

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ ТА
КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
(для студентів 1 курсу денної форми
навчання всіх спеціальностей)
Частина 1

Харків – ХНАМГ - 2009

Завдання для самостійних та контрольних робіт з вищої математики (для студентів 1 курсу денної форми навчання всіх спеціальностей). Частина 1 / Хark. нац. ак. міськ. госп., уклад.: А.О. Володченко, Г.А. Кузнецова, С.М. Ламтюгова – Х.: ХНАМГ, 2009 –68 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Л.Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики протокол № 1
від 28.08.2009

ВСТУП

Пропоноване видання адресоване викладачам і студентам для проведення самостійних та контрольних робіт в аудиторії, підготовки до самостійних та контрольних робіт вдома.

Весь матеріал курсу поділено на теми. Кожна тема містить одну або декілька контрольних, кожна з яких має 10 варіантів. Самостійні і контрольні роботи пронумеровані у порядку зростання складності.

1. ВИЗНАЧНИКИ, МАТРИЦІ, СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Контрольна робота призначена для різнобічної перевірки знань за темою. Для написання студентами роботи за дві години викладач може вибрати 5 завдань (наприклад, завдання 1, 4, 5, пункти а), б) завдання 3).

1. Обчислити вказані вирази для заданих матриць A та B .
2. Обчислити визначник:
 - а) розкладаючи його за елементами рядка;
 - б) розкладаючи його за елементами стовпця;
 - в) приводячи його до трикутного вигляду.
3. Розв'язати систему рівнянь:
 - а) матричним методом;
 - б) за формулами Крамера;
 - в) методом Гауса.
4. Розв'язати однорідну систему рівнянь.
5. Розв'язати систему рівнянь.

Варіант 1

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}; BA, 2A + B.$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 3x + 2y - 4z = 15 \\ 4x + 3y - 7z = 19 \end{cases}.$$

Варіант 2

$$1. A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}; AB, B + 2A.$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4 \\ 4x + 6y - 10z = 8. \\ 4x + 5y - 7z = 6 \end{cases}$$

Варіант 3

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; BA, 3B + A.$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20. \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - 4y + 3z = 5 \\ 2x - 8y + 6z = 10. \\ 2x - 6y + 5z = 7 \end{cases}$$

Варіант 4

$$1. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}; BA, 5B - A.$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}.$$

Варіант 5

$$1. A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; AB, 5B + A.$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Варіант 6

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}; AB, 3B - 2A.$$

$$2. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ 4x - 2y - 2z = -3 \end{cases}.$$

Варіант 7

$$1. A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}; AB, 2A - B.$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 6. \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Варіант 8

$$1. A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}; BA, 3B + A.$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} 3x + 2y + z = 8 \\ x - 3y - z = 1 \\ 3x + 13y + 5z = 13 \end{cases}.$$

Варіант 9

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}; BA, 2A + B.$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 3x - 9y + 6z = 15 \\ 5x - 7y + 6z = 9 \end{cases}.$$

Варіант 10

$$1. A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}; AB, B + 2A.$$

$$2. \left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right|.$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -4 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 14 \end{cases}.$$

$$4. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$5. \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 4x - 2y + z = 3 \\ 8x - 4y + 2z = 6 \end{cases}.$$

2. ВЕКТОРИ

1

Контрольна робота призначена для перевірки вміння та навичок з розв'язання типових задач за темою. Розрахована на одну годину.

Варіант 1

1. За даними координатами точок $A(2;4;3)$, $B(3;1;-4)$, $C(-1;2;2)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = 6\vec{AB} - 3\vec{CB}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \vec{AC}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута ABC ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \vec{CB}$.

2. Довести, що вектори $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$, $\vec{c} = (2, 1, -3)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d} = (11, -6, 5)$ у цьому базисі.

Варіант 2

1. За даними координатами точок $A(2;4;6)$, $B(-3;5;1)$, $C(4;-5;-4)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = 2\vec{AB} + 5\vec{CB}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \vec{BC}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута ACB ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \vec{AB}$.

2. Довести, що вектори $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, 2, -1)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d} = (3, 7, -7)$ у цьому базисі.

Варіант 3

1. За даними координатами точок $A(3;5;4)$, $B(4;2;-3)$, $C(-2;4;7)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{CB}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута BAC ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$.

2. Довести, що вектори $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 2, -1)$, $\vec{c} = (3, 7, -7)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d} = (2, 1, 0)$ у цьому базисі.

Варіант 4

1. За даними координатами точок $A(-2;3;-4)$, $B(3;-1;2)$, $C(4;2;4)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = 6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута ACB ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

2. Довести, що вектори $\vec{a} = (2, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, 7, -7)$, $\vec{c} = (2, 1, 0)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d} = (1, -1, 2)$ у цьому базисі.

Варіант 5

1. За даними координатами точок $A(3;4;1)$, $B(5;-2;6)$, $C(4;2;-7)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = 8\vec{CA} + 3\vec{BC}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \vec{AC}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута ABC ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \vec{AC}$.

2. Довести, що вектори $\vec{a} = (3, 7, -7)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d} = (2, 2, -1)$ у цьому базисі.

Варіант 6

1. За даними координатами точок $A(4;6;7)$, $B(2;-4;1)$, $C(-3;-4;2)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = 4\vec{AC} + \vec{CB}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \vec{BA}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута ABC ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \vec{CB}$.

2. Довести, що вектори $\bar{a} = (-1, 1, -2)$, $\bar{b} = (2, 1, -3)$, $\bar{c} = (11, -6, 5)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\bar{d} = (3, -2, 1)$ у цьому базисі.

Варіант 7

1. За даними координатами точок $A(1;3;2)$, $B(-2;4;-1)$, $C(1;3;-2)$ знайти:

- а) довжину вектора $\bar{a} = \overline{AB} - 9\overline{CA}$;
- б) скалярний добуток векторів \bar{a} і $\bar{b} = \overline{BC}$;
- в) проекцію вектора \bar{a} на вектор \bar{b} ;
- г) косинус кута ABC ;
- д) векторний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \bar{a} , \bar{b} та $\bar{c} = \overline{AB}$.

2. Довести, що вектори $\bar{a} = (2, 1, -3)$, $\bar{b} = (11, -6, 5)$, $\bar{c} = (3, -2, 1)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\bar{d} = (-1, 1, -2)$ у цьому базисі.

Варіант 8

1. За даними координатами точок $A(2;-4;3)$, $B(3;1;-4)$, $C(-1;2;-2)$ знайти:

- а) довжину вектора $\bar{a} = 2\overline{AB} - 3\overline{CB}$;
- б) скалярний добуток векторів \bar{a} і $\bar{b} = \overline{AC}$;
- в) проекцію вектора \bar{a} на вектор \bar{b} ;
- г) косинус кута ABC ;
- д) векторний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \bar{a} , \bar{b} та $\bar{c} = \overline{BC}$.

2. Довести, що вектори $\vec{a} = (11, -6, 5)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -2)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d} = (2, 1, -3)$ у цьому базисі.

Варіант 9

1. За даними координатами точок $A(2;4;5)$, $B(1;-2;3)$, $C(-1;-2;4)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = 3\vec{CA} - 7\vec{BA}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \vec{AC}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута ABC ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \vec{AB}$.

2. Довести, що вектори $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 3)$, $\vec{c} = (-1, 2, 1)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d} = (-1, 1, -2)$ у цьому базисі.

Варіант 10

1. За даними координатами точок $A(3;1;-4)$, $B(2;4;3)$, $C(-1;2;2)$ знайти:

- а) довжину вектора $\vec{a} = 5\vec{AB} + 4\vec{BC}$;
- б) скалярний добуток векторів \vec{a} і $\vec{b} = \vec{AC}$;
- в) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{b} ;
- г) косинус кута ACB ;
- д) векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} ;
- е) змішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} та $\vec{c} = \vec{CA}$.

2. Довести, що вектори $\bar{a} = (-1, 2, 4)$, $\bar{b} = (7, 1, 3)$, $\bar{c} = (1, 2, 1)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\bar{d} = (0, 1, 3)$ у цьому базисі.

2 Контрольна робота призначена для перевірки вміння та навичок з розв'язання нестандартних задач за темою. Розрахована на дві години.

Варіант 1

1. Знайти кут між векторами \bar{n} і \bar{m} , якщо $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 5$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 2\pi/3$, $\bar{n} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{m} = \bar{b} - 3\bar{a}$.

2. Знайти $\bar{a} \times \bar{b}$; $\bar{a} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$, якщо $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$.

3. Чи компланарні вектори $\bar{a} = (2; 3; -1)$, $\bar{b} = (1; -1; 3)$, $\bar{c} = (1; 9; -11)$?

4. Знайти проєкцію вектора \overline{AB} на вектор \overline{CD} , якщо $A(-2; 1; 3)$, $B(2; -1; 7)$, $C(1; 2; -5)$, $D(0; 5; 3)$.

5. Дана піраміда з вершинами $O(0; 0; 0)$, $A_1(3; 0; 0)$, $A_2(2; 3; 0)$, $A_3(1; 2; 3)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини O на грань $A_1A_2A_3$.

6. Дано: вершини трикутника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ і $C(1; -2; 1)$. Визначити його зовнішній кут при вершині A .

7. Дано: точки $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; 2; 1)$, BK – висота $\triangle ABC$. Обчислити довжину відрізка AK .

Варіант 2

1. $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 3$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 5\pi/6$, $\bar{n} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{m} = \bar{a} - \bar{b}$.
Знайти $|\bar{n} \times \bar{m}|$.

2. Знайти $np_{\vec{a}}\vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$.

3. Чи можна провести площину через точки $A(2;1;4)$, $B(-1;3;5)$, $C(0;-1;4)$, $D(8;0;3)$?

4. Обчислити площу паралелограма, якщо $A(-2;3;4)$, $B(-5;4;1)$, $C(1;-3;2)$ – три його вершини.

5. Дана піраміда з вершинами $O(1;2;1)$, $A_1(2;0;2)$, $A_2(1;3;0)$, $A_3(1;3;-1)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини O на грань $A_1A_2A_3$.

6. Задано трикутник $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Знайти координати точки D перетину бісектриси кута A зі стороною CB .

7. Дано: $A(1;-2;5)$, $B(3;4;-7)$, $C(1;1;0)$, $D(-2;-1;3)$, точка O ділить відрізок AB навпіл. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини A на площину OCD .

Варіант 3

1. Задані вектори $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$. Знайти $\angle(\vec{c}, \vec{b})$, $|\vec{a} \times \vec{d}|$.

2. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$, $\vec{n} = 5\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Знайти $np_{\vec{n}}\vec{m}$.

3. Задані точки $A(2;1;3)$, $B(3;2;-1)$, $C(3;2;1)$, $D(x;0;2)$. При якому значенні x вектори \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{AD} компланарні?

4. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ і $\vec{b} = -3\vec{i} + \beta\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні?

5. Дана піраміда з вершинами $O(-1;0;4)$, $A_1(0;1;-2)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(1;-2;3)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини O на грань $A_1A_2A_3$.

6. Задані вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;1)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини B на AC .

7. Задані точки $A(1;2;3)$, $B(3;2;-1)$, $C(1;1;2)$, $D(5;0;3)$, KL – середня лінія $\triangle ABD$, $KL \parallel AB$. Знайти площу перерізу піраміди $ABCD$ площиною CKL .

Варіант 4

1. Знайти $\vec{b} \times \vec{d}$; $\vec{c} \cdot \vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$.

2. Дано: вектори $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

3. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = x \cdot \vec{a} - \vec{b}$. Знайти x , якщо $\vec{c} \perp \vec{d}$.

4. Довести, що точки $A(1;2;1)$, $B(0;1;3)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ належать одній площині.

5. Дана піраміда з вершинами $O(0;0;0)$, $A_1(-3;0;-1)$, $A_2(0;0;1)$, $A_3(2;2;3)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини O на грань $A_1A_2A_3$.

6. Задані дві вершини трикутника $A(-4;-1;2)$, $B(3;5;-16)$. Знайти третю вершину C , якщо середина сторони AC лежить на осі Oy , а середина сторони BC – на площині Oxz .

7. Дано: точки $A(1;2;3)$, $B(3;-4;-1)$, $C(2;3;1)$, $D(-1;0;1)$, точка O ділить відрізок AB навпіл, $OK \perp CD$. Знайти довжину відрізка OK .

Варіант 5

1. Знайти кут між векторами \vec{n} і \vec{m} , якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$, $\vec{n} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{a}$.

2. Знайти $\vec{c} \times \vec{d}$; $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$, якщо $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$.

3. Знайти x , якщо $\vec{c} \perp \vec{d}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$, $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = x \cdot \vec{a} - 2\vec{b}$.

4. Чи належать точки $A(-4;2;6)$, $B(-10;5;8)$, $C(2;-3;0)$, $D(-5;2;-4)$ одній площині?

5. Дана піраміда з вершинами $O(-2;0;1)$, $A_1(1;1;-2)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(-1;-2;4)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини O на грань $A_1A_2A_3$.

6. Задані точки $A(1;2;-3)$, $B(3;2;-4)$, $C(1;3;5)$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $|\overline{AB}|/|\overline{CD}| = 4$. Знайти координати точки D .

7. Дано: вектори $|\overline{AB}| = 2$ і $|\overline{AC}| = 4$, а кут між ними 60° . Знайти кут між медіаною AM трикутника $\triangle ABC$ і стороною AB .

Варіант 6

1. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{b} + 2\vec{c}$. Знайти $pr_{\vec{c}} \vec{d}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{d}$.

2. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$, $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{a}$. Знайти $|\vec{n} \times \vec{m}|$.

3. Дано: три вектори $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (-5;1;2)$, $\vec{c} = (0;4;-3)$. Знайти $d = 3\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 5\vec{b}^2 - 6\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c}^2$.

4. При якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha \vec{k}$ перпендикулярні?

5. Дана піраміда з вершинами $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;-3)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини A на грань BCD .

6. Знайти довжини діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

7. З вершини прямокутника зі сторонами 6 см і 4 см проведені прямі, які ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут φ між ними.

Варіант 7

1. $|\vec{a}| =$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 3\pi/4$, $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. Знайти $np_{\vec{n}}\vec{m}$.

2. Дано: вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Знайти $\angle(\vec{d}, \vec{b})$, $|\vec{a} \times \vec{c}|$.

3. Обчислити площу паралелограма, якщо $A(-2;3;-3)$, $B(-5;0;4)$, $C(1;-3;2)$ – три його вершини.

4. Серед векторів $\vec{a}_1 = (2;-3;6)$, $\vec{a}_2 = (0;0;-2)$, $\vec{a}_3 = (-3;1;0)$, $\vec{a}_4 = (6;0;1)$, $\vec{a}_5 = (0;5;0)$ знайти вектори, які колінеарні вектору \vec{k} .

5. Дана піраміда з вершинами $A(2;-4;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(1;-2;4)$, $D(-1;-3;1)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини B на грань ACD .

6. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{k}$.

7. Задані вектори $\bar{a} = (1; -2; 0)$, $\bar{b} = (-1; 0; 0)$, $\bar{c} = (-1; 5; 3)$, $\bar{d} = (-1; 5; 1)$. Чи існує трапеція $ABCD$ така, що $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{c}$, $\overline{AD} = \bar{d}$.

Варіант 8

1. $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 2\pi/3$, $\bar{c} = 2\bar{a} + x \cdot \bar{b}$, $\bar{d} = 3\bar{a} - \bar{b}$. Знайти x , якщо $\bar{c} \perp \bar{d}$.

2. Дано: вектори $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{d} = \bar{b} + \bar{a}$. Знайти $\bar{b} \times \bar{d}$; $\bar{c} \cdot \bar{a}$.

3. Знайти площу трикутника ABC , якщо відомі його вершини $A(2; 1; 4)$, $B(-1; 5; -2)$, $C(-7; -3; 2)$.

4. Довести, що трикутник з вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$ рівнобічний.

5. Дана піраміда з вершинами $A(-3; -1; 2)$, $B(0; -1; 0)$, $C(-2; -1; 1)$, $D(0; -3; 1)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини B на грань ACD .

6. Задані вершини трикутника $A(1; -2; 3)$, $B(2; 1; -1)$ і $C(-1; -2; 1)$. Визначити його зовнішній кут при вершині B .

7. Задані точки $A(-1; 0; 3)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 2; -1)$, BK – висота $\triangle ABC$. Обчислити довжину відрізка AK .

Варіант 9

1. Знайти кут між векторами \bar{n} і \bar{m} , якщо $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 4$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 2\pi/3$, $\bar{n} = 3\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{m} = \bar{b} - \bar{a}$.

2. Знайти $\text{пр}_{\bar{a}} \bar{c}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{d}$, якщо $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{d} = \bar{b} - \bar{a}$.

3. Дано: вектори $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$. Обчислити $np_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b})$.

4. Чи утворюють вектори $\bar{a} = (2; -1; 3)$, $\bar{b} = (0; 2; -2)$, $\bar{c} = (-4; 2; -6)$ базис?

5. Дана піраміда з вершинами $A(2; 0; 3)$, $B(-1; 0; -2)$, $C(-3; 4; 0)$, $D(0; -3; 1)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини B на грань ACD .

6. Дано: точки $A(-1; 0; 3)$, $B(1; -3; 4)$, $C(1; 3; -5)$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AB} / \overline{CD} = 3$. Знайти координати точки D .

7. Дано: точки $A(-1; 2; 0)$, $B(-2; 4; 3)$, $C(-2; 3; -1)$, $D(1; 4; 1)$, точка O ділить відрізок AB навпіл, $OK \perp CD$. Знайти довжину відрізка OK .

Варіант 10

1. $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 5\pi/6$, $\bar{n} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{m} = \bar{a} - \bar{b}$. Знайти $|\bar{n} \times \bar{m}|$.

2. Знайти $\bar{a} \times \bar{b}$; $\bar{a} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d}$, якщо $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - \bar{k}$, $\bar{d} = \bar{a} - \bar{b}$.

3. Знайти $np_{\bar{b}}\bar{a}$, якщо $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} - 2\bar{k}$.

4. При яких значеннях α і γ вектори $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}$ і $\bar{b} = 2\bar{i} + 6\bar{j} + \gamma\bar{k}$ колінеарні?

5. Дана піраміда з вершинами $A(-5; 1; 2)$, $B(3; 1; -2)$, $C(0; -4; 2)$, $D(0; 3; 3)$. Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини C на грань ABD .

6. Задані вершини трикутника $A(3; 1; -2)$, $B(0; 2; -4)$, $C(5; 3; -3)$. Обчислити довжину його висоти, яка проведена з вершини A на сторону BC .

7. Задані вершини піраміди $A(-4;-3;1)$, $B(-4;-4;0)$, $C(-2;-3;3)$, $D(3;2;1)$. Знайти площу перерізу, який проходить через середину ребра BC і вершини A і D .

3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1

 Контрольна робота призначена для перевірки вміння розв'язувати елементарні задачі за темою “Пряма на площині”. Робота розрахована на одну академічну годину.

Варіант 1

1. Точки $A(-4;2)$ і $B(x;y)$ лежать на прямій, яка паралельна вісі Ox , причому відстань між ними дорівнює 2 од. масштабу. Визначити координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC$: $A(6;2)$, $B(9;5)$, $C(10;2)$. Знайти:

- а) рівняння медіани BD ;
- б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AC ;
- в) площу $\triangle ABC$;
- г) $\angle BAC$.

Варіант 2

1. Точки $A(2;2)$ і $B(x;y)$ лежать на бісектрисі першого координатного кута. Відстань між ними дорівнює $3\sqrt{2}$ од. масштабу. Знайти координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC$: $A(2;2)$, $B(5;5)$, $C(6;2)$. Знайти:

- а) рівняння медіани CP ;
- б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AB ;
- в) площу $\triangle ABC$;
- г) $\angle CAB$.

Варіант 3

1. Точки $A(-5;2)$ і $B(x;y)$ лежать на прямій, яка паралельна вісі Oy . Знайти координати точки B , якщо вона знаходиться від точки A на відстані 6 од. масштабу.

2. Дано $\triangle ABC$: $A(-2;2)$, $B(1;5)$, $C(2;2)$. Знайти:

- а) рівняння медіани AM ;
- б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони BC ;
- в) площу $\triangle ABC$;
- г) $\angle ABC$.

Варіант 4

1. Точки $A(5;5)$ і $B(x;y)$ лежать на бісектрисі першого координатного кута. Відстань між ними дорівнює 4 од. масштабу. Знайти координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC$: $A(-6;2)$, $B(-3;5)$, $C(-2;2)$. Знайти:

- а) рівняння висоти BD ;
- б) рівняння середньої лінії трикутника, що паралельна до сторони AC ;
- в) площу $\triangle ABC$;
- г) $\angle ABC$.

Варіант 5

1. Точки $A(-7;7)$ і $B(x;y)$ лежать на бісектрисі другого координатного кута. Відстань між ними дорівнює $3\sqrt{2}$ од. масштабу. Знайти координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC$: $A(-10;2)$, $B(-7;5)$, $C(-6;2)$. Знайти:

- а) рівняння висоти CK ;
- б) рівняння прямої, що проходить через середини сторін AC і AB ;
- в) площу $\triangle ABC$;
- г) $\angle CAB$.

Варіант 6

1. Точки $A(-2;2)$ і $B(x; y)$ лежать на бісектрисі другого координатного кута. Відстань між ними дорівнює $3\sqrt{2}$ од. масштабу. Знайти координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC : A(6;2), B(9;2), C(10;-2)$. Знайти:

- а) рівняння висоти AD ;
- б) довжину сторони AC ;
- в) площу $\triangle KLM$, якщо точки K, L, M – середини відповідно сторін AB, AC, BC ;
- г) $\angle ACB$.

Варіант 7

1. Точки $A(-4;2)$ і $B(x; y)$ лежать на прямій, яка паралельна вісі Ox , причому відстань між ними дорівнює 2 од. масштабу. Визначити координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC : A(2;-2), B(5;-5), C(6;-2)$. Знайти:

- а) рівняння медіани BD ;
- б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AC ;
- в) площу $\triangle ABC$;
- г) $\angle BAC$.

Варіант 8

1. Точки $A(-2;-2)$ і $B(x; y)$ лежать на бісектрисі третього координатного кута. Відстань між ними дорівнює $3\sqrt{2}$ од. масштабу. Знайти координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC : A(-2;-2), B(1;-5), C(2;-2)$. Знайти:

- а) довжину висоти BD ;
- б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AB ;
- в) площу $\triangle ABC$;
- г) $\angle ABC$.

Варіант 9

1. Точки $A(-5; -2)$ і $B(x; y)$ лежать на прямій, яка паралельна вісі Oy . Знайти координати точки B , якщо вона знаходиться від точки A на відстані 6 од. масштабу.

2. Дано $\triangle ABC$: $A(-6; -2)$, $B(-3; -5)$, $C(-2; -2)$. Знайти:

- а) довжину медіани CP ;
- б) рівняння перпендикуляра до сторони BC , проведеного з точки $M(1; -3)$;
- в) площу $\triangle ABN$, де N – середина сторони BC ;
- г) $\angle ANB$.

Варіант 10

1. Точки $A(-5; -5)$ і $B(x; y)$ лежать на бісектрисі першого координатного кута. Відстань між ними дорівнює 4 од. масштабу. Знайти координати точки B .

2. Дано $\triangle ABC$: $A(-10; -2)$, $B(-7; -5)$, $C(-6; -2)$. Знайти:

- а) довжину висоти CK ;
- б) рівняння серединного перпендикуляра до сторони AC ;
- в) площу $\triangle ALC$, де L – середина сторони AB ;
- г) $\angle ACL$.

2 Контрольна робота для перевірки вміння розв'язувати елементарні задач за темою “Криві другого порядку на площині”. Робота розрахована на одну академічну годину.

Варіант 1

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$.

2. Знайти довжини півосей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса, який задано рівнянням $9x^2 + 16y^2 = 144$.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її півосі дорівнюють відповідно 5 і 4 одиниці довжини.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її вершина лежить у початку координат, параметр дорівнює p і напрямок осі симетрії співпадає з додатним напрямком Oy .

Варіант 2

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$.

2. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо відрізок, який з'єднує його фокуси, видно з кінця малої осі під прямим кутом.

3. Обчислити координати фокусів гіперболи, яка задана рівнянням $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{25} = 1$.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її віссю симетрії є вісь Ox , вершина лежить у початку координат і відстань від фокуса до вершини дорівнює 4 одиниці довжини.

Варіант 3

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

2. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює відстані між кінцями великої і малої осей.

3. Обчислити ексцентриситет гіперболи, яка задана рівнянням $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{25} = 1$.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її віссю симетрії є вісь Ox , вершина лежить у початку координат і парабола проходить через точку $(2; -4)$.

Варіант 4

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане

рівнянням $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$.

2. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо його велика вісь втричі більша за малу.

3. Обчислити координати фокусів гіперболи, яка задана рівнянням $\frac{x^2}{169} - \frac{y^2}{25} = 1$.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її віссю симетрії є вісь Ox , вершина лежить у початку координат і парабола проходить через точку $(-2;4)$.

Варіант 5

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$.

2. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо його вісі відносяться як 5:3.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 8, а між фокусами – 10.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її віссю симетрії є вісь Oy , вершина лежить у початку координат, а фокус в точці $(0;3)$.

Варіант 6

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$.

2. Знайти відношення півосей еліпса, якщо його ексцентриситет дорівнює $\frac{1}{2}$.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точки $(2\sqrt{7}; -3)$ і $(-7; -6\sqrt{7})$.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її віссю симетрії є вісь Oy , вершина лежить у початку координат і парабола проходить через точку $(4;2)$.

Варіант 7

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

2. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса, який задано рівнянням $16x^2 + 25y^2 = 400$.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь дорівнює $\sqrt{15}$ і гіпербола проходить через точку $(5;2)$.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її віссю симетрії є вісь Ox , а фокус лежить у точці $(3;0)$.

Варіант 8

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 + 3y = 0$.

2. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса, який задано рівнянням $9x^2 + y^2 = 36$.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює 16, а ексцентриситет дорівнює $4/3$.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її віссю симетрії є вісь Oy , а фокус лежить у точці $(0;3)$.

Варіант 9

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$.

2. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса, який задано рівнянням $x^2 + 4y^2 = 64$.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь дорівнює 5, а ексцентриситет дорівнює 1,4.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її вершина лежить у початку координат, параметр дорівнює p і напрямок осі симетрії співпадає з додатним напрямком Ox .

Варіант 10

1. Визначити координати центра і радіус кола, яке задане рівнянням $2x^2 + 2y^2 + 5x - 3y - 2 = 0$.

2. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса, який задано рівнянням $x^2 + 3y^2 = 36$.

3. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між вершинами дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 14.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що її вершина лежить у початку координат, параметр дорівнює p і напрямок осі симетрії співпадає з від'ємним напрямком Ox .

3

 Контрольна робота для перевірки вміння та навичок з розв'язання нестандартних задач за темою “Пряма та криві другого порядку на площині”. Робота розрахована на дві академічні години.

Варіант 1

1. Дано вершини трикутника ABC : $A(-3;4)$, $B(-4;1)$, $C(-1;2)$. Обчислити найбільшу висоту.

2. Визначити вид чотирикутника, сторони якого $y = x - 1$, $y = x + 5$, $y = 3x - 5$, $y = 3x + 2$. Знайти координати його вершин і точку перетину діагоналей M .

3. Знайти точку, рівновіддалену від трьох даних точок $A(-6;0)$, $B(-7;7)$, $C(1;1)$.

4. Коло з центром у точці $(-3;5)$ проходить через точку перетину прямих $5x - 4y + 5 = 0$ і $2x + y - 11 = 0$. Написати рівняння кола.

5. Через лівий фокус еліпса $20x^2 + 36y^2 = 720$, паралельно до його малої піввісі, проведено пряму. Знайти довжину відрізка, який міститься всередині еліпса.

6. На параболі $x^2 = y$ знайти точку, в якій хорда, яка з'єднує її з вершиною параболі, утворює кут нахилу до вісі Ox у 45° .

Варіант 2

1. На прямій $3x + 4y - 14 = 0$ знайти точку, рівновіддалену від точок $A(-1; 6)$ і $B(2; -3)$.

2. Відомі координати двох протилежних вершин ромба: $A(4; -3)$, $B(2; 1)$. Скласти рівняння його діагоналей.

3. В трикутнику ABC з вершини A проведено медіану AN і висоту AM . Знайти кут між ними, якщо координати вершин – $A(1; 3)$, $B(-2; -1)$, $C(4; -2)$.

4. Відрізок, який з'єднує фокуси еліпса, видно від кінця його малої піввісі під кутом 90° . Знайти ексцентриситет еліпса.

5. Скласти рівняння кола, яке описано навколо $\triangle ABC$, якщо $A(2; 2)$, $B(4; 6)$, $C(8; 8)$.

6. Уявна вісь гіперболи на 6 од. довше дійсної, фокуси її лежать на осі Ox . Асимптоти гіперболи $y = \pm 2x$. Написати рівняння гіперболи.

Варіант 3

1. Відрізок AB розділили на три рівні частини. З точки $C(3; 5)$, через його кінці $A(-4; 6)$, $B(1/2; 9)$ і точки ділення, проведено прямі. Написати їх рівняння.

2. Дано рівняння сторін чотирикутника $x - 3y + 7 = 0$, $4x + y - 24 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$, $3x + 4y + 8 = 0$. Знайти його площу.

3. Через точку перетину прямих $x + 7y - 3 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ проведено пряму, паралельну до прямої $3x - 2y + 1 = 0$. Знайти відстань від початку координат до цієї прямої.

4. Написати рівняння еліпса, який проходить через точку $M(3; -2\sqrt{3})$ і ексцентриситет якого дорівнює $\sqrt{5}/3$.

5. Коло проходить через точки $M(1;5)$ і $N(5;3)$, а центр його лежить на прямій $x + y - 4 = 0$. Написати рівняння кола.

6. Директриса параболи паралельна до вісі Ox і проходить через верхню вершину еліпса $36x^2 + 40y^2 = 1440$. Написати рівняння параболи.

Варіант 4

1. Обчислити кути при більшій основі трапеції, яка утворена прямими $x - y = 7$, $x - y = 15$, $y = 2x$, $y = 0,5x$.

2. Паралельно прямій $4x - 2y + 1 = 0$ через точку $A(4; -3)$ проведено пряму. В якій точці вона перетинає вісь ординат?

3. Знайти відстань від точки $A(4; -1)$ до точки M , яка ділить відрізок BC у відношенні $BM : MC = 2 : 3$, якщо $B(3; -1)$, $C(13; 9)$.

4. Знайти довжину хорди, отриману від перетину прямої $x - 2y - 4 = 0$ з еліпсом $4x^2 + 16y^2 = 64$.

5. Скласти рівняння параболи, директриса якої має рівняння $y - 1 = 0$.

6. Кінці діаметра кола – $A(-4; 3)$ і $B(6; 7)$. Знайти рівняння цього кола і рівняння діаметра, перпендикулярного до AB .

Варіант 5

1. Чотири прямих $3x - 2y + 6 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$, $3x - 2y - 12 = 0$, $3x + y + 6 = 0$ утворюють чотирикутник.

Визначити його вид, скласти рівняння діагоналей, знайти їх точку перетину.

2. Пряма проходить через точку $A(3/2;6)$ і точку перетину прямих $2x - 7y + 4 = 0$ і $x + y + 6,5 = 0$. Знайти кут її нахилу.

3. Точка N ділить відрізок між точками $A(-4;2)$ і $B(8;4)$ у відношенні $\lambda = 3:4$. Написати рівняння прямої $MN \perp AB$.

4. Коло $x^2 + y^2 = 25$ дотикається до еліпса у кінцях його великої вісі. Скласти рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет дорівнює 0,6.

5. Відстань між фокусами гіперболи дорівнює 8. Кут нахилу однієї з асимптот до вісі Ox дорівнює 120° . Написати рівняння гіперболи.

6. Знайти точки перетину прямої $y = 2x$ з параболою, фокус якої $F(2;0)$.

Варіант 6

1. Знайти найменший кут трикутника, утвореного прямими $3x - y - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$.

2. Знайти координати точки перетину діагоналей чотирикутника з вершинами $A(-6;-3)$, $B(-3;1)$, $C(1;-1)$, $D(2;-5)$.

3. Знайти точку, яка симетрична точці $A(1;3)$ відносно прямої $x - 3y + 3 = 0$.

4. Обчислити ексцентриситет еліпса, у якого мала піввісь дорівнює відстані між фокусами.

5. Написати рівняння гіперболи, якщо один з фокусів лежить в середині відрізка, який з'єднує точки $A(-4;3)$ і $B(8;-3)$, а ексцентриситет дорівнює 2.

6. Відстань від фокуса до вершини параболі дорівнює 10, вісь симетрії – вісь Ox . Написати рівняння параболі.

Варіант 7

1. Дано точки $A(-6;3)$ і $B(4;7)$, M – середина відрізка AB . Яка з точок A , B або M ближче до початку координат?
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки перетину прямих $x + 5y - 4 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$ паралельно до бісектриси першого координатного кута.
3. З точки $M(4;3)$ проведено дві прямі: одна через точку $A(2;-1)$, друга через точку $B(3;5)$. Знайти $\angle ABM$.
4. Дано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4;6)$.
5. Показати, що $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ є рівняння кола. Знайти його центр і радіус.
6. Знайти гострий кут між асимптотами гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює 2.

Варіант 8

1. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(-6;2)$, $B(-1;2)$ і $C(8;-6)$. Знайти середину середньої лінії, яка паралельна стороні AC .
2. Знайти найбільшу висоту $\triangle ABC$, вершини якого мають координати $A(0;6)$, $B(3;1)$, $C(4;2)$.
3. Пряма проходить через початок координат і середину відрізка AB , причому $A(1;-3)$, $B(7;1)$. Під яким кутом і в якій точці ця пряма перетне пряму $x - y + 5 = 0$?
4. Фокус гіперболи $(2\sqrt{2};0)$, одна з асимптот $-y = -x$. Написати рівняння гіперболи.
5. Знайти кут між асимптотами гіперболи, яка проходить через точки $M(\sqrt{5};1/2)$ і $N(-2;0)$.

6. Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm 1/2x$, а відстань між фокусами $2c = 10$. Знайти рівняння гіперболи.

Варіант 9

1. Дано сторони трикутника $2x - 11y - 5 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$ і $4x + 3y - 35 = 0$. Обчислити його периметр.

2. На прямій $2x + y - 8 = 0$ знайти точку, однаково віддалену від точок $A(-6;6)$ і $B(1;-1)$.

3. Знайти рівняння прямих, які проходять через точку $A(3;4)$ під кутом 60° до прямої $2x + 3y + 6 = 0$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами $2c = 10$, а велика вісь $2a = 16$.

5. Парабола, яка симетрична відносно вісі Ox , проходить через точку $A(4;-1)$, а вершина її знаходиться в точці $(0;0)$. Скласти рівняння параболи.

6. Скласти рівняння спільної хорди двох кіл $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ і $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 16$.

Варіант 10

1. Сторонами трикутника є координатні вісі і пряма, яка проходить через точку $A(3;4)$. Знайти рівняння цієї прямої за умовою, що площа трикутника дорівнює 9 кв. од.

2. Дано пряму $4x + 3y + 1 = 0$. Знайти рівняння прямої, яка паралельна даній і відстоїть від неї на 3 од.

3. Знайти довжину перпендикуляра, який опущено з початку координат на пряму $3x - 6y + 5 = 0$, а також координати основи цього перпендикуляра.

4. Скласти рівняння параболи, якщо відомо, що вершина її знаходиться у початку координат, і відстань від фокуса до вершини дорівнює 4 одиниці довжини, а віссю симетрії є вісь Ox .

5. Уявна вісь гіперболи на 6 одиниць довша, ніж дійсна. Фокуси її лежать на осі Ox . Асимптоти гіперболи $y = \pm 2x$. Написати рівняння гіперболи.

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що сума півосей $a + b = 12$, а відстань між фокусами $2c = 6\sqrt{2}$.

3.2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ

1

 Контрольна робота призначена для перевірки вміння та навичок з розв'язання простих задач за темою “Аналітична геометрія у просторі”. Розрахована на 1 академічну годину.

Варіант 1

1. Задані чотири точки $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти: а) довжину A_1A_2 ; б) рівняння прямої A_2A_3 ; в) рівняння площини $A_1A_2A_3$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_4 , перпендикулярно до прямої A_2A_3 .

2. Знайти відстань від точки $A(2;3;-1)$ до площини $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Варіант 2

1. Задані чотири точки $A_1(3;-1;2)$, $A_2(-1;0;1)$, $A_3(1;7;3)$, $A_4(8;5;8)$. Знайти: а) довжину A_1A_4 ; б) рівняння прямої A_2A_4 ; в) рівняння площини $A_1A_2A_4$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_4 , перпендикулярно до прямої A_1A_3 .

2. Знайти відстань від точки $A(2;-4;2)$ до площини $2x + 11y + 10z - 10 = 0$.

Варіант 3

1. Задані чотири точки $A_1(3;5;4)$, $A_2(5;8;3)$, $A_3(1;2;-2)$, $A_4(-1;0;2)$. Знайти: а) довжину A_3A_4 ; б) рівняння прямої A_1A_4 ; в) рівняння площини $A_1A_3A_4$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_1 , перпендикулярно до прямої A_2A_3 .

2. Знайти відстань від точки $A(3;4;-1)$ до площини $3x + 4y - 5 = 0$.

Варіант 4

1. Задані чотири точки $A_1(2;4;3)$, $A_2(1;1;5)$, $A_3(4;9;3)$, $A_4(3;6;7)$. Знайти: а) довжину A_2A_4 ; б) рівняння прямої A_1A_2 ; в) рівняння площини $A_2A_3A_4$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_3 , перпендикулярно до прямої A_2A_4 .

2. Знайти відстань від точки $A(-3;0;0)$ до площини $15x + 9y - 12z - 5 = 0$.

Варіант 5

1. Задані чотири точки $A_1(9;5;5)$, $A_2(-3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$, $A_4(6;9;2)$. Знайти: а) довжину A_3A_4 ; б) рівняння прямої A_1A_4 ; в) рівняння площини $A_1A_3A_4$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_1 , перпендикулярно до прямої A_1A_4 .

2. Знайти відстань від точки $A(1;-2;1)$ до площини $2x - 3y + 6z + 28 = 0$.

Варіант 6

1. Задані чотири точки $A_1(0;7;1)$, $A_2(2;-1;5)$, $A_3(1;6;3)$, $A_4(3;-9;8)$. Знайти: а) довжину A_1A_4 ; б) рівняння прямої

A_2A_3 ; в) рівняння площини $A_1A_2A_4$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_1 , перпендикулярно до прямої A_3A_4 .

2. Знайти відстань від точки $A(1;2/9;1)$ до площини $5x + 3y - 4z + 15 = 0$.

Варіант 7

1. Задані чотири точки $A_1(5;5;4)$, $A_2(1;-1;4)$, $A_3(3;5;1)$, $A_4(5;8;-1)$. Знайти: а) довжину A_2A_3 ; б) рівняння прямої A_1A_3 ; в) рівняння площини $A_1A_2A_3$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_4 , перпендикулярно до прямої A_2A_3 .

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;-1;2)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$.

Варіант 8

1. Задані чотири точки $A_1(6;1;1)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;6)$. Знайти: а) довжину A_1A_3 ; б) рівняння прямої A_1A_2 ; в) рівняння площини $A_1A_3A_4$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_2 , перпендикулярно до прямої A_1A_3 .

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-1;3)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{4}$.

Варіант 9

1. Задані чотири точки $A_1(7;5;3)$, $A_2(9;4;4)$, $A_3(4;5;7)$, $A_4(7;9;6)$. Знайти: а) довжину A_1A_2 ; б) рівняння прямої A_2A_4 ;

в) рівняння площини $A_2A_3A_4$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_2 , перпендикулярно до прямої A_3A_4 .

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1;2;-1)$ і $B(0;3;-4)$.

Варіант 10

1. Задані чотири точки $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти: а) довжину A_2A_4 ; б) рівняння прямої A_1A_3 ; в) рівняння площини $A_1A_2A_3$; г) рівняння площини, яка проходить через точку A_3 , перпендикулярно до прямої A_1A_2 .

2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3;0;4)$ і $B(-1;-2;3)$.

2

 Контрольна робота призначена для перевірки вміння розв'язувати нестандартні задачі за темою “Аналітична геометрія в просторі”. Розрахована на дві академічні години.

Варіант 1

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна вісі Oz і проходить через точки $A(2;3;-1)$ і $B(-1;2;4)$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-1;0;4)$, $M_3(-2;-1;1)$.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{6}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти гострий кут між прямою $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ і площиною $2x + y - z + 4 = 0$.

5. На вісі Ox знайдіть точку, віддалену від площини $2x + y - 2z + 4 = 0$ на відстань $2/3$.

6. Яку поверхню задає рівняння $8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0$?

Варіант 2

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна вісі Ox і проходить через точки $A(2;-3;2)$ і $B(7;1;0)$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(1,1,-1)$.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-1}{1/7} = \frac{y+2}{9/7} = \frac{z-0}{1}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти гострий кут між прямою $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$ і площиною $x+y+3z-1=0$.

5. Знайдіть висоту піраміди $SABC$, яка опущена з вершини S на грань ABC , якщо $S(1;4;-2)$, $A(0;-1;1)$, $B(3;5;1)$, $C(1;-3;-1)$.

6. Яку поверхню задає рівняння $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$?

Варіант 3

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна вісі Oy і проходить через точки $A(2;1;-2)$ і $B(-7;2;1)$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-2;1/2)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;-1;-1)$.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x+3}{-19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{11}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;2;-1)$ перпендикулярно прямій $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $(2;-3;5)$ перпендикулярно до лінії перетину площин $2x+y-2z+1=0$ і $x+y+z-5=0$.

6. Яку поверхню задає рівняння $4x^2 - 8y^2 + 16z^2 = 0$?

Варіант 4

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна площині xOy і проходить через точку $A(1;2;-4)$.

2. Рівняння площини $2x + 3y - 4z + 24 = 0$ перетворити до вигляду у відрізках на осях.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-1}{-5}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(2;-4;-2)$ перпендикулярно прямій $\begin{cases} x-4y+5z-1=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$.

5. Дві грані куба розташовані на площинах $2x + 2y + 2z - 5 = 0$ і $x + y + z - 1 = 0$. Знайти його об'єм.

6. Яку поверхню задає рівняння $y^2 = 6x - 4$?

Варіант 5

1. Знайти рівняння площини, яка перпендикулярна вісі Ox і проходить через точку $A(3;7;-1)$.

2. Рівняння площини $3x - 4y + 5z - 24 = 0$ перетворити до вигляду у відрізках на осях.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{4}$ в параметричному вигляді.

4. Через точку $(2;1;6)$ провести пряму, яка перпендикулярна площині $x - 4y + 5z = 0$, і визначити косинуси кутів між цією прямою і осями координат.

5. Знайти точку перетину трьох площин: $5x + 8y - z - 1 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$, $2x - 3y + 2z - 9 = 0$.

6. Яку поверхню задає рівняння $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$?

Варіант 6

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна площині xOz і проходить через точку $A(2; -3; 4)$.

2. Рівняння площини $5x + 7y - 34z + 5 = 0$ перетворити до нормального вигляду.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти рівняння перпендикуляра до площини $3x - y - 5z - 8 = 0$ і його направляючі косинуси.

5. Знайти рівняння площини, яка відсікає на осях координат рівні відрізки і утворює з координатними площинами піраміду, об'єм якої дорівнює $4/3$.

6. Яку поверхню задає рівняння $3x^2 + 5y^2 = 12z$?

Варіант 7

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $A(2; 1; 3)$.

2. Рівняння площини $2x + 9y - 6z + 33 = 0$ перетворити до нормального вигляду.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5}$ з площиною $x + y - 2z - 4 = 0$.

5. На вісі Oz знайти точку, рівновіддалену від двох площин $x + 4y - 3z - 2 = 0$, $5x + z + 8 = 0$.

6. Яку поверхню задає рівняння $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$?

Варіант 8

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь Oz і точку $A(-2;4;-4)$.

2. Рівняння площини $3x - 4y + 5z - 14 = 0$ перетворити до нормального вигляду.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{5}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-1}$ з площиною $3x - 4y - z + 5 = 0$.

5. Знайти гострий кут між двома площинами $5x - 3y + 4z - 4 = 0$, $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

6. Яку поверхню задає рівняння $z^2 - 4x = 0$?

Варіант 9

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $A(2;-5;4)$.

2. Рівняння площини $2x + 3y - 5z + 30 = 0$ перетворити до вигляду у відрізках на осях.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{3}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ з площиною $x + y - z + 5 = 0$.

5. Знайдіть площину, якщо відомо, що точка $N(3;-6;2)$ є основою перпендикуляра, який опущено з початку координат на цю площину.

6. Яку поверхню задає рівняння $2x^2 - 3z^2 = -12y$?

Варіант 10

1. Знайти рівняння площини, яка перпендикулярна осі Oz і проходить через точку $A(7;3;-1)$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;2;3)$, $M_3(0;-1;-1)$.

3. Записати рівняння прямої $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$ в параметричному вигляді.

4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{9}$ з площиною $2x - 3y + z - 3 = 0$.

5. Знайдіть площину, яка паралельна до площини $7x - 6y + 6z + 7 = 0$ і відстоїть від неї на дві одиниці.

6. Яку поверхню задає рівняння $4x^2 - 12y^2 - 6z^2 = 12$?

4. ГРАНИЦІ

1 Контрольна робота призначена для перевірки вміння розв'язувати типові завдання за темою. Розрахована на одну годину.

1. – 5. Обчислити границі.

Варіант 1	Варіант 2
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x \sin 2x}$.	1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^3 - 8}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{4x-3} \right)^{x+1}$.	

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 - x^2} - 4}{\sqrt{25 + x^2} - 5}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^4 + x - 12}.$ 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x^2 - 5x + 7}{x^4 + x + 1}.$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos^3 5x}{4x^2}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{2x-6}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 16x + 5}{x^2 - 2x - 15}.$ 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + x^2 - 9}{1 + 6x - x^3}.$
Вариант 3	Вариант 4
1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^4 + 8}{2x^2 + 5x - 1}.$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-4} \right)^{\frac{5x+1}{2}}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 6x + \sin 2x}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + 5x - 1}{x^2 - 4x - 5}.$ 5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - \sqrt{x^2 + 60}}{\sqrt{x^2 + 12} - 4}.$	1. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{16 - x^2}.$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-5} \right)^{2x-1}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 - \sqrt{49 + x^2}}{6 - \sqrt{36 + x^2}}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^3}.$ 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3 - 4x^2 + 8x^3}.$
Вариант 5	Вариант 6
1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 17x + 6}{x^3 - 27}.$	1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 - 3x^2 + 1}{2x^2 - 6x - x^4}.$

$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x}{4x-5} \right)^{x+1}.$ $3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - \cos 2x}{3x^2}.$ $4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{10+x} - 3}{\sqrt{x^2 + 15} - 4}.$ $5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{4 + 5x^3 - 7x^2}.$	$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{\sin x} \right).$ $3. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{5x^2 - 32x + 12}{x^2 - 36}.$ $4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 15} - 4}{\sqrt{x^2 + 8} - 3}.$ $5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x-8} \right)^{\frac{x-1}{2}}.$
Вариант 7	Вариант 8
$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 7x + 2}.$ $2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - \sqrt{x+24}}{x^2 - 5x + 4}.$ $3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+2}{7x+3} \right)^{3x-1}.$ $4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{x \arcsin x}.$ $5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{4 + 5x^3 - 7x^2}.$	$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 17x + 6}{x^3 - 27}.$ $2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{10+x} - 3}{\sqrt{x^2 + 15} - 4}.$ $3. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x}{2x-5} \right)^{2x+2}.$ $4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 2x^2 + 3}{5x + 6}.$ $5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}.$
Вариант 9	Вариант 10
$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 2}{1 - 2x^2 - 62x^4}.$	$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{5x+5} - 5}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 5x + 2}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x \operatorname{tg} 3x}.$ 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x - 3}{2x + 1} \right)^{x+2}.$	2. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x - 6}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 2x^5 - 4}{2 - x + 6x^5}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \operatorname{tg} 2x}.$ 5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x - 3} \right)^{2x-1}.$
--	---

2 Контрольна робота призначена для перевірки вміння розв'язувати нестандартні приклади за темою. Розрахована на дві години.

1. – 10. Обчислити границі.

Варіант 1	Варіант 2
1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 3x + 4).$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + x^5 + x^4}{2x^3 - 4x^2 + 3}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 + x - 21}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{8x+1} - 3}.$	1. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 + 3x^2 - 1)(7x + 12).$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{4x^3 + 7x - 5}.$ 3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 8}.$ 4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$

<p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{2x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{\frac{x}{2}}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1+x^3))^{\frac{3}{\sin^3 x}}.$</p>	<p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{x \sin x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{2 \operatorname{arctg} x}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1-x))^{\frac{5}{\operatorname{tg} x}}.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 3</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 5x - 4}{x + 7}.$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^4 - 3x - 2}{7x^5 - 2x + 5}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+2}{x-3} - \frac{x^2+11}{x^2-2x-3} \right).$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[4]{1+x}}{\arcsin 4x}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 4</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2} x^2 - 5x - 6 \right).$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + 4x^4 - 3}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 7x + 6}.$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\arcsin x^2}.$</p>

<p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{\operatorname{tg} 2x}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x} \right)^{x+2}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{3}{x}}.$</p>	<p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} \pi x}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^x}{\ln(1 + 2x)}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 1} \right)^{x+2}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}})^{\frac{2}{\sin x}}.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 5</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 3)(x + 2).$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 3x - 2}{5x^2 + 3x^3 - 1}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 8x + 16}{(x^2 + 3x - 4)(x + 4)}.$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+4} - 2}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 6</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(9 - 4x)(x + 6)}{x - 2}.$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 5x - 3}{2x^3 + 4x^2 + 5}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x + 2}{x - 8} - \frac{x^2 + 6}{x^2 - 9x + 8} \right).$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x - 15} - 7}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x^2}{1 - \cos 3x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\ln(1 - 5x)}.$</p>

<p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{\ln(1+2\sin^2 x)}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos \pi x}{\sin^2 \pi x}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+4} \right)^{4x}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{3x})^{\frac{2}{\arcsin x}}.$</p>	<p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[7]{1+7x}}{2^{2x} - 1}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{3x-1}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 7</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 1/2} (3x^2 - 4x - 10).$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^5 + 14}{7x^3 + 2x^2 - 3}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 5x - 63}{x^2 - 6x - 7}.$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\operatorname{arctg}^2 2x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 5^{3x}}{x - \arcsin 9x}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{1 - \sqrt[4]{1+4x}}.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 8</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow -4} (x-6)\left(\frac{1}{3}x+8\right).$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 18x - 3}{3x^3 + 5x^5 + 10}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 7x - 40}{x^2 - 10x + 25}.$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x-2}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{\cos 2x - \cos 3x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{\ln(1+2x) - \sin x}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+5x} - 1}{\operatorname{tg} 4x + x^2}.$</p>

<p>8. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 2x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^2}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x - 3} \right)^{x-1}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln(1 + \sqrt[3]{x}))^{\frac{4}{\sin \sqrt[3]{x}}}.$</p>	<p>8. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 5} \right)^{2x^2}.$</p> <p>10. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}})^{\frac{3}{x}}.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 9</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 5)(3x - 4)}{x + 2}.$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + 8x^3}{10x^3 + 5x^2 - 1}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-1}{x+2} - \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right).$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\arcsin^2 x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - e^{-3x}}{\ln(1 + 2x)}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x - x^2}{1 - \sqrt[7]{1+x}}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 10</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x + 5).$</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 1}{5x^4 - 4x^3 + 3}.$</p> <p>3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x - 15}.$</p> <p>4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7+x} - \sqrt{9-x}}{x - 1}.$</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 3x}.$</p> <p>6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}.$</p> <p>7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{\sqrt[4]{1 - 2x} - 1}.$</p> <p>8. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{2^x - 2^{2\pi}}.$</p> <p>9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 1}{4x} \right)^{2x}.$</p>

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+6} \right)^{2x}$.	10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg^2 3x)^{\frac{1}{\ln(\cos x)}}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x \sin \pi x}}$.	

5. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ. ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

5.1. ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

1 Самостійна робота для перевірки знання таблиці похідних та вміння диференціювати складну функцію. Робота розрахована на 5 хвилин.

1. – 5. Знайти похідну заданої функції.

Варіант 1	Варіант 2
1. $y = tg 11x$. 2. $y = \arcsin 4x$. 3. $y = \cos(x^3 - 5x)$. 4. $y = \lg(8x - 1)$. 5. $y = (x^2 + e^x)^{15}$.	1. $y = \sin(x/10)$. 2. $y = arcctg 7x$. 3. $y = (x^6 + x)^2$. 4. $y = 8^{\cos x}$. 5. $y = \sqrt{2x + x^5}$.
Варіант 3	Варіант 4
1. $y = tg(x/3)$. 2. $y = \arcsin 5x$. 3. $y = e^{\sqrt{x}}$. 4. $y = \ln(6x + 1)$. 5. $y = \cos 12x$.	1. $y = \ln 8x$. 2. $y = 10^{\cos x}$. 3. $y = tg(x/\sqrt{2})$. 4. $y = \arccos 14x$. 5. $y = \sqrt[3]{x^2 + e}$.

<p>Варіант 5</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = \operatorname{tg}((x+4)/7)$. $y = \sin(3-10x)$. $y = \arccos 6x$. $y = e^{-11x}$. $y = \sqrt[6]{(4+5x)^{11}}$. 	<p>Варіант 6</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = 2 \sin x + \cos 2x$. $y = 1 - x^4$. $y = \sqrt{4+7x}$. $y = \ln(1+e^x)$. $y = \operatorname{arctg} 7x$.
<p>Варіант 7</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = e^{-x}$. $y = -2/x$. $y = \log_2(\sin x)$. $y = \operatorname{arctg} 2x$. $y = \sqrt{\cos x}$. 	<p>Варіант 8</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = a^3 - x^3$. $y = \sin 3x$. $y = \ln(1+x)$. $y = \arccos 2x$. $y = 7^{\operatorname{tg} x}$.
<p>Варіант 9</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = (x+1)^2$. $y = \arcsin(x/2)$. $y = 3^{4-5x}$. $y = \log_3(2x-8)$. $y = \sqrt{\cos x}$. 	<p>Варіант 10</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = \cos(\pi x/2)$. $y = x + x^2/6$. $y = \operatorname{ctg} 6x$. $y = \operatorname{arctg} 4x$. $y = e^{8-3x}$.

2 Контрольна робота призначена для перевірки знання таблиці похідних та правил диференціювання, вміння знаходити похідну складної функції, розрахована на одну годину.

1. – 8. Продиференціювати функції.

Вариант 1	Вариант 2
1. $y = 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt{x}}{4} + 2x.$ 2. $y = \frac{2\sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}}.$ 3. $y = (x - 2)^2 \cdot (x + 1)^2.$ 4. $y = \arcsin^2 3x.$ 5. $y = \ln \frac{2 + x}{2 - x}.$ 6. $y = (\arctg x)^{\log_2 x}.$ 7. $(e^x - 1)(e^y - 1) - y = 0.$ 8. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t; \\ y = -2\sin \frac{2}{t} - e^t. \end{cases}$	1. $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 4.$ 2. $y = \frac{x^3}{8 - x^4}.$ 3. $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}.$ 4. $y = \arccos \sqrt{\frac{2}{x}}.$ 5. $y = \sqrt{\ln x} + \ln \sqrt{x}.$ 6. $y = (\arctg x)^{\cos^2 x}.$ 7. $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}.$ 8. $\begin{cases} x = t - \ln(\sin t); \\ y = t + \ln(\cos t). \end{cases}$
Вариант 3	Вариант 4
1. $y = \frac{(x - 3)^2}{x} + 6 - \frac{4}{x}.$ 2. $y = \left(\frac{x}{1 - x}\right)^3.$ 3. $y = (1 + x - x^2) \cdot (1 - 2x)^3.$ 4. $y = \ln(\sin^3 2x).$ 5. $y = x^4 \cdot 4^x.$ 6. $y = (\tg 3x)^{\arctg 3x}.$ 7. $\frac{y}{x} = \arctg \frac{x}{y}.$	1. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{x^3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$ 2. $y = \frac{4x + 5}{\sqrt{x}}.$ 3. $y = (3x^2 - 1)^2 \cdot (1 - x^3).$ 4. $y = \sqrt{x^2 - \sqrt{1 - 4x}}.$ 5. $y = 5^{\sin^2 4x}.$ 6. $x - y = -\arctg y.$ 7. $y = (\log_2 x)^{\cos \frac{1}{x}}.$

8. $\begin{cases} x = \cos(2/t); \\ y = t - \sin(t/\sqrt{2}). \end{cases}$	8. $\begin{cases} x = e^{2t} + 2^t; \\ y = 1 - \cos 3t. \end{cases}$
<p>Вариант 5</p> <p>1. $y = 4\sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 12x^3.$</p> <p>2. $y = \frac{x^2}{x^4 + 2x}.$</p> <p>3. $y = (\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + x^7 + 3)^2.$</p> <p>4. $y = \sqrt{1-2x} \cdot (x^3 - 2x).$</p> <p>5. $y = x^2 \cdot \sin 2x.$</p> <p>6. $y = (\arctg x)^{\cos^3 x}.$</p> <p>7. $y^3 x^2 = e^{\frac{y}{x}}.$</p> <p>8. $\begin{cases} x = 2t + \ln(\cos t); \\ y = t - \ln(\sin 3t). \end{cases}$</p>	<p>Вариант 6</p> <p>1. $y = \frac{x-7}{\sqrt[3]{x}} + 6x^2 - \frac{10x}{x+1}.$</p> <p>2. $y = tg 3x - \frac{1}{e^{\cos x}}.$</p> <p>3. $y = e^{x^3+3\cos^2 x}.$</p> <p>4. $y = \operatorname{arccctg} \sqrt{\sin^3 x}.$</p> <p>5. $y = \frac{3^x}{1+x^2}.$</p> <p>6. $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{\operatorname{arccctg} 3x}.$</p> <p>7. $2x - y^2 = \operatorname{arccctg} y.$</p> <p>8. $\begin{cases} x = 3\sin(2/t); \\ y = t - \cos(t^2/\sqrt{2}). \end{cases}$</p>
<p>Вариант 7</p> <p>1. $y = \frac{x^4}{3} - 7x^{-3} + 2\sqrt[3]{x^2} + 4.$</p> <p>2. $y = \frac{3\sqrt[3]{x}}{1-2\sqrt{x^3}}.$</p> <p>3. $y = tg x^2 + 4x^2 \sin x.$</p> <p>4. $y = \frac{2x^4}{e^{3 \sin x}}.$</p>	<p>Вариант 8</p> <p>1. $y = -\frac{2}{\sqrt{x^5}} + \sqrt[3]{x^7} - \frac{x^6}{4}.$</p> <p>2. $y = \frac{(x+2)^3}{x^5}.$</p> <p>3. $y = e^{\arccos 2x^2}.$</p> <p>4. $y = e^{\sqrt[3]{tg^2 x}}.$</p>

5. $y = \arccos \sqrt[3]{\frac{5}{x}}.$ 6. $y = (\arcsin x)^{\ln 3x}.$ 7. $(e^{x^2} + 4x)(2e^y - 1) - 3y = 0.$ 8. $\begin{cases} x = 3\sqrt{\cos t}; \\ y = -2\sqrt{\sin(2/t)} - e^{3t}. \end{cases}$	5. $y = \sqrt{2\ln x^2} + 3\ln \sqrt{3x+8}.$ 6. $y = (\arccos x^3)^{\cos 4x}.$ 7. $y^3 x - 5y = e^{\frac{2y}{x}}.$ 8. $\begin{cases} x = t - \ln(\operatorname{tg} t); \\ y = t + \ln(\operatorname{ctg} t). \end{cases}$
Варіант 9	Варіант 10
1. $y = \frac{x^2}{4} + 6\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^2}.$ 2. $y = \left(\frac{2x}{1-7x}\right)^2.$ 3. $y = (1+9x^2) \cdot (3x+x^3)^3.$ 4. $y = \ln(\operatorname{tg}^3 2x).$ 5. $y = \arctg \sqrt[3]{\cos x}.$ 6. $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\arctg 3x^5}.$ 7. $2x^3 - y^2 = -\arctg^2 y.$ 8. $\begin{cases} x = \cos(3/t^2); \\ y = 3t - \sin(t^3/\sqrt{2}). \end{cases}$	1. $y = 2x^3 + \sqrt[5]{\frac{x}{2}} + 5x.$ 2. $y = \frac{x^3}{e^{\cos x}}.$ 3. $y = \sqrt[3]{x} \cdot \cos 5x.$ 4. $y = (\sqrt{x-2} + \sqrt{x})^4.$ 5. $y = \operatorname{ctg}^2 \sqrt{3x+1}.$ 6. $y = (\ln 3x)^{\arcsin 2x}.$ 7. $\sin x \cdot \cos y + y = 0.$ 8. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + \sqrt{t+3}); \\ y = e^{\cos^3 4x} + t. \end{cases}$

3 Контрольна робота призначена для перевірки знання таблиці похідних та правил диференціювання, досконалого розуміння техніки диференціювання складних функцій, розрахована на дві академічних години.

1. – 12. Знайти похідні заданих функцій $y = y(x)$ та спростити отримані вирази.

Варіант 1	Варіант 2
1. $y = \arcsin \sqrt{1 - 2^{4x}}.$ 2. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x}).$ 3. $y = xe^x (\sin x - \cos 2x) + e^3.$ 4. $y = x^2 e^{x^2} / (x^2 + 1).$ 5. $y = \ln \left(\sqrt{x^2 + 2x} / (x + 1) \right).$ 6. $y = \sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x) - \ln(1/x).$ 7. $y = \left(\ln(x^2 + 1) \right)^{\arctg x}.$ 8.. $\sqrt[3]{y} - y^2 \ln x + 2 = 0$ 9. $y = \ln(\arcsin 2x) - x / \sin x.$ 10. $\begin{cases} y = 4t g^2(t/2); \\ x = 3 \sin t - 2 \cos t. \end{cases}$ 11. $y = \arctg \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$ 12. $y = \sqrt{2x + 1} (\ln(2x + 1) - 2).$	1. $y = x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin e^{-x}.$ 2. $y = (\arctg x) / x - \ln \left(x / \sqrt{1 + x^2} \right).$ 3. $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x.$ 4. $y = (1 + \ln(\cos x)) / \cos x.$ 5. $y = \sqrt{4x - x^2} + 4 \arcsin(\sqrt{x} / 2).$ 6. $y = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)).$ 7. $y = (\arcsin x)^{\ln x}.$ 8. $x^3 y - \ln(xy) + 2 = 0.$ 9. $y = \arctg e^x - 4 / (x - 1).$ 10. $\begin{cases} y = t - \arctg t; \\ x = \ln(1 + t^2). \end{cases}$ 11. $y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$ 12. $y = \ln \left((x^5 + 2) / (x^5 - 2) \right).$
Варіант 3	Варіант 4
1. $y = -\ln(1 / \sin x + ctgx).$ 2. $y = (x + 1) \cdot \arctg(e^{-2x}).$	1. $y = (x^2 - 2) \cdot 2^{\sin^2 x}.$ 2. $y = x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}} + 0,1.$

3. $y = \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$ 4. $y = (\sin x + \cos x)^{\ln x}.$ 5. $\begin{cases} y = \arcsin(t^2 - 1); \\ x = \arccos 2t. \end{cases}$ 6. $y^2 = \arccos \frac{9-x^2}{9+x^2} + \sqrt{y}.$ 7. $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$ 8. $y = -\operatorname{ctg}^2(x/2) - 2\ln(\sin(x/2)).$ 9. $y = \sqrt{x} \arcsin e^{-2x} + \frac{4}{\cos x}.$ 10. $y = (x - \operatorname{arctg} x) \ln(1+t^2).$ 11. $y = 4^{\ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{x})} + \sqrt{x^2 - 4x}.$ 12. $y = \ln(3x^2 + \sqrt{4x^2 - 1}).$	3. $y = 1/\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \sin x^2.$ 4. $y = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(2x-1)).$ 5. $\begin{cases} y = 3\sin t - \sin 3t; \\ x = 3\cos t + \cos 3t. \end{cases}$ 6. $y = \ln(\cos x) + \sqrt{1 + \cos^2 x}.$ 7. $y = 2^{\operatorname{arctg}(x + \sqrt{x+1})}.$ 8. $y = \ln\left(x/\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)\right) - (\sin x)/x.$ 9. $y = \arcsin(\sqrt{\sin x}).$ 10. $x^2 + y^2 - \operatorname{tg}(xy) + 3 = 0.$ 11. $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x + e^{-x}}.$ 12. $y = \arcsin e^x + \arcsin \sqrt{1 + e^x}.$
<p style="text-align: center;">Вариант 5</p> 1. $y = \sqrt[3]{\sin x} + \sin^3(1-2x).$ 2. $y = \ln\left(x^2/\sqrt{1-x^4}\right).$ 3. $y = (x/2)\sqrt{9-x^2} + (9/2)\arcsin(x/3).$ 4. $y = \ln(1/\cos x + \operatorname{tg} x).$ 5. $\begin{cases} y = e^t \sin 2t; \\ x = e^t \cos 2t. \end{cases}$ 6. $y = e^{\sqrt[3]{2x}}(\sin 3x - 2/\sqrt{x}).$	<p style="text-align: center;">Вариант 6</p> 1. $y = \ln(\cos x + 1/\operatorname{tg}^2 x).$ 2. $y = 2x \cdot \operatorname{tg} 2x + \ln(\cos 2x) - 2x^2.$ 3. $y = \ln((2 + \operatorname{tg} x)/(2 - \operatorname{tg} x)).$ 4. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 2.$ 5. $\begin{cases} y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t; \\ x = 2 \ln(\operatorname{ctg} t). \end{cases}$ 6. $y = (1/2) \ln(\operatorname{tg} x) + \ln(\cos x).$ 7. $y = (\sin x)/(1 + \ln(\cos x)).$

<p>7. $y = (\cos 2x)^{\sqrt{x} + \sin x}$.</p> <p>8. $y = \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$.</p> <p>9. $\operatorname{arctg}(y/x) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.</p> <p>10. $y = \ln \operatorname{tg}(x/2) + \cos x + (1/3) \cos^3 x$.</p> <p>11. $y = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - (\sqrt{2x-1})/2$.</p> <p>12. $y = \log_2 \left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1} \right)$.</p>	<p>8. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.</p> <p>9. $y = \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^{\operatorname{arcsin} x}$.</p> <p>10. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x - 0,5 \ln(1 + x^2)$.</p> <p>11. $y = \operatorname{arcsin} \sqrt{(1-x)/(1+x)}$.</p> <p>12. $y = 2 \ln(x^2 + 5) - \sqrt{5} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{5})$.</p>
<p>Вариант 7</p> <p>1. $y = \sqrt[4]{\log_5(x^2 + 4) - 21x^3}$.</p> <p>2. $y = (\operatorname{arcsin}^3(e^{3x} + e^{-3x})) \times \ln \sqrt[7]{x+2}$.</p> <p>3. $y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x - x}}{\sqrt{x^5 - 4x + 15}}$.</p> <p>4. $y = (\cos(12x - 1) - 12)^{8x-12}$.</p> <p>5. $y = x \operatorname{ctg}^3(x/3) - 7 \operatorname{arccos}(x/7)$.</p> <p>6. $\operatorname{arctg} y + 25xy - \lg(x^3 + 2) = 11$.</p> <p>7. $y = \sin \sqrt{1 + x^2}$.</p> <p>8. $y = x - \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsin} x$.</p> <p>9. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$.</p>	<p>Вариант 8</p> <p>1. $y = \ln^4 \sin x$.</p> <p>2. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.</p> <p>3. $y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$.</p> <p>4. $y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$.</p> <p>5. $y = e^x \sin x \cos^3 x$.</p> <p>6. $2^{\sin x} + 2^{\sin y} = 2^{x+y}$.</p> <p>7. $y = x - \ln(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$.</p> <p>8. $y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$.</p> <p>9. $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.</p>

10. $\begin{cases} x = (t+1)/t; \\ y = (t-1)/t. \end{cases}$ 11. $y = 1/\left(x - \sqrt{9+x^2}\right).$ 12. $y = tg \frac{1-e^x}{1+e^x}.$	10. $\begin{cases} x = \sqrt[4]{t}(1 - \sin t); \\ y = t \cos^2 t. \end{cases}$ 11. $y = e^{\sqrt{\ln(7x^2+3x+1)}}.$ 12. $y = arctg\left(x - \sqrt{1+x^2}\right).$
<p style="text-align: center;">Вариант 9</p> 1. $y = \sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}.$ 2. $y = \log_2(\log_3(\log_5 x)).$ 3. $y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} +$ $+ 2arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$ 4. $y = \ln\left(x \sin x \sqrt{1-x^2}\right).$ 5. $y = \left(\sqrt{x} + 1/\sqrt{x}\right)^{10}.$ 6. $y = 2(\arccos(x/2))^{\sqrt{1-x^2}}.$ 7. $y = \sin^2((1 - \ln x)/x).$ 8. $x^y = y^x.$ 9. $y = x\sqrt{1+x^2} \sin x.$ 10. $\begin{cases} x = 2^{t^3 \ln t}; \\ y = (1/4)(t^8 - ctg 2t). \end{cases}$ 11. $y = x \arcsin \ln x.$ 12. $y = \cos^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$	<p style="text-align: center;">Вариант 10</p> 1. $y = (\sin^2 x + 1)^4.$ 2. $y = \arccos \frac{2+3 \cos x}{3+2 \cos x}.$ 3. $y = \ln \sin \sqrt[3]{arctg e^{3x}}.$ 4. $y = x^2 \sqrt{1+\sqrt{x}}.$ 5. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} +$ $+ 2 \arcsin((x+1)/\sqrt{2}).$ 6. $y = (1/3) \cos^3 x + x e^{y-6}.$ 7. $y = \frac{x}{1+8x^3} + arctg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} +$ $+ \frac{1}{12} \ln \frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2}.$ 8. $y = (1/x^2 + 1)^{\sqrt[7]{\sin 7x}}.$ 9. $y = \sqrt{1+tg(x+1/x)}.$ 10. $y = tg(\cos x) \cdot \sin^2(\cos x).$ 11. $\begin{cases} x = tg^2 t; \\ y = \sin 2t/(2 \cos 2t). \end{cases}$ 12. $y = \lg(1-2\sqrt{x})^4.$

5.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ТА ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

1 Контрольна робота призначена для перевірки вміння знаходити нескладні границі за правилом Лопітала та досліджувати дробово-раціональну функцію. Робота розрахована на 60 хвилин.

1. Знайти границі, використовуючи правило Лопітала.

2. Для заданої функції знайти:

а) інтервали монотонності, екстремуми;

б) інтервали опуклості та впуклості, точки перегину.

3. Скласти для заданої функції рівняння всіх існуючих асимптот.

4. Знайти найбільше і найменше значення даної функції на заданому відрізьку.

<p style="text-align: center;">Варіант 1</p> <p>1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x + \operatorname{tg} 5x}$;</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{3/x}$.</p> <p>2. $y = -x^3 + 9x^2 + 8$.</p> <p>3. $y = x^2 / (x^2 - 4)$.</p> <p>4. $y = x^2 + 16/x - 12$, $[1; 4]$.</p>	<p style="text-align: center;">Варіант 2</p> <p>1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$;</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1 + x))^{\operatorname{tg} x}$.</p> <p>2. $y = x^3 - 12x + 13$.</p> <p>3. $y = x^3 / (3x - x^2)$.</p> <p>4. $y = xe^{2x}$, $[-1; 1]$.</p>
<p style="text-align: center;">Варіант 3</p> <p>1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x^2}{1 - \cos x}$;</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x^2}$.</p>	<p style="text-align: center;">Варіант 4</p> <p>1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} 2x}$;</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos x)^{1/x}$.</p>

2. $y = x^3 / 3 + 1,5x^2 - 4x + 1$. 3. $y = (2x^3 + 1) / (x^2 - 1)$. 4. $y = 2\sqrt{x} - x + 4$, $[0; 4]$.	2. $y = 0,5x^4 - x^2 + 2,7$. 3. $y = x^2 / (x - 2)$. 4. $y = x - 4\sqrt{x} + 2$, $[1; 9]$.
<p style="text-align: center;">Вариант 5</p> 1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^3 + \operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{tg} x}$. 2. $y = 2x^5 - 5x^4$. 3. $y = (2x - 1) / (x - 1)^2$. 4. $y = \log_2(x^2 + 4x + 8)$, $[-4; 0]$.	<p style="text-align: center;">Вариант 6</p> 1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 4x}{\cos x - e^x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{1/x^2}$. 2. $y = x^3 / 3 + 0,5x^2 - 6x$. 3. $y = (3 - x^2) / (x + 2)$. 4. $y = \ln(x^3 - 3x + 18)$, $[-2; 0]$.
<p style="text-align: center;">Вариант 7</p> 1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{1/\operatorname{ctg} x}$. 2. $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 4$. 3. $y = 4(x - 1)^2 / x^2$. 4. $y = x^2 e^{1+x}$, $[-1; 1]$.	<p style="text-align: center;">Вариант 8</p> 1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\arcsin x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (x + \ln x)^{1/\ln x}$. 2. $y = 3x^4 + 4x^3 - 12$. 3. $y = 8x / (x - 2)^2$. 4. $y = x^4 - 0,5x^2$, $[-1; 0]$.

Варіант 9	Варіант 10
1. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin(x+1)}{x^2 - 1}$;	1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x/2)}{\sin^2 2x}$;
б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x+1))^{1/\ln 2x}$.	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2)^{1/\ln x}$.
2. $y = x^3 - x^2 - x - 4$.	2. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$.
3. $y = x^3 / (x-3)^2$.	3. $y = x^4 / (1+x)^4$.
4. $y = -x^2 / 2 + 8/x + 10$, [−4; −1].	4. $y = (3-x)e^{-x}$, [0; 5].

2

Контрольна робота призначена для перевірки вміння досліджувати трансцендентну функцію, використовувати похідну для розв'язання різноманітних задач. Робота розрахована на дві академічні години.

- 1, 2. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталю.
3. Для заданої функції визначити інтервали монотонності, знайти точки екстремумів, якщо вони існують.
4. Для заданої функції визначити інтервали опуклості та угнутості, знайти точки перегину, якщо вони є.
5. Записати для заданої функції рівняння всіх асимптот, які має ця функція.
6. Знайти найбільше та найменше значення даної функції на заданому відрізку.
7. Розв'язати задачу.

Варіант 1	Варіант 2
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{3x \sin 2x}$.	1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{1 - \cos 5x}$.

<p>2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{tg} x)^{1/\sin x}$.</p> <p>3. $y = (3x^5 + 1)/x^3$.</p> <p>4. $y = -5x^3 + 6x^2 - 12$.</p> <p>5. $y = -e^{-2(x-1)}/(2(x-1))$.</p> <p>6. $y = e^{6x-x^2}$, $[-3; 3]$.</p> <p>7. Записати рівняння дотичної до кола, що задане параметричним рівнянням</p> $\begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad \text{у точці з параметром } t_0 = \pi/4.$	<p>2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{ctg}(\pi/2+x)}$.</p> <p>3. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$.</p> <p>4. $y = (1/3)x^3 + 3,5x^2 - 10x - 1/3$.</p> <p>5. $y = e^{2(x+1)}/(2(x+1))$.</p> <p>6. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$; $[0; 3]$.</p> <p>7. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 5x + 8$, у якій дотична перпендикулярна до прямої $x - y + 16 = 0$.</p>
<p style="text-align: center;">Варіант 3</p> <p>1.</p> $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2\sqrt{x-2} + \sin \pi x}{9 - x^2}.$ <p>2. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin x)^{1/\ln x}$.</p> <p>3. $y = -(1/3)x^3 + 2,5x^2 - 4x + 1/3$.</p> <p>4. $y = 8x^2 - 1/x$.</p> <p>5. $y = x/\sqrt[3]{(x-2)^2}$.</p> <p>6. $y = (x+2)e^{1-x}$; $[-2; 2]$.</p> <p>7. Знайти точку на кривій $y = 3x^2 - 5x + 8$, у якій дотична паралельна до прямої $x - y + 16 = 0$.</p>	<p style="text-align: center;">Варіант 4</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \operatorname{tg} 6x}{\arcsin(x/2)}$.</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(\cos x))^x$.</p> <p>3. $y = e^x/(8 - x^2)$.</p> <p>4. $y = 0,4x^5 - 0,5x^2 + 2,7$.</p> <p>5. $y = 2 \ln((x-3)/x) - 3$.</p> <p>6. $y = x^3/(9 - x^2)$, $[-2; 2]$.</p> <p>7. Знайти точку на кривій $y = 4x^2 - 10x + 7$, у якій дотична паралельна прямій $6x - y + 11 = 0$.</p>

<p style="text-align: center;">Варіант 5</p> <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^3}{\sin^2 3x}.$ $\lim_{x \rightarrow 0} (tgx)^{\sin x}.$ $y = \sqrt{x}/(x+9).$ $y = x^4 - x^3.$ $y = (5x^3 + 6)/(x^2 + 5x + 6).$ $y = (1 + \ln x)/x, [e^{-1}; e^3].$ Знайти точку на кривій $y = x^2/4 - 7x + 6$, у якій дотична паралельна прямій $2x - y + 6 = 0$. 	<p style="text-align: center;">Варіант 6</p> <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \sin 2x}{tgx - x}.$ $\lim_{x \rightarrow 0} (ctgx)^{\sin x}.$ $y = e^{x-3}/(x-3).$ $y = -(1/6)x^3 - (1/4)x^2 + x + 4.$ $y = (x-1)^3/(x-2)^2.$ $y = e^{4x-x^2}, [1; 3].$ Знайти точку на кривій $y = x^4/4 + 9$, у якій дотична паралельна прямій $8x + y + 12 = 0$.
<p style="text-align: center;">Варіант 7</p> <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}}{x^2 - 1 + \sin \pi x}.$ $\lim_{x \rightarrow 0} (tg(\pi/4 + x))^{1/x}.$ $y = (x-8)\sqrt{x}.$ $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 6.$ $y = (2x+5)e^{-2(x+2)}.$ $y = x \ln x, [e^{-2}; 1].$ Знайти точку на кривій $y = x^3/3 - (5/2)x + 7x - 3$, у якій дотична утворює з віссю 	<p style="text-align: center;">Варіант 8</p> <ol style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x + x}{\sin 4x}.$ $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{ctgx}.$ $y = (1 - x^2)/(9 - x^2).$ $y = x^4 + (5/3)x^3 - x^2 + 2/3.$ $y = (x^2 + 16)/\sqrt{9x^2 - 8}.$ $y = (e^{2x} + 1)/e^x, [-1; 2].$ З'ясувати, у якій точці на кривій $y = 7x^2 - 5x - 8$

Ox кут $\pi/4$.	нормаль паралельна до прямої $x + 23y + 4 = 0$.
<p>Варіант 9</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{x-8} - 4 \cos x}{8x}$.</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{1/\operatorname{tg} x}$.</p> <p>3. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$.</p> <p>4. $y = (1/3)x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.</p> <p>5. $y = \frac{x^3 - 6x + 10}{x(2x+1)}$.</p> <p>6. $y = (\ln x)/x$, $[1; 4]$.</p> <p>7. Знайти точку на параболі $y^2 = 8x$, у якій дотична перпендикулярна до прямої $y = (1/4)x + 6$.</p>	<p>Варіант 10</p> <p>1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sin(7/6x))$.</p> <p>2. $\lim_{x \rightarrow 1} (\cos(\pi x/2))^{\sin(\pi x)}$.</p> <p>3. $y = x^2 - 2 \ln x$.</p> <p>4. $y = (x^3 - 3x + 13)/3$.</p> <p>5. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.</p> <p>6. $y = (x-2)e^x$, $[-2; 1]$.</p> <p>7. Знайти точку на кривій $y = -x^2 + 7x - 15$, у якій нормаль перпендикулярна до прямої $y - 3x + 6 = 0$.</p>

ЗМІСТ

1. ВИЗНАЧНИКИ, МАТРИЦІ, СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.....	4
2. ВЕКТОРИ.....	12
3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.....	24
3.1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ.....	24
3.2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ.....	37
4. ГРАНИЦІ.....	45
5. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ. ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ.....	53
5.1. ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ.....	53
5.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ТА ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ.....	62

Навчальне видання

**ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ ТА КОНТРОЛЬНИХ
РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Частина 1

Укладачі: Анна Олександрівна Володченко
Ганна Анатоліївна Кузнецова
Світлана Миколаївна Ламтюгова

Відповідальний за випуск: С.О. Станішевський

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009 р., поз. 191М

Підп. до друку 2.10.2009 р. Формат 60*84 1/16 Папір офісний
Друк на ризографі Умовн.-друк.арк. 4 Обл.-вид. арк. 4,2
Тираж 50 прим. Зам. №

61002, Харків, ХНАМГ, вул.Революції,12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, Харків, ХНАМГ, вул.Революції,12