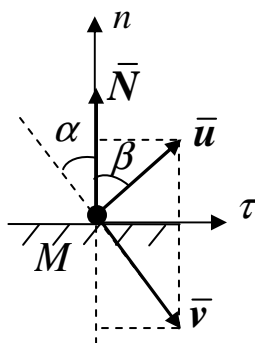


Рис. 10.3

На матеріальну точку під час удару об поверхню діють сила тяжіння і нормальна реакція поверхні \bar{N} . Сила тяжіння не є ударною, тому діючий на точку ударний імпульс визначається як

$$\bar{S}^{y\delta} = \int_0^{\tau} \bar{N} \cdot dt.$$

Проведемо осі натуральної системи координат τ, n і спроектуємо векторне рівняння (10.3) на ці осі:

$$\begin{cases} m(u_\tau - v_\tau) = S_\tau^{y\partial} \\ m(u_n - v_n) = S_n^{y\partial}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m(u \cdot \sin \beta - v \cdot \sin \alpha) = 0 \\ m[u \cdot \cos \beta - (-v \cdot \cos \alpha)] = S^{y\partial}. \end{cases} \quad (10.6)$$

Додамо до отриманої системи рівняння (10.4):

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} = \frac{u \cdot \cos \beta}{v \cdot \cos \alpha}. \quad (10.7)$$

З системи трьох останніх алгебраїчних рівнянь знайдемо три шукані величини. З рівняння (10.7)

$$u = \frac{k \cdot v \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (10.8)$$

Підставимо отриманий результат у перше рівняння системи (10.6):

$$m \cdot \left[\frac{k \cdot v \cdot \cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \sin \beta - v \cdot \sin \alpha \right] = 0.$$

Звідки $k \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \sin \alpha = 0$, або $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

$$\text{або} \quad \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (10.9)$$

Нарешті, з другого рівняння системи (10.6) отримаємо розрахункову формулу для ударного імпульсу:

$$S^{y\partial} = m[u \cdot \cos \beta + v \cdot \cos \alpha],$$

яка з урахуванням формули (10.8) може бути записана у вигляді

$$S^{y\partial} = m \cdot (1 + k) \cdot v \cdot \cos \alpha. \quad (10.10)$$

Проаналізуємо отримані результати (10.9), (10.8), (10.10).

1. З формул (10.8), (10.9) випливає, що для абсолютно пружного удару ($k = 1$) кут падіння дорівнює куту відбиття $\alpha = \beta$, а швидкість точки при ударі за модулем не змінюється $u = v$. При пружному ударі ($0 < k < 1$) кут відбиття більший за кут падіння $\beta > \alpha$ (і тільки при вертикальному падінні $\beta = \alpha = 0$). Модуль швидкості після удару в цьому випадку завжди менший за модуль швидкості до удару $u < v$, оскільки $u \cdot \sin \beta = v \cdot \sin \alpha$ (див. формулу (10.6)), а при вертикальному падінні $u = k \cdot v$ (див. формулу (10.7)).

2. З формули (10.10) видно, що ударний імпульс при абсолютно пружному ударі ($k=1$) вдвічі більший за ударний імпульс при абсолютно непружному ударі ($k=0$) і досягає максимальної величини при вертикальному падінні точки на поверхню (при $\alpha=0$).

10.3. Загальні теореми теорії удару механічної системи

10.3.1. Теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі

Ця теорема в інтегральній формі має такий же вигляд, як і при звичайному навантаженні, але у праву частину будуть входити тільки ударні імпульси:

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^{y\partial e}, \quad (10.11)$$

де n – число точок системи, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2 – кількість руху системи до і після удару відповідно, $\bar{S}_k^{y\partial e}$ – зовнішні ударні імпульси.

Формулюється *теорема* наступним чином: *зміна кількості руху механічної системи під час удару дорівнює геометричній сумі ударних імпульсів зовнішніх сил, що діють на систему.*

Зауваження 1. При розв'язанні задач векторне рівняння (10.11) звичайно проєктують на осі координат.

Зауваження 2. Внутрішні ударні імпульси не можуть змінити кількість руху механічної системи (вони не входять в рівняння (10.11)).

10.3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі

Зазначена теорема в диференціальній формі має такий же вигляд, як і при звичайному навантаженні, але в праву частину будуть входити моменти тільки ударних сил:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e}), \quad (10.12)$$

де n – число точок системи, \bar{K}_o – момент кількості руху системи відносно центру O , $\bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e})$ – моменти зовнішніх ударних сил відносно того ж центра.

Оскільки переміщеннями точок системи під час удару можна нехтувати, цю теорему в теорії удару звичайно використовують в інтегральній формі. Розділимо в рівнянні (10.12) змінні й зінтегруємо за часом обидві частини, використовуючи для моменту сили вираз $\bar{M}_o(\bar{F}_k^{y\partial e}) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{y\partial e}$, де \bar{r}_k – радіус-вектор k -ї точки системи, який не змінюється за час удару:

$$\int_0^{\tau} d\bar{K}_o = \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{y\partial e}) dt = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \int_0^{\tau} \bar{F}_k^{y\partial e} dt) = \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times \bar{S}_k^{y\partial e}),$$

або

$$\bar{K}_{o2} - \bar{K}_{o1} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_o(\bar{S}_k^{y\partial e}). \quad (10.13)$$

Рівняння (10.13) виражає *теорему* про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі в інтегральній формі: *зміна моменту кількості руху механічної системи відносно центра O під час удару дорівнює геометричній сумі моментів ударних імпульсів зовнішніх сил, які діють на систему, відносно того ж центра.*

Для даної теореми мають місце зауваження, наведені у § 10.3.1.

10.3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі (теорема Карно)

Введемо ще дві характеристики удару.

Удар двох тіл називається *центральним*, якщо спільна нормаль у точці контакту тіл проходить через їх центри мас. Удар двох тіл називається *прямим*, якщо швидкості центрів мас тіл на початку удару напрямлені по спільній нормалі в точці контакту тіл.

Розглянемо випадок *абсолютно непружного* удару двох тіл, які здійснюють *поступальний рух*. Для простоти розглянемо *прямий* удар двох куль. Він буде також і *центральною*, оскільки нормаль у точці контакту куль проходить через їх центри мас (рис. 10.4).

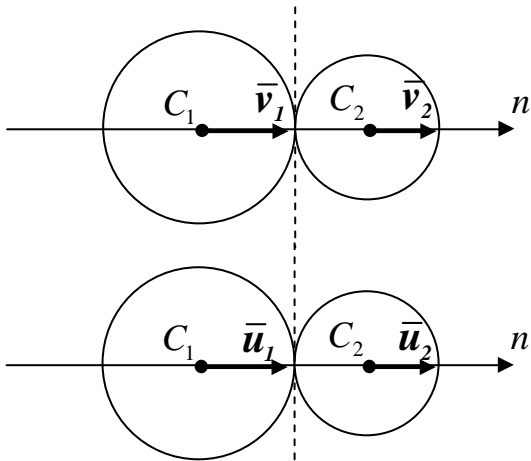


Рис. 10.4

Кінетична енергія системи до удару

$$\text{дорівнює } T_1 = \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2}.$$

Після абсолютно непружного удару тіла рухаються з однаковою швидкістю $u_1 = u_2 = u$ і кінетична енергія після удару

$$\text{дорівнює } T_2 = \frac{(M_1 + M_2) u^2}{2}.$$

Таким чином, при ударі втрачається кінетична енергія

$$\Delta T = T_1 - T_2 = T_1 - 2T_2 + T_2.$$

Спроектуємо на вісь нормалі n рівняння теореми про зміну кількості руху системи (10.11)

$$(M_1 + M_2)u - (M_1 v_1 + M_2 v_2) = 0,$$

звідки

$$(M_1 + M_2)u = M_1 v_1 + M_2 v_2. \quad (10.14)$$

Тоді

$$2T_2 = (M_1 + M_2)u \cdot u = (M_1 v_1 + M_2 v_2)u = M_1 v_1 u + M_2 v_2 u.$$

Підставимо останню рівність у формулу втраченої кінетичної енергії

$$\Delta T = T_1 - 2T_2 + T_2 = \frac{1}{2} [M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 - 2M_1 v_1 u - 2M_2 v_2 u + M_1 u^2 + M_2 u^2]$$

і згрупуємо доданки

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{M_1 (v_1 - u)^2}{2} + \frac{M_2 (v_2 - u)^2}{2}. \quad (10.15)$$

У формулі (10.15) різниці $(v_1 - u), (v_2 - u)$ показують, на скільки зменшується при ударі швидкість кожного з тіл, їх називають «втраченими швидкостями».

Отже, рівність (10.15) виражає *теорему Карно* про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі: *кінетична енергія, що втрачається системою тіл при абсолютно непружному ударі, дорівнює тій кінетичній енергії, яку б мала система за умови, що її тіла рухались із «втраченими швидкостями».*

Зауваження. Розмірковуючи аналогічним чином, можна узагальнити теорему (10.15) на випадок пружного удару ($0 < k < 1$):

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} \cdot \left[\frac{M_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u_2)^2}{2} \right]. \quad (10.16)$$

Проаналізуємо деякі випадки при абсолютно непружному ударі, якщо друге тіло було до удару нерухомим ($v_2 = 0$). У цьому разі з рівняння (10.14)

знаходимо $u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}$. Тоді формула для кінетичної енергії T_2 набуває вигляду

$$T_2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot u^2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot \left(\frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} \right)^2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_1 v_1^2}{2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot T_1. \quad (10.17)$$

З рівняння (10.17) випливає наступне.

1. Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в кінетичну енергію руху тіл після удару ($T_2 \approx T_1$), треба виконати умову $M_1 \gg M_2$. Тобто маса тіла, що ударяється, була б якомога більшою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при забиванні цвяхів, палів тощо.

2. Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в потенціальну енергію деформації тіла після удару ($T_2 \approx 0$), треба виконати зворотню умову $M_2 \gg M_1$. Тобто маса тіла, що ударяється, була б якомога меншою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при куванні, штампуванні металів тощо.

10.3.4. Поняття про центр удару

Обговоримо коротко основні висновки, що відбуваються при ударі по тілу, яке обертається навколо нерухомої осі. В опорах осі (звичайно це підшипник і підп'ятник) виникають ударні реакції, що можуть призвести до передчасної руйнації цих опор і осі. Щоб удар не передавався на опори А і В осі обертання АВ, мають виконуватися наступні умови (рис. 10.5):

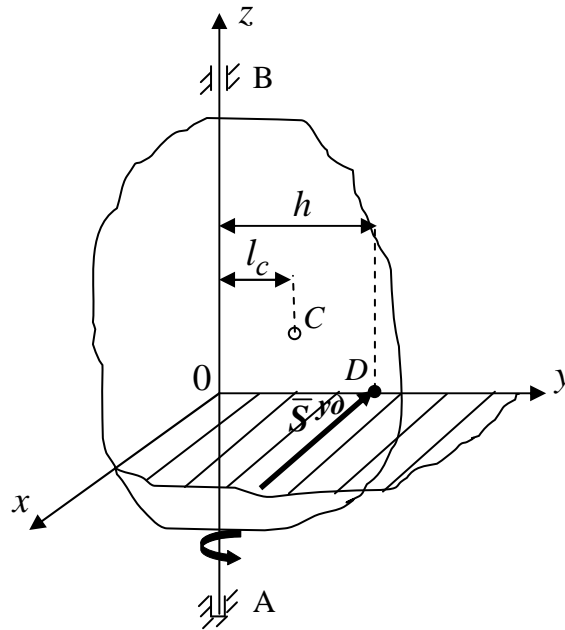


Рис. 10.5

1) площина xOy , що містить ударний імпульс $\bar{S}^{y\delta}$ і перпендикулярна до осі обертання, має перетинатися з нею в точці O , для якої вісь обертання є головною віссю інерції (для якої відцентрові моменти інерції, які містять індекс осі, дорівнюють нулю);

2) лінія дії ударного імпульсу має бути перпендикулярною до площини yOz , що містить центр мас тіла і вісь обертання;

3) лінія дії ударного імпульсу має бути віддалена від осі обертання на відстань h , яка дорівнює зведеній довжині фізичного маятника ($h = \frac{I_z}{M \cdot l_c}$, де

I_z - момент інерції тіла відносно осі обертання, l_c - відстань від осі обертання

до центра мас тіла). При цьому лінія дії ударного імпульсу і центр мас тіла мусять знаходитися з одного боку від осі обертання.

Точка, в якій прикладений ударний імпульс, що задовольняє всім наведеним умовам і не викликає ударних реакцій, називається *центром удару*.

Зауваження. Якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла, то центр удару не існує і будь-який удар буде викликати ударні реакції.

Приклад 3. Визначити положення центра удару палицею по нерухомій опорі К, якщо тримати палицю рукою за її кінець О (рис. 10.6).

Розв'язання

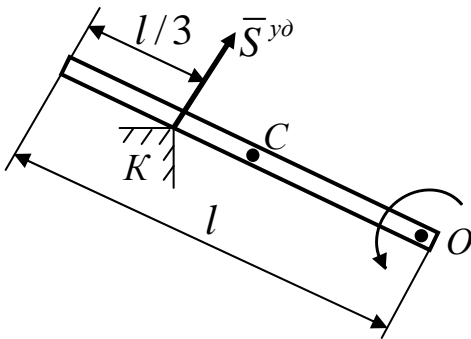


Рис. 10.6

Будемо вважати палицю однорідним стержнем завдовжки l , а вісь її обертання такою, що проходить перпендикулярно до площини рисунка через точку О. Момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його кінець, дорівнює (див. табл. 3.1) $I_z = \frac{ml^2}{3}$, де

m – маса стержня, а відстань від осі обертання до центра мас $l_c = l/2$. Тоді лінія дії ударного імпульсу $\bar{S}^{y\partial}$ має бути віддаленою від осі обертання на відстань $OK = h$, що дорівнює

$$h = \frac{I_z}{m \cdot l_c} = \frac{\frac{ml^2}{3}}{m \cdot \frac{l}{2}} = \frac{2}{3}l.$$

Отже, центр удару буде віддаленим від руки на дві третини довжини стержня або на третину довжини від його вільного кінця.

Таким чином, щоб рука не випробувала ударних реакцій, палицею потрібно ударяти тим місцем, яке відстоїть від вільного кінця на третину її довжини.

Питання для самоконтролю

1. Що є мірою взаємодії тіл при ударі?
2. Який вигляд має основне рівняння удару матеріальної точки?
3. Наведіть основні результати теорії удару матеріальної точки.
4. У чому полягає гіпотеза Ньютона при ударі, які межі її застосування?
5. Як формулюється теорема про зміну кількості руху системи при ударі?
6. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху системи при ударі?
7. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії системи при ударі?
8. Що називається центром удару?

11. ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Загальні теореми динаміки теоретичної механіки складають достатньо потужний інструмент дослідження руху механічної системи, проте їх застосування пов'язане з деякими труднощами. По-перше, часто не можна заздалегідь визначити, яка з теорем дозволить швидше розв'язати певну задачу. По-друге, при розв'язанні деяких задач доводиться вводити у розгляд невідомі реакції в'язей, визначення яких не завжди потрібно за умовою задачі. Нарешті, кожна окрема теорема не може повністю охарактеризувати рух системи, тобто з окремої теореми не можна отримати всю сукупність диференціальних рівнянь руху механічної системи.

Аналітична механіка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються найбільш загальні аналітичні методи складання і розв'язання задач механіки вільних і невільних систем матеріальних точок та твердих тіл.

Методи дослідження, розроблені в аналітичній механіці, використовуються як в інших областях механіки (теорія пружності, стійкості рівноваги і руху, малих коливань механічних систем, гіроскопів, автоматичного регулювання, автоматичного керування рухом літальних апаратів, динаміка неголономних систем, гідромеханіка та ін.), так і в суміжних областях природознавства (прикладна математика, термодинаміка, електродинаміка, робототехніка, статистична фізика, квантова механіка тощо).

Основу аналітичної механіки складають три групи положень:

- 1) варіаційні принципи – формулюють найбільш загальні закономірності механіки;
- 2) диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок – є наслідками варіаційних принципів;
- 3) загальні методи інтегрування диференціальних рівнянь динаміки.

11.1. Основні поняття і принципи аналітичної статyki і динаміки

Одними з основних понять аналітичної механіки є поняття в'язей і можливих (віртуальних) переміщень.

11.1.1. Механічні в'язі і їх класифікація

Поняття в'язі було розглянуто в розділі “Статика” курсу теоретичної механіки і дія в'язі на тіло характеризувалась реакцією в'язі. Але в'язь можна розглядати і як обмеження, яке накладається на переміщення і швидкості точок системи. Такий шлях дозволяє отримати рівняння рівноваги або руху системи, які не містять заздалегідь невідомі реакції в'язей.

Система матеріальних точок називається *вільною*, якщо положення і швидкості окремих її точок можуть приймати будь-які значення. В іншому випадку система називається *невільною*. Обмеження, які накладаються на положення і швидкості окремих точок системи, називаються *в'язями*. Конструктивно механічні в'язі реалізуються за допомогою шарнірів, поверхонь, стержнів, ниток та ін. Проте в'язі можуть бути і не виключно механічними, а в сукупності, наприклад, із системами регулювання і керування.

Обмеження на положення і швидкості точок можна описати за допомогою рівностей або нерівностей, які називаються *рівняннями в'язей*. У загальному випадку рівняння в'язі для однієї точки можна записати у вигляді:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \quad (11.1)$$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Матеріальна точка M прикріплена до ідеального стержня

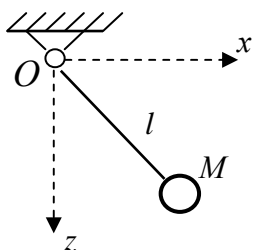


Рис. 11.1

OM довжини l (рис. 11.1) і може здійснювати коливання у вертикальній площині xOz . Декартові координати матеріальної точки повинні задовольняти рівнянню в'язі:

$$x^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (11.2)$$

Приклад 2. Матеріальна точка M прикріплена до гнучкої нитки довжини l (рис. 11.1). Рівняння в'язі буде:

$$x^2 + z^2 - l^2 \leq 0. \quad (11.3)$$

Знак рівності відповідає моментам часу, коли нитка буде натягнутою, а знак нерівності – коли нитка буде не натягнутою.

Приклад 3. Матеріальна точка M прикріплена до гнучкої нитки, інший кінець якої перекинутий через блок і рухається зі сталою швидкістю V_0 (рис. 11.2).

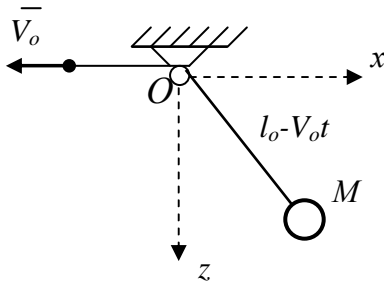


Рис. 11.2

Рівняння в'язі буде:

$$x^2 + z^2 - (l_0 - V_0 t)^2 \leq 0, \quad (11.4)$$

де l_0 - довжина частини нитки, що звисає, у початковий момент часу.

Приклад 4. Куля рухається по горизонтальній шорсткій поверхні без ковзання (рис. 11.3).

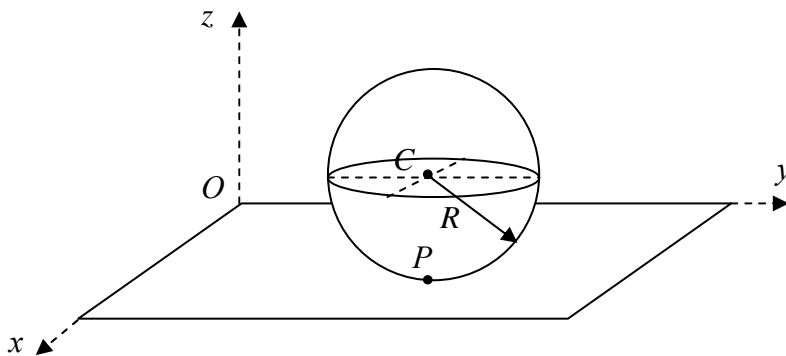


Рис. 11.3

При цьому координата z центра мас C кулі повинна задовольняти умові:

$$z_c \geq R, \quad (11.5)$$

де R - радіус кулі. Крім того, швидкість точки P дотику кулі до поверхні дорівнює нулю:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_c + \bar{\omega} \times \bar{CP} = 0,$$

що, згідно з теорією руху тіла з однією нерухомою точкою, еквівалентно двом скалярним рівностям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_c - R(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) &= 0, \\ \dot{y}_c + R(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

де ψ, θ, φ - кути Ейлера [5].

Введемо кілька визначень.

В'язі називаються *стаціонарними*, якщо рівняння (нерівності) в'язей не містять час t явно. В іншому випадку в'язі називаються *нестаціонарними*.

В'язі називаються *утримуючими (двобічними)*, якщо вони описуються рівностями. Якщо в'язі описуються нерівностями, вони називаються *неутримуючими (однобічними)*.

В'язі називаються *голономними*, якщо рівняння (нерівності) в'язей не містять проекції швидкостей, або містять у формі, що може бути зінтегрованою. В іншому випадку в'язі називаються *неголономними*.

В розглянутих прикладах в'язі можна охарактеризувати таким чином:

в'язь, яка описується рівнянням (11.2) – стаціонарна, утримуюча, голономна;

нерівністю (11.3) – стаціонарна, неутримуюча, голономна;

нерівністю (11.4) – нестаціонарна, неутримуюча, голономна;

нерівністю (11.5) – стаціонарна, неутримуюча, голономна;

рівняннями (11.6) – стаціонарна, утримуюча, неголономна.

Зауваження. При розв'язанні задач неутримуючу в'язь можна розглядати як утримуючу, якщо під час руху (рівноваги) в'язь описується рівністю (наприклад, нитка весь час натягнута; тіло, що ковзає уздовж поверхні, не відривається від неї, тощо).

11.1.2. Можливі переміщення. Можлива робота. Ідеальні в'язі

Можливим (віртуальним) переміщенням точки $\delta \vec{r}$ називається уявне нескінченно мале її переміщення, що не суперечить накладеним на точку в'язям і відбувається у фіксований момент часу.

Слід підкреслити, що можливе переміщення – це переміщення, яке могла би здійснити точка, не порушуючи в'язей, і визначається тільки характером цих в'язей, а не діючими на точку силами.

Приклад 5. Матеріальна точка знаходиться на горизонтальній поверхні (рис. 11.4).

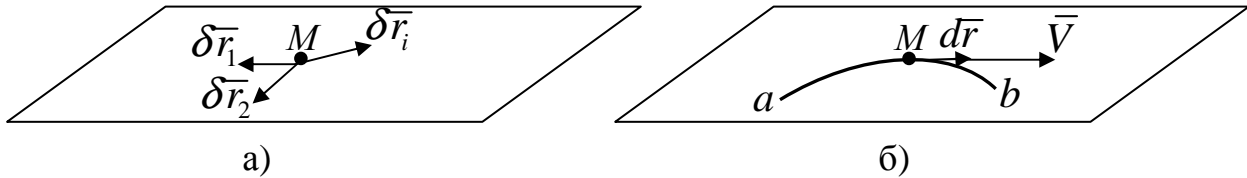


Рис. 11.4

Можливі переміщення $\delta \bar{r}_i$ – переміщення по поверхні у будь-якому напрямку (рис. 11.4,а). Число таких переміщень нескінченне. Вектор дійсного елементарного переміщення $d\bar{r}$ (рис. 11.4б) напрямлений по дотичній до траєкторії ab руху точки M у бік її швидкості \bar{V} .

На відміну від можливих, дійсні елементарні переміщення $d\bar{r}_k$ механічної системи відбуваються під дією певних сил за проміжок часу dt . У разі векторного способу завдання руху

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(x_k, y_k, z_k, t),$$

де $k = 1, \dots, N$ (N – число точок механічної системи), дійсні елементарні переміщення характеризуються нескінченно малими приростами радіусів-векторів \bar{r}_k і з точністю до малих другого порядку мализни визначаються їхніми диференціалами:

$$d\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt. \quad (11.7)$$

Можливі переміщення відбуваються при фіксованому часі t ($\delta t = 0$) і з точністю до малих другого порядку мализни математично визначаються *варіаціями* радіусів-векторів \bar{r}_k :

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial z_k} \delta z_k. \quad (11.8)$$

Із сказаного можна зробити висновок, що дійсні переміщення системи $d\bar{r}_k$ є одними з її можливих переміщень $\delta\bar{r}_k$ тільки в разі стаціонарних в'язей.

Можливим (віртуальним) переміщенням механічної системи називається сукупність можливих переміщень окремих її точок.

Можливою роботою сили називається скалярний добуток вектора сили \bar{F} на вектор можливого переміщення $\delta\bar{r}$ точки її прикладення (або добуток модуля сили на модуль можливого переміщення точки її прикладення і на косинус кута між векторами сили і можливого переміщення точки її прикладення):

$$\delta A_F = \bar{F} \cdot \delta\bar{r} = F \cdot \delta r \cdot \cos(\widehat{\bar{F}, \delta\bar{r}}). \quad (11.9)$$

Введемо ще одну класифікацію в'язей.

В'язі називаються *ідеальними*, якщо сума робіт їх реакцій на будь-яких можливих переміщеннях механічної системи дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0, \quad (11.10)$$

де \bar{R}_k - рівнодійна реакцій в'язей, прикладених до k -ї точки системи.

Приклади ідеальних в'язей:

1) *Ідеально гладенька поверхня* (рис. 11.5).

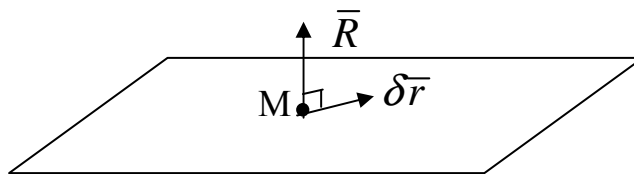


Рис. 11.5

Оскільки реакція \bar{R} перпендикулярна до поверхні, а можливе переміщення точки M $\delta\bar{r}$ лежить у її площині, то

$$\delta A_R = \bar{R} \cdot \delta\bar{r} = R \cdot \delta r \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

2) *Нерухомий шарнір без тертя* (рис. 11.6).

Оскільки точка A нерухома, то її можливе переміщення $\delta\bar{r}_A = 0$, отже

$$\delta A_{R_A} = \bar{R}_A \cdot \delta\bar{r}_A = \bar{R}_A \cdot 0 = 0.$$

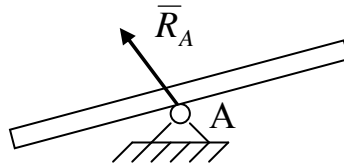


Рис. 11.6

3) *Рухомий шарнір без тертя* (рис. 11.7).

В даному випадку, якщо точка A отримає можливе переміщення $\delta \bar{r}_A$, то

$$\delta A_{R_A} = \bar{R}_A \cdot \delta \bar{r}_A = R_A \cdot \delta r_A \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Якщо тіло обернеться навколо точки A на можливий кут $\delta \varphi$, то

$$\delta A_{R_A} = M_A(\bar{R}_A) \cdot \delta \varphi = 0 \cdot \delta \varphi = 0.$$

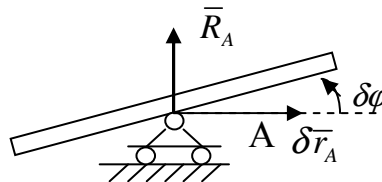


Рис. 11.7

4) *Кочення без ковзання* абсолютно твердого тіла по шорсткій абсолютно твердій поверхні (рис. 11.8).

Оскільки точка P є миттєвим центром швидкостей, то її швидкість, а значить і можливе переміщення дорівнюють нулю. Тоді можлива робота реакції \bar{R}

$$\delta A_R = \bar{R} \cdot \delta \bar{r} = \bar{R} \cdot 0 = 0.$$

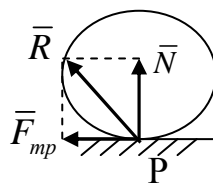


Рис. 11.8

5) *Жорстка незмінна система* (абсолютно тверде тіло, ідеальний стержень та ін.).

Розглянемо дві матеріальні точки, зв'язані ідеальним стержнем (рис. 11.9).

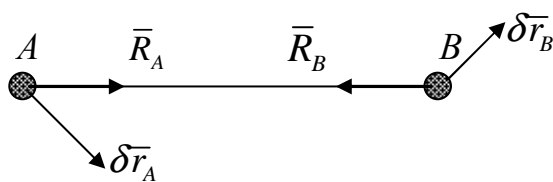


Рис. 11.9

Реакції стержня на матеріальні точки A і B напрямлені по стержню і $\bar{R}_A = -\bar{R}_B$. З умови нерозтягнення стержня маємо:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A)^2 = (AB)^2, \quad (AB = \text{const}).$$

Застосуємо далі операцію варіації (див. формулу (11.8)) до останнього рівняння:

$$(\bar{r}_B - \bar{r}_A) \cdot (\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A) = 0.$$

Рівність нулю скалярного добутку векторів $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$ і $(\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A)$ означає, що ці вектори є взаємно перпендикулярними.

Знайдемо тепер суму можливих робіт реакцій в'язей \bar{R}_A, \bar{R}_B на можливому переміщенні системи:

$$\delta A = \bar{R}_A \cdot \delta \bar{r}_A + \bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_B = -\bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_A + \bar{R}_B \cdot \delta \bar{r}_B = \bar{R}_B \cdot (\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A) = 0.$$

Останній добуток дорівнює нулю, оскільки вектор \bar{R}_B , який співпадає з напрямком вектора $(\bar{r}_B - \bar{r}_A)$, перпендикулярний вектору $(\delta \bar{r}_B - \delta \bar{r}_A)$.

Таким чином, отримано, що ідеальний стержень, а також внутрішні в'язі абсолютно твердого тіла є ідеальними в'язями.

11.1.3. Принцип можливих переміщень

Сили, що діють на невільну механічну систему, можна поділити на активні і реакції в'язей. *Активними* будемо вважати сили, що спричиняють своєю дією прискорення точок системи або реакції в'язей. Активні сили не залежать від в'язей. *Реакції в'язей* вважають пасивними силами, бо вони виникають лише тоді, коли на систему діють активні сили.

Принцип можливих переміщень – це найзагальніший принцип аналітичної статички, який встановлює умови рівноваги механічної системи. У сучасному вигляді він формулюється за допомогою *теорема Лагранжа-Остроградського*: для рівноваги механічної системи з ідеальними, голономними, стаціонарними і утримуючими в'язями необхідно і достатньо, щоб сума робіт всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи і швидкості всіх точок в початковий момент часу дорівнювали нулю:

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad \bar{V}_k \Big|_{t=0} = 0. \quad (11.11)$$

Доведення

Необхідність. Нехай система N матеріальних точок знаходиться в рівновазі. Тоді для кожної точки, відповідно до умови рівноваги системи збіжних сил, виконується рівність:

$$\bar{F}_k^a + \bar{R}_k = 0, (k = 1, \dots, N),$$

(11.12)

де \bar{F}_k^a, \bar{R}_k - рівнодійні активних сил і реакцій в'язей відповідно, які прикладені до k -ї точки системи.

Надамо системі можливе переміщення $\delta \bar{r}_k$, помножимо рівність (11.12) скалярно на вектор $\delta \bar{r}_k$ і підсумуємо для всіх точок системи:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k^a + \bar{R}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (11.13)$$

За визначенням ідеальних в'язей (11.10), другий доданок у (11.13) дорівнює нулю, тому виконується

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Необхідність, таким чином, доведена.

Достатність. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що умови (11.11) виконуються, але система почала рухатись із стану спокою ($\bar{V}_k|_{t>0} \neq 0$). Оскільки в'язі стаціонарні, то елементарне дійсне переміщення $d\bar{r}_k$ буде співпадати з одним із можливих $\delta\bar{r}_k$. На підставі теореми про зміну кінетичної енергії системи, враховуючи, що кінетична енергія системи T у довільний момент часу додатна ($T > 0$), а у стані спокою дорівнює нулю ($T_0 = 0$), матимемо

$$T - T_0 = \delta A > 0,$$

або, враховуючи (11.9)

$$\delta A = \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k^a + \bar{R}_k) \cdot \delta\bar{r}_k > 0.$$

Оскільки в'язі ідеальні, то виконується умова (11.10). Тоді залишається вираз

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k > 0,$$

що суперечить початковому припущенню. Отже, достатність, а з нею і вся теорема доведена.

Рівняння (11.11) можна подати і у скалярній формі:

$$\sum_{k=1}^N (F_{kx}^a \cdot \delta x_k + F_{ky}^a \cdot \delta y_k + F_{kz}^a \cdot \delta z_k) = 0, \quad (11.14)$$

де $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ - проекції можливого переміщення $\delta\bar{r}_k$ на осі координат.

Рівняння (11.11) (або (11.14)) називають *загальним рівнянням статки*.

Важливо підкреслити, що принцип можливих переміщень дозволяє скласти умови рівноваги механічної системи, не враховуючи реакції ідеальних в'язей. При цьому перевага над звичайними геометричними методами статки відчутна тим більше, чим більше твердих тіл входить до системи.

Проте в ряді задач статки є потреба визначати реакції в'язей. Зробимо деякі зауваження при застосуванні принципу можливих переміщень у технічних розрахунках.

Зауваження 1. Якщо в механічній системі є неідеальні в'язі, то їх реакції (наприклад, сили тертя, пружні в'язі) потрібно віднести до активних сил.

Зауваження 2. Для визначення реакції ідеальної в'язі її треба відкинути, а відповідну реакцію додати до активних сил.

Зауваження 3. Принцип можливих переміщень дозволяє скласти одне рівняння, з якого можна визначити тільки одну невідому величину. Якщо реакція ідеальної в'язі складається з декількох складових реакції (наприклад, нерухомий шарнір, защемлення), тоді в'язь треба замінити іншою, яка забезпечить можливе переміщення точки системи, де розташована в'язь, у напрямку дії складової реакції, що треба визначити. Наприклад, для визначення вертикальної складової реакції нерухомого шарніра його треба замінити вертикально розташованим повзуном з шарнірним кріпленням до конструкції і додати вертикальну складову реакції до активних сил. Для визначення вертикальної складової реакції защемлення в'язь можна замінити вертикально розташованим повзуном, до якого розглядувана конструкція кріпиться жорстко, а для визначення моменту пари сил у защемленні – нерухомим шарніром.

11.1.4. Загальне рівняння динаміки

Принцип можливих переміщень дає загальний метод розв'язання задач статички. З іншого боку, принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статички для розв'язання задач динаміки. Отже, застосовуючи ці два принципи одночасно, можна отримати загальний метод розв'язання задач динаміки.

Розглянемо систему з ідеальними, голономними і утримуючими в'язями, яка складається з N матеріальних точок. Згідно з принципом Даламбера в будь-який момент часу геометрична сума рівнодійних активних сил, реакцій в'язей і сили інерції для кожної матеріальної точки дорівнює нулю:

$$\bar{F}_k^a + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k^{in} = 0, \quad (k = 1, \dots, N). \quad (11.15)$$

Уявно зафіксуємо час t і дамо системі можливе переміщення $\delta \bar{r}_k$. Помноживши ліві та праві частини рівнянь (11.15) скалярно на $\delta \bar{r}_k$ та підсумовуючи за індексом k , отримаємо:

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k^{in} \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (11.16)$$

Згідно з визначенням ідеальних в'язей (11.10), другий доданок рівняння (11.16) дорівнює нулю. Отже,

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{\Phi}_k^{in} \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (11.17)$$

або

$$\delta A + \delta A^{in} = 0. \quad (11.18)$$

Рівняння (11.18) (або (11.17)) називається *загальним рівнянням динаміки* (або *принципом Даламбера-Лагранжа*) і формулюється наступним чином: *під час руху системи з ідеальними, голономними і утримуючими в'язями в кожний момент часу сума робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.*

Оскільки сили інерції визначаються за допомогою прискорень точок системи, які в свою чергу можна подати як другі похідні за часом радіусів-векторів (або декартових координат) точок, то загальне рівняння динаміки дозволяє у загальному випадку складати диференціальні рівняння руху механічної системи. При цьому реакції ідеальних в'язей не враховуються.

Порівнюючи загальне рівняння динаміки (11.18) із загальним рівнянням статки (11.11), бачимо, що перше з них відрізняється від другого наявністю можливої роботи сил інерції δA^{in} .

11.2. Рівняння рівноваги і руху механічної системи в узагальнених координатах

11.2.1. Число степенів вільності. Узагальнені координати і узагальнені швидкості

У загальному випадку система може мати безліч різних можливих переміщень. Проте можна вказати деяке число таких незалежних між собою можливих переміщень, що усяке інше переміщення може бути через них

виражене. Наприклад, для точки, що може рухатись у площині, будь-яке можливе переміщення може бути виражене як $\delta\vec{r} = a \cdot \delta\bar{x} + b \cdot \delta\bar{y}$, де $\delta\bar{x}, \delta\bar{y}$ - можливі переміщення уздовж осей x, y відповідно, a, b - певні числа. В цьому випадку число незалежних можливих переміщень дорівнює двом.

Число незалежних між собою можливих переміщень механічної системи називається *числом степенів вільності*.

Розглянемо систему, яка складається з N матеріальних точок. В інерціальній системі відліку $Oxyz$ положення кожної точки визначається трьома декартовими координатами x_k, y_k, z_k , а положення усіх точок – $3N$ координатами. Припустимо, що рух системи обмежений ідеальними, голономними і утримуючими в'язями

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, h).$$

Оскільки $3N$ координат задовольняють h рівнянням в'язей, то вони не є незалежними. Очевидно, число незалежних координат, які визначають положення системи, буде $s = 3N - h$.

При розв'язанні багатьох задач механіки невіільних систем можна добитись значних спрощень, якщо положення системи визначати за допомогою s яких-небудь незалежних параметрів. При цьому рівняння голономних в'язей задовольняються автоматично і зникає потреба враховувати їх при розв'язанні задач. Незалежні між собою параметри q_1, \dots, q_s , що однозначно визначають положення механічної системи, називаються *узагальненими координатами*.

Для систем з голономними в'язями *число узагальнених координат дорівнює числу степенів вільності*.

Узагальнені координати можуть мати різні геометричні і механічні змісти. Це можуть бути деякі незалежні декартові координати, лінійні переміщення, кути повороту тощо. У суміжних розділах механіки, наприклад, у теорії пружності, роль узагальнених координат виконують переміщення точок пружного тіла, деформації та напруження, прогин балок і пластин, у

гідродинаміці – густина, температура або швидкості точок суцільного середовища.

Похідна за часом від узагальненої координати називається *узагальненою швидкістю*

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (11.19)$$

Фізичний зміст узагальнених координат і швидкостей можна встановити на конкретних прикладах.

Приклад 1. Якщо узагальнена координата $q = \varphi$ - кут повороту, то $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$ - кутова швидкість.

Приклад 2. Якщо $q = s$ - лінійне переміщення, то $\dot{q} = \dot{s} = V$ - лінійна швидкість.

Приклад 3. У випадку, якщо $q_1 = x$, $q_2 = y$ - декартові координати, то $\dot{q}_1 = \dot{x} = V_x$, $\dot{q}_2 = \dot{y} = V_y$ - проекції швидкості на осі координат.

11.2.2. Узагальнені сили і способи їх визначення

Розглянемо систему, що складається з N матеріальних точок, на яку діють активні сили $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$. Її положення будемо визначати за допомогою s узагальнених координат q_1, \dots, q_s . Оскільки положення точок системи визначаються за допомогою їх радіусів-векторів \vec{r}_k , то останні можна виразити через узагальнені координати і час:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_s, t) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (11.20)$$

Ці N векторних рівнянь еквівалентні $3N$ скалярним рівнянням

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, \dots, q_s, t), \\ y_k &= y_k(q_1, \dots, q_s, t), \\ z_k &= z_k(q_1, \dots, q_s, t), \end{aligned} \quad (k = 1, \dots, N). \quad (11.21)$$

Виразимо варіації декартових координат $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ через варіації узагальнених координат $\delta q_1, \dots, \delta q_s$, беручи до уваги, що варіації визначаються при фіксованому часі ($\delta t = 0$). Наприклад,

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \cdot \delta q_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j. \quad (11.22)$$

Аналогічно визначаються $\delta y_k, \delta z_k$.

Обчислимо можливу роботу активних сил системи:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{k=1}^N (F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k) = \\ &= \sum_{k=1}^N (F_{kx} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + F_{ky} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + F_{kz} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j) \end{aligned}$$

або, змінюючи порядок підсумовування, отримаємо

$$\delta A = \sum_{j=1}^s \left[\sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \right] \cdot \delta q_j. \quad (11.23)$$

Введемо позначення

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \quad (11.24)$$

Тоді рівність (11.23) набуде вигляду

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s. \quad (11.25)$$

Множник Q_j при варіації узагальненої координати δq_j у виразі можливої роботи активних сил системи δA називається узагальненою силою, що відповідає узагальненій координаті q_j .

Розмірність узагальненої сили може бути різною і, як витікає з рівняння (11.25), залежить від розмірності узагальненої координати. Наприклад, якщо узагальнена координата є лінійним переміщенням, то розмірність узагальненої сили співпадає з розмірністю сили. Якщо ж узагальнена координата є кутом

повороту, то розмірність узагальненої сили співпадає з розмірністю моменту сили.

Наведемо *три способи обчислення узагальненої сили*.

Спосіб 1. Безпосередньо за формулою (11.24), тобто через проекції активних сил на осі декартової системи координат. При цьому треба отримати залежності декартових координат точок прикладення сил від узагальнених координат. Цей спосіб можна використовувати для механічної системи, яка складається з досить невеликої кількості точок.

Приклад 1. Визначимо узагальнену силу математичного маятника (рис. 11.10).

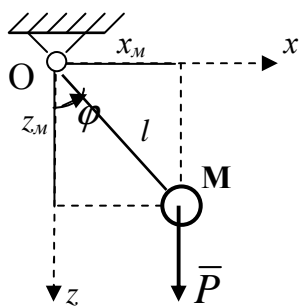


Рис. 11.10

Будемо визначати положення точки M за допомогою кута відхилення стержня OM від вертикалі – φ . Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут повороту стержня $q = \varphi$. Зобразимо точку M у довільному положенні при коливаннях маятника. Помістимо начало

декартової системи координат в точку закріплення маятника. На точку M діє тільки сила ваги $\bar{P} = m\bar{g}$. Визначимо проекції сили ваги на осі координат і виразимо декартові координати точки її прикладення через узагальнену координату:

$$P_x = 0, P_z = P = mg, x_M = l \cdot \sin \varphi, z_M = l \cdot \cos \varphi.$$

Обчислимо далі частинні похідні

$$\frac{\partial x_M}{\partial \varphi} = l \cdot \cos \varphi, \quad \frac{\partial z_M}{\partial \varphi} = -l \cdot \sin \varphi.$$

Формула (11.24) у цьому разі набуває вигляду

$$Q_\varphi = P_x \cdot \frac{\partial x_M}{\partial \varphi} + P_z \cdot \frac{\partial z_M}{\partial \varphi} = 0 + mg \cdot (-l \cdot \sin \varphi) = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

Спосіб 2. На підставі формули (11.25), враховуючи, що можливі переміщення довільні та незалежні. Щоб знайти узагальнену силу, наприклад

Q_1 , дамо системі таке можливе переміщення, при якому всі варіації узагальнених координат, крім δq_1 , дорівнюють нулю:

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0.$$

Обчислимо на цьому переміщенні можливу роботу всіх активних сил, які прикладені до системи. На підставі формули (11.25) будемо мати

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1.$$

Множник Q_1 при варіації узагальненої координати δq_1 буде першою узагальненою силою.

Аналогічно поступають при визначенні всіх інших узагальнених сил Q_2, Q_3, \dots, Q_s . Цей спосіб є найбільш універсальним.

Приклад 2. Визначимо узагальнену силу для математичного маятника

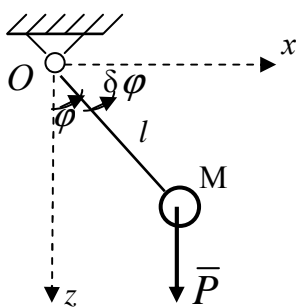


Рис. 11.10

(рис. 11.11). Будемо визначати положення точки M за допомогою кута відхилення стержня OM від вертикалі – φ . Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут повороту стержня: $q = \varphi$. Зобразимо точку M у довільному

положенні при коливаннях маятника. Зобразимо точку

M у довільному положенні при коливаннях маятника. Зафіксуємо час t і дамо системі можливе переміщення $\delta\varphi$, наприклад у бік відліку узагальненої координати φ , тобто повернемо стержень OM на малий кут $\delta\varphi$. На точку M діє тільки сила ваги $\bar{P} = m\bar{g}$. Обчислимо можливу роботу сили ваги як добуток її моменту відносно точки O на можливий кут $\delta\varphi$. Добуток буде від'ємний, оскільки напрями моменту сили і можливого кута $\delta\varphi$ не збігаються:

$$\delta A = -|M_o(\bar{P})| \cdot \delta\varphi = -P \cdot (l \cdot \sin \varphi) \cdot \delta\varphi = -mgl \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi.$$

Множник $Q_\varphi = -mgl \cdot \sin \varphi$ при варіації узагальненої координати $\delta\varphi$ і буде узагальненою силою, яка відповідає узагальненій координаті φ .

Спосіб 3. Цей спосіб застосовується тільки для консервативних сил. Сили називаються консервативними (або потенціальними), якщо: 1) вони

залежать тільки від положення точок системи; 2) їх робота на переміщенні системи з початкового положення у кінцеве не залежить від шляху, по якому здійснюється це переміщення. Для консервативних сил мають виконуватись умови:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}, F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}, F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}, \quad (11.26)$$

де $\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$ - потенціальна енергія силового поля, яка є функцією координат точок системи.

Потенціальна енергія визначається як робота всіх консервативних сил при переміщенні системи із даного положення в нульове (те положення, де потенціальна енергія приймається рівною нулю $\Pi = 0$). Взагалі, за нульове можна прийняти будь-яке положення системи, тобто потенціальна енергія визначається з точністю до сталої величини):

$$\Pi = A_{MM_0}. \quad (11.27)$$

Приклади консервативних сил

1) Сила ваги $P = mg$. Потенціальна енергія визначається за формулою

$$\Pi_P = mg(z - z_0), \quad (11.28)$$

де z, z_0 - вертикальні координати даного і нульового положень точки прикладення сили ваги (за умови напрямлення осі z вертикально уверх). З формули (11.28) витікає, що потенціальна енергія сили ваги додатна $\Pi_P > 0$, якщо дане положення знаходиться вище за нульове ($z > z_0$), від'ємна $\Pi_P < 0$, якщо дане положення нижче за нульове ($z < z_0$), і дорівнює нулю $\Pi_P = 0$, якщо дане положення і нульове знаходяться на одному рівні за висотою.

2) Сила пружності пружини $F_{np} = c\lambda$, де c - коефіцієнт жорсткості пружини, λ - деформація пружини (зміна її довжини по відношенню до ненапруженої пружини). Потенціальна енергія визначається за формулою

$$\Pi_{F_{np}} = \frac{c}{2} \cdot (\lambda^2 - \lambda_0^2), \quad (11.30)$$

де λ, λ_0 - деформації пружини у даному і нульовому положеннях.

Підставимо далі формули (11.26) у формулу (11.24), тоді

$$Q_j = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Якщо взяти до уваги, що потенціальна енергія, яка залежить від декартових координат точок системи, є складною функцією узагальнених координат, то останню формулу можна записати у наступному вигляді

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (11.29)$$

Таким чином, узагальнені сили консервативної системи дорівнюють взятим зі знаком мінус частинним похідним потенціальної енергії системи за відповідними узагальненими координатами.

Приклад 3. Визначимо узагальнену силу для математичного маятника (рис. 11.11). Будемо визначати положення точки M за допомогою кута відхилення стержня OM від вертикалі – φ . Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут повороту стержня: $q = \varphi$. Зобразимо точку M у довільному положенні при коливаннях маятника. На точку M

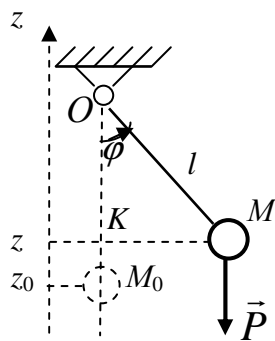


Рис. 11.12

діє тільки сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$. За нульове приймемо положення маятника у стані спокою OM_0 . Врахуємо, що різниця висот між розглядуваним M та нульовим M_0 положеннями дорівнює

$$z - z_0 = OM_0 - OK = l - l \cdot \cos \varphi = l \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Обчислимо потенціальну енергію системи, використовуючи формули (11.27), (11.28):

$$\Pi = \Pi_p = mg(z - z_0) = mgl \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Узагальнена сила, відповідно до формули (11.30):

$$Q_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

11.2.3. Рівняння рівноваги механічної системи в узагальнених координатах

Будемо визначати положення механічної системи з ідеальними, стаціонарними, голономними та утримуючими в'язями з s степенями вільності узагальненими координатами q_1, \dots, q_s . Згідно з принципом можливих переміщень, при рівновазі системи за умови нульових початкових швидкостей її точок виконується рівність (11.11), яку з урахуванням формули (11.25) можна записати як

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s = 0. \quad (11.31)$$

Оскільки варіації узагальнених координат незалежні й довільні при голономних в'язях, то коефіцієнти при δq_j мають дорівнювати нулю. Дійсно, припустимо, що $\delta q_1 \neq 0$, а решта варіацій дорівнює нулю: $\delta q_2 = \dots = \delta q_s = 0$. Тоді з (11.31) випливає, що $\delta A = Q_1 \cdot \delta q_1 = 0$. Оскільки $\delta q_1 \neq 0$, то повинен дорівнювати нулю множник $Q_1 = 0$. Аналогічно можна довести, що множники при всіх інших варіаціях узагальнених координат дорівнюють нулю. Отже, у стані рівноваги механічної системи мають виконуватись рівності

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_s = 0. \quad (11.32)$$

Рівності (11.32) виражають *умови рівноваги невільної механічної системи в узагальнених координатах*: для рівноваги невільної механічної системи з ідеальними, стаціонарними, голономними та утримуючими в'язями необхідно і достатньо, щоб усі узагальнені сили дорівнювали нулю (при нульових початкових швидкостях усіх точок системи).

Якщо всі активні сили, що діють на механічну систему, є консервативними, то рівняння (11.32) з урахуванням (11.30) набувають вигляду

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \quad (11.33)$$

11.2.4. Диференціальні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду)

Як було зазначено у п. 11.14, загальне рівняння динаміки дозволяє скласти диференціальні рівняння руху механічної системи, які не містять реакції ідеальних в'язей. Для досить простих систем застосування цього рівняння цілком оправдане. Але для складних систем застосування загального рівняння динаміки призводить до відносно громіздких перетворень. В цих випадках зручніше користуватись рівняннями Лагранжа другого роду, які отримують перетворенням загального рівняння динаміки до узагальнених координат.

Розглянемо систему, що складається з N матеріальних точок, на яку діють активні сили $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N$. Її положення будемо визначати за допомогою s узагальнених координат q_1, \dots, q_s . Зважаючи на визначення сили інерції матеріальної точки $\bar{\Phi}^{in} = -m\bar{a}$, загальне рівняння динаміки (11.17) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m\bar{a}_k) \cdot \delta\bar{r}_k = 0. \quad (11.34)$$

або у скалярній формі

$$\sum_{k=1}^N [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \cdot \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \cdot \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \cdot \delta z_k] = 0. \quad (11.35)$$

Підставимо у (11.35) замість варіацій декартових координат їх вирази через варіації узагальнених координат (11.22)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + \\ & + \sum_{k=1}^N (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j] = 0. \end{aligned}$$

Змінемо порядок підсумування

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^N [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0$$

і розіб'ємо суму на дві частини

$$\sum_{j=1}^s \left[\sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) - \sum_{k=1}^N \left(m_k \ddot{x}_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + m_k \ddot{y}_k \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + m_k \ddot{z}_k \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \right] \cdot \delta q_j = 0.$$

Користуючись виразом для узагальнених сил (11.24) і виносячи m_k за дужки, будемо мати

$$\sum_{j=1}^s \left[Q_j - \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\ddot{x}_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \ddot{y}_k \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \ddot{z}_k \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \right] \cdot \delta q_j = 0. \quad (11.36)$$

Розглянемо деякі математичні перетворення.

1) Продиференціюємо рівняння (11.21) за часом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t}, \\ \dot{y}_k &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial y_k}{\partial t}, \\ \dot{z}_k &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial z_k}{\partial t}. \end{aligned} \quad (k=1, \dots, N). \quad (11.36)$$

Взявши частинні похідні від лівих і правих частин рівнянь (11.37) за узагальненою швидкістю \dot{q}_j , отримаємо співвідношення

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial y_k}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial z_k}{\partial q_j}. \quad (11.38)$$

2) Знайдемо частинну похідну першого з рівнянь (11.37) за узагальненою координатою q_j

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_1 \partial q_j} \cdot \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_s \partial q_j} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial q_j}. \quad (11.39)$$

Здиференціюємо за часом вираз $\frac{\partial x_k}{\partial q_j}$ як складну функцію змінних

q_1, \dots, q_s , а також часу t :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j \partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j \partial q_s} \cdot \dot{q}_s + \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j \partial t}. \quad (11.40)$$

Зрівнюючи вирази (11.39), (11.40) і зважаючи, що змішані частинні похідні не залежать від порядку диференціювання, отримаємо $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j}$, тобто операції диференціювання за часом і частинного диференціювання за узагальненою координатою перемістяться. Отже будуть виконуватись рівності

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_j}. \quad (11.41)$$

Складемо вираз кінетичної енергії системи:

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2). \quad (11.42)$$

Знайдемо деякі похідні від кінетичної енергії.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot \left(2\dot{x}_k \cdot \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} + 2\dot{y}_k \cdot \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_j} + 2\dot{z}_k \cdot \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\dot{x}_k \cdot \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} + \dot{y}_k \cdot \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_j} + \dot{z}_k \cdot \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (11.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \cdot \left(2\dot{x}_k \cdot \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} + 2\dot{y}_k \cdot \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_j} + 2\dot{z}_k \cdot \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\dot{x}_k \cdot \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} + \dot{y}_k \cdot \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_j} + \dot{z}_k \cdot \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\dot{x}_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \dot{y}_k \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \dot{z}_k \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (11.44)$$

При отриманні останньої рівності у формулі (11.44) ураховані співвідношення (11.38)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\ddot{x}_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \ddot{y}_k \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \ddot{z}_k \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\dot{x}_k \cdot \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} + \dot{y}_k \cdot \frac{\partial \dot{y}_k}{\partial q_j} + \dot{z}_k \cdot \frac{\partial \dot{z}_k}{\partial q_j} \right). \quad (11.45)$$

При отриманні останньої суми у формулі (11.45) ураховані співвідношення (11.41).

Складемо різницю між формулами (11.45) і (11.43):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^N m_k \cdot \left(\ddot{x}_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \ddot{y}_k \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \ddot{z}_k \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right), \quad (11.46)$$

оскільки друга сума правої частини (11.45) дорівнює правій частині (11.43).

Таким чином, загальне рівняння динаміки (11.36) з урахуванням (11.46) можна записати так:

$$\sum_{j=1}^s [Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}] \cdot \delta q_j = 0. \quad (11.47)$$

Остання рівність виконується лише тоді, коли коефіцієнти при довільних значеннях незалежних варіацій δq_j дорівнюють нулю. Це можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, \dots, s), \quad (11.48)$$

які називаються *рівняннями Лагранжа другого роду* і читаються наступним чином: *різниця між повною похідною за часом від частинної похідної кінетичної енергії системи за узагальненою швидкістю і частинною похідною кінетичної енергії системи за узагальненою координатою дорівнює відповідній узагальненій силі.*

Рівняння (11.48) – це система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат $q_j(t)$, які є невідомими функціями часу і являють собою закон руху системи.

Відмітимо деякі *особливості рівнянь Лагранжа.*

1. Кількість рівнянь (11.48) дорівнює числу степенів вільності, тобто їх найменшій можливій кількості для голономних систем. З цієї точки зору метод Лагранжа є найбільш економічним.

2. Форма запису рівнянь (11.48) не залежить від конкретного вибору узагальнених координат і дозволяє скласти єдину послідовність дій, яку треба виконати при розв'язанні задачі динаміки. Це робить метод Лагранжа достатньо універсальним.

3. Метод Лагранжа є по сутності енергетичним, оскільки потребує складання кінетичної енергії системи і робіт активних сил. Ця обставина дозволяє використовувати метод Лагранжа для аналізу не тільки механічних, а й інших фізичних систем.

4. Рівняння (11.48) не містять реакцій ідеальних в'язей. Це дозволяє відділити задачу встановлення руху невіЛЬНОї системи від задачі визначення невідомих реакцій в'язей.

Зауваження. Для систем з утримуючими і ідеальними в'язями рівняння Лагранжа другого роду повністю розв'язують задачу про визначення закону її руху. Для систем з неутримуючими або неідеальними в'язями рівнянь (11.48) може бути недостатньо, що потребує складання додаткових рівнянь [3].

11.2.5. Рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем

Якщо всі активні сили, що діють на механічну систему, є консервативними, то рівняння (11.48) з урахуванням (11.30) набудуть вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (11.49)$$

Оскільки потенціальна енергія системи $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_s)$ є функцією лише узагальнених координат і від узагальнених швидкостей не залежить, то її частинні похідні за узагальненими швидкостями дорівнюють нулю: $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$.

Тоді рівняння (11.49) можна записати у виді

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (11.50)$$

Введемо у розгляд функцію $L = T - \Pi$. Функція L від узагальнених координат і швидкостей, яка дорівнює різниці між кінетичною і потенціальною енергіями, називається *функцією Лагранжа*, або *кінетичним потенціалом* системи. В цьому разі система рівнянь (11.50) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, s). \quad (11.51)$$

Рівняння (11.51) називаються *рівняннями Лагранжа другого роду для консервативних систем*. З рівнянь (11.51) витікає, що рух консервативної системи визначається завданням тільки однієї функції – функції Лагранжа L .

Зауважимо, що саме форма (11.51) рівнянь Лагранжа використовується в різних розділах теоретичної фізики і ряді прикладних наук (гідродинаміці, теорії пружності, електротехніці, радіотехніці тощо).

11.2.6. Методика розв'язання задач динаміки з використанням рівнянь Лагранжа другого роду

1. Вибрати механічну систему, зобразити її у довільному положенні під час її руху, визначити число степенів її вільності (наприклад, за числом зупинок точок системи, яка уявно рухається, до її повної зупинки), вибрати узагальнені координати і записати рівняння Лагранжа (11.48) з урахуванням позначок цих координат.

2. Зобразити активні сили і реакції неідеальних в'язей.

3. Визначити кінетичну енергію системи. При цьому всі лінійні і кутові швидкості виразити через узагальнені швидкості, використовуючи співвідношення кінематики.

4. Визначити узагальнені сили за одним із способів, наведених у п. 11.2.2.

5. Обчислити похідні $\frac{\partial T}{\partial q_j}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$ і скласти рівняння Лагранжа,

тобто диференціальні рівняння руху системи.

6. Визначити шуквані параметри. При цьому, якщо для розв'язання задачі потрібно знайти рівняння руху системи, отримані диференціальні рівняння необхідно зінтегрувати з урахуванням початкових умов руху.

Приклад 4. Скласти диференціальне рівняння коливань математичного маятника (рис. 11.13) за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

Розв'язання

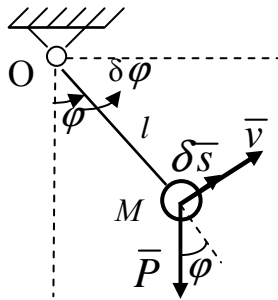


Рис. 11.13

Виберемо систему, яка складається з ідеального стержня OM і матеріальної точки M . Зобразимо її у довільному положенні при коливаннях у вертикальній площині xOy . Система має один степінь вільності (оскільки зупинка точки M під час коливань призведе до повної зупинки усієї системи).

Будемо визначати положення системи за допомогою кута відхилення стержня OM від вертикалі – φ . В цьому разі рівняння Лагранжа (11.48) набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

На матеріальну точку M діє тільки сила ваги $\bar{P} = m\bar{g}$.

Визначимо кінетичну енергію системи. Вона визначається як кінетична енергія матеріальної точки $T = \frac{mv^2}{2}$. Лінійну швидкість \bar{v} виразимо через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega$, що є кутовою швидкістю обертання стержня OM навколо осі, що проходить через точку O : $v = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l$. Тоді кінетична енергія системи буде

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

Узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті φ , знайдена у п. 11.2.2:

$$Q_{\varphi} = -mgl \cdot \sin \varphi.$$

Обчислимо похідні: $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ (оскільки узагальнена координата φ явно не

входить до кінетичної енергії T);

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} ml^2 \cdot 2\dot{\varphi} = ml^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi}.$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду:

$$ml^2 \ddot{\varphi} - 0 = -mgl \cdot \sin \varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0.$$

Останнє і є диференціальним рівнянням руху (коливань) математичного маятника. Зазначимо, що це рівняння є нелінійним.

Питання для самоперевірки

1. Що в аналітичній механіці називається в'язями?
2. Який вигляд має рівняння в'язі?
3. Дайте означення стаціонарним в'язям.
4. Дайте означення голономним в'язям.
5. Дайте означення утримуючим в'язям.
6. Дайте означення ідеальним в'язям. Наведіть приклади.
7. Що називається можливим переміщенням точки і механічної системи?
8. Що називається можливою роботою сили?
9. Сформулюйте принцип можливих переміщень. Що встановлює цей принцип?
10. Сформулюйте загальне рівняння динаміки. Що дозволяє складати це рівняння?
11. Що називається числом степенів вільності механічної системи?
12. Що називається узагальненими координатами і узагальненими швидкостями. Який фізичний зміст вони можуть мати?

13. Що називається узагальненою силою?
14. Наведіть три способи визначення узагальнених сил.
15. Які сили називаються консервативними?
16. Як визначається потенціальна енергія механічної системи?
17. Який вигляд мають рівняння рівноваги системи в узагальнених координатах?
18. Запишіть рівняння рівноваги консервативної системи.
19. Запишіть рівняння Лагранжа другого роду.
20. Запишіть рівняння Лагранжа другого роду для консервативної системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретична механіка. Статика. Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів) / За заг.ред. В.П.Шпачука. – ХНАМГ, 2005.
2. Теоретична механіка. Кінематика. Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів) / За заг. ред. В.П.Шпачука. – ХНАМГ, 2006.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002.
4. Бутенин Н.В., Ленц Я.Л., Меркин Д.В. Курс теоретической механики. – Т.1, 2. – М.: Наука, 1979.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М., Наука, 1986.
6. Теоретична механіка (Навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей). – ХНАМГ, 2007.
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – Т.1, 2. – М.: Наука, 1977.
8. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – Т.1, 2. – М.: Наука, 1980.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., Наука, 1974.

