

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА



Я.Б. Форкун,  
В.П. Самошкін,  
Г.В. Капустін

## **ТЕКСТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ**

### **«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»**

ЧАСТИНА II

(для студентів усіх форм навчання напрямів  
6.050701 - "Електротехніка та електротехнології",  
6.050702 - "Електромеханіка")

Харків - 2009

Текст лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки". Частина II (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 – "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 – "Електромеханіка") / Укл.: Форкун Я.Б, Самошкін В.П., Капустін Г.В. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 87 с.

**Укладачі:** доц., к.т.н. Я.Б. Форкун,  
доц., к.т.н. В.П. Самошкін,  
доц., к.т.н. Г.В. Капустін,

**Рецензент:** проф., д.т.н. А.Г. Сосков

**Рекомендовано кафедрою теоретичної та загальної електротехніки,  
протокол № 01 від 04.09. 2009 р.**

## Зміст

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП   | 5  |
| РОЗДІЛ 1. НЕСИНУСОЇДНІ ПЕРІОДИЧНІ СТРУМИ Й НАПРУГИ<br>У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ                  | 6  |
| 1.1. Визначення періодичних несинусоїдних струмів та напруг   | 6  |
| 1.2. Зображення несинусоїдних струмів і напруг за допомогою<br>рядів Фур'є                          | 8  |
| 1.3. Деякі властивості періодичних кривих, що мають симетрію  | 10 |
| 1.4. Розкладання у ряд Фур'є кривих неправильної геометричної форми                                 | 11 |
| 1.5. Порядок розрахунку електричних кіл з несинусоїдними<br>джерелами енергії                       | 14 |
| 1.6. Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл   | 15 |
| 1.7. Резонансні явища при несинусоїдних струмах та напругах   | 15 |
| 1.8. Діючі та середні за модулем значення несинусоїдних функцій                                     | 16 |
| 1.9. Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних<br>періодичних кривих                       | 17 |
| 1.10. Величини, на які реагують амперметри та вольтметри різних<br>систем при несинусоїдних струмах | 18 |
| 1.11. Потужності в колах несинусоїдного струму  | 18 |
| 1.12. Заміна несинусоїдних струмів та напруг еквівалентними синусоїдами                             | 19 |
| 1.13. Вищі гармоніки в трифазних колах  | 20 |
| 1.14 Особливості роботи трифазних систем, що були викликані гармоніками,<br>кратними трьом          | 22 |
| 1.15. Несинусоїдні криві з періодичною обвідною. Биття  | 26 |
| 1.16. Модульовані коливання   | 27 |
| Контрольні запитання  | 29 |
| РОЗДІЛ 2. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ  | 30 |
| 2.1 Визначення перехідних процесів  | 30 |
| 2.2. Закони комутації   | 31 |
| 2.3. Класичний метод розрахунку перехідних процесів   | 32 |
| 2.4. Незалежні й залежні початкові умови  | 33 |
| 2.5. Методи складання характеристичного рівняння  | 34 |
| 2.6. Визначення ступеня характеристичного рівняння  | 36 |
| 2.7. Властивості коренів характеристичного рівняння   | 37 |
| 2.8. Характер вільного процесу залежно від коренів<br>характеристичного рівняння                    | 37 |

|   |    |
|---|----|
| 2.9. Визначення постійних інтегрування в класичному методі  | 40 |
| 2.10. Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом  | 41 |
| 2.11. Деякі особливості перехідних процесів   | 42 |
| 2.12. Деякі задачі, пов'язані з перехідними процесами, які зустрічаються в електротехнічній практиці  | 42 |
| 2.13. Операторний метод розрахунку перехідних процесів  | 52 |
| 2.14. Зображення деяких простих функцій   | 53 |
| 2.15. Деякі теореми і граничні співвідношення   | 56 |
| 2.16. Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі   | 56 |
| 2.17. Послідовність розрахунку операторним методом  | 58 |
| 2.18. Формула розкладання   | 58 |
| 2.19. Розрахунок перехідних процесів в колах зі взаємною індуктивністю                                | 61 |
| 2.20. Перехідна провідність. Перехідна функція за напругою  | 62 |
| 2.21. Інтеграл Дюамеля  | 62 |
| 2.22. Послідовність розрахунку за допомогою інтеграла Дюамеля   | 63 |
| 2.23. Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів  | 64 |
| Контрольні запитання  | 64 |
| РОЗДІЛ 3. НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА   | 65 |
| 3.1. Загальні відомості й класифікація  | 65 |
| 3.2. Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму          | 66 |
| 3.3. Послідовне з'єднання нелінійних елементів  | 66 |
| 3.4. Паралельне з'єднання нелінійних елементів  | 67 |
| 3.5. Змішане (послідовно-паралельне) з'єднання нелінійних елементів                                   | 68 |
| 3.6. Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами  | 69 |
| 3.7. Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора                                      | 70 |
| 3.8. Статичний і диференціальний опір   | 71 |
| 3.9. Заміна нелінійного елемента лінійним опором і <i>EPC</i>   | 72 |
| 3.10. Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму                                   | 72 |
| 3.11. Магнітні кола при постійному струмі (поточі). Основні поняття і закони магнітних кіл            | 74 |
| 3.12. Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму                                    | 76 |
| 3.13. Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму                                      | 78 |
| 3.14. Нелінійні електричні кола змінного струму. Властивості нелінійних елементів при змінному струмі | 79 |
| 3.15. Апроксимація нелінійних вольт-амперних характеристик  | 80 |
| Контрольні запитання  | 84 |
| ПІСЛЯМОВА   | 85 |
| РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА  | 86 |

## Вступ

Електротехнікою називається широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) – дисципліна, яка займається питаннями розрахунку й вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

**Метою дисципліни** є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

### **Завдання дисципліни:**

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл і співвідношенням між електричними величинами в електричних та магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;
- навчити теорії та методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного і несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії і методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії і методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами;
- ознайомити з основними законами і методами розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму.

**Предметом** вивчення дисципліни є основні закони теорії електричних кіл, теорії електромагнітного поля та оволодіння навичками їх практичного застосування для дослідження і розрахунків сучасних електротехнічних пристроїв.

Вивчення курсу "Теоретичні основи електротехніки" потребує знання курсів фізики, а саме розділу "Електрика та магнетизм", математики, передусім розділів: системи лінійних алгебраїчних рівнянь, теорія матриць, похідна та інтеграл, диференціальні рівняння, функціональні ряди, інтегральні перетворення Лапласа, векторна алгебра. Теоретичні положення курсу засвоюються ґрунтовно тільки тоді, коли вони використані для вирішення конкретних задач. Саме тому в тексті лекцій для кращого засвоєння теоретичного матеріалу наведено ряд розв'язаних прикладів.

Текст лекцій призначений для студентів, які навчаються за напрямками 6.050701 - "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 - "Електромеханіка".

## Розділ 1. Несинусоїдні періодичні струми й напруги в лінійних електричних колах

### 1.1. Визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг

Раніше (I частина ТОЕ) розглядалися лінійні кола з незмінними параметрами активного опору ( $R$ ), індуктивності ( $L$ ), ємності ( $C$ ) та взаємодуктивності ( $M$ ) при дії джерел постійних або синусоїдних  $EPC$  і струмів. Але на практиці  $EPC$ , напруги й струми відрізняються від постійних або синусоїдних, причому їх залежність від часу може бути періодичною, майже періодичною та неперіодичною. Так у машинних генераторах змінного струму внаслідок відмінності кривої розподілу магнітної індукції вздовж зазору від синусоїди криві  $EPC$ , які наводяться в обмотках, відрізняється від синусоїдних.

*Періодичними несинусоїдними* струмами й напругами називають струми й напруги, які змінюються в часі за періодичним несинусоїдним законом.

Розглянемо режими роботи кіл, які призводять до їх появи:

1. Джерела  $EPC$  (або струму) дають несинусоїдну  $EPC$  (струм), а всі елементи кола ( $R, L, C, M$ ) – лінійні елементи (їх величини від струму не залежать).

Так у різних пристроях радіотехніки, автоматики, телемеханіки, обчислювальної техніки застосовують генератори періодичних імпульсів. При цьому форма імпульсів може бути різною (прямокутною, трапецієподібною, ступінчастою тощо – рис. 1.1). Під час проходження цих імпульсів по електричних колах їх форма суттєво змінюється.

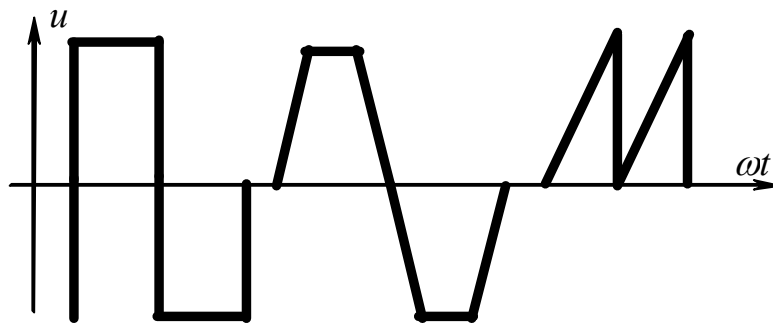


Рис. 1.1 – Приклади періодичних несинусоїдних кривих напруги  $u(\omega t)$

2. Джерело  $EPC$  (струму) дає синусоїдну  $EPC$  (струм), але один чи кілька елементів кола – нелінійні.

Приклад можна розглянути схему однофазного однопівперіодного випрямляча (рис. 1.2,а). У цьому колі діод – нелінійний елемент. Часові діаграми роботи цього пристрою наведено на рис. 1.2,б. Випрямлений струм  $i_d(t)$  й випрямлена напруга  $u_d(t)$  на опорі навантаження  $R_n$  є несинусоїдними й періодичними.

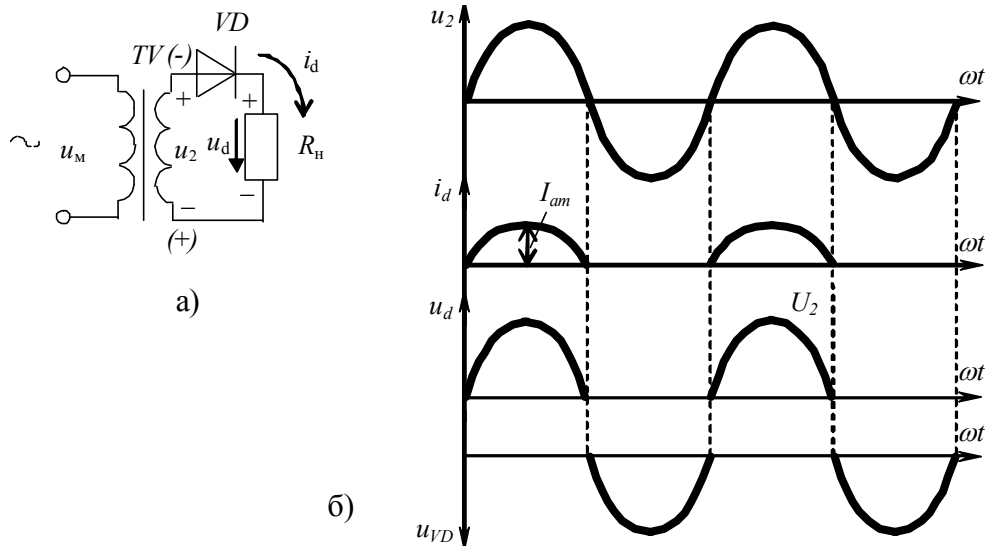


Рис. 1.2

Ще один приклад отримання несинусоїдного періодичного струму в колі з синусоїдним джерелом енергії – схема з котушкою з феромагнітним осердям (рис. 1.3). Струм в цьому випадку має приблизно форму, що зображена на рис. 1.4.

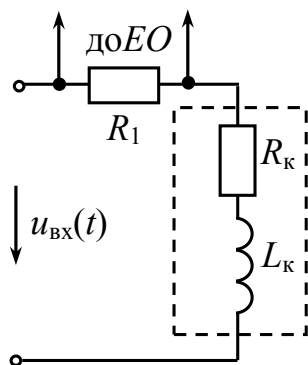


Рис. 1.3

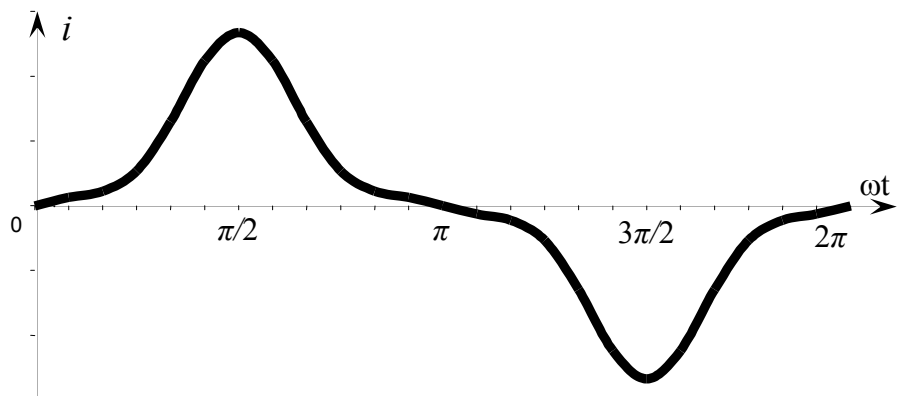


Рис. 1.4

3. Сукупність 1 і 2 режимів.

4. Якщо джерело *EPC*(струму) дає постійну або синусоїдну *EPC* (струм), а один або декілька елементів кола періодично змінюються у часі.

В усіх задачах, де доводиться мати справу зі складними несинусоїдними кривими струмів і напруг, важливо вміти звести складну задачу до більш простої та застосувати методи розрахунку простих задач.

У цьому розділі розглядаються методи розрахунку лінійних кіл при несинусоїдних періодичних або майже періодичних струмах і напругах, які можна розкласти на гармонійні складові.

## 1.2. Зображення несинусоїдних струмів та напруг за допомогою рядів Фур'є

Як відомо, будь-яку періодичну функцію  $f(x)$  з періодом  $2\pi$ , яка задовольняє умові Діріхле (тобто, яка має на всякому інтервалі кінцеве число розривів першого роду та кінцеве число максимумів та мінімумів) може бути розкладена у нескінченний тригонометричний ряд. При цьому змінна  $x$  зв'язана з часом  $t$  співвідношенням  $x = \omega t = \frac{2\pi \cdot t}{T}$ , де  $T$  – період функції у часі (тобто період функції за  $x$  дорівнює « $2\pi$ », а за часом період тієї ж функції дорівнює « $T$ »). Таким чином:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(2)''} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(k)'} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)''} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + \dots, \quad (1.1)$$

$$\text{де } A^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t - \text{ нульова гармоніка (чи постійна складова);} \quad (1.2)$$

$$A_1' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin \omega t d\omega t - \text{ амплітуда синусної складової першої гармоніки;} \quad (1.3)$$

$$A_1'' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos \omega t d\omega t - \text{ амплітуда косинусної складової першої гармоніки;} \quad (1.4)$$

$$A_m^{(k)'} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \cdot \omega t) d\omega t - \text{ амплітуда синусної складової гармоніки з номером } k; \quad (1.5)$$

$$A_m^{(k)''} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \cdot \omega t) d\omega t - \text{ амплітуда косинусної складової гармоніки з номером } k. \quad (1.6)$$

Інакше вираз (1.1) може бути записаний так:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \cdot \sin(k \cdot \omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k'' \cdot \cos(k \cdot \omega t). \quad (1.7)$$

Частіше ряд Фур'є записують у вигляді суми нульової гармоніки та синусоїдних складових з ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi^{(k)}), \quad (1.8)$$

$$\text{де } A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)'}^2 + A_m^{(k)''}^2}; \varphi^{(k)} = \arctg \frac{A_m^{(k)''}}{A_m^{(k)'}} - \text{ амплітуда та початкова фаза гармоніки з номером «} k \text{»}. \quad (1.9)$$

При розгляданні цієї теми ми будемо говорити, що гармоніки бувають та-



кими: нульова, перша (основна) та вищі (з номерами 2, 3, 4 і т.д.). Крім того, якщо  $k=1, 3, 5\ldots$  – це непарні гармоніки, а якщо  $k=2, 4, 6\ldots$  – це парні гармоніки.

*Приклад.*

Крива напруги має в своєму складі 3 гармонічні складові:

$$u(\omega t) = 100 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \cos(\omega t) + 30 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) - 15 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + 8 \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + 12 \cdot \cos(5 \cdot \omega t), \text{ В.} \quad (1.10)$$

Представимо ряд Фур'є у вигляді суми синусних складових з ненульовими початковими фазами.

Відповідно до формул (1.8) та (1.9) визначимо амплітуди та початкові фази синусних складових першої, третьої та п'ятої гармонік.

$$A_m^{(1)} = \sqrt{A_m^{(1)/2} + A_m^{(1)//2}} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 127 \text{ В; } \varphi^{(1)} = \arctg \frac{80}{100} = 38,66^\circ;$$

$$A_m^{(3)} = \sqrt{A_m^{(3)/2} + A_m^{(3)//2}} = \sqrt{30^2 + 15^2} = 34,7 \text{ В; } \varphi^{(3)} = \arctg \frac{-15}{30} = -26,6^\circ;$$

$$A_m^{(5)} = \sqrt{A_m^{(5)/2} + A_m^{(5)//2}} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14,4 \text{ В; } \varphi^{(5)} = \arctg \frac{12}{8} = 56,3^\circ.$$

Таким чином ряд Фур'є матиме вигляд

$$u(\omega t) = 127 \cdot \sin(\omega t + 38,66^\circ) + 34,7 \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 26,6^\circ) + 14,4 \cdot \sin(5 \cdot \omega t + 56,3^\circ), \text{ В.} \quad (1.11)$$

Крива, що відповідає цьому ряду – рис. 1.5.

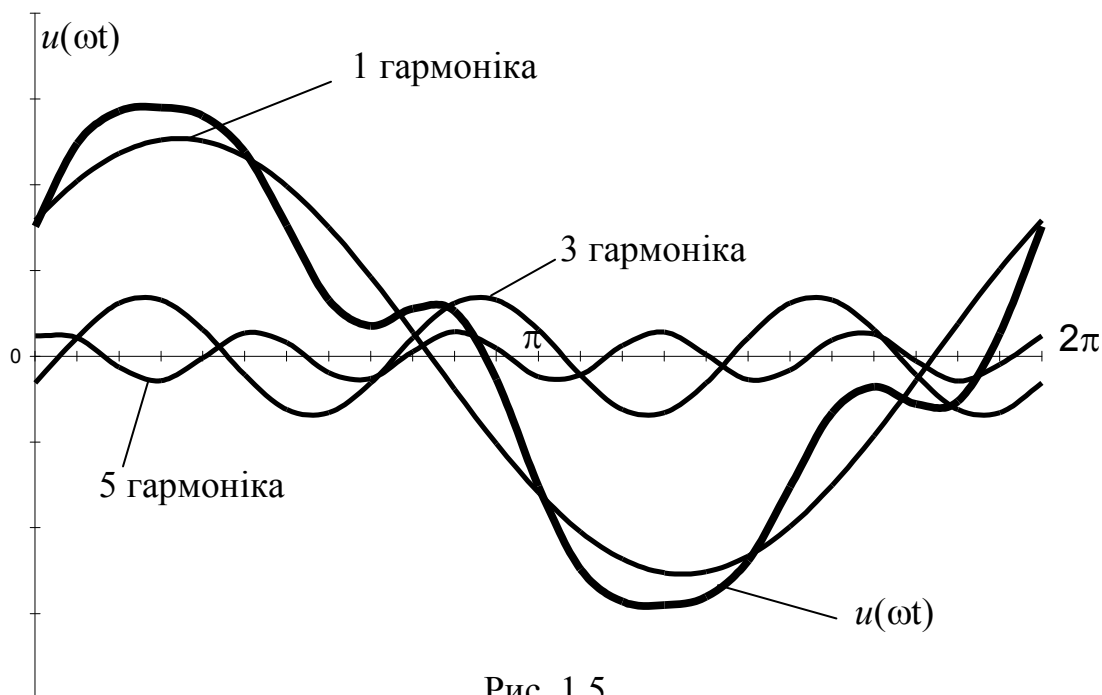


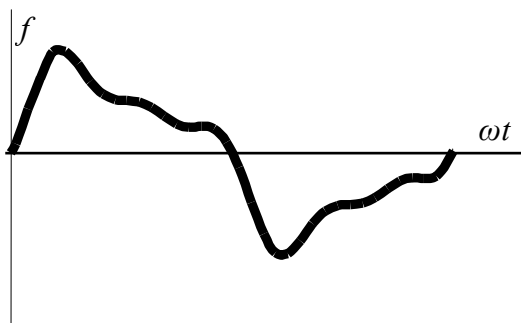
Рис. 1.5

### 1.3. Деякі властивості періодичних кривих, які мають симетрію

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші види симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо деякі гармоніки виключаються з ряду. Розглянемо це детальніше.

1. Крива симетрична відносно вісі абсцис (рис. 1.6), тобто задовольняє умові:  $f(\omega t + \pi) = f(\omega t)$ .

При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є нульова і парні гармоніки дорівнюють 0:  $A_0 = A_2' = A_2'' = A_4' = A_4'' = \dots = 0$ , а сам ряд має вигляд

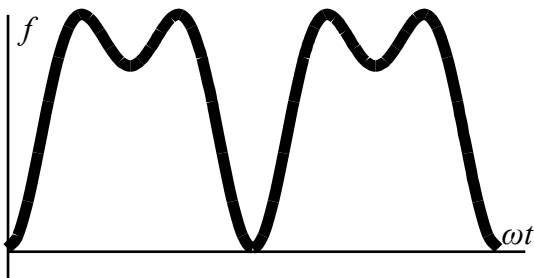


$$\begin{aligned} f(\omega t) = & A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + \\ & + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \\ & + A_m^{(5)'} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + A_m^{(5)''} \cdot \cos(5 \cdot \omega t) + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Рис. 1.6

2. Крива симетрична відносно вісі ординат (рис. 1.7), тобто задовольняє умові:  $f(\omega t) = f(-\omega t)$ .

При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є відсутні синусні складові, тобто  $A_1' = A_2' = A_3' = \dots = 0$ , а сам ряд Фур'є має вигляд:



$$\begin{aligned} f(\omega t) = & A_0 + A_1'' \cdot \cos(\omega t) + \\ & + A_2'' \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_3'' \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Рис. 1.7

3. Крива симетрична відносно початку координат (рис. 1.8), тобто задовольняє умові  $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ . Такий ряд Фур'є не містить нульову та косинусні складові, тобто:  $A_0 = A_1'' = A_2'' = A_3'' = \dots = 0$ , і має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots \quad (1.14)$$

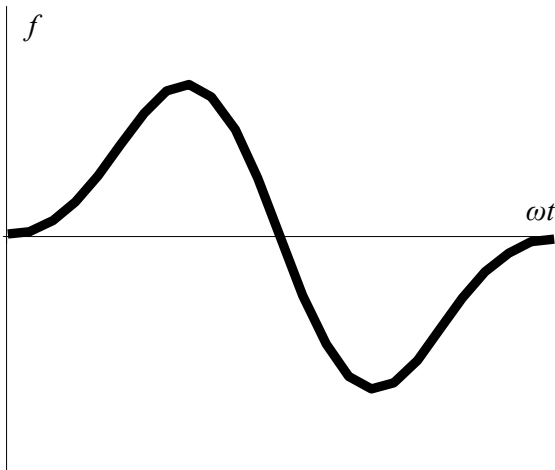


Рис. 1.8

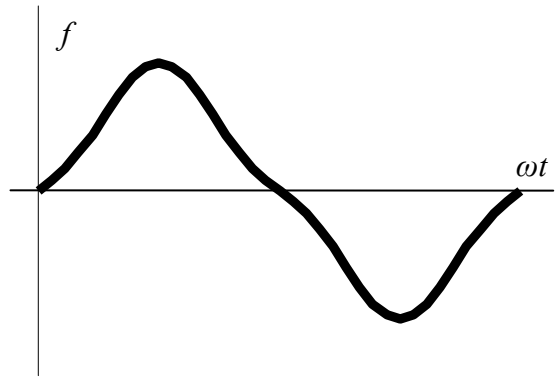


Рис. 1.9

4. Крива одночасно симетрична відносно вісі абсцис та початку координат (рис. 1.9), тобто задовольняє умовам:  $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ ,  $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ .

Такий ряд Фур'є містить лише непарні синусні гармоніки і має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots \quad (1.15)$$

Перед тим як розкласти криву у ряд Фур'є треба подивитися якими видам симетрії вона задовольняє та виключити ті чи інші гармоніки.

Усі періодичні криві, які зустрічаються в електротехніці можна розділити на 2 групи.

1 група – періодичні криві геометрично правильної форми (трапеції, трикутники, прямокутники і т.д.); їх розкладання у ряд Фур'є наведено у довідниках.

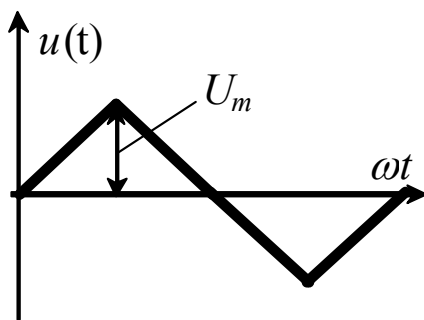


Рис. 1.10

Так, наприклад, якщо періодична крива напруги (рис. 1.10) має форму трикутника, то ряд Фур'є, що відповідає такій формі (обмежимося трьома членами ряду) має вигляд:

$$u(\omega t) = \frac{8 \cdot U_m}{\pi^2} \cdot \left( \sin(\omega t) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\omega t) - \dots \right), \text{ В.}$$

2 група – криві довільної геометрично неправильної форми. Вони розкладаються у ряд Фур'є графоаналітичним методом.

#### 1.4. Розклад у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми

Криві довільної геометрично неправильної форми мають бути представлені у вигляді графіка. Графоаналітичний метод, який застосовують для розкладання таких кривих у ряд Фур'є, заснований на заміні визначених інтегралів (1.2, 1.5, 1.6) сумою кінцевого числа складових. Для цього період функції  $2\pi$

поділяється на  $n$  рівних інтервалів, кожний інтервал можна визначити так:

$$d\omega t \rightarrow \Delta\omega t = \frac{2 \cdot \pi}{n}. \text{ Отже}$$

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left( f_p(\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t). \quad (1.16)$$

де  $f_p(\omega t)$  – значення функцій  $f(\omega t)$  в середині  $p$  інтервала, тобто при значенні  $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$ ,

$p$  – поточний індекс.

Амплітуди синусної і косинусної складових  $k$ -ї гармоніки відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} A_m^{(k)'} &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t); \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} A_m^{(k)''} &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left( f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)), \end{aligned} \quad (1.18)$$

де  $\sin_p(k \omega t)$  і  $\cos_p(k \omega t)$  - значення функцій  $\sin(k \omega t)$ ,  $\cos(k \omega t)$  у середині  $p$ -го інтервалу.

Звичайно період ділять на  $n = 24$  частин ( $\Delta\omega t = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$  рад).

Розглянемо приклад графоаналітичного розкладання кривої  $f(\omega t)$  в ряд Фур'є (рис. 1.11). Слід врахувати, що крива має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис), отже можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме:  $f(\omega t) = A_{1m}' \cdot \sin \omega t + A_{3m}' \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_{5m}' \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + \dots$  (обмежуємося трьома членами ряду). Знайдемо амплітуди  $A_{1m}', A_{3m}', A_{5m}'$ .

Розділимо чверть періоду кривої  $f(\omega t)$  на шість рівних частин і виміряємо ординати функції  $f(\omega t)$  посередині кожної ділянки, яка становить  $15^\circ$ . Результати розкладання, яке проводять за наведеною вище методикою, подані в табл. 1.1.

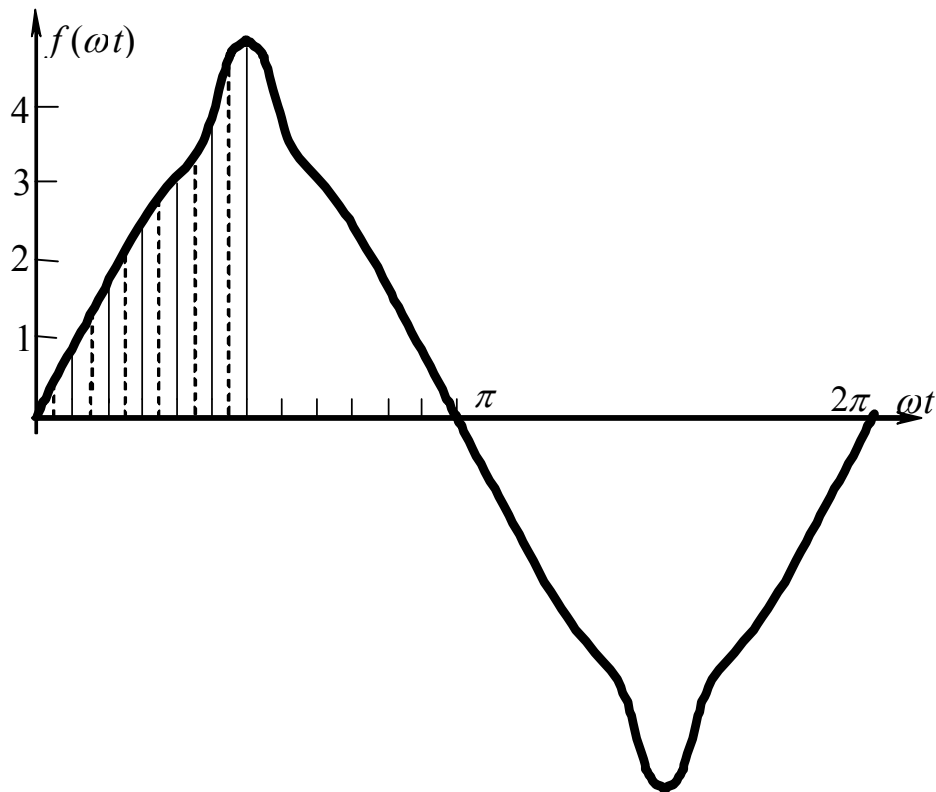


Рис. 1.11

Таблиця 1.1 - Результати розкладання кривої  $f(\omega t)$  в ряд Фур'є

| $n$ | $f(\alpha t)$ | $\alpha t$ | $\sin \alpha t$ | $f(\alpha t) \sin \alpha t$ | $3\alpha t$ | $\sin \alpha t$ | $f(\alpha t) \sin 3\alpha t$ | $5\alpha t$ | $\sin 5\alpha t$ | $f(\alpha t) \sin 5\alpha t$ |
|-----|---------------|------------|-----------------|-----------------------------|-------------|-----------------|------------------------------|-------------|------------------|------------------------------|
| 1   | 2             | 3          | 4               | 5                           | 6           | 7               | 8                            | 9           | 10               | 11                           |
| 1   | 0,5           | 7,5°       | 0,13            | 0,0665                      | 22,5        | 0,382           | 0,191                        | 37,5        | 0,608            | 0,304                        |
| 2   | 1,2           | 22,5°      | 0,382           | 0,46                        | 67,5        | 0,924           | 1,108                        | 112,5       | 0,923            | 1,1                          |
| 3   | 2,1           | 37,5°      | 0,608           | 1,27                        | 112,5       | 0,924           | 1,94                         | 187,5       | -0,13            | -0,273                       |
| 4   | 2,8           | 52,5°      | 0,793           | 2,22                        | 157,5       | 0,382           | 1,07                         | 262,5       | -0,99            | -2,77                        |
| 5   | 3,3           | 67,5°      | 0,924           | 3,05                        | 202,5       | -0,382          | -1,26                        | 337,5       | -0,382           | -1,26                        |
| 6   | 4,7           | 82,5°      | 0,991           | 4,6                         | 247,5       | -0,923          | -4,34                        | 412,5       | 0,79             | 3,72                         |

$$\sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin \omega t = 11,66 \quad \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 3\omega t = -1,29 \quad \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 5\omega t = 0,821$$

Амплітуди синусних гармонік з номерами 1, 3, 5 відповідно :

$$A'_{1m} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot 11,66 = \frac{1}{3} \cdot 11,66 = 3,88; \quad A'_{3m} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot (-1,29) = \frac{1}{3} \cdot (-1,29) = -0,43;$$

$$A'_{5m} = \frac{1}{3} \cdot 0,821 = 0,247 \text{ (коефіцієнт «4» застосовуємо тому, що розкладаємо тіль-}$$

ки  $\frac{1}{4}$  періоду, а для отримання кінцевого результату помножимо відповідне значення  $\left[ \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)) \right]$  на «4»).

Таким чином, ряд Фур'є  $f(\omega t)$  має вигляд

$$f(\omega t) = 3,88 \cdot \sin(\omega t) - 0,43 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 0,247 \cdot \sin(5 \cdot \omega t).$$

### 1.5. Порядок розрахунку електричного кола з несинусоїдними джерелами енергії

1. Представимо несинусоїдну  $EPC$  тригонометричним рядом Фур'є. Припустимо, що ряд Фур'є має вигляд

$$e(\omega t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + 20^\circ) + E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 45^\circ), \text{ В.}$$

Умовно розглянемо несинусоїдну  $EPC$   $e(\omega t)$  як послідовне з'єднання постійної  $EPC$   $E^{(0)}$  і трьох синусоїдних  $EPC$ , а саме  $e^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + 20^\circ)$ ,  $e^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t)$ ,  $e^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 45^\circ)$  -  
рис. 1.12.

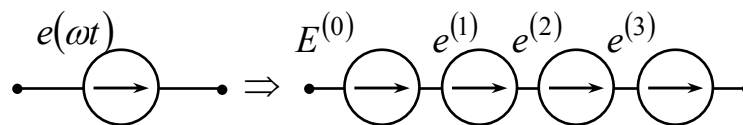


Рис. 1.12

2. Запишемо комплексні амплітуди  $EPC$  гармонік з номерами 1, 2, 3:

$$\underline{E}_m^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot e^{j \cdot 20^\circ}; \quad \underline{E}_m^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}; \quad \underline{E}_m^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}, \text{ В.}$$

3. Визначимо активні й комплексні опори віток для окремих гармонік.

При цьому треба врахувати, що реактивні опори залежать від номеру гармоніки, тобто індуктивний і ємнісний опори для гармоніки з номером « $k$ » визначаються так:

$$x_L^{(k)} = k \cdot x_L^{(1)} = k \cdot \omega \cdot L. \quad (1.19)$$

$$x_C^{(k)} = \frac{x_C^{(1)}}{k} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C}. \quad (1.20)$$

*Приклад.*

Якщо  $x_L^{(1)} = 10$  Ом, то  $x_L^{(3)} = 10 \cdot 3 = 30$  Ом; а якщо  $x_C^{(1)} = 50$  Ом, то

$x_C^{(5)} = \frac{50}{5} = 10$  Ом. Таким чином, з ростом номера гармоніки індуктивний опір

збільшується, а ємнісний зменшується пропорційно.

Комплексний опір вітки, що містить активний опір, індуктивність та ємності, дорівнює:

$$\underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left( k \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} \right) = R + j \cdot \left( k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right). \quad (1.21)$$

4. Розраховуємо струми від дії нульової гармоніки несинусоїдної ЕРС -  $I_n^{(0)}$ ; потім визначаємо комплексні амплітуди струмів від дії 1-ої, 2-ої і т.д. гармонік несинусоїдної ЕРС -  $\underline{I}_{mn}^{(1)}, \underline{I}_{mn}^{(2)}, \underline{I}_{mn}^{(3)}$ , де « $n$ » - номер вітки.

Таким чином, зрозуміло, що основний метод розрахунку електричних кіл з несинусоїдними періодичними джерелами енергії – метод накладання.

5. За комплексними амплітудами записуємо миттєві значення струмів окремих гармонік –  $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, i_n^{(3)}$ .

6. Записуємо ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді суми окремих гармонік, наприклад, для вітки з номером: « $n$ » несинусоїдний струм у загальному вигляді матиме вигляд  $i_n(\omega t) = I_n^{(0)} + i_n^{(1)} + i_n^{(2)} + i_n^{(3)}$ .

## 1.6. Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл

1. Додавання різнойменних гармонік струмів або напруг за комплексним методом не можливе, тому що кутові швидкості обертання векторів різних гармонік неоднакові.

2. Фізичний сенс нульової гармоніки напруги чи струму – це постійна напруга чи струм. Тому падіння напруги на індуктивності від нульової гармоніки струму дорівнює нулю:  $x_L^{(0)} = 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot L = 0$ , нульова гармоніка струму через конденсатор дорівнює нулю:  $x_C^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty \Rightarrow I^{(0)} = 0$ .

3. Вважають, що величина активного опору не залежить від частоти. Хоча, строго кажучи, величина активного опору залежить від частоти  $f$  внаслідок появи поверхнього ефекту.

## 1.7. Резонансні явища при несинусоїдних струмах і напругах

Як відомо, *резонансним режимом* роботи електричного кола, в якому є одна чи декілька індуктивностей і одна чи декілька ємностей, називають такий режим його роботи, за якого струм на вході цього кола співпадає за фазою з діючою на вході ЕРС. Якщо діюча на вході ЕРС не синусоїдна, то в електрично-

му колі можуть виникати резонансні режими (резонанси струмів або напруг) на будь якій гармоніці.

Нехай на вході схеми рис. 1. 13 діє джерело несинусоїдної *EPC*:

$$e(t) = E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + \varphi^{(1)}) + E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + E_m^{(5)} \cdot \sin(5 \cdot \omega t + \varphi^{(5)}) \quad (1.22)$$

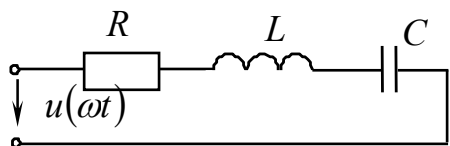


Рис. 1.13

Індуктивний і ємнісний опори дорівнюють:

$$x_L^{(1)} = 50 \text{ Ом}; \quad x_C^{(1)} = 450 \text{ Ом}.$$

Тоді для першої гармоніки:

$$x^{(1)} = x_L^{(1)} - x_C^{(1)} = 50 - 450 = -400 \neq 0.$$

Для третьої гармоніки:  $x^{(3)} = x_L^{(3)} - x_C^{(3)} = 3 \cdot 50 - \frac{450}{3} = 0$  – має місце резонанс напруг.

$$\text{Для п'ятої гармоніки: } x^{(5)} = x_L^{(5)} - x_C^{(5)} = 5 \cdot 50 - \frac{450}{5} = 250 - 90 \neq 0.$$

Висновок: при виникненні резонансного й близького до нього режиму на будь-якій вищій гармоніці, струми і (або) напруги цієї гармоніки можуть виявитися більшими ніж струми і (або) напруги першої гармоніки, навіть якщо амплітуда вищої гармоніки *EPC* на вході схеми в декілька разів менша ніж амплітуда першої гармоніки.

### 1.8. Діючі й середні за модулем значення несинусоїдних функцій

За означенням діюче значення:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}, \quad (1.23)$$

$$\text{де } i = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \sin(k \cdot \omega t + \psi^{(k)}) - \text{несинусоїдний струм.} \quad (1.24)$$

Якщо у рівняння (1.23) підставити вираз (1.24), то отримаємо:

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \sum_{k=1}^n I_m^{(k)2}} = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(2)2} + \dots + I^{(k)2} + \dots}, \quad (1.25)$$

$$\text{де } \frac{I_m^{(k)}}{\sqrt{2}} = I^{(k)} - \text{діюче значення струму гармоніки з номером «k»}.$$

Таким чином, діюче значення несинусоїдної величини не залежить від початкових фаз окремих гармонік.



Аналогічно, для напруги

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)2}} = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(2)2} + \dots} \quad (1.26)$$

Приклад.

На вході двополюсника несинусоїдні напруга і струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 100 + 80 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ) + 60 \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 20^\circ) + 50 \cdot \sin(5 \cdot \omega t + 45^\circ), \text{ В};$$

$$i(\omega t) = 33,3 + 17,87 \cdot \sin(\omega t - 18^\circ) + 5,59 \cdot \sin(5 \cdot \omega t + 120^\circ), \text{ А}.$$

Знайдемо їх діючі значення:

$$I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,87^2}{2} + \frac{5,59^2}{2}} = 35,6 \text{ А}.$$

$$U = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 127,1 \text{ В}.$$

Середнє за модулем значення несинусоїдного струму визначають так:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |i(\omega t)| d\omega t. \quad (1.27)$$

### 1.9. Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних періодичних кривих

Несинусоїдні криві, яким відповідає певна несинусоїдна функція, характеризують наступними коефіцієнтами:

- коефіцієнтом форми кривої  $K_\phi$ , який визначається як співвідношення

діючого значення до середнього за модулем значення, а саме  $K_\phi = \frac{A}{A_{\text{сеп}}}$  (для

синусоїди  $K_\phi = \frac{A}{A_{\text{сеп}}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1,11$ );

- коефіцієнтом амплітуди, який дорівнює відношенню максимального

значення до діючого значення несинусоїдної функції, а саме  $K_a = \frac{a_{\text{max}}}{A}$  (для си-

нусоїди  $K_a = \sqrt{2}$ );




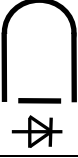
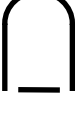
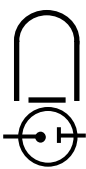
- коефіцієнтом викривлення, який визначають як відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення усієї несинусоїдної функції,

в яку входить і перша гармоніка, а саме  $K_\epsilon = \frac{A^{(1)}}{A}$ .

### 1.10. Величини, на які реагують амперметри й вольтметри різних систем при несинусоїдних струмах

Несинусоїдні струми й напруги вимірюють приладами різних систем, принцип дії яких розглядається в курсі «Основи метрології та електричних вимірів». Наведена нижче таблиця показує, на які величини реагують вольтметри й амперметри різних систем.

Таблиця 1.2

| № | Системи приладів                           | Умовні позначення   | Величина, на яку реагує прилад |
|---|--|---|--------------------------------|
| 1 | Електродинамічна                           |    | Діюча                          |
| 2 | Електромагнітна                            |    | Діюча                          |
| 3 | Теплова                                    |    | Діюча                          |
| 4 | Магнітоелектрична система з випрямлячем    |  | Середнє за модулем значення    |
| 5 | Магнітоелектрична система з рухомою рамкою |  | Постійна складова              |
| 6 | Амплітудні електронні прилади              |  | Максимальне значення           |

### 1.11. Потужності в колах несинусоїдного струму

*Активна потужність несинусоїдного струму* – це середнє значення миттєвої потужності за період першої гармоніки:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u \cdot i) dt. \quad (1.28)$$

Підставимо у (1.28) наступні формули:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_u^{(k)}), \quad (1.29)$$

$$i(t) = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_i^{(k)}). \quad (1.30)$$

Розрахувавши визначений інтеграл (1.28), отримаємо:

$$P = U_0 \cdot I_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = U_0 \cdot I_0 + U^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + U^{(2)} \cdot I^{(2)} \cdot \cos \varphi^{(2)} + \dots, \quad (1.31)$$

де  $U^{(k)}, I^{(k)}, \varphi^{(k)}$  – відповідно діючі значення несинусоїдної напруги і струму  $k$ -ї гармоніки;

$\varphi^{(k)} = \varphi_u^{(k)} - \varphi_i^{(k)}$  – кут зсуву фаз між несинусоїдною напругою і струмом  $k$ -ї гармоніки.

Таким чином, активна потужність несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік.

Аналогічно для *реактивної потужності*:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)}. \quad (1.32)$$

*Повна потужність*  $S$  дорівнює добутку діючого значення несинусоїдної напруги й діючого значення несинусоїдного струму.

$$S = U \cdot I. \quad (1.33)$$

Кола несинусоїдного струму також характеризують *потужністю викривлення*  $T$ , коефіцієнтом викривлення  $K_T$ :

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}, \text{ ВА}; \quad (1.34)$$

$$K_T = \frac{T}{S}. \quad (1.35)$$

Відношення активної потужності до повної називають *коефіцієнтом потужності*, його прирівнюють до косинусу деякого умовного кута  $\varphi$ :

$$X = \frac{P}{S} = \cos \varphi. \quad (1.36)$$

## 1.12. Заміна несинусоїдних струмів і напруг еквівалентними синусоїдами

Несинусоїдні струми й напруги, які не містять постійних складових, можуть бути замінені еквівалентними синусоїдами. Заміну проводять таким чином, що діюче значення синусоїдного струму приймають рівним діючому значенню несинусоїдного струму, який заміняють (аналогічно – для напруги).

Кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами напруги та струму беруть таким чином, щоб активна потужність еквівалентного синусоїдного струму до-

рівнювала активній потужності несинусоїдного струму:  $\cos \varphi_9 = \frac{P}{S}$ .

*Приклад.* Несинусоїдні напруга й струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 26 \cdot \sin(\omega t - 11^\circ) + 6 \cdot \sin(3\omega t + 54^\circ),$$

$$i(\omega t) = 3 \cdot \sin(\omega t - 40^\circ) + 1,27 \cdot \sin(3\omega t + 17^\circ).$$

Розглянемо порядок заміни несинусоїдних струму  $i(\omega t)$  і напруги  $u(\omega t)$  еквівалентними синусоїдами.

1. Визначаємо діючі значення струму і напруги:

$$U = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( U_m^{(1)^2} + U_m^{(3)^2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (26^2 + 6^2)} = 18,87 \text{ В},$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left( I_m^{(1)^2} + I_m^{(3)^2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (3^2 + 1,27^2)} = 2,3 \text{ А}.$$

2. Визначаємо активну потужність:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \cos(\varphi_u^{(1)} - \varphi_i^{(1)}) + \frac{1}{2} \cdot U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \cos(\varphi_u^{(3)} - \varphi_i^{(3)}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 3 \cdot \cos(-11^\circ - (-40^\circ)) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,27 \cdot \cos(54^\circ - 17^\circ) = 34,11 + 3,04 = 37,15 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

3. Визначаємо кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами:

$$\cos \varphi_{екв} = \frac{P}{S} = \frac{37,15}{18,87 \cdot 2,3} = 0,856 \Rightarrow \varphi_{екв} = 31,1^\circ.$$

4. Записуємо еквівалентні синусоїди напруги і струму:

$$u_{екв} = 18,87 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) = 26,69 \cdot \sin(\omega t),$$

$$i_{екв} = 2,3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t \pm 31,1^\circ) = 3,25 \cdot \sin(\omega t \pm 31,1^\circ).$$

Знак «+», або «-» початкової фази струму залежить від характеру кола (активно-ємнісний, або активно-індуктивний).

### 1.13. Вищі гармоніки в трифазних колах

*ЕРС* всіх фаз трифазного трансформатора або трифазного генератора часто виявляється несинусоїдною. Кожна *ЕРС* ( $e_A, e_B, e_C$ ) повторює за формою інші із зсувом на одну третину періоду ( $T/3$ ) і може бути розкладена на гармоніки. Запишемо для гармоніки з номером « $k$ » миттєве значення *ЕРС* фази  $A$ :

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \omega t + \varphi^{(k)}). \quad (1.37)$$

Оскільки *ЕРС* фази *В* відстає від *ЕРС* фази *А* на  $T/3$ , а *ЕРС* фази *С* випереджає *ЕРС* фази *А* на  $T/3$ , то для гармоніки з номером «*k*» *ЕРС* фаз *В* і *С* відповідно дорівнюють:

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right), \quad (1.38)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right). \quad (1.39)$$

Примітка:  $k \cdot \omega \cdot \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} = 120^\circ \cdot k$ .

Якщо  $\varphi^{(k)} = 0$ , то

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \quad (1.40)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

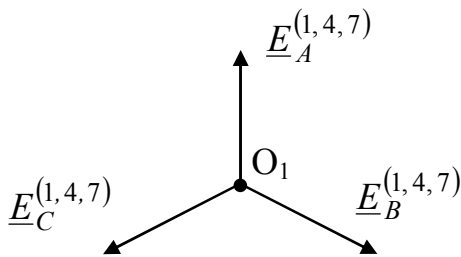


Рис. 1.13

Гармоніки з номерами  $k=1, 4, 7, 10, \dots$  складають так звану пряму послідовність чергування фаз. Для цих гармонік *ЕРС* фази *В* відстає від *ЕРС* фази *А*, а *ЕРС* фази *С* випереджає *ЕРС* фази *А* на  $120^\circ$  (векторна діаграма – рис. 1.13).

Припустимо, номер гармоніки  $k = 4$ , тоді

$$e_A^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin(4 \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 2 \cdot \pi - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \quad (1.41)$$

$$e_C^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Гармоніки з номерами  $k=2, 5, 8, \dots$  складають так звану зворотну послідовність чергування фаз. Для цих гармонік *ЕРС* фази *В* випереджає *ЕРС* фази *А*, а

$EPC$  фази  $C$  відстає від  $EPC$  фази  $A$  на  $120^\circ$  (векторна діаграма – на рис. 1.14).

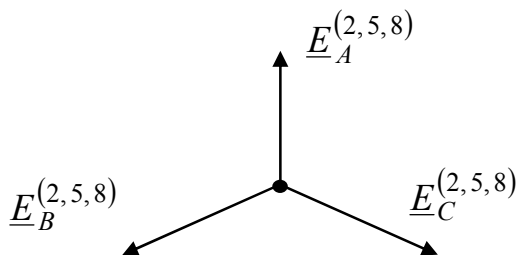


Рис. 1.14

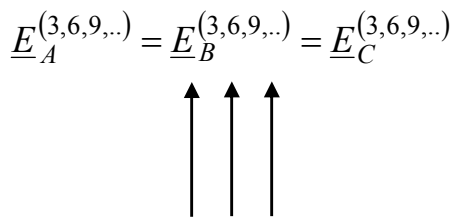


Рис. 1.15

Припустимо, номер гармоніки  $k = 2$ , тоді

$$\begin{aligned} e_A^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t), \\ e_B^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t - 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \\ e_C^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Гармоніки з номерами  $k = 3, 6, 9, \dots$  (кратні трьом) утворюють нульову послідовність чергування фаз, для якої початкові фази  $EPC$  всіх фаз однакові (векторна діаграма – рис. 1.15). Припустимо, номер гармоніки  $k = 3$ , тоді

$$\begin{aligned} e_A^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t); \\ e_B^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 120^\circ \cdot 3) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t); \\ e_C^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 120^\circ \cdot 3) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t). \end{aligned} \quad (1.43)$$

#### 1.14. Особливості роботи трифазних систем, що були викликані гармоніками, кратними трьом

Розглянемо деякі особливості розрахунку трифазних кіл, пов'язані з наявністю в гармонічному складі фазних  $EPC$  гармонік, кратних трьом.

1. Нехай обмотки трифазного генератора з'єднані відкритим трикутником (рис. 1.16). Якщо у фазних  $EPC$  присутні гармоніки, кратні трьом, то на затискачах « $n - B$ » буде напруга, діюче й миттєве значення якої

$$U_{nB} = 3 \cdot \sqrt{\frac{E_m^{(3)^2}}{2} + \frac{E_m^{(6)^2}}{2} + \frac{E_m^{(9)^2}}{2} \dots}, \quad (1.44)$$

$$u_{nB} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t + \varphi^{(6)}) + \dots \quad (1.45)$$

2. При з'єднанні обмоток генератора в закритий трикутник (рис. 1.17) по

них протікатимуть струми гармонік, кратних трьом

$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}^{(3k)}}, \quad (1.46)$$

де  $\underline{Z}_0^{(3k)}$  – опір обмотки кожної фази для гармоніки, кратної трьом,

$\underline{E}^{(3k)}$  – комплекс діючого значення гармоніки фазної ЕРС, кратної трьом.

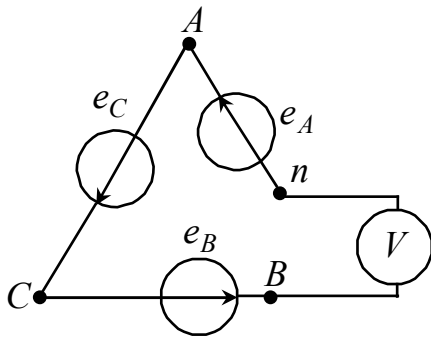


Рис. 1.16

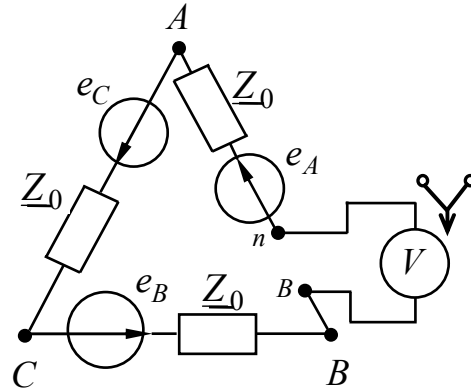


Рис. 1.17

Таким чином, діюче значення струму  $I = \sqrt{I^{(3)^2} + I^{(6)^2} + I^{(9)^2} + \dots}$ . (1.47)

3. Якщо обмотки генератора або трансформатора з'єднані в «зірку», в лінійній напрузі відсутні гармоніки, кратні трьом, оскільки  $\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0$  (аналогічно для  $\underline{U}_{BC}^{(3k)}$  і  $\underline{U}_{CA}^{(3k)}$ ).

Таким чином:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(4)^2} + \dots}. \quad (1.48)$$

Діюче значення фазної напруги:

$$U_\phi = \sqrt{U^{(1)^2} + U^{(2)^2} + U^{(3)^2} + U^{(4)^2} + \dots}. \quad (1.49)$$

Якщо у фазній напрузі присутні гармоніки, кратні трьом, то співвідношення  $\frac{U_L}{U_\phi} < \sqrt{3}$ , а якщо у фазній напрузі немає гармонік, кратних трьом, то

співвідношення  $\frac{U_L}{U_\phi} = \sqrt{3}$ .

4. З'єднання «зірка – зірка» без нульового проводу (навантаження симетричне й несиметричне) – на рис. 1.18.

При цьому струми гармонік, кратних трьом, відсутні, тому що інакше не виконуватиметься 1-й закон Кірхгофа, але при цьому між нульовими точками діятиме напруга зсуву нейтралі:

$$u_{010} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t) + E_m^{(9)} \cdot \sin(9 \cdot \omega t) \dots \quad (1.50)$$

Комплекс діючого значення цієї напруги для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} \cdot \underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{E}_B^{(3k)} \cdot \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{E}_C^{(3k)} \cdot \underline{Y}_C^{(3k)}}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}} = \underline{E}_\phi^{(3k)}. \quad (1.51)$$

де  $\underline{Y}_\phi^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}}$  – провідність фази для гармоніки, кратної трьом.

$\underline{Z}_\phi^{(3k)}$  – опір фази для гармоніки, що кратна трьом.

Тоді лінійні струми для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}} = 0. \quad (1.52)$$

При несиметричному навантаженні напруга зсуву нейтралі:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \underline{E}_\phi^{(3k)}. \quad (1.53)$$

Тоді лінійні струми для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = \frac{0}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = 0, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}} = 0, \quad (1.54)$$

$$\underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}} = 0.$$

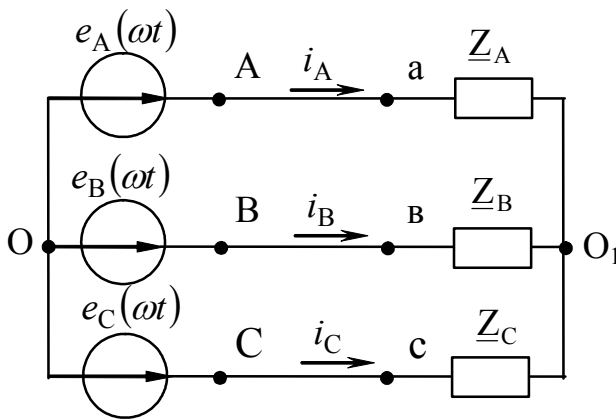


Рис. 1.18

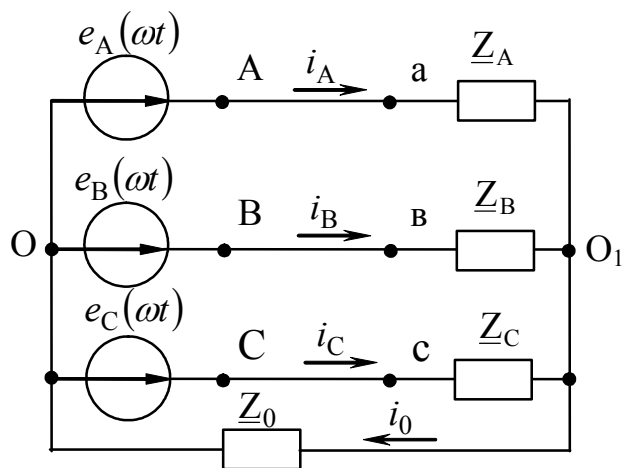


Рис. 1.19

Діюче значення напруги зсуву нейтралі:

$$U_{010} = \sqrt{\frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(6)2}}{2} + \frac{E_m^{(9)2}}{2} + \dots}, \quad (1.55)$$



5. Схема «зірка – зірка» з нульовим проводом при симетричному навантаженні і наявності опору в нульовому проводі (рис. 1.19).

По нульовому проводу протікатимуть струми гармонік, кратних трьом.

Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}, \quad (1.56)$$

де  $\underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_0^{(3k)}}$  – провідність опору  $\underline{Z}_0^{(3k)}$  в нульовому проводі для гармоніки, кратної трьом.

Струм нульового проводу:

$$\begin{aligned} \underline{I}_0^{(3k)} &= \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{U}_{010}^{(3k)} \cdot \underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}} \cdot \frac{1}{1/\underline{Y}_0^{(3k)}} = \\ &= \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Y}_0^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}\right) \cdot \frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}}} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)}}{\left(\frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}} + \frac{1}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}\right)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)} + \frac{\underline{Z}_\phi^{(3k)}}{3}}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{I}_0^{(3k)}}{3}. \quad (1.58)$$

6. Схема зірка – зірка з нульовим проводом при несиметричному навантаженні і наявності опору  $\underline{Z}_0$  у нульовому проводі (рис. 1.19).

Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}. \quad (1.59)$$

Струми знаходять так:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}}, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}}, \quad \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}}, \quad (1.60)$$

$$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{I}_A^{(3k)} + \underline{I}_B^{(3k)} + \underline{I}_C^{(3k)}. \quad (1.61)$$

### 1.15. Несинусоїдні криві з періодичною обвідною. Биття

Окрім несинусоїдних періодичних функцій, які розкладаються в тригонометричний ряд на гармонійні складові з частотами, кратними основній частоті, в електротехніці зустрічаються несинусоїдні криві з періодичними обвідними (ці криві також розкладаються на гармонійні складові). До числа явищ, які характеризуються такими кривими, відносяться биття і модуляції.

Коливальний процес, який виникає в результаті складання двох синусоїдальних коливань з рівними амплітудами і близькими, але не рівними частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , називається *биттям*:

$$f(t) = A_m \cdot (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t). \quad (1.62)$$

Припустимо  $\omega_1 > \omega_2$  ( $\omega_1 \approx \omega_2$ )

Скористаємося тригонометричним перетворенням

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (1.63)$$

Отримаємо

$$f(t) = 2 \cdot A_m \cdot \cos\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \cdot t\right) \cdot \sin\left(\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \cdot t\right). \quad (1.64)$$

Позначимо

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \text{ і } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (1.65)$$

Зрозуміло, що  $\Omega \ll \omega$ .

Тому, з урахуванням позначень (1.65), вважатимемо, що крива  $f(t)$  є синусоїдою з кутовою частотою, амплітуда якої змінюється за косинусоїдою із значно меншою кутовою частотою:

$$f(t) = \underbrace{2 A_m \cdot \cos(\Omega t)}_{\text{амплітуда}} \cdot \sin(\omega t). \quad (1.66)$$

Графік коливання, що відповідає рівнянню (1.66), зображений на рис.1.20, де позначено  $T = \frac{1}{f_\Omega} = \frac{\pi}{\Omega}$  – період биття, величина, зворотна частоті биття  $f_\Omega$ , що дорівнює числу максимумів обвідної кривої в одиницю часу.

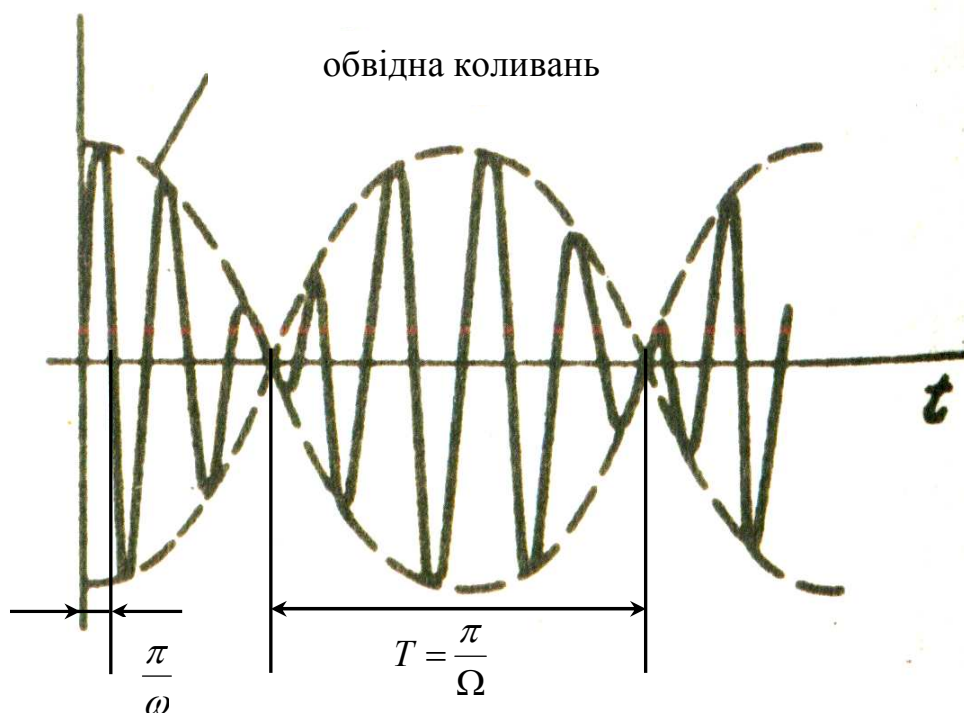


Рис. 1.20

### 1.16 Модульовані коливання

У радіотехніці широко застосовують модульовані коливання.

Модульованим коливанням називають таке коливання, в якому амплітуда  $A_m$ , частота  $\omega$ , початкова фаза  $\psi$  або і ті, й інші разом змінюються в часі. Зміна в часі одного з параметрів –  $A_m$ ,  $\omega$ , або  $\psi$ , називають модуляцією за цим параметром (модуляція буває амплітудною, частотною або фазовою):

$$f(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \psi). \quad (1.67)$$

Коливання, в яких змінюється тільки амплітуда ( $0 << A_m << \infty$ ) називають коливаннями, модульованими за амплітудою. Коливання, в яких змінюється тільки фаза, – це коливання, модульовані за фазою. Коливання, в яких змінюється тільки частота, – це коливання, модульовані за частотою.

Найпростіше амплітудно-модульоване коливання (АМ) – це коливання, в якому амплітуда модульована за законом синуса:

$$f(t) = A_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \Omega t) \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad (1.68)$$

де  $\omega$  – несуча частота,

$\Omega$  – модельюча частота ( $\Omega << \omega$ ),

$m$  – коефіцієнт модуляції (глибина), як правило,  $m < 1$ ; він характеризує ступінь відмінності максимальної і мінімальної амплітуди від середнього значення  $A_0$ .

Графік коливань, що відповідає рівнянню (1.68), зображений на рис. 1.21.

Амплітудна модуляція широко застосовується в радіомовленні й радіозв'язку, де несуча частота  $\omega$  – це частота радіозв'язку, а моделюючою частотою служить, наприклад, одна із звукових частот звуку, що передається.

При визначенні струмів і напруг в колах, схеми яких містять джерела ЕРС, модульовані за амплітудою, останні можуть бути розкладені на синусоїдні складові.

Скористаємося тригонометричним перетворенням:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta). \quad (1.69)$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cdot \sin(\omega t + \psi) + m \cdot A_0 \cdot \sin \overbrace{\Omega t}^{\beta} \cdot \sin \overbrace{(\omega t + \psi)}^{\alpha} = \\ &= A_0 \cdot \sin(\omega t + \psi) + \frac{m \cdot A_0}{2} \cdot [\cos(t \cdot (\omega - \Omega) + \psi) - \cos((\omega + \Omega) \cdot t + \psi)]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Тобто початкове коливання може бути представлено у вигляді суми трьох коливань.

Частоти  $(\omega - \Omega)$  і  $(\omega + \Omega)$  називають бічними частотами.

Розглянемо *приклад*.

Треба розкласти на гармонійні складові функцію

$$f(t) = 20 \cdot \left( 1 + 0,6 \cdot \sin \underbrace{1000 \cdot t}_{\Omega} \right) \cdot \sin \underbrace{10^5 t}_{\omega} \text{ відповідно до рівняння (1.70):}$$

Вирішення.

$$\omega - \Omega = 99 \cdot 10^3; \quad \omega + \Omega = 101 \cdot 10^3, \quad \frac{m \cdot A_0}{2} = \frac{0,6 \cdot 20}{2} = 6.$$

$$\text{Отже } f(t) = 20 \cdot \sin(10^5 \cdot t) + 6 \cdot \cos(99 \cdot 10^3 \cdot t) - 6 \cdot \cos(101 \cdot 10^3 \cdot t).$$

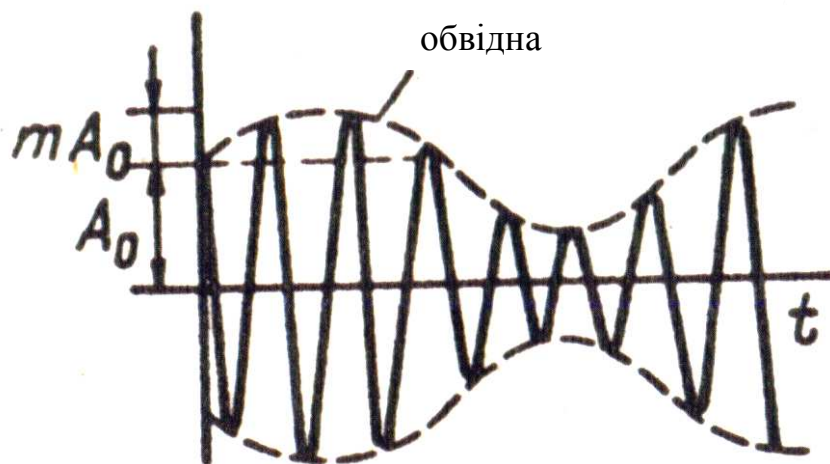


Рис. 1.21

### Контрольні запитання

- 1) Дайте визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг та вкажіть режими роботи електричних кіл, що призводять до виникнення несинусоїдних струмів і напруг.
- 2) Поясніть, як проводять розкладання в ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми.
- 3) Вкажіть особливості періодичних несинусоїдних кривих, що мають деякі види симетрії.
- 4) Дайте визначення середнього й діючого значень несинусоїдного струму і напруги.
- 5) Дайте визначення активної, реактивної, повної потужностей і потужності викривлення несинусоїдного струму.
- 6) Наведіть порядок розрахунку струмів і напруг у колах, де діють несинусоїдні джерела напруги або струму. Вкажіть особливості такого розрахунку.
- 7) Поясніть, як відбувається заміна несинусоїдних струмів і напруг еквівалентними синусоїдними.
- 8) Поясніть особливості резонансних явищ у колах несинусоїдного струму.
- 9) Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми „зірка-зірка” без нульового проводу (симетричне навантаження).
- 10) Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми „зірка-зірка” з нульовим проводом (несиметричне навантаження).
- 11) Дайте визначення несинусоїдних кривих з періодичною обвідною (биття та модульовані коливання).

## Розділ 2. Перехідні процеси в лінійних електричних колах

### 2.1. Визначення перехідних процесів

*Перехідний процес* – це процес переходу від одного до іншого режиму роботи кола, який будь-чим відрізняється від попереднього (амплітудою, фазою, частотою діючих у колі *ЕРС*, значеннями параметрів схеми). Перехідні процеси виникають в результаті різних комутацій.

*Комутація* – це розмикання або замикання ключів. На схемах це відображається так:



Рис. 2.1 – Приклади позначення ключів, що працюють на замикання і розмикання

Фізичне значення – перехід від енергетичного стану, відповідного режиму роботи кола до комутації, до енергетичного стану режиму кола після комутації. Якщо в колі є котушки індуктивності і (або) ємності, то такий перехід не може відбутися миттєво, оскільки миттєво не може змінитися енергія електричного і магнітного полів.

Перехідні процеси звичайно є швидкоплинними процесами (тривалість їх – десятки, соті, млрд. частки секунди). Але вивчення перехідних процесів є дуже важливим, оскільки дозволяє виявити можливі перевищення напруги на окремих ділянках кола, які можуть бути небезпечними для ізоляції установок; можливі збільшення амплітуд струмів, що іноді значно перевищують амплітуду струму сталого періодичного процесу. Сталими періодичними режимами є, як відомо, режим синусоїдального струму, режим постійного струму і режим відсутності струму у вітках кола.

Вивчення перехідних процесів також дає можливість встановити, як деформується за формою і амплітудою сигнали при проходженні через підсилювачі, фільтри та інші радіотехнічні пристрої.

Вирішити задачу з перехідного процесу – це знайти закон зміни  $i(t)$ , або  $u(t)$  на окремих ділянках кола. Так для схеми рис. 2.2, другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі при замиканні ключа має вигляд

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E. \quad (2.1)$$

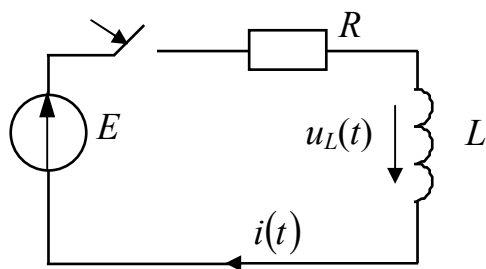


Рис. 2.2

Способи вирішення цього рівняння, тобто знаходження такої функції, яка задовольняє рівнянню (2.1), такі:

- класичний;
- операторний;
- за допомогою інтеграла Дюамеля.

Теоретично перехідний процес вважається нескінченним; момент комутації – це момент « $t = 0$ », момент безпосередньо перед комутацією – « $t = 0-$ »; а момент безпосередньо після комутації – « $t = 0+$ ».

## 2.2. Закони комутації

Перший закон комутації: в індуктивному елементі струм (і магнітний потік) безпосередньо після комутації, тобто у момент « $t = 0 +$ », зберігає значення, яке він мав безпосередньо перед комутацією, тобто у момент « $t = 0-$ », а далі починає змінюватися саме з цього значення:

$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$  - струм в індуктивному елементі стрибком змінюватися не може.

Припустимо, що це не так, і струм  $i(t)$ , який  $i$  є струмом в індуктивному елементі  $i_L(t)$ , в схемі рис. 2.2 зміниться стрибком. Тоді швидкість змінення струму  $\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) \cdot R + L \cdot \infty = E$ . (2.2)

З рівняння (2.2) виходить, що  $EPC$  повинна дорівнювати « $\infty$ », що не має фізичного сенсу, оскільки реальні джерела живлення не можуть мати нескінченно велику потужність.

Другий закон комутації: на ємнісному елементі напруга (і заряд) зберігає у момент комутації те значення, яке воно було безпосередньо перед комутацією і надалі починає змінюватися саме з цього значення.

$u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$  – напруга на ємності стрибком змінюватися не може.

Запишемо для схеми рис. 2.3 другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі:

$$i(t) \cdot R + u_C(t) = E, \quad (2.3)$$

$$\text{де } i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow \quad (2.4)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E. \quad (2.5)$$

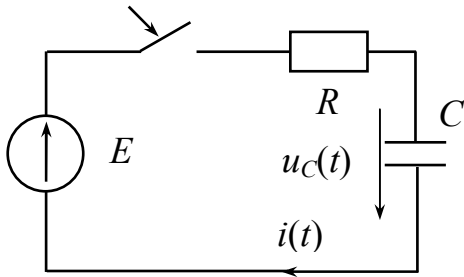


Рис. 2.3

Якщо напруга  $u_C(t)$  зміниться стрибком, то величина  $\frac{du_C(t)}{dt}$  повинна бути нескінченно великою, а отже

$$R \cdot C \cdot \infty + u_C(t) = E. \quad (2.6)$$

фізичного сенсу.

Це, як і в попередньому випадку не має

З енергетичного погляду неможливість миттєвої зміни струму  $i_L(t)$  і напруги  $u_C(t)$  пояснюється неможливістю стрибкоподібної зміни запасеної енергії магнітного поля  $\frac{L \cdot i^2}{2}$  в індуктивному елементі й енергії електричного поля

$$\frac{C \cdot u_C^2}{2} \text{ в ємності.}$$

### 2.3. Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Як відомо, рішенням лінійного неоднорідного диференційного рівняння першого порядку (ЛНДР) є сума часткового рішення неоднорідного рівняння і загального рішення однорідного рівняння (ЛОДР). ЛОДР, як відомо, отримуємо з ЛНДР, якщо праву частину останнього прирівнюємо до нуля.

Згідно з цим методом закон зміни струму (або напруги) розглядають як суму примусового ( $i_{np}$ ) і вільного ( $i_{\epsilon}$ ) струму (або напруги), тобто

$$i(t) = i_{np} + i_{\epsilon}; \quad u(t) = u_{np} + u_{\epsilon}. \quad (2.7)$$

Примусова складова – це частинне вирішення неоднорідного диференційного рівняння, або, якщо говорити з погляду електротехніки, – це значення струму або напруги в сталому режимі, тобто в припущенні, що перехідний процес повністю завершився ( $t \rightarrow \infty$ ) і його можна не брати до уваги.

Вільна складова – загальне вирішення однорідного рівняння (термін «вільна» означає, що ця складова є вирішенням рівняння, вільного від примусової сили). Її вигляд залежить від коренів характеристичного рівняння.

Повний струм – це той струм, який насправді тече у вітці при перехідному процесі, а примусова і вільна складові дають дійсну величину струму (аналогічно для напруги).



Приклад. Для схеми на рис. 2.2  $i_{np} = \frac{E}{R}$  ( $E = const$ ), а рішенням ЛОДР

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ є показова функція виду } A \cdot e^{pt}.$$

Для даного випадку:

$p = -\frac{R}{L}$  – так званий коефіцієнт згасання, чим він більше, тим швидше встановлюється примусовий режим;

$A = -\frac{E}{R}$  – так звана постійна складова; щоб знайти  $A$ , необхідно мати значення  $i(t)$  у будь-який момент часу (для даного прикладу за першим законом комутації -  $i(0) = 0$ ).

$A, p$  – незалежні від часу числа.

Таким чином:

$$i(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{pt} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}. \quad (2.8)$$

Підставимо (2.8) у (2.1):

$$\left( \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \cdot R + L \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) = E - E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + L \cdot \left( -\frac{E}{R} \right) \cdot \left( -\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} =$$
$$= E - E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = E \Rightarrow \text{рівняння (2.8) – виявляється рішенням (2.1).}$$

Робимо висновок: класичний метод полягає в інтегруванні диференціальних рівнянь, які зв'язують струми і напруги кола, внаслідок чого з'являються постійні інтегрування, і в подальшому визначенні цих постійних за допомогою початкових умов, що впливають із законів комутації.

## 2.4. Незалежні й залежні початкові умови

Під початковими умовами розуміють значення величин струмів і напруг в момент  $t = 0$ .

*Незалежні початкові умови* (Н.П.У.) – це значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах, які відомі з режиму до комутації і стрибком змінюватися не можуть (відповідно до законів комутації). Значення інших струмів і напруг називають залежними початковими умовами. Крім того, початкові умови можуть бути нульовими і ненульовими.

Нульові початкові умови мають місце в схемі, якщо на початку перехід-

ного процесу всі струми і напруги на пасивних елементах схеми дорівнюють нулю (для схем на рис. 2.1 і рис. 2.2 -  $i(0)=0$ ;  $u_C(0)=0$ ).

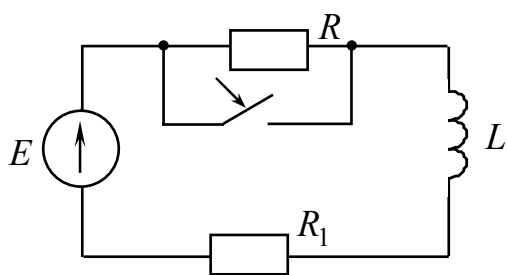


Рис. 2.4

Приклад ненульових початкових умов – рис. 2.4, а саме незалежна початкова умова в даному випадку  $i_L(0) = \frac{E}{R + R_1}$ .

Залежні початкові умови (З.П.У.) знаходять шляхом складання рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації та моменту часу  $t = 0$ . Для тієї ж схеми на рис. 2.4:

$$i_L(0) \cdot R_1 + u_L(0) = E \Rightarrow u_L(0) = E - \frac{E}{R + R_1} \cdot R_1 - \text{це і є залежна початкова умова.}$$

Висновок: після вивчення розділів 2.1-2.4 відомо, як знаходять залежні й незалежні початкові умови і як визначають зі схеми після комутації примусові складові. Таким чином, тепер треба розглянути, як у класичному методі знаходять вільні складові струмів і напруг. Для цього, як побачимо далі, необхідно скласти характеристичне рівняння.

## 2.5. Методи складання характеристичного рівняння

1. Метод *головного визначника* для отримання характеристичного рівняння.

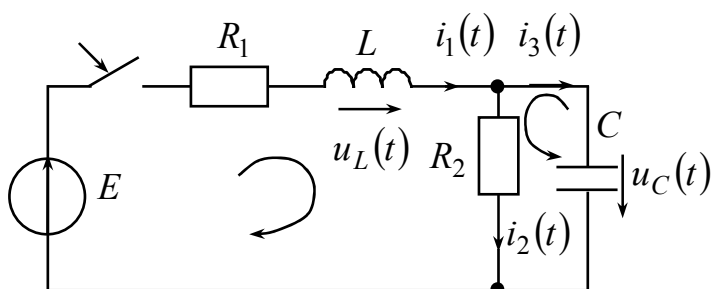


Рис. 2.5

Як зазначено раніше, вільні складові – це загальні рішення відповідних ЛОДР. Для схеми на рис. 2.5 складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі для кола після комутації, а потім перейдемо до системи для вільних струмів, тобто «звільнимо» систему від сили, що вимушує:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \\ i_1(t) \cdot R_1 + L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_2 = E; \\ -i_2(t) \cdot R_2 + \frac{1}{C} \cdot \int i_3(t) dt = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} i_{1\delta}(t) - i_{2\delta}(t) - i_{3\delta}(t) = 0 \\ i_{1\delta}(t) \cdot R_1 + L \cdot \frac{di_{1\delta}(t)}{dt} + i_{2\delta}(t) \cdot R_2 = 0. \\ -i_{2\delta}(t) \cdot R_2 + \frac{1}{C} \cdot \int i_{3\delta}(t) dt = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Вирішення однорідного диференційного рівняння записують у вигляді показової функції, тобто  $i_{\epsilon} = A \cdot e^{pt}$ , де  $A$  - стала інтегрування (своя для кожного  $i_{\epsilon}$ );  $p$  - коефіцієнт згасання, однаковий для всіх струмів, оскільки усе коло охоплено єдиним перехідним процесом.

$$\text{Тоді } \frac{di_{\epsilon}}{dt} = A \cdot p \cdot e^{pt} = p \cdot i_{\epsilon}; \quad \int i_{\epsilon} dt = \frac{A}{p} \cdot e^{pt} = \frac{i_{\epsilon}}{p}.$$

$$\begin{cases} i_{1\epsilon} - i_{2\epsilon} - i_{3\epsilon} = 0 \\ i_{1\epsilon} \cdot R_1 + L \cdot p \cdot i_{1\epsilon} + i_{2\epsilon} \cdot R_2 = 0, \\ -i_{2\epsilon} \cdot R_2 + \frac{i_{3\epsilon}}{C \cdot p} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

де (2.11) – система алгебраїчних рівнянь відносно  $i_{1\epsilon}, i_{2\epsilon}, i_{3\epsilon}$ , яка не містить похідні й інтеграли.

Такий перехід від системи (2.10) лінійних диференційних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь (2.11) називається алгебраїзацією системи диференційних рівнянь.

Припустимо, що корінь рівняння  $p$  відомий, тоді розрахуємо систему (2.11) відносно  $i_{1\epsilon}, i_{2\epsilon}, i_{3\epsilon}$ . За методом Крамера отримаємо:

$$i_{1\epsilon} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad i_{2\epsilon} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad i_{3\epsilon} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + p \cdot L & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & \frac{1}{p \cdot C} \end{vmatrix} - \text{головний визначник системи (2.11).}$$

Визначники  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  отримують шляхом заміни першого, другого, третього стовпців визначника  $\Delta$  стовпцем правих чисел системи (2.11).

Відомо, що коли в будь-якому визначнику один із стовпців складається з нулів, то цей визначник дорівнює нулю, тобто  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 = 0$ . Але виходячи з фізичних міркувань ясно, що всі вільні струми не можуть дорівнювати нулю, оскільки тоді не будуть виконуватись закони комутації. Тоді повинна виконуватися умова  $\Delta = 0$  і ми отримаємо невизначеність вигляду  $\frac{0}{0}$  для кожного з вільних струмів, розкривши яку, можна отримати дійсне значення того чи іншого вільного струму.

Висновок: рівняння  $\underline{\Delta = 0}$  називають характеристичним рівнянням.

Розкриємо визначник  $\Delta$  системи (2.11):

$$R_2 \cdot \frac{1}{p \cdot C} - \frac{(-1) \cdot (R_1 + p \cdot L)}{p \cdot C} - 1 \cdot (R_1 + p \cdot L) \cdot (-R_2) = 0;$$

$$\frac{R_2 + R_1 + p \cdot L + p \cdot C \cdot (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot p \cdot L)}{p \cdot C} = 0;$$

$$p^2 \cdot C \cdot L \cdot R_2 + p \cdot (L + C \cdot R_1 \cdot R_2) + R_1 + R_2 = 0 \quad (2.12)$$

- квадратне рівняння, яке матиме два корені  $p_1$  та  $p_2$ .

2. Метод *вхідного опору* більш легкий шлях отримання характеристичного рівняння.

За цим методом складають вираз для вхідного опору кола  $\underline{Z}_{ex}(j\omega)$  після комутації відносно вітки з джерелом *EPC* припускаючи, що в колі діє саме синусоїдна *EPC*. При цьому інші джерела *EPC* закорочують, а джерела струму - розривають. Для схеми на рис. 2.5

$$\underline{Z}_{ex}(j\omega) = R_1 + j \cdot \omega \cdot L + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}.$$

Потім у виразі для  $\underline{Z}_{ex}(j\omega)$  замінюють  $j\omega$  на  $p$  і зрівнюють отриманий таким чином вираз  $\underline{Z}_{ex}(p)$  з нулем:  $\frac{(R_1 + p \cdot L) \cdot (R_2 \cdot p \cdot C + 1) + R_2}{(R_2 \cdot p \cdot C + 1)} = 0 \Rightarrow$

$$p^2 \cdot C \cdot L \cdot R_2 + p \cdot (L + C \cdot R_1 \cdot R_2) + R_1 + R_2 = 0 - \text{те ж квадратне рівняння, що і (2.12).}$$

Якщо схема містить декілька джерел *EPC*, то вираз для вхідного опору складають відносно будь-якого джерела, інші закорочують (джерела струму розривають). Частіше для складання характеристичного рівняння застосовують саме цей метод, а метод головного визначника доцільний, коли схема після комутації дуже складна і важко записати вираз  $\underline{Z}_{ex}(j \cdot \omega)$ .

## 2.6. Визначення ступеня характеристичного рівняння

Ступінь характеристичного рівняння необхідно вміти оцінювати до безпосереднього розрахунку схеми, в якій досліджується перехідний процес, що дає можливість визначити трудомісткість подальших обчислень і допомагає виявленню помилки, якщо вона виникає при складанні характеристичного рівняння.

Ступінь характеристичного рівняння дорівнює числу основних незалежних початкових умов після можливого спрощення схеми після комутації і не

залежить від виду діючої в схемі *EPC*.

Спрощення полягає в тому, що паралельно з'єднані ємності й послідовно з'єднані індуктивності замінюються однією еквівалентною ємністю ( $C_{\text{екв}} = C_1 + C_2$ ) і індуктивністю ( $L_{\text{екв}} = L_1 + L_2$ ).

Ступінь характеристичного рівняння не залежить від того, чи існує магнітний зв'язок між індуктивностями схеми, або він відсутній.

## 2.7. Властивості коренів характеристичного рівняння

1. Число коренів характеристичного рівняння дорівнює ступеню цього рівняння.

2. Всі дійсні корені характеристичного рівняння завжди від'ємні, оскільки вільний процес проходить за відсутності примусової сили, тому не може відбуватися нескінченно довго, а для цього процес повинен бути затухаючим, тобто  $p < 0$ .

3. Рівняння другого ступеня може мати:

- 2 дійсні нерівні від'ємні корені;
- 2 дійсні рівні від'ємні корені;
- 2 комплексно спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.

4. Рівняння третього ступеня може мати:

- 3 дійсні нерівні від'ємні корені;
- 3 дійсні від'ємні корені, з яких 2 однакові;
- 3 дійсні рівні від'ємні корені;
- один дійсний від'ємний корінь і два комплексно спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.

## 2.8. Характер вільного процесу залежно від коренів характеристичного рівняння

1. Характеристичне рівняння першого ступеня, тобто має один корінь:

$$i_{\text{св}} = A \cdot e^{p \cdot t}. \quad (2.13)$$

де  $p$  – коефіцієнт згасання

$A$  - постійна інтегрування (залежить від параметрів кола, *EPC*, моменту включення).

Характер зміни  $i_{\text{св}}$  при  $A > 0$  наведений на рис. 2.6.

Величину  $\tau = \frac{1}{|p|}$  називають *сталюю часу* кола, тобто це час, за який

вільна складова  $i_g$  зменшується в  $e = 2,71$  разів;  $\tau$  залежить від виду схеми та її параметрів:

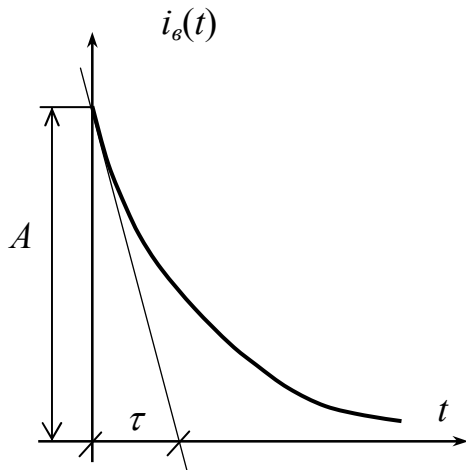


Рис.2.6

при  $t = 0$ :  $i_g = A \cdot e^{p \cdot 0} = A$ ;

при  $t = \tau$ :  $i_g = A \cdot e^{p \cdot \frac{1}{|p|}} = A \cdot e^{(-1)} = \frac{A}{e}$ , тобто функція  $i_g$  зменшилася в  $e$  разів.

Постійна часу  $\tau$  дорівнює довжині піддотичної (рис.2.6).

2. Характеристичне рівняння другого ступеня, тобто має 2 кореня.

При цьому можливі три випадки.

2.1. Дійсні нерівні корені  $p_1 = -a$ ;  $p_2 = -b$  (припустимо  $b > a$ , тобто  $|p_1| < |p_2|$ ,  $\tau_1 > \tau_2$ ).

Тоді :

$$i_g = A_1 \cdot e^{-a \cdot t} + A_2 \cdot e^{-b \cdot t} = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_1 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (2.14)$$

Характер зміни вільного процесу при різних за величиною і знаком постійних інтегрування  $A_1$  та  $A_2$  подані на рис. 2.7 – 2.10, де позначено:

«1» – крива  $A_1 \cdot e^{-a \cdot t}$ ; «2» - крива  $A_2 \cdot e^{-b \cdot t}$ ;

«3»- результуюча крива, яка була отримана шляхом складання кривих «1» і «2».

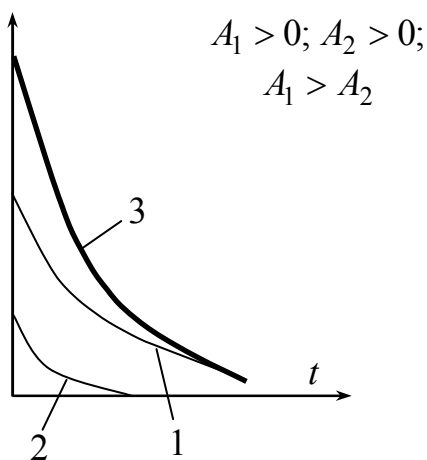


Рис. 2.7

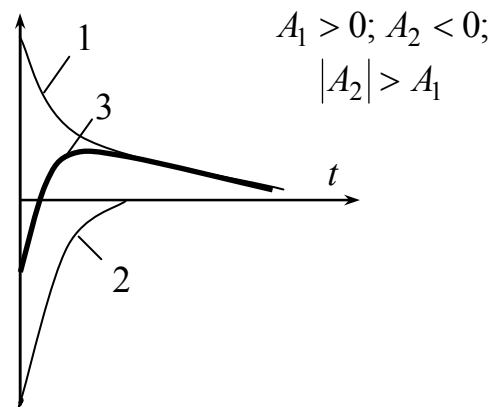
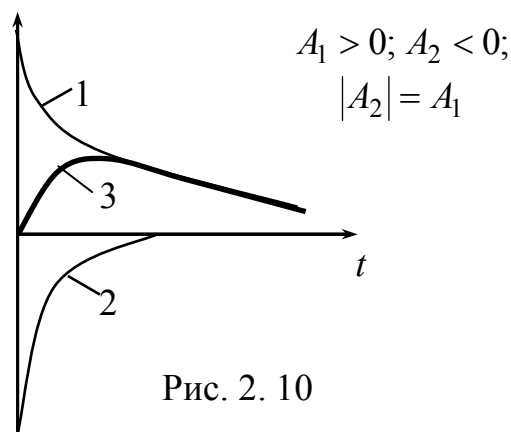
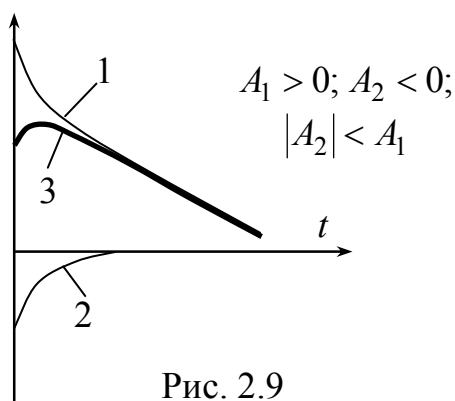
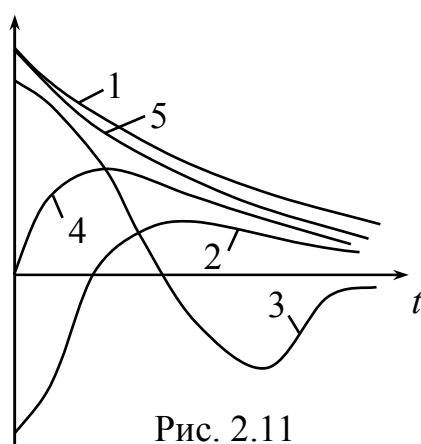


Рис. 2.8



## 2.2. Корені дійсні й рівні $p_1 = p_2 = p$ .

Тоді вираз для  $i_{ce}(t)$  має вигляд -  $i_e = (A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot e^{p \cdot t}) = e^{p \cdot t} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t)$ . (2.15)

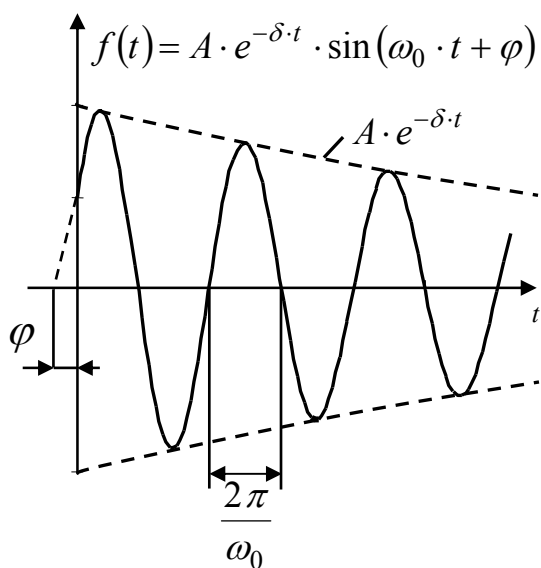


На рис. 2.11 подані п'ять кривих, що показують можливий характер зміни функції  $e^{p \cdot t} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t)$  при різних знаках сталих інтегрування  $A_1$  і  $A_2$ :

- крива «1» -  $A_1 > 0; A_2 > 0$ ;
- крива «2» -  $A_1 < 0; A_2 > 0$ ;
- крива «3» -  $A_1 > 0; A_2 < 0$ ;
- крива «4» -  $A_1 = 0; A_2 > 0$ ;
- крива «5» -  $A_1 > 0; A_2 = 0$ .

## 2.3. Корені комплексно спряжені, тобто $p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$ .

Тоді вираз для  $i_e(t)$  має вигляд:  $i_e = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ . (2.16)



Формула (2.16) описує синусоїдне коливання, що затухає з кутовою частотою  $\omega_0$  і початковою фазою  $\varphi$  (рис. 2.12). Обвідна коливання визначається кривими  $A \cdot e^{-\delta \cdot t}$  та  $-A \cdot e^{-\delta \cdot t}$ . Чим більше коефіцієнт згасання  $\delta$ , тим швидше затухає коливальний процес. Кутова частота вільних коливань  $\omega_0$  і коефіцієнт згасання  $\delta$  залежать тільки від параметрів кола після комутації.  $A$  і  $\varphi$  визначаються значеннями параметрів схеми, початковими умовами і величиною ЕРС джерела.

## 2.9. Визначення постійних інтегрування у класичному методі

### 1. Характеристичне рівняння першого ступеня.

$$\text{Вільна складова струму} - i_{\text{с}} = A \cdot e^{pt} \Rightarrow i(t) = i_{np}(t) + A \cdot e^{pt} \Rightarrow \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow i(0) = i_{np}(0) + A \cdot e^{p \cdot 0} = i_{np}(0) + A \Rightarrow \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow A = i(0) - i_{np}(0). \quad (2.19)$$

### 2. Характеристичне рівняння другого ступеня.

#### 2.1. Корені рівняння дійсні нерівні числа ( $p_1 \neq p_2$ ).

$$\text{Вільна складова струму} - i_{\text{с}} = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \Rightarrow. \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow i(t) = i_{np}(t) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (2.21)$$

Для визначення постійних інтегрування  $A_1$  і  $A_2$  необхідно мати значення струму  $i(t)$  і значення  $\frac{di}{dt}$  в нульовий момент часу, тобто  $i(0)$  та  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ .

У момент  $t=0$ :

$$i(0) = i_{np}(0) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot 0} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot 0} \Rightarrow \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow i(0) = i_{np}(0) + A_1 + A_2. \quad (2.23)$$

Похідна виразу (2.21) має вигляд

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{np}(t) + A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (2.24)$$

$$\text{Отже, } \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{np}(0) + A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2. \quad (2.25)$$

Вирішивши спільно (2.23) і (2.25) при відомих  $i(0)$  і  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ , знаходимо  $A_1$  і  $A_2$ .

#### 2.2. Корені рівняння дійсні рівні числа ( $p_1 = p_2 = p$ ), тобто

$$i_{\text{с}} = A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (2.26)$$

$$i(t) = i_{np}(t) + A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (2.27)$$



$$i(0) = i_{np}(0) + A_1, \quad (2.28)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{np}(t) + A_1 \cdot p \cdot e^{pt} + A_2 \cdot e^{pt} + A_2 \cdot t \cdot p \cdot e^{pt}, \quad (2.29)$$

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} = i'_{np}(0) + A_1 \cdot p + A_2, \quad (2.30)$$

Вирішивши спільно (2.28) і (2.30) при відомих  $i(0)$  і  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ , знайдемо  $A_1$  і  $A_2$ .

2.3. Корені рівняння комплексно-спряжені числа ( $p_{12} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$ ), тобто:

$$i_e = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (2.31)$$

$$i(t) = i_{np}(t) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (2.32)$$

$$i(0) = i_{np}(0) + A \cdot \sin \alpha, \quad (2.33)$$

$$\frac{di}{dt} = i'_{np}(t) + A \cdot (-\delta) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (2.34)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{np}(0) + A \cdot (-\delta) \cdot \sin \alpha + A \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha. \quad (2.35)$$

Вирішивши спільно (2.33) і (2.35) при відомих  $i(0)$  і  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ , знайдемо  $A_1$  і  $A_2$ .

## 2.10. Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом

1 Довільно вибираємо напрями струмів (напруг) у вітках кола.

2. Записуємо рішення для струмів і напруг у загальному вигляді, тобто у вигляді суми примусових і вільних складових:  $i(t) = i_{np}(t) + i_e(t)$ ,  $u(t) = u_{np}(t) + u_e(t)$ .

3. Визначаємо незалежні початкові умови (шляхом розрахунку схеми до комутації) і залежні початкові умови (шляхом складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для моменту часу  $t = 0$ ).

4. Вважаючи, що перехідний процес повністю завершився, для схеми після комутації визначаємо примусові складові струмів і напруг.

5. Для схеми після комутації складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його рішення і визначаємо вигляд вільних складових струмів і напруг (розділ 2.8).

6. За допомогою незалежних і залежних початкових умов визначаємо постійні інтегрування (розділ 2.9).

7. Остаточного записуємо закони струмів  $i(t)$  і напруг  $u(t)$  при перехідному процесі.

## 2.11. Деякі особливості перехідних процесів

Розглянемо схему на рис. 2.13.

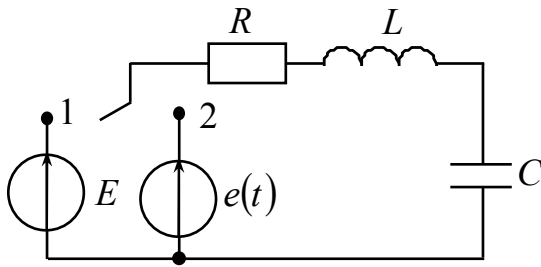


Рис. 2.13

Нехай ключ знаходиться в положенні «1», а корені характеристичного рівняння  $R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C} = 0$  комплексно спряжені величини:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm j \cdot \sqrt{-\left(\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}\right)}. \quad (2.36)$$

Таким чином, має місце коливальний процес з вільною частотою  $\omega_0$ .

Потім ключ перемикається у положення «2». Розглянемо два випадки для струму  $i(t) = i_{np} + i_{\epsilon}$ , який виникає під час перехідного процесу.

1-й випадок: значення кутової частоти вільних коливань  $\omega_0$  майже дорівнює кутовій частоті синусоїдної ЕРС джерела ( $\omega \approx \omega_0$ ), а коефіцієнт згасання  $\delta$  дуже малий (коло з малими втратами).

У цьому випадку додавання примусової і вільної складових дає коливання, для якого є характерним биття амплітуди (рис. 2.14).

2-й випадок: кутова частота вільних коливань  $\omega_0$  дорівнює кутовій частоті синусоїдної ЕРС джерела ( $\omega = \omega_0$ ).

У цьому випадку результуюче коливання має вигляд - на рис. 2.15.

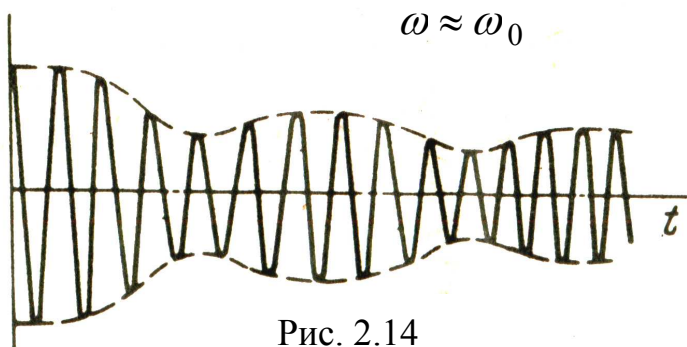


Рис. 2.14

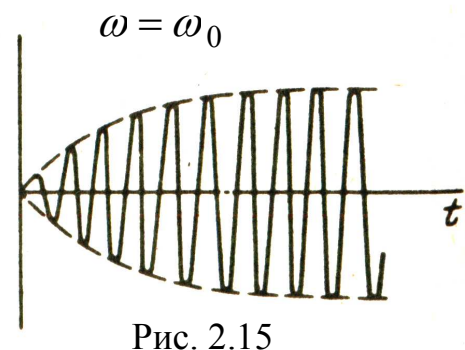


Рис. 2.15

## 2.12. Деякі задачі, пов'язані з перехідними процесами, що зустрічаються в електротехнічній практиці

1. Небезпечні перенапруги, що виникають при розмиканні віток у колах, які містять індуктивності.

При розмиканні ключів в електричних колах, які містять значні індуктивності,

на конкретних ділянках електричних кіл можуть виникати напруги, які набагато разів перевищують встановлені значення. Напруги, які перевищують встановлені значення, називають *перенапругами*. Вони можуть викликати пробій ізоляції і вивести з ладу вимірювальну апаратуру.

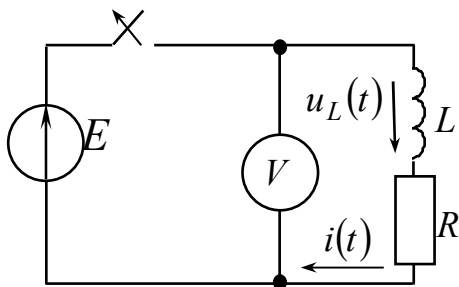


Рис. 2.16

Так при розмиканні ключа у колі з параметрами  $R = 100 \text{ Ом}$ ;  $L = 10 \text{ Гн}$ ;  $E = 100 \text{ В}$  в момент часу  $t = 0$  через коло « $V - R - L$ » протікатиме

$$\text{струм } i(0) = \frac{E}{R} \cdot e^{(-R/L)t} = \frac{E}{R} \cdot e^{(-R/L)0} = \frac{E}{R} = 1 \text{ А.}$$

Якщо опір вольтметра  $R_V = 3 \text{ кОм}$ , то на ньому в момент часу  $t = 0$  буде напруга, яка дорівнює  $300 \text{ В}$ . Це може викликати перегорання котушки приладу. Тому при комутації необхідно спочатку відключити вольтметр, а потім розімкнути ключ. Насправді, напруга на вольтметрі буде меншою, оскільки розмикання звичайно супроводжується дугою.

## 2. Коротке замикання $R - L$ кола.

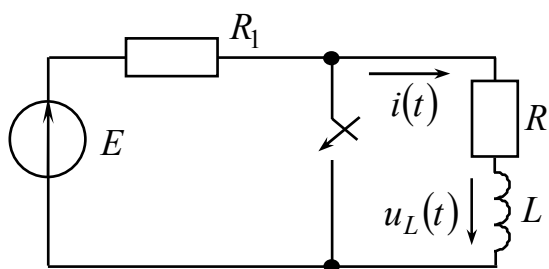


Рис. 2.17

Загальне рішення для струму -  $i(t) = i_{np} + i_{\epsilon}$

Примусова складова струму  $i_{np} = 0$ .

Незалежна початкова умова -  $i(0) = \frac{E}{R + R_1}$ .

Характеристичне рівняння та його корінь:

$$Z_{\text{ex}} = R + pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Таким чином, } i(t) = i_{np} + i_{\epsilon} = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}. \quad (2.37)$$

$$\text{За допомогою Н.П.У.: } \frac{E}{R + R_1} = A \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R + R_1} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, \text{ А} - \quad (2.38)$$

струм згасає тим швидше, чим більше  $|p| = \frac{R}{L}$ , або чим менше стала часу  $\tau$  (при малих значеннях  $L$  і великих значеннях  $R$ ).

$EPC$  самоіндукції при  $t = 0$  дорівнює напрузі на опорі  $R$  і в момент комутації підтримує значення струму на початковому рівні:

$$e_L(t) = -u_L(t) = -L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E \cdot \frac{R}{R_1 + R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, \text{ В.} \quad (2.39)$$

З енергетичного погляду процес комутації в  $R - L$  колі характеризується тим, що вся енергія, яка була запасена до моменту комутації у магнітному полі котушки, під час перехідних процесів перетворюється на тепло в опорі  $R$ .

Перехідні процеси в  $R - L$  колі необхідно враховувати у багатьох випадках електротехнічної практики. Так обмотку збудження потужної електричної машини при необхідності швидко зняти збудження не відключають від джерела живлення безпосередньо, а замикають на розрядний опір  $R_{розр}$ , в якому енергія магнітного поля перетворюється на тепло.

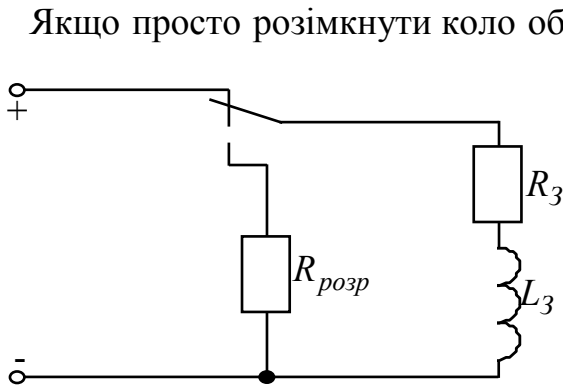


Рис. 2.18

електричної дуги струм дуже швидко зменшується до нуля (велике значення  $\frac{di(t)}{dt}$ ). Але оскільки індуктивність  $L_3$  обмотки збудження є великою, то в ній виникає значна за величиною ЕРС самоіндукції  $e_L = -L_3 \frac{di(t)}{dt}$ , яка

може пробити ізоляцію на корпус або ізоляцію між витками. Вводячи  $R_{розр}$ , ми

збільшуємо сталу часу  $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R_{розр} + R_3}$  (до введення  $R_{розр}$  стала часу дорівнювала  $\tau = \frac{L}{R_3 + \infty} \rightarrow 0$ ) і тому  $\frac{di(t)}{dt}$  зменшується.

### 3. Включення $R - L$ кола на постійну напругу (рис. 2.19).

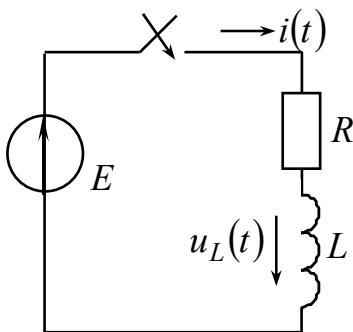


Рис. 2.19

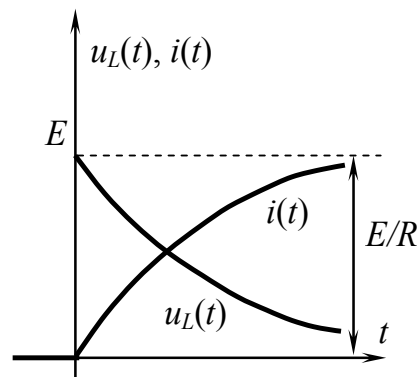


Рис. 2.20

$$i(t) = i_{np} + i_{\epsilon} \Rightarrow i_{np} = \frac{E}{R} \Rightarrow p = -\frac{R}{L} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

$$\text{Н.П.У.: } i(0)=0 \Rightarrow 0 = \frac{E}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right), \text{ А.} \quad (2.40)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -\frac{E}{R} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot L \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \underline{E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}, \text{ В.} \quad (2.41)$$

Струм  $i(t)$  зростає тим повільніше, чим більше стала часу кола  $\tau$ , тобто, чим повільніше затухає вільний струм. Енергія, яку отримуємо від джерела, йде частково на збільшення енергії магнітного поля котушки, а частково переходить в тепло. Криві  $u_L(t)$  і  $i(t)$  - на рис. 2.20.

4. Включення  $R - L$  кола на синусоїдну напругу  $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ .

Сталий струм  $i_{np}$ :

$$i_{np} = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \text{відстає від напруги } u(t) \text{ на кут зсуву фаз } \varphi, \quad (2.42)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} - \text{модуль повного опору}, \quad (2.43)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right). \quad (2.44)$$

Вільний струм, як у попередньому випадку  $i_{\epsilon} = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ ;

$$i(t) = i_{np} + i_{\epsilon} = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) + A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

$$\text{Н.П.У.: } i(0)=0 \Rightarrow 0 = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi) + A. \text{ Тоді } A = -\frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi).$$

Остаточно одержуємо:

$$i(t) = \frac{\overbrace{U_m}^{I_{npm}}}{Z} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, \text{ А.} \quad (2.45)$$

Поступово зі згасанням вільного струму перехідний струм прагне до значення сталого струму – на рис. 2.21. Якщо в момент включення  $\varphi_u - \varphi = \frac{\pi}{2}$  (або « $-\frac{\pi}{2}$ »), а постійна часу кола велика ( $R \approx 0, \tau \rightarrow \infty$  та  $\varphi \approx 90^\circ$ , вільний струм затухає повільно), то приблизно через півперіоду після включення струм досягає майже подвійної амплітуди сталого струму:  $|i_{\max}| \approx 2 \cdot I_{npm} = 2 \cdot \frac{U_m}{Z}$ . Але за жод-

них умов струм не може перевищити подвійної амплітуди сталого струму – рис. 2.22.

Якщо в момент  $t = 0$   $\varphi_u - \varphi = 0$  (або  $\pi$ ), то в колі відразу встановиться примусовий режим.

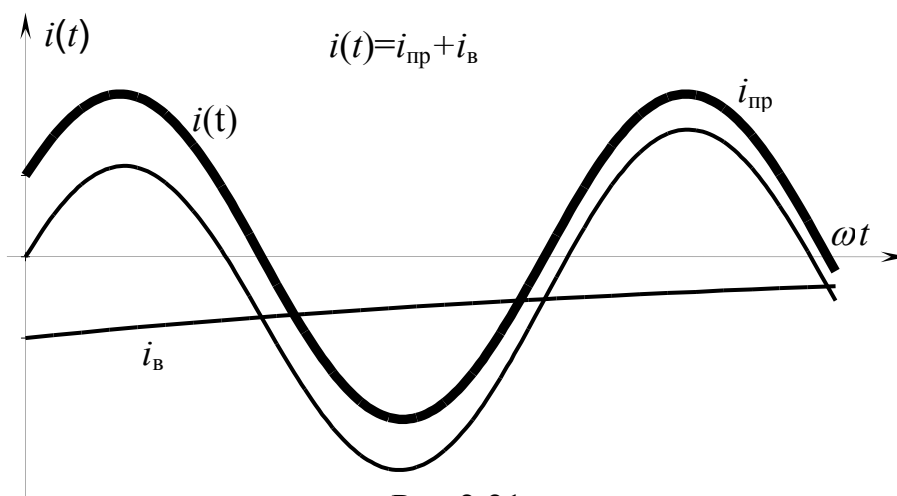


Рис.2.21

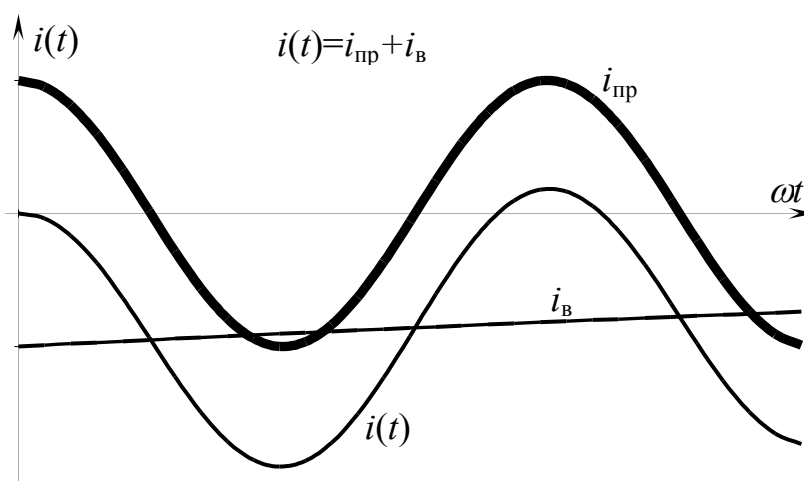


Рис. 2.22

### 5. Коротке замикання $R - C$ кола (рис. 2.23).

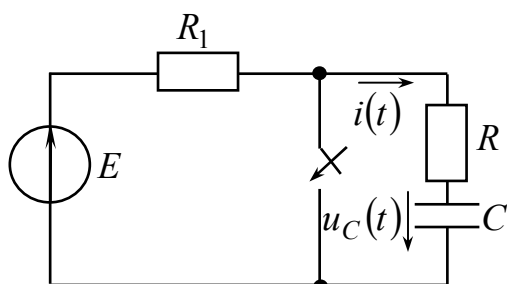


Рис. 2.23

Конденсатор був заряджений від джерела ЕРС до напруги  $U_C = E$ , а після замикання ключа розряджається через резистор  $R$ .

Н.П.У.:  $u_C(0) = E$ .

Примусові значення напруги на ємності  $C$  і струму через неї дорівнюють нулю:

$$u_{cnp} = 0, i_{cnp} = 0.$$

Характеристичне рівняння:  $Z_{\text{ex}} = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C} \text{ с}^{-1}.$

$$\text{Загальне рішення} - u_C(t) = u_{C\epsilon} = A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}. \quad (2.46)$$

$$\text{Якщо } t=0, \text{ то } u_C(0) = E \Rightarrow u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}, \text{ В.} \quad (2.47)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot U_0 \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}, \text{ А.} \quad (2.48)$$

Постійна часу  $\tau = R \cdot C$  тим більше, чим більше  $C$  і тим повільніше проходить розряд ємності. З енергетичного погляду процес короткого замикання

$R - C$  кола характеризується переходом енергії, яка була запасена до комутації в електричному полі ємності, в тепло в резисторі  $R$ .

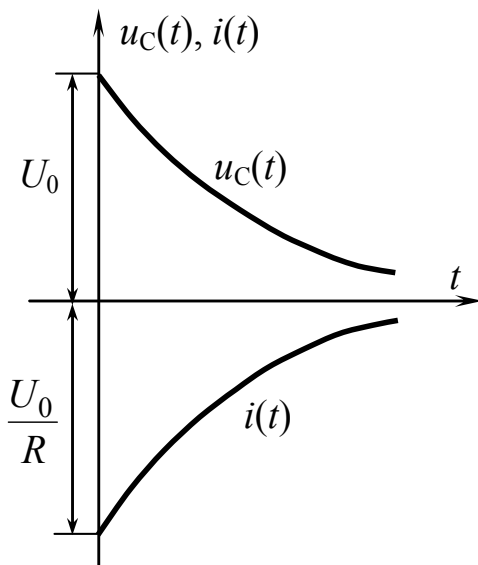


Рис. 2.24

$$\int_0^{\infty} i^2(t) \cdot R dt = \frac{U_0^2}{R^2} \cdot R \int_0^{\infty} e^{-2t/R \cdot C} dt = \frac{C \cdot U_0^2}{2}. \quad (2.49)$$

Зазначимо, що практично будь-яка вітка з опором  $R$  і ємністю  $C$  має деяку, хоча і малу, індуктивність, тому струм  $i(t)$  почне змінюватися з нуля, але дуже швидко досягне значення, дуже близького до  $\frac{U_0}{R}$ , а потім зменшуватиметься практично експоненційно.

Криві  $u_C(t)$  і  $i(t)$  - на рис. 2.24.

6. Включення  $R - C$  кола на постійну напругу (рис. 2.25).

Н.П.У.:  $u_C(0) = 0$ .

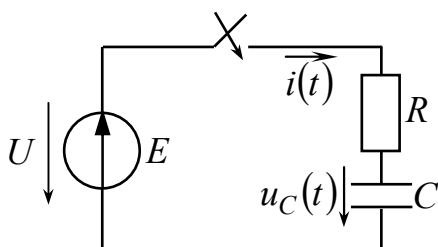


Рис. 2.25

Характеристичне рівняння, як і у попередньому випадку.

$$\text{Отже } u_{C\epsilon} = A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

Примусова складова  $u_{np} = E$ .

Загальне рішення

$$u_C(t) = u_{Cnp} + u_{C\epsilon} = E + e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \Rightarrow$$

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}, \text{ В.} \quad (2.50)$$

Струм через ємність з часом знизиться до нуля:

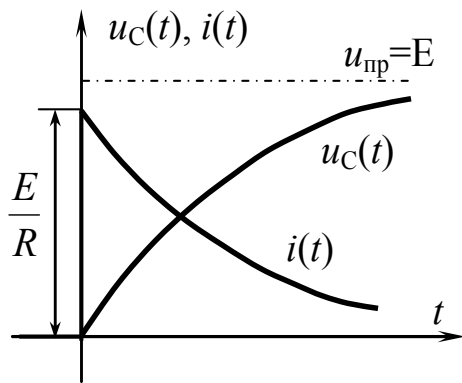
$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot (-E) \cdot \left( -\frac{1}{R \cdot C} \right) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}, \text{ А.} \quad (2.51)$$

Енергія джерела живлення при проходженні струму  $i(t)$  частково переходить в тепло, частково йде на зарядку конденсатора (енергія поділяється на рівні частини):

$$\int_0^{\infty} U \cdot i(t) dt = \int_0^{\infty} u_R \cdot i(t) dt + \int_0^{\infty} u_C \cdot i(t) dt. \quad (2.52)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow i(t) \cdot dt = C \cdot du_C(t); u_R = i(t) \cdot R. \quad (2.53)$$

$$U \cdot \int_0^{E=U} C du_C = \int_0^{\infty} i^2(t) \cdot R dt + \int_0^{E=U} C \cdot u_C(t) du_C. \quad (2.54)$$



$$C \cdot U^2 = \underbrace{\int_0^{\infty} i^2(t) \cdot R dt}_{\frac{C \cdot U^2}{2}} + \frac{C \cdot U^2}{2}. \quad (2.55)$$

Вираз (2.55) показує, що енергія, яка переходить в тепло при включенні  $R - C$  кола, не залежить від величини опору  $R$ .

Рис. 2.26

7. Включення  $R - C$  кола на синусоїну напругу:  $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ .

Як і у попередньому випадку:  $u_C(t) = u_{Cnp} + u_{C\epsilon}$ ;  $u_{C\epsilon} = A \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$ ; НПУ -  $u_C(0) = 0$ . Примусову складову струму знаходимо символічним методом:

$$\underline{I}_{npm} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m \angle \varphi_u}{R - j \cdot 1/(\omega \cdot C)} = \frac{U_m}{Z} \angle (\varphi_u + \varphi), \quad (2.56)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}, \quad (2.57)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (1/(\omega \cdot C))^2}. \quad (2.58)$$

Напруга на ємності (комплексне значення)

$$\underline{U}_{mCnp} = \underline{I}_{npm} \cdot \left( -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = \frac{I_{npm} \angle (\varphi_u + \varphi - \pi/2)}{\omega \cdot C} = \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \angle (\varphi_u + \varphi - \pi/2). \quad (2.59)$$

Миттєве значення напруги на ємності



$$u_C(t) = \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi - \pi/2) + A \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}. \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \text{При } t=0 \Rightarrow 0 &= \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= -\frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Остаточно:

$$u_C(t) = \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}, \text{ В.} \quad (2.62)$$

Криві  $u_C(t)$ ,  $u_{Cnp}(t)$ ,  $u_{C\epsilon}(t)$  в загальному випадку аналогічні за виглядом кривих рис. 2.21 (замість  $i(t)$  -  $u_C(t)$ ).

Якщо в момент  $t=0$  значення  $\varphi_u + \varphi = \pi$  (або  $\varphi_u + \varphi = 0$ ), а стала часу  $\tau = R \cdot C$  велика ( $\tau \rightarrow \infty$ ), то приблизно через  $\frac{1}{2} \cdot T$  крива  $u_C(t)$  досягне майже подвійної амплітуди сталого режиму. Тобто  $|u_{C\max}| = 2 \cdot \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C}$ .

Криві  $u_C(t)$ ,  $u_{Cnp}(t)$ ,  $u_{C\epsilon}(t)$  в цьому окремому випадку – аналогічні за виглядом кривих рис. 2.22 (замість  $i(t)$  -  $u_C(t)$ ).

8. Перехідні процеси в послідовному коливальному контурі (рис. 2.27).

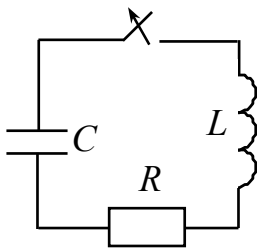


Рис. 2.27

Характер вільного процесу залежить лише від параметрів  $R-L-C$  кола, тобто, інакше кажучи, від виду коренів характеристичного рівняння:

$$Z_{\text{ex}}(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} + p \cdot L = 0. \quad (2.63)$$

$$\text{Характеристичне рівняння} - p^2 + p \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{L \cdot C} = 0. \quad (2.64)$$

$$\text{Корені характеристичного рівняння} - p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}}. \quad (2.65)$$

Таким чином, характер вільного процесу залежить від знака підкорінного виразу коренів рівняння (2.65).

Розглянемо розряд конденсатора, зарядженого до напруги  $U_0$  через резистор і котушку індуктивності. При розмиканні ключа, оскільки джерело жив-

лення відсутнє, відсутні й примусові значення струму і напруг на елементах схеми.

$$\text{Н.П.У.} - u_C(0) = U_0, i(0) = 0.$$

8.1. Розглянемо аперіодичний розряд конденсатора (дискримінант квадратного рівняння (2.64) є додатним числом,  $D > 0$ ), при якому напруга на конденсаторі монотонно спадає від значення  $U_0$  до нуля, тобто не відбувається перезаряду конденсатора. При цьому  $\frac{R^2}{4 \cdot L^2} > \frac{1}{L \cdot C}$  або  $R > 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ , а корені рівняння  $(p_1, p_2)$  дійсні і різні. Вільні складові напруги і струму:

$$u_{C\delta} = u_C(t) = A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}; \quad (2.66)$$

$$i_{\delta} = i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + C \cdot A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (2.67)$$

З енергетичного погляду це значить, що при розряді конденсатора, енергія, яка віддається ним, частково переходить в енергію магнітного поля котушки, а більша її частина поглинається в резисторі. Починаючи з деякого моменту часу, в тепло переходить не тільки енергія електричного поля ємності, але і та енергія в магнітного поля котушки, що залишилася.

Дотична до кривої  $u_C(t)$  у момент  $t=0$  паралельна осі часу ( $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0$ ).

Точки перегину  $t_1$  і  $t_2$  можна знайти відповідно так:  $\frac{di}{dt} = 0, \frac{du_L}{dt} = 0$ .

Графік  $u_C(t)$  зображений на рис. 2.28, а; графіки  $i(t), u_L(t)$  зображені на рис. 2.28, б.

8.2. Розглянемо граничний випадок аперіодичного розряду конденсатора (критичний режим). При цьому  $D=0 \Rightarrow R = R_{kp} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Корені характеристичного рівняння  $(p_1, p_2)$  дійсні й рівні, а саме

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{R}{2 \cdot L} \Rightarrow u_{C\delta} = A_1 \cdot e^{pt} + A_2 \cdot t \cdot e^{pt}.$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot p \cdot A_1 \cdot e^{p \cdot t} + C \cdot A_2 \cdot e^{p \cdot t} + C \cdot p \cdot A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}, \quad (2.68)$$

$$A_1 = U_0, \quad A_2 = -p \cdot U_0, \quad (2.69)$$

$$u_C(t) = U_0 \cdot (1 - p \cdot t) \cdot e^{pt}, \quad (2.70)$$

$$i(t) = -Cp^2 U_0 t e^{pt} = -\frac{U_0}{L} \cdot t \cdot e^{pt}, \quad (2.71)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -U_0 \cdot (1 + p \cdot t) \cdot e^{pt}. \quad (2.72)$$

8.3 Періодичний (коливальний) розряд конденсатора ( $D < 0 \Rightarrow R < 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ ).

Корені комплексно-спряжені числа, а саме

$$p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0 = -\underbrace{\frac{R}{2 \cdot L}}_{\delta} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{-\left(\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}\right)}}_{\omega_0}$$

$$u_C(t) = u_{C\delta} = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi). \quad (2.73)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot A \cdot [(-\delta) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) + \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)]. \quad (2.74)$$

Вирішуючи спільно рівняння  $\begin{cases} u_C(0) = U_0 = A \cdot \sin \varphi \\ i(0) = 0 = [-\delta \cdot A \cdot \sin \varphi + A \cdot \omega_0 \cdot \cos \varphi] \end{cases}$  зна-

ходимо  $\varphi$  і  $A$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0}{\delta}, \quad U_{Cm} = U_{Lm} = A = \frac{U_0}{\omega_0} \cdot \sqrt{L \cdot C}, \quad (2.75)$$

де  $U_{Cm}, U_{Lm}$  - максимальні значення напруги на ємності й індуктивності.

Остаточні вирази:

$$i(t) = I_m \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \pi), \quad A; \quad (2.76)$$

$$u_L(t) = U_{Lm} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t - \varphi), \quad B; \quad (2.77)$$

$$u_C(t) = U_{Cm} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi), \quad B. \quad (2.78)$$

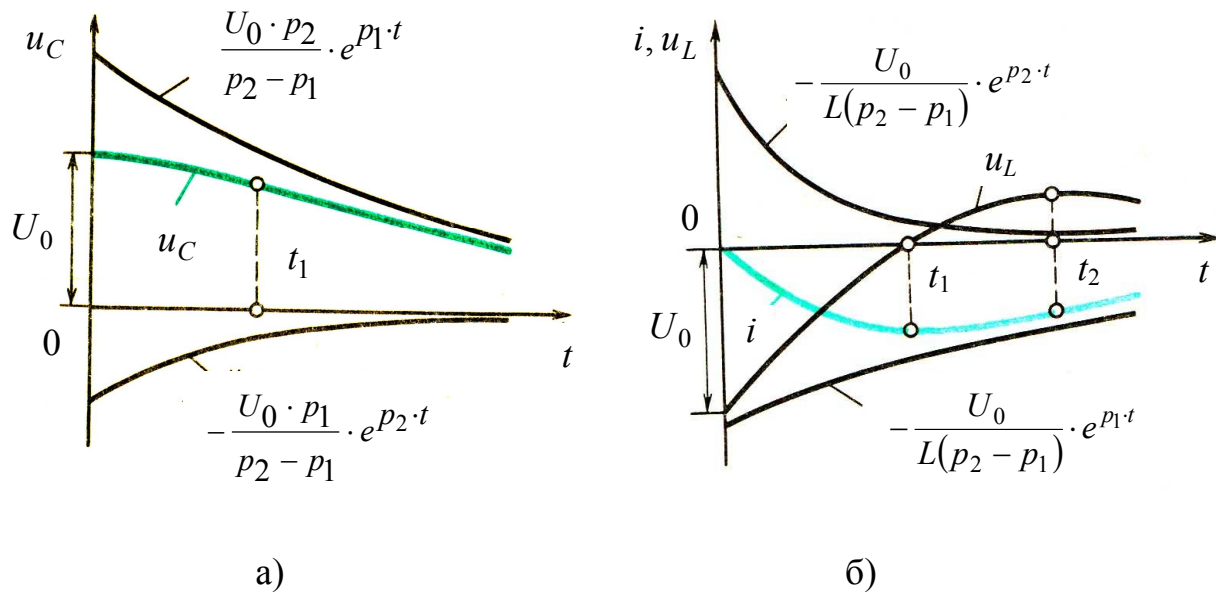


Рис. 2.28

### 2.13. Операторний метод розрахунку перехідних процесів

Операторний метод заснований на використанні поняття про зображення функцій часу. В операторному методі кожній функції часу відповідає функція нової змінної, яка позначається буквою  $p$ , і навпаки – функції змінної  $p$  відповідає певна функція часу.

Функцію часу (струм, напруга, заряд, ЕРС) позначають  $f(t)$  і називають оригіналом. Їй відповідає функція, що називається зображенням  $F(p)$ .

Перехід від функції часу  $t$  до функції змінної  $p$  здійснюють за допомогою перетворення (прямого) Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt, \quad (2.79)$$

де  $F(p)$  – функція, що називається зображенням;

$f(t)$  – оригінал (функція часу);

$p$  – комплексне число вигляду  $p = a + j \cdot b$ ,

$a$  – дійсна частина;

$b$  – уявна частина цього комплексного числа.

Таким чином, операторний метод розрахунку перехідних процесів є методом розрахунку, заснованим на перетворенні Лапласа. Він дозволяє звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення.

Відповідність між функціями  $F(p)$  і  $f(t)$  записують так:  $F(p) \rightleftharpoons f(t)$ .

Знак « $\rightleftharpoons$ » називають знаком відповідності.

Інтеграли з верхньою границею, що дорівнює нескінченності, називають невласними. Якщо в результаті інтегрування і підстановки границь одержують будь-яке число (не нескінченність), то говорять, що інтеграл збігається. В курсі математики доводиться, що інтеграл (2.79), до складу якого входить функція  $e^{-p \cdot t} = e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot b \cdot t}$ , збігається тільки у тому випадку, коли модуль функції  $f(t)$  якщо і збільшується із зростанням  $t$ , то все ж таки повільніше, ніж модуль функції  $e^{p \cdot t}$  (модуль дорівнює  $e^{a \cdot t}$ ).

## 2.14. Зображення деяких простих функцій

1. Зображення постійної  $f(t) = A$ . Підставимо  $A$  замість  $f(t)$  в інтеграл (2.79).

$$F(p) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-p \cdot t} dt = A \cdot \left( -\frac{1}{p} \right) \cdot \int_0^{\infty} d(e^{-p \cdot t}) = \frac{-A}{p} \cdot e^{-p \cdot t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

$$A \stackrel{\cdot}{=} \frac{A}{p}.$$
(2.80)

2. Зображення показової функції  $e^{\alpha \cdot t}$

Підставимо замість  $f(t)$  в інтеграл (2.79) функцію  $e^{\alpha \cdot t}$ :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t \cdot (p - \alpha)} dt = \left( -\frac{1}{p - \alpha} \right) \cdot \int_0^{\infty} e^{-t \cdot (p - \alpha)} d[-t \cdot (p - \alpha)] =$$

$$= -\frac{1}{p - \alpha} \cdot e^{-t \cdot (p - \alpha)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p - \alpha} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{p - \alpha}.$$
(2.81)

Отже:

$$e^{\alpha \cdot t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p - \alpha}$$
(2.82)

Розглянемо ведення формули (2.82):

а) зображення оператора обертання  $e^{j \cdot \omega t} = \frac{1}{p - j \cdot \omega};$  (2.83)

б) зображення комплексу синусоїдного струму  $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ , який відповідно до формули Ейлера може бути подане у вигляді

$$I_m \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j \cdot \omega t}.$$
(2.84)

Зрозуміло, що відповідно до формули (2.83):  $I_m \cdot e^{j \cdot \omega t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{I_m}{p - j \cdot \omega};$  (2.85)

в) зображення функції  $e^{-\alpha \cdot t}$ :

$$e^{-\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p + \alpha}. \quad (2.86)$$

3. Зображення першої похідної функції  $f(t)$ .

Потрібно знайти зображення першої похідної функції  $\frac{df(t)}{dt}$ , якщо відомо, що значення функції  $f(t)$  при  $t = 0$  дорівнює  $f(0)$ .

Піддамо функцію  $\frac{df(t)}{dt}$  перетворенню Лапласа.

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} d[f(t)]. \quad (2.87)$$

Застосуємо інтегрування за частинами:  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ ,

де  $e^{-p \cdot t} = u$ ;  $v = f(t)$ ;  $d[f(t)] = dv$ ;  $de^{-p \cdot t} = -p \cdot e^{-p \cdot t} dt = du$ .

$$\int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} d[f(t)] = e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d[e^{-p \cdot t}]. \quad (2.88)$$

$$e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} = 0 - f(0) = -f(0). \quad (2.89)$$

$$- \int_0^{\infty} f(t) d[e^{-p \cdot t}] = p \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = p \cdot F(p) \quad (2.90)$$

$$\text{Таким чином} \quad \frac{df(t)}{dt} \doteq p \cdot F(p) - f(0). \quad (2.91)$$

Розглянемо ведення формули (2.91), а саме зображення напруги на індуктивності  $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ .

Нехай  $I(p) \doteq i(t)$ , а  $i(0)$  - значення функції  $i(t)$  у момент часу  $t = 0$ .

За формулою (2.91) -  $\frac{di}{dt} \doteq p \cdot I(p) - i(0)$ . Отже:

$$L \cdot \frac{di}{dt} \doteq p \cdot L \cdot F(p) - L \cdot i(0). \quad (2.92)$$

$L \cdot i(0)$  - внутрішня ЕРС, що обумовлена запасом енергії магнітного поля в індуктивності в результаті протікання через неї струму  $i(0)$  безпосередньо перед комутацією.

$$\text{Якщо } i(0) = 0 \Rightarrow u_L = p \cdot L \cdot F(p).$$

#### 4. Зображення інтеграла

Нехай  $f(t)$  - оригінал; а  $F(p)$  - зображення функції  $f(t)$ . Знайдемо зображення функції  $\int_0^t f(t) dt$ , для чого піддамо її перетворенню Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] \cdot e^{-p \cdot t} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] d e^{-p \cdot t}. \quad (2.93)$$

Інтеграл беремо за частинами, а саме -  $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ ,

де  $u = \int_0^t f(t) dt$ ;  $v = e^{-p \cdot t}$ ;  $d(e^{-p \cdot t}) = dv$ ,  $du = d \left[ \int_0^t f(t) dt \right] = f(t) dt$ .

Таким чином:

$$-\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] d e^{-p \cdot t} = -\frac{1}{p} \cdot \underbrace{\left[ \int_0^t f(t) dt \right] \cdot e^{-p \cdot t}}_{u \cdot v} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = \frac{F(p)}{p}. \quad (2.94)$$

$$\text{Отже } \int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (2.95)$$

Розглянемо ведення формули (2.95), а саме зображення напруги на ємності:

$u_C(t) = U_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$ . Врахуємо, що напруга на ємності визначається не тільки струмом, що протікає через неї, але і тією напругою, яка була на ній при  $t = 0$ .

Відповідно до формули (2.95) зображення  $\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt$  дорівнює  $\frac{I(p)}{C \cdot p}$ , а зображення постійної  $U_C(0)$  дорівнює  $\frac{U_C(0)}{p}$ . Отже

$$U_C \doteq \frac{I(p)}{C \cdot p} + \frac{U_C(0)}{p}. \quad (2.96)$$

Доданок  $\frac{U_C(0)}{p}$  – внутрішня ЕРС, обумовлена запасом енергії електричного поля в конденсаторі до комутації внаслідок напруги на ній  $U_C(0)$  безпосередньо перед комутацією.

Інші найпростіші операторні співвідношення наведені в довідниках.

## 2.15. Деякі теореми й граничні співвідношення

1. Теорема зсуву в області оригіналів (теорема запізнювання).

Нехай  $F(p) \doteq f(t)$ , тоді зображенням функції  $f(t - \tau)$  є функція  $e^{-p \cdot \tau} \cdot F(p)$ :

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p \cdot \tau} \cdot F(p). \quad (2.97)$$

2. Теорема зсуву в області зображень.

Якщо зображенню  $F(p)$  відповідає функція  $f(t)$ , то зображенню  $F(p - \alpha)$  відповідає функція  $e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t)$ . Доказ проводиться шляхом підстановки функції  $e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t)$  у формулу перетворення Лапласа.

$$F(p) \doteq f(t) \Rightarrow F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t). \quad (2.98)$$

3. Теорема про зміну масштабу (теорема подібності).

Якщо функції  $f(t)$  відповідає зображення  $F(p)$ , то функції  $f(\alpha t)$  відповідає зображення  $\frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ , тобто

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (2.99)$$

4. Визначення початкового значення функції  $f(0)$  за зображенням функції  $F(p)$ :

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p). \quad (2.100)$$

5. Визначення сталого значення функції часу  $f(\infty)$  за зображенням функції  $F(p)$ :

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p). \quad (2.101)$$

## 2.16 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

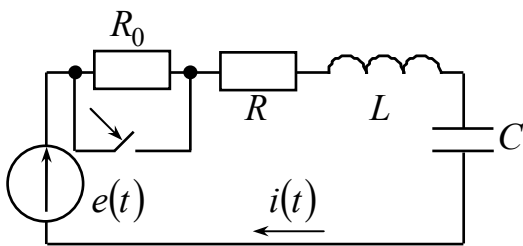


Рис. 2.29

Запишемо другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі для схеми синусоїдного струму (рис. 2.29), режим після комутації:

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + U_C(0) = e(t) \quad (2.102)$$

Замінімо оригінали відповідними зображеннями за умови, що  $I(p) \doteq i(t)$ :



$$I(p) \cdot R + L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i(0) + I(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C} + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{E_m}{p - j \cdot \omega} = E(p). \quad (2.103)$$

Таким чином, вираз (2.103) - другий закон Кірхгофа в операторній формі для кола після комутації схеми рис. 2.29.

У загальному вигляді другий закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum \pm I_K(p) \cdot Z_K(p) = \sum \pm E_K(p), \quad (2.104)$$

де  $I_K(p) \cdot Z_K(p)$  - операторне падіння напруги на деякій ділянці контуру;

$E_K(p)$  - операторна ЕРС.

З формули (2.103) операторний струм  $I(p)$ :

$$I(p) = \frac{E(p) + L \cdot i(0) - \frac{U_C(0)}{p}}{R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}} = \frac{E(p) + L \cdot i(0) - \frac{U_C(0)}{p}}{Z(p)}, \quad (2.105)$$

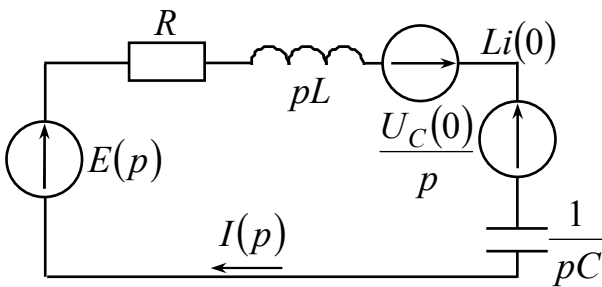


Рис. 2.30

де операторний опір ділянки кола -

$$Z(p) = R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C} \quad (2.106)$$

Вираз (2.105) - це закон Ома в операторній схемі для ділянки кола.

Операторна схема заміщення відповідно до формули (2.105) зображена на рис. 2.30.

Розглянемо перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів. Для деякого вузла «а» (рис. 2.31):  $i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0$ .

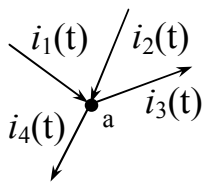


Рис. 2.31

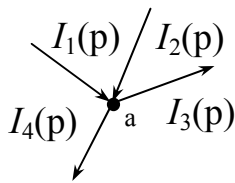


Рис. 2.32

Якщо застосувати перетворення Лапласа і скористатися тим, що зображення суми дорівнює сумі зображень, то отримаємо перший закон Кірхгофа в операторній формі для вузла «а» - на рис. 2.32:

$$I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) - I_4(p) = 0. \quad (2.107)$$

У загальному вигляді перший закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum \pm I(p) = 0. \quad (2.108)$$

Висновок: операторні струми і напруги можна розраховувати будь-яким раніше вивченим методом, оскільки операторні схеми заміщення підкоряються законам Ома і Кірхгофа в операторній формі.

## 2.17. Послідовність розрахунку за операторним методом

1. Складають рівняння для кола після комутації за законами Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі.
2. Здійснюють заміну оригіналів відповідними зображеннями.
3. Складають операторну схему заміщення.
4. Використовують будь-який метод розрахунку і визначають операторні струми і напруги.
5. Здійснюють перехід від операторних струмів і напруг до струмів і напруг функції часу (перехід від зображень до оригіналів) за допомогою формул відповідності або за допомогою формули розкладання.

## 2.18. Формула розкладання

У результаті розрахунку операторний струм  $I(p)$  може являти собою співвідношення двох поліномів, тобто

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}, \quad (2.109)$$

де  $n$  - ступінь полінома чисельника;

$m$  - ступінь полінома знаменника.

Якщо  $n < m$ , що справедливо для всіх електричних кіл, що фізично існують, а також якщо рівняння  $M(p) = 0$  не має кратних коренів, то дріб (2.109) може бути поданий у вигляді

$$\begin{aligned} I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} &= \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot \frac{1}{p - p_2} + \frac{N(p_K)}{M'(p_K)} \cdot \frac{1}{p - p_K} = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{N(p_K)}{M'(p_K)} \cdot \frac{1}{p - p_K}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_K$  - корені рівняння  $M(p) = 0$ .

Таким чином, перехід від зображення  $\frac{N(p)}{M(p)}$  до оригіналу (функції часу) виконують за допомогою формули розкладання, беручи до уваги, що  $e^{p_k \cdot t} \doteq \frac{1}{p - p_k} :$

$$\frac{N(p)}{M(p)} \doteq \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}. \quad (2.111)$$

Важливо зробити деякі зауваження до формули (2.111):

1. Формулу розкладання застосовують за будь-яких початкових умов і при будь-яких формах напруги, що діє у схемі.

2. Якщо початкові умови не нульові, то до складу полінома  $N(p)$  ввійдуть внутрішні  $EPC$ .

3. Якщо зображення струму має вигляд  $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ , а рівняння другого ступеня  $M(p) = 0$  має комплексно спряженні корені, то складові, відповідні їм в правій частині формули (2.111), будуть також комплексно спряженими і в сумі дадуть дійсне число. Оригінал струму знаходять так (струм не має примусової складової):

$$i(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t}, \quad (2.112)$$

де  $p_1 = -\delta + j \cdot \omega_0$ .

4. Якщо зображення струму має вигляд  $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p)}{p \cdot M_1(p)}$ , а рівняння другого ступеня  $M_1(p) = 0$  має комплексно спряженні корені, то оригінал струму знаходять за формулою  $i(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + 2 \cdot \operatorname{Re} \frac{N(p_1)}{p_1 \cdot M_1(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t}$ , (2.113)

де  $i_{np} = \frac{N(0)}{M_1(0)}$  - примусова складова струму.

5. Якщо на схему впливає синусоїдна  $EPC$ , і зображення її має вигляд  $\frac{\underline{E}_m}{p - j \cdot \omega}$  (де  $\underline{E}_m = E_m \cdot e^{j \cdot \varphi}$ ), то при використанні формули розкладання з правої її частини для переходу від комплексу до миттєвого значення береться коефіцієнт при  $j$  (уявна частина). Відповідно до цього внутрішні  $EPC$ , які з'являються в правій частині формули розкладання за ненульових початкових умов в синусоїдальних колах, повинні бути помножені на коефіцієнт « $j$ », тобто будемо мати внутрішні  $EPC$  такого вигляду -  $j \cdot L \cdot i(0)$  і  $j \cdot \frac{U_C(0)}{p}$ .

У колах з постійною  $EPC$  внутрішні  $EPC$  на « $j$ » не помножуються.

6. Якщо  $EPC$ , що діє у схемі, синусоїдна, то примусова складова рішення входить до числа доданків  $\sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$  і визначається коренем  $p = j\omega$ ,

тобто  $i_{np} = \frac{N(j\omega)}{M'(j\omega)} \cdot e^{j\omega \cdot t}$ .

Приклад (схема на рис. 2.33).

Вихідні дані:  $E=200$  В,  $C=5$  мкФ,  $R_1=100$  Ом,  $R_2=400$  Ом.

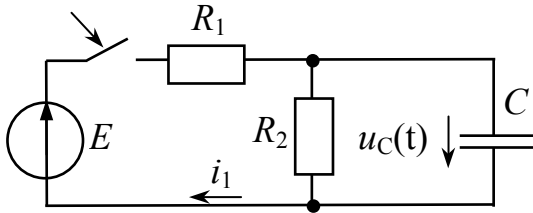


Рис. 2.33

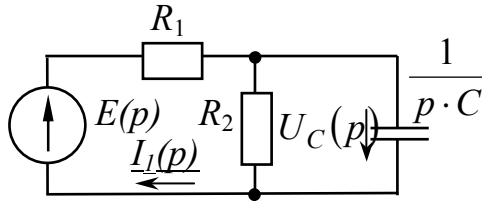


Рис. 2.34

Знайти:  $i_1(t)$ ,  $u_C(t)$  операторним методом.

Вирішення:

1. Складемо операторну схему заміщення для нульових початкових умов і з урахуванням того, що в схемі діє постійна ЕРС, тобто  $E(p) \doteq \frac{E}{p}$  (рис. 2.34)

$$E(p) \doteq \frac{E}{p}$$

2. Операторний опір кола:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = R_1 + \frac{R_2}{R_2 \cdot pC + 1} =$$

$$= \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot p \cdot C + R_1 + R_2}{R_2 \cdot pC + 1} = \frac{0,2 \cdot p + 500}{0,002 \cdot p + 1}.$$

3. Операторний струм першої вітки:

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p}}{Z(p)} = \frac{200 \cdot (0,002 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \frac{0,4 \cdot p + 200}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)}.$$

4. Оскільки зображення має вигляд:  $I_1(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ , то застосуємо формулу

розкладання:  $i_1(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$ , де  $p_k$  - корені рівняння  $M(p) = 0$ .

4.1 Знайдемо корені рівняння  $M(p) = 0 \Rightarrow p \cdot (0,2 \cdot p + 500) = 0$ , тобто  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -2500$ .

4.2 Знайдемо похідну знаменника, тобто  $M'(p) = 2 \cdot 0,2 \cdot p + 500$ .

4.3 Підставимо у вирази  $N(p)$ ,  $M'(p)$  корені  $p_1$ ,  $p_2$ .

$$M'(p_1) = M'(0) = 500; \quad M'(p_2) = M'(-2500) = -500; \quad N(p_1) = N(0) = 200;$$

$$N(p_2) = N(-2500) = -800.$$

Підставимо все знайдене у формулу розкладання:

$$i_1(t) = \frac{200}{500} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{-800}{-500} \cdot e^{-2500 \cdot t} = 0,4 + 1,6 \cdot e^{-2500 \cdot t}, \text{ А.}$$

5. Визначимо операторну напругу на ємності (за другим законом Кірхгофа):  $U_C(p) + I_1(p) \cdot R_1 = \frac{E}{p} \Rightarrow U_C(p) = \frac{E}{p} - I_1(p) \cdot R_1$ . Отже

$$\begin{aligned}
 U_C(p) &= \frac{E}{p} - R_1 \cdot \frac{0,4 \cdot p + 200}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \frac{200}{p} - 100 \cdot \frac{0,4 \cdot p + 200}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \\
 &= \frac{200 \cdot (0,2 \cdot p + 500) - 40 \cdot p - 20000}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \frac{40 \cdot p + 100000 - 40 \cdot p - 20000}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \\
 &= \frac{8 \cdot 10^4}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \frac{4 \cdot 10^5}{p \cdot (p + 2500)}.
 \end{aligned}$$

Скористаємося формулою відповідності:  $\frac{1}{p \cdot (p + a)} \doteq \frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$

У нашому випадку :

$$a = 2500 \Rightarrow u_C(t) = \frac{4 \cdot 10^5}{2500} \cdot (1 - e^{-2500 \cdot t}) = 160 \cdot (1 - e^{-2500 \cdot t}), \text{ В.}$$

## 2.19. Розрахунок перехідних процесів у колах зі взаємною індуктивністю

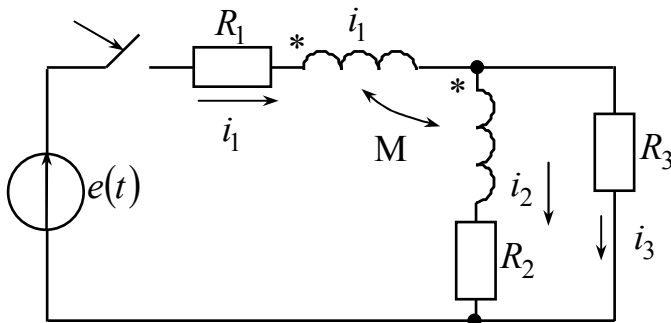


Рис. 2.35

Через те що для схеми на рис. 2.35 при  $t = 0$  маємо нульові незалежні початкові умови, внутрішні ЕРС дорівнюють нулю.

Порядок розрахунку.

1. Для схеми після комутації складаємо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases}
 i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\
 i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2 - L_2 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} + i_2 \cdot R_2 = e(t). \\
 i_3 \cdot R_3 - i_2 \cdot R_2 - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt} = 0
 \end{cases} \quad (2.114)$$

2. Переходимо від оригіналів до зображень і отримаємо систему рівнянь в операторній формі:

$$\begin{cases}
 I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0 \\
 I_1(p)R_1 + pL_1I_1(p) + pMI_2(p) + pL_2I_2(p) + pMI_1(p) + I_2(p)R_2 = E(p). \\
 I_3(p)R_3 - I_2(p)R_2 - pL_2I_2(p) - pMI_1(p) = 0
 \end{cases} \quad (2.115)$$

3. Розв'язуємо рівняння (2.115) і знаходимо операторні струми:

$$I_1(p); I_2(p); I_3(p).$$

4. Використовуємо формули відповідності або формулу розкладання і пе-

переходимо від операторних струмів до струмів функції часу (оригіналам).

## 2.20. Перехідна провідність. Перехідна функція за напругою

Введемо поняття перехідної провідності.

Як відомо, струм в будь-якій вітці схеми може бути поданий у вигляді добутку напруги на вході схеми і власної або взаємної провідності  $g(t)$ , тобто:

$$i(t) = U \cdot g(t), \quad (2.116)$$

де  $g(t)$  - перехідна провідність, функція часу  $t$ .

*Перехідна провідність* чисельно дорівнює перехідному струму вітки, якщо на вхід схеми подати постійну напругу величиною 1 В. При цьому  $i(t) = g(t)$ . Визначається  $g(t)$  розрахунком і дослідним шляхом.

Так для схеми на рис. 2.2:

$$i(t) = i_{np} + i_{\epsilon} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad (2.117)$$

$$\text{Вважаємо } E = 1\text{В} \Rightarrow i(t) = i|_{E=1}(t) = \frac{1}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

$$\text{Таким чином: } g(t) = \frac{1}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right). \quad (2.118)$$

Існує поняття *перехідної функції* за напругою  $k(t)$  - це безрозмірна величина, яка чисельно дорівнює напрузі між точками  $a$  і  $b$  схеми, якщо на вхід системи подана стала напруги в 1 В:  $U_{ab}(t) = U \cdot k(t)$ . (2.119)

## 2.21. Інтеграл Дюамеля

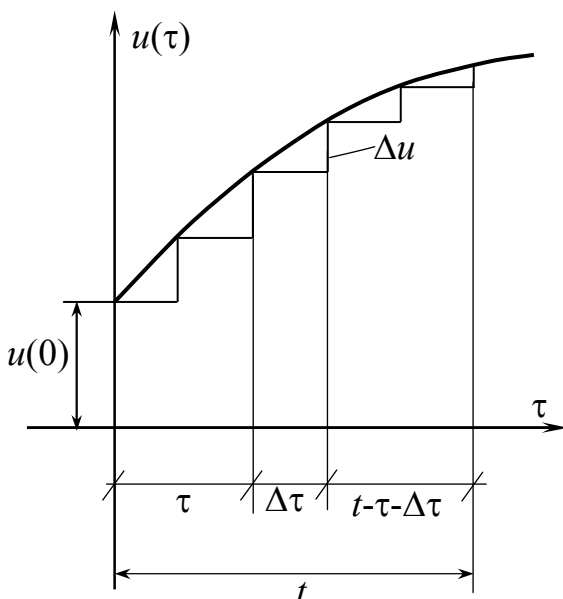


Рис. 2.36

При використанні інтеграла Дюамеля змінну, за якою проводимо інтегрування, позначимо через  $\tau$ ; а  $t$  - це момент часу, в який потрібно знайти струм кола.

Нехай до кола з нульовими початковими умовами у момент  $t = 0$  підключається напруга  $U(\tau)$  рис. (2.36).

Щоб знайти струм у колі в момент  $t$ , замінимо плавну криву ступінчатою і підсумуємо струми від початкової напруги  $u(0)$  і від всіх сходинок напруги, які вступають в дію із запізнюванням у часі. В момент  $(\tau + \Delta\tau)$  виникає стрибок напруги:

$$\Delta u \approx \left( \frac{du}{d\tau} \right) \cdot \Delta \tau = u'(\tau) \cdot \Delta \tau \quad (2.120)$$

Щоб знайти складову струму в момент  $t$ , яка була викликана цим стрибком напруги  $\Delta u$ , треба  $u'(\tau) \cdot \Delta \tau$  помножити на значення перехідної провідності з урахуванням часу дії стрибка до моменту часу  $t$ . Цей час дорівнює  $(t - \tau - \Delta \tau)$  (рис. 2.36).

Тоді приріст струму дорівнює  $- u'(\tau) \cdot g(t - \tau - \Delta \tau) \cdot \Delta \tau$ .

Повний струм отримаємо, якщо підсумуємо всі часткові струми від окремих стрибків напруги і додамо їх до струму  $u(0) \cdot g(t)$ :

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \sum u'(\tau) \cdot g(t - \tau - \Delta \tau) \cdot \Delta \tau. \quad (2.121)$$

Перейдемо від суми до інтеграла і отримаємо *інтеграл Дюамеля*:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau. \quad (2.122)$$

За допомогою інтеграла Дюамеля можна знайти не тільки струм, але і напругу (замість  $g(t)$  у формулу (2.123) входить  $k(t)$ ).

## 2.22. Послідовність розрахунку за допомогою інтеграла Дюамеля

1. Визначаємо перехідну провідність  $g(t)$ .

Для схеми рис. 2.2 -  $g(t) = \frac{1}{R} \cdot (1 - e^{p \cdot t})$ ; де  $p = -\frac{R}{L}$ .

2. Визначаємо  $g(t - \tau)$ , тобто у формулі  $g(t)$  замінюємо  $t$  на  $(t - \tau)$ :

$$g(t - \tau) = \frac{1}{R} \cdot [1 - e^{p \cdot (t - \tau)}]$$

3. Визначаємо  $u'(\tau)$ .

Припустимо,  $u(t)$  задано у вигляді закону  $u(t) = 100 \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$ , В. Тоді,  $u'(t) = 100 \cdot a \cdot e^{-a \cdot t}$  і, отже  $u'(\tau) = 100 \cdot a \cdot e^{-a \cdot \tau}$  (знаходять  $u'(t)$  і в отриманому виразі замінюють  $t$  на  $\tau$ ).

4. Підставимо знайдені на етапах 1, 2, 3 функції у формулу (2.122) з урахуванням того, що  $u(0) = 0$ , інтегруємо за змінною  $\tau$ , підставимо межі інтегралу і знаходимо закон  $i(t)$ .

Оскільки з формули (2.122) перший доданок випадає, то

$$i(t) = \int_0^t 100 \cdot a \cdot e^{-a \cdot \tau} \cdot \frac{1}{R} \cdot (1 - e^{p \cdot (t - \tau)}) d\tau = \frac{100 \cdot a}{R} \int_0^t [e^{-a \cdot \tau} - e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{p \cdot (t - \tau)}] d\tau \quad (2.123)$$

Примітка:  $e^{p \cdot t}$  від  $\tau$  не залежить (*const*), величина « $a$ » - відома.

## 2.23. Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів

Яким методом користуватися загалом залежить від навику і звички. Як класичний, так і операторний методи можна застосовувати для вирішення задач будь-якої складності. Але зробимо деякі зауваження:

- якщо порядок характеристичного рівняння більше двох, то доцільно застосовувати операторний метод;
- класичний метод більш фізично «прозорий» (якщо характеристичне рівняння має ступінь менше двох, то застосовують саме його);
- операторний метод потребує достатньої математичної підготовки.

3. Основною областю застосування інтеграла Дюамеля є випадки, коли напруга, що впливає на електричне коло, змінюється в часі за складним законом.

### Контрольні запитання

- 1) Дайте визначення перехідних процесів і сформулювати закони комутації.
- 2) Дайте визначення класичного методу розрахунку перехідних процесів.
- 3) Дайте визначення примусових і вільних складових струмів та напруг; незалежних та залежних, нульових та ненульових початкових умов.
- 4) Охарактеризуйте методи складання характеристичного рівняння: метод головного визначника і метод вхідного опору.
- 5) Поясніть, як залежить характер вільного процесу від кількості та характеру коренів характеристичного рівняння.
- 6) Поясніть, яким чином визначають сталі інтегрування у класичному методі.
- 7) Наведіть порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом.
- 8) Проаналізуйте перехідні процеси у послідовному  $R-L-C$  контурі: аперіодичний режим, критичний режим, коливальний режим.
- 9) Дайте визначення операторного методу. Наведіть зображення постійної величини й показової функції.
- 10) Наведіть зображення першої похідної та інтегралу.
- 11) Наведіть деякі теореми й граничні співвідношення операторного методу.
- 12) Дайте визначення законів Ома і Кірхгофа в операторній формі.
- 13) Наведіть формулу розкладання для визначення оригіналу струму (напруги).
- 14) Наведіть порядок розрахунку перехідних процесів операторним методом.
- 15) Поясніть застосування інтеграла Дюамеля для розрахунку перехідних процесів.
- 16) Порівняйте різні методи аналізу перехідних процесів.



## Розділ 3. Нелінійні електричні кола постійного і змінного струму

### 3.1. Загальні відомості і класифікація

Раніше розглядалися лінійні кола, що містили лише лінійні елементи, для яких залежність між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокосцепленнями) виражають лінійними функціями виду

$$u = R \cdot i, \quad \psi = L \cdot i, \quad q = C \cdot u. \quad (3.1)$$

Нелінійні електричні кола містять хоча б один нелінійний елемент ( $HE$ ), який не може бути описаний за допомогою постійних коефіцієнтів. У цьому випадку залежність (3.1) має вигляд:

$$u = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad \psi = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad q = f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (3.2)$$

тобто в загальному випадку спостерігається залежність не тільки від змінної, але й від швидкості її зміни. Якщо ж ми розглядаємо кола постійного струму, то залежність (3.2) – це нелінійна вольт-амперна характеристика (ВАХ) -  $u = f(i)$ , вебер-амперна характеристика -  $\psi = f(i)$  і кулон-вольтна характеристика -  $q = f(u)$ .

Нелінійні елементи поділяють на нелінійні опори, нелінійну індуктивність і ємності. При постійних струмах у якості нелінійних можуть розглядатися лише кола з резистивними елементами, ВАХ яких не є прямою.

Поділяються нелінійні елементи на дві групи.

1. Некеровані  $HE$  (лампа розжарювання, електрична дуга, нелінійні напівпровідникові опори, баретер, тиритові та вілітові опори). Вони мають одну симетричну ВАХ (лампа розжарювання – на рис. 3.1) або несиметричну ВАХ (діод – на рис. 3.2).

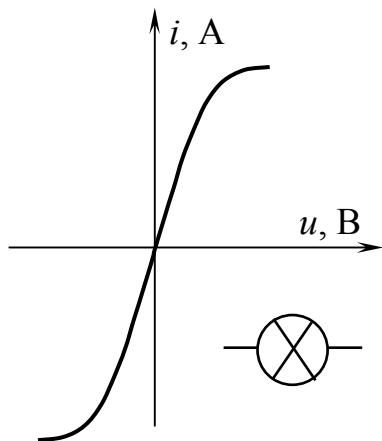


Рис. 3.1

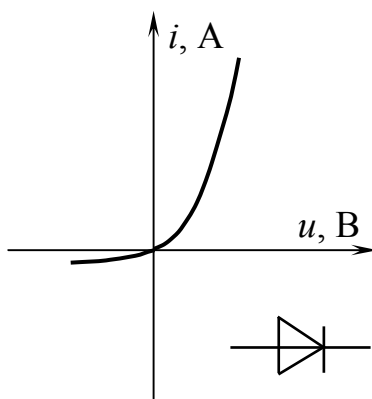


Рис. 3.2

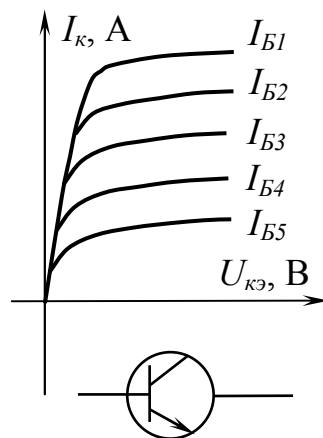
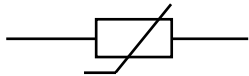


Рис. 3.3

2. Керовані *HE* (транзистори, тиристори) мають сімейства ВАХ, тобто окрім основного кола є ще і керуюче коло, впливаючи на напругу або струм якої можна змінити ВАХ основного кола (рис. 3.3 – вихідні статичні ВАХ біполярного транзистора для схеми зі спільним емітером).

Узагальнене позначення нелінійного елемента на схемах - 

### 3.2. Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму

З методів, які розглядалися раніше, для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують:

- метод двох вузлів;
- заміну декількох паралельно з'єднаних віток однією еквівалентною;
- метод еквівалентного генератора.

Для проведення розрахунку, як правило, графічного, повинні бути відомі ВАХ нелінійних елементів, що входять у схему.

### 3.3. Послідовне з'єднання нелінійних елементів

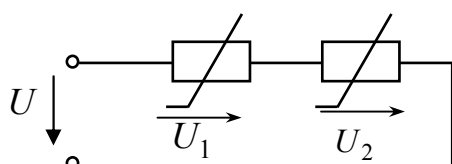


Рис. 3.4

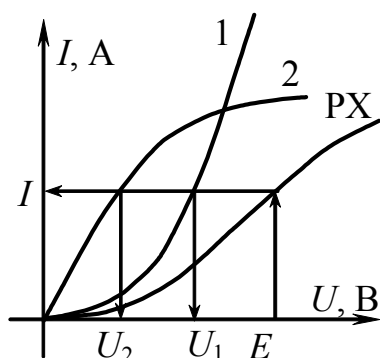


Рис. 3.5

Розрахунок (схема на рис. 3.4) базується на другому законі Кірхгофа:  $U = U_1 + U_2$ . Один з параметрів, а саме напруга на вході кола  $U$  або струм  $I$ , повинен бути заданим для визначення струму  $I$  (або напруги  $U$ ), а також напруг на елементах  $U_1$  і  $U_2$ . Оскільки з'єднання послідовне, то загальним параметром є струм. Довільно задаємося різними значеннями струму і додаємо напруги на нелінійних елементах при кожному конкретному значенні струму, тобто будуємо результуючу ВАХ (PX) – (рис. 3.5).

Розглянемо окремий випадок, коли послідовно з'єднані активний опір і нелінійний елемент. Тоді немає необхідності будувати результуючу характеристику:  $I = f(U_{HC} + I \cdot R)$ .

У цьому випадку розглядають рівняння в режимі холостого ходу ( $I = 0, U_{HЭ} = E$ ) і в режимі короткого замикання ( $U_{HЭ} = 0, I = \frac{E}{R}$ ). Потім будують пряму, що сполучає ці точки і перетинає ВАХ нелінійного елемента – рис. 3.6 ( $n$  – шукана точка, що визначає значення струму  $I$ ).

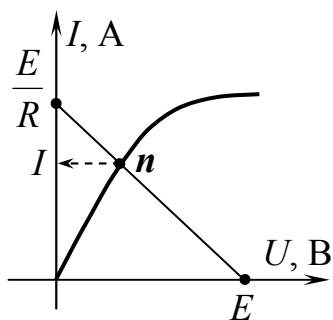


Рис. 3.6

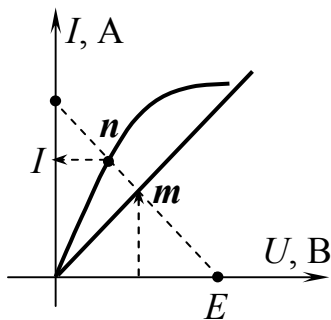


Рис. 3.7

Можна застосувати і наступний спосіб (рис. 3.7):

- побудувати ВАХ лінійного елемента за двома точками;
- відкласти за осями напруг значення  $EPC$   $E$ ;
- з середини величини  $E$  відновити перпендикуляр до його перетину з ВАХ лінійного

елемента (точка  $m$ );

- провести допоміжну пряму через точки  $E$  і  $m$ , яка перетне ВАХ нелінійного елемента ( $n$  – шукана точка, що визначає значення струму  $I$ ).

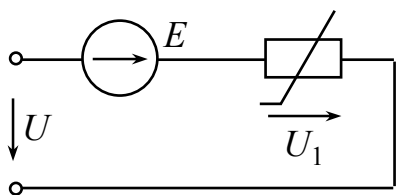


Рис. 3.8

Якщо з нелінійним елементом послідовно було включено джерело постійної  $EPC$  (рис. 3.8), то для отримання характеристики  $I = f(U)$ , необхідно змістити ВАХ нелінійного елемента  $I = f(U_1)$  на величину  $E$  вліво при вказаному на рис. 3.8 напрямі

$EPC$  (рис. 3.10). Таким чином, здійснюємо перехід до на схеми рис. 3.9.

$$U_1 - U = E \Rightarrow U = U_1 - E. \quad (3.3)$$

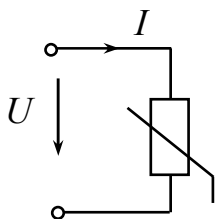


Рис. 3.9

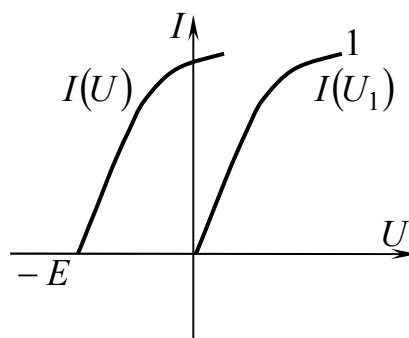


Рис. 3.10

### 3.4. Паралельне з'єднання нелінійних елементів

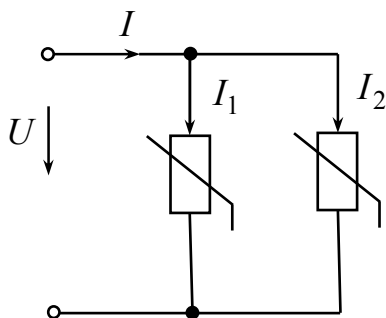


Рис. 3.11

При паралельному з'єднанні елементів загальним параметром є напруга. Тому результуючу ВАХ будують за першим законом Кірхгофа:  $I = I_1 + I_2$ .

Якщо була задана напруга  $U$ , а струми в паралельних вітках невідомі, то за напругою на вході кола  $U$  за ВАХ нелінійних елементів визна-

чають струми  $I_1$ ,  $I_2$ , а потім за першим законом Кірхгофа – загальний струм  $I = I_1 + I_2$ .

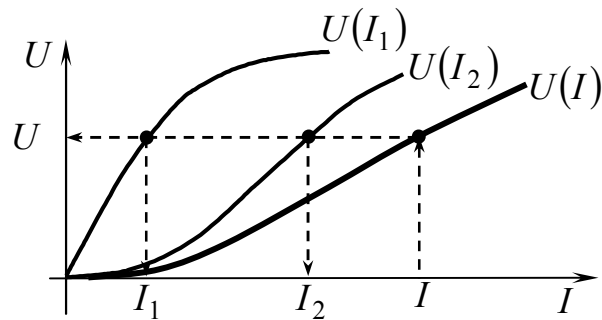


Рис. 3.12

Якщо був заданий струм  $I$ , то необхідно будувати результуючу характеристику  $U = f(I_1 + I_2)$ .

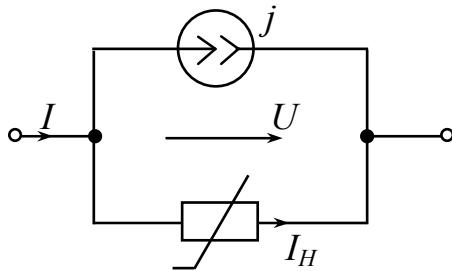


Рис. 3.13

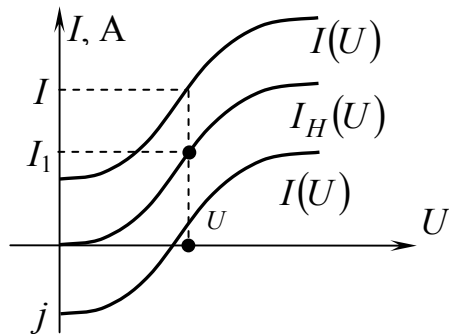


Рис. 3.14

Розглянемо окремий випадок – паралельно з нелінійним елементом включено джерело постійного струму  $j$ . У цьому випадку ВАХ ділянки кола, яке містить нелінійний елемент і джерело струму, знаходять зсувом характеристики нелінійного елемента  $I_H(U)$  на величину струму джерела у бік додатних (для схеми рис. 3.13) або від'ємних значень струму залежно від полярності джерела струму  $j$ :

$$I = I_H + j, \quad (3.4)$$

$$I = I_H - j. \quad (3.5)$$

### 3.5. Змішане (послідовно-паралельне) з'єднання нелінійних елементів

Для схеми рис. 3.15 після заміни двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів «2» і «3» одним еквівалентним нелінійним опором «2-3» одержуємо послідовне з'єднання елементів «1» і «2-3» - схема на рис. 3.16. При цьому повинна бути побудована результуюча ВАХ умовного НЕ «2-3» (див. розділ 3.4).

Подальший розрахунок схеми на рис. 3.16, якщо задана напруга  $U$ , проводимо так:

- будуюмо результуючу ВАХ послідовно з'єднаних елементів «1» і «2-3» - (рис. 3.17);
- визначаємо струм  $I_1$ , а також напруги на першому  $HE$   $U_1$  і на паралельних вітках  $U_{23}$ ;
- за напругою  $U_{23}$  і заданим ВАХ елементів «2» і «3» визначаємо струми в паралельних вітках  $I_2$  і  $I_3$ .

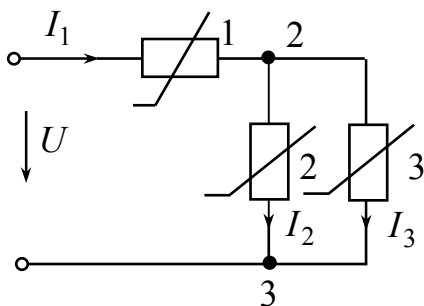


Рис. 3.15

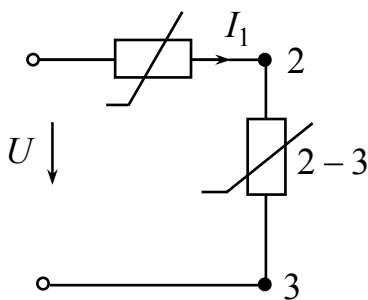


Рис. 3.16

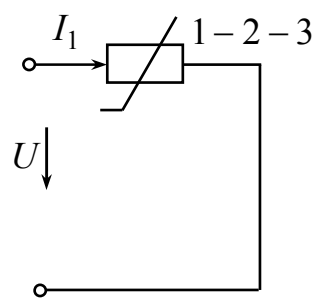


Рис. 3.17

### 3.6. Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами

Нехай для схеми на рис. 3.18 були задані значення  $E_1, E_2, E_3$  і ВАХ  $HE$ .

Треба визначити  $I_1, I_2, I_3$ .

Існують два способи вирішення:

- 1) графічний;
- 2) чисельний.

Графічний складається з декількох етапів.

1. Зсуваємо ВАХ кожного  $HE$  на величину заданої  $EPC$  у відповідній вітці (див. розділ 3.3).

2. Будуємо результуючу характеристику шляхом складання всіх ВАХ паралельних віток, отриманих на першому етапі (складання здійснюється за правилами складання ВАХ паралельних віток – див. розділ 3.4). Таким чином, на даному етапі одержуємо характеристику  $I(U)$ ,

де  $I = I_1 + I_2 + I_3$ . Ця ВАХ зсунута відносно початку координат на деяку величину  $E$ . Величину  $E$  можна розглядати як  $EPC$  еквівалентного кола, що складається з джерела  $EPC$   $E$  і послідовно з'єданого з ним результуючого нелінійного опору - рис. 3.19.

3. Визначаємо точку перетину характеристики  $I(U)$  з віссю напруг, яка і

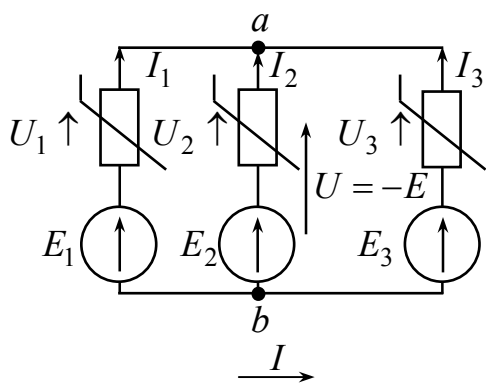


Рис. 3.18

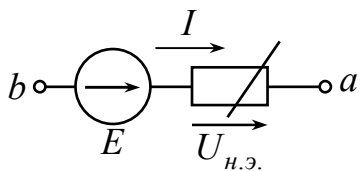


Рис. 3.19

є величиною напруги  $U_{ab}$ .

Пояснимо це. Сума струмів  $I_1 + I_2 + I_3 = I = 0$ , отже, в еквівалентному колі (рис. 3.19) струм відсутній. Тому  $(-U_{ab} + E) = 0$  і звідси  $U_{ab} = E$ .

4. Визначаємо напруги на нелінійних елементах початкової схеми (рис. 3.18):

$$U_1 = E_1 - U_{ab} = E_1 - E; U_2 = E_2 - U_{ab} = E_2 - E; U_3 = E_3 - U_{ab} = E_3 - E. \quad (3.6)$$

5. За ВАХ кожного  $HE$  визначаємо струми  $I_1, I_2, I_3$ .

Графічний метод вимагає великої точності виконання побудов.

Чисельний метод дає можливість вирішити задачу при побудові тільки одного графіка, а саме графіка залежності  $U_{ab} = f(\sum I)$ .

Розглянемо порядок розрахунку.

1. Довільно задаємося значеннями напруги  $U_{ab} = E'; E''; \dots$ .

2. Знаходимо значення напруг  $U_1, U_2, U_3$  на  $HE$  при конкретному довільному значенні  $U_{ab}$ .

3. Визначаємо значення струмів  $I_1 \div I_3$  за ВАХ  $HE$ .

4. Будуємо графік залежності  $\sum I = f(U_{ab})$ . Шукане значення  $U_{ab} = E$  відповідає точці  $\sum I = 0$ .

5. Визначаємо напруги на нелінійних елементах початкової схеми  $U_1, U_2, U_3$  за формулами (3.6).

6. За ВАХ кожного нелінійного елемента визначаємо струми  $I_1, I_2, I_3$ .

Розрахунок, який зручно вести за допомогою таблиці, проводимо до тих пір, поки величина суми струмів  $\sum I$  не змінить знак.

Таблиця 3.1 – Зведена таблиця розрахунку чисельним методом

| $U_{ab} = E$ | $U_1 = E_1 - E$ | $I_1$ | $U_2 = E_2 - E$ | $I_2$ | $U_3 = E_3 - E$ | $I_3$ | $\sum I$ |
|--------------|-----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|----------|
| $E'$         |                 |       |                 |       |                 |       |          |
| $E''$        |                 |       |                 |       |                 |       |          |
| ...          |                 |       |                 |       |                 |       |          |

### 3.7. Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора

Якщо в складному електричному колі (рис. 3.21) є тільки одна вітка, що містить  $HE$  (його ВАХ відома), то визначення струму в ній зручно виконувати методом еквівалентного генератора. З цією метою виділяємо вітку з  $HE$ , а всю решту частину

схеми розглядаємо як активний двополісник (рис. 3.22, рис. 3. 23). Для еквівалентної схеми рис. 3.23 знаходимо так звану напругу холостого ходу:

$$U_{abxx} = E_1 - I_{xx} \cdot R_1 \quad (3.7)$$

$$\text{де } I_{xx} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} \quad (3.8)$$

струм холостого ходу, якщо в схемі рис. 3.21 розімкнути вітку з  $R_{не}$ .

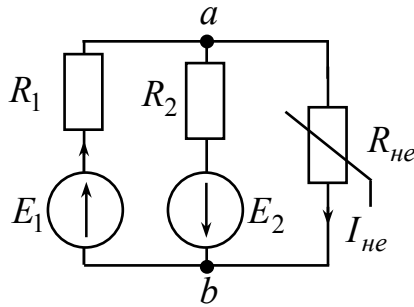


Рис. 3.21

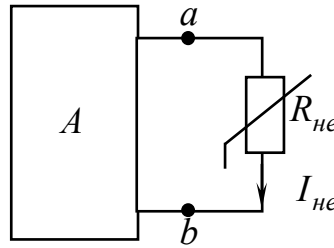


Рис. 3.22

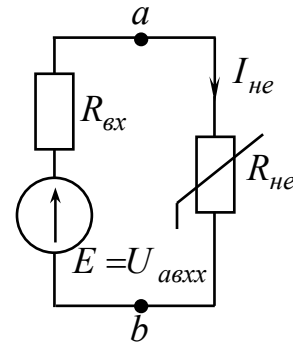


Рис. 3.23

$$R_{вх} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{— так званий вхідний опір.} \quad (3.9)$$

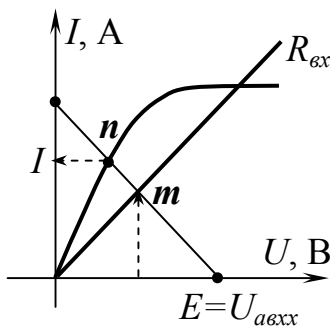


Рис. 3.24

За значенням  $R_{вх}$  будемо його лінійну характеристику опору, а струм  $HE$  визначаємо графічним способом (див. розділ 3.3) – (рис. 3.24).

### 3.8. Статичний і диференційний опір

Властивості  $HE$  можуть бути описані за допомогою його ВАХ, а також статичними і диференційними опорами.

Статичний опір ( $R_{ст}$ ) характеризує поведінку  $HE$  в режимі постійного струму. При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина  $R_{ст}$  змінюється.

Під *статичним* опором нелінійного елемента розуміють відношення напруги на нелінійному елементі до струму в ньому в будь-якій точці ВАХ цього елемента (рис. 3.25):

$$R_{ст} = \frac{U}{I} = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.10)$$

$$\text{де } m_R = \frac{m_U}{m_i}.$$

Під диференційним опором ( $R_d$ ) розуміють величину  $R_d = \frac{dU}{dI}$ , яка характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від даної точки неліній-

ної характеристики (рис. 3.25):  $R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta$ . (3.11)

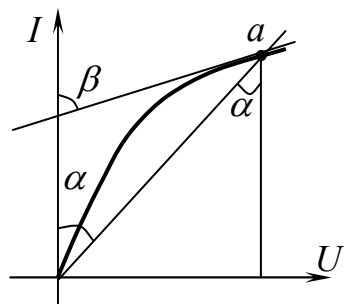


Рис. 3.25

Таким чином, величина  $R_D$  пропорційна тангенсу кута, який утворений дотичною до ВАХ в даній точці і віссю струму  $I$ .

При послідовному з'єднанні декількох  $HE$  диференційний опір результуючої характеристики при будь-якому струмі дорівнює сумі диференційних опорів  $HE$  при цьому ж струмі.

### 3.9 Заміна нелінійного елемента лінійним опором і ЕРС

Припустимо, діапазон роботи за напругою  $HE$  в колі на рис. 3.26 не виходить за межі такої ділянки його ВАХ, яка з певною мірою наближення може бути замінена прямою лінією (рис. 3.27). Будучи продовженою, ця пряма перетинає вісь абсцис в точці  $E_1$  або в точці  $E_2$ . Тоді  $HE$  може бути замінений джерелом постійної ЕРС і лінійним опором  $R_{D1} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_1$  (або  $R_{D2} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_2$ ), що дорівнює диференційному опору  $HE$  на прямолінійній ділянці. Після заміни коло (рис. 3.28 і рис. 3.29) розглядають як лінійне.

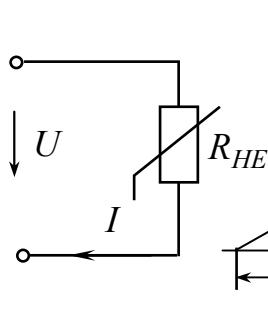


Рис. 3.26

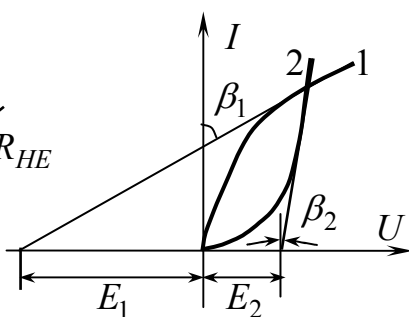


Рис. 3.27

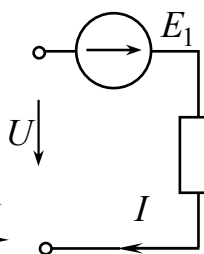


Рис. 3.28

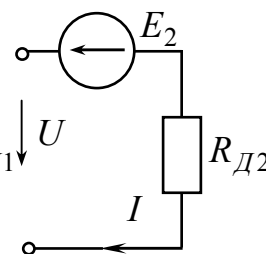


Рис. 3.29

### 3.10. Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму

Нелінійні елементи у ряді випадків додають електричним колам властивості принципово недосяжні в лінійних колах, такі, наприклад, як стабілізація струму, стабілізація напруги, посилення постійного струму та інші.

1. *Стабілізатор струму* (баретер)– це пристрій, який здатний підтримувати в навантаженні незмінний струм при зміні опору навантаження і при зміні напруги на вході схеми. Баретер є спіраллю, виконаною із сталевого дроту. Дріт знаходиться у скляній колбі, яка заповнена воднем при тиску 80 мм. рт. ст.



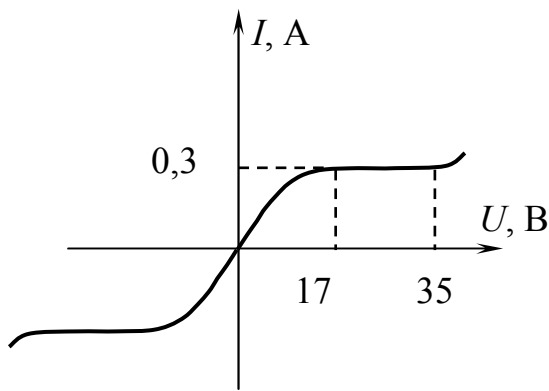


Рис. 3.30

ВАХ баретера представлена на рис. 3.30 і в певному діапазоні зміни напруги майже горизонтальна. Баретер застосовували для стабілізації струму розжарювання електронних ламп при зміні напруги живлення.

Приклад маркіровки цього пристрою - 0,3 Б 17-35:

0,3 – струм (А), який баретер здатний під-

тримувати постійним;

17-35 – ділянка зміни напруги (В) на ділянці баретування.

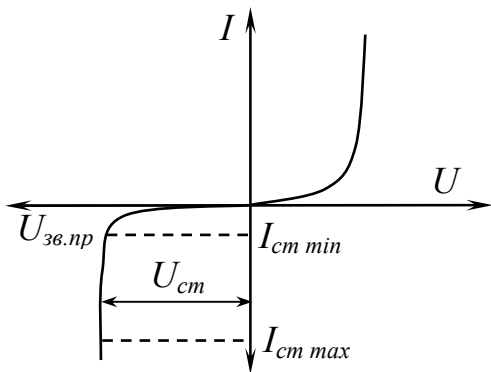


Рис. 3.31

2. Стабілізатор напруги (стабілітрон) – пристрій, напруга на виході якого підтримується постійним при зміні опору навантаження  $R_H$  або величини напруги на вході пристрою.

Коли зворотна напруга  $U_{зв}$  (ВАХ пристрою представлена на рис. 3.31) на стабілітроні досягає величини напруги пробою  $U_{зв.пр.}$  в пристрої відбувається лавинний пробій електронно-діркового

p-n переходу. При цьому зворотний струм різко зростає при майже незмінній зворотній напрузі. Зворотний струм не повинен перевищувати струму  $I_{ст max}$ , щоб стан електричного пробою не приводив до виходу з ладу пристрою.

Параметрами стабілітрона є:

- $U_{ст}$  - напруга стабілізації;
- $I_{ст min}$  - мінімальний струм, за якого пристрій гарантовано знаходиться в режимі стабілізації;
- $I_{ст max}$  - максимально допустимий струм через пристрій.

3. Підсилювач постійного струму – пристрій, величина приросту напруги на виході якого значно більше величини приросту напруги на вході. До складу підсилювача входять так звані активні (нелінійні) елементи – біполярні і польові транзистори. Пристрій і принцип роботи підсилювача розглядають в курсах «Промислова електроніка», «Електроніка та мікросхемотехніка».

### 3.11. Магнітні кола при постійному струмі (потоці)

#### Основні поняття і закони магнітних кіл

Основними величинами, що характеризують магнітне поле, є:

- магнітна індукція  $\vec{B}$  ( $T_n = (B \cdot \text{сек}) / \text{м}^2 = \text{Вб} / \text{м}^2$ ) - векторна величина, яка визначається за силовою дією магнітного поля на струм;
- намагніченість магнітного поля  $\vec{J}$  - магнітний момент одиниці об'єму речовини (А/м);
- напруженість магнітного поля  $H$  (А/м).

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H}, \quad (3.12)$$

де  $\mu_0$  - стала, що характеризує магнітні властивості вакууму (Гн/м);

$\mu$  - відносна магнітна проникність;

$\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$  - абсолютна магнітна проникність (Гн/м).

- магнітний потік  $\Phi$  (Вб = В · сек), який є потоком вектора магнітної індукції крізь поверхню:  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ , (3.13)

де  $dS$  - елемент поверхні  $S$ .

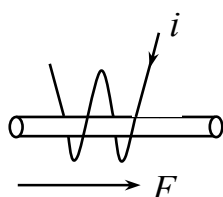


Рис. 3.32

Магнітне коло – сукупність магніторушійних сил (МРС), феромагнітних тіл або будь-яких інших тіл або середовищ, за якими замикається магнітний потік.

Магніторушійна сила (МРС) викликає магнітний потік в магнітному колі подібно тому, як ЕРС викликає струм в електричному колі:  $F = I \cdot w$ , (3.14)

де  $w$  - число витків котушки;

$I$  – струм, що протікає по котушці.

МРС є величиною спрямованою. Додатній напрямок МРС визначається за наступним мнемонічним правилом – якщо осердя охопити правою рукою, розташувавши пальці за струмом в обмотці, то відігнутий великий палець вкаже напрям МРС  $F$  (рис. 3.32).

Якщо значення вектора магнітної індукції  $\vec{B}$  є однаковим для всіх точок поперечного перетину  $S$  ділянки магнітного кола, а сам вектор  $\vec{B}$  перпендикулярний цьому перетину, то  $\Phi_K = B_K \cdot S_K$ .

Закон повного струму – циркуляція вектора напруженості  $H$  магнітного поля за замкнутим контуром дорівнює алгебраїчній сумі струмів ( $\sum I$ ), охоплених цим контуром:  $\oint H dl = \sum I$ , (3.15)

Якщо контур інтегрування охоплює  $w$  витків котушки із струмом  $I$ , то

$$I \cdot w = F = \oint H dl. \quad (3.16)$$

Контур інтегрування звичайно на практиці вибирають так, щоб він співпадав з лінією вектора  $\vec{H}$ , тоді інтеграл заміняють сумою добутків  $H_K \cdot l_K$ , де індекс  $k$  - номер ділянки, уздовж якої величини  $H$  і  $\mu$  приймаються незмінними. У цьому випадку одержуємо *другий закон Кірхгофа* для магнітного кола: у будь-якому замкнутому магнітному колі алгебраїчна сума *МРС* дорівнює алгебраїчній сумі магнітних падінь напруг на окремих ділянках:

$$F = \sum_{k=1}^n H_k l_k = U_{M1} + U_{M2} + \dots = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots \quad (3.17)$$

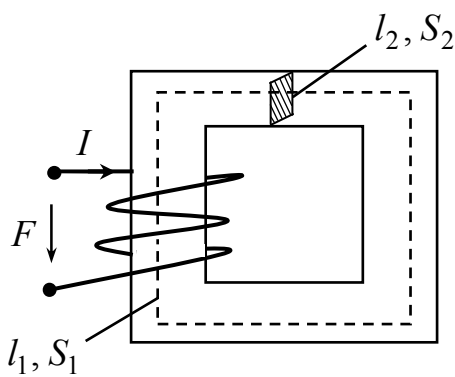


Рис. 3.33

Розглянемо закон повного струму для нерозгалуженого кола (рис. 3.33):

$$\sum F = (H_1 l_1 + H_2 l_2) \cdot 2 = I \cdot w. \quad (3.18)$$

Напруженість та індукція на першій ділянці:  $H_1 = \frac{B_1}{\mu_a};$

Напруженість і індукція на другій ділянці:  $H_2 = \frac{B_2}{\mu_a};$

$$\text{Отже: } F = \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_1}{S_1 \cdot \mu_a}}_{R_{M1}} + \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_2}{S_2 \cdot \mu_a}}_{R_{M2}}, \quad (3.21)$$

де  $R_{M1}$  і  $R_{M2}$  - магнітні опори першої й другої ділянки.

$$\text{Таким чином, } F = \Phi \cdot R_{M1} + \Phi \cdot R_{M2} = U_{M1} + U_{M2}. \quad (3.22)$$

Визначимо з формули (3.22) магнітний потік і отримаємо *закон Ома* для магнітного кола (зв'язок між магнітною напругою і магнітним потоком):

$$\Phi = \frac{F}{R_{M1} + R_{M2}}. \quad (3.23)$$

*Перший закон Кірхгофа* для магнітного кола: в будь-якому магнітному вузлі алгебраїчна сума магнітних потоків дорівнює нулю;

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (3.24)$$

### 3.12. Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму

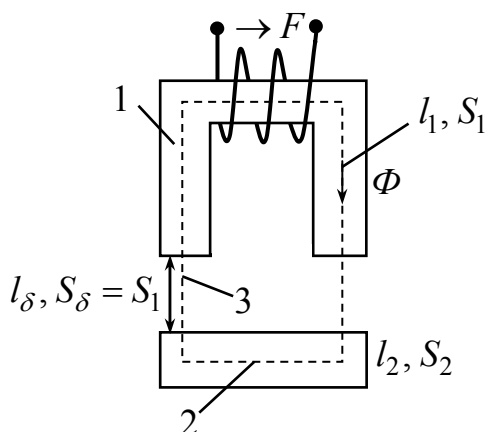


Рис. 3.34

Нехай будуть задані конфігурація і геометричні розміри магнітного кола (рис. 3.34), крива намагнічування феромагнітного матеріалу, а також магнітний потік  $\Phi$  (або індукція  $B$ ). На всіх ділянках - один і той же магнітний потік  $\Phi$ .

Розглянемо дві задачі.

1. *Пряма задача* - задано магнітний потік  $\Phi$ . Слід визначити МРС  $F$ .

Розбиваємо магнітне коло на ділянки з постійним перетином і визначаємо дов-

жини за середньою силовою лінією ( $l_k$ ) і площі поперечного перетину ( $S$ ) цих ділянок. Далі знаходимо:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = \frac{\Phi}{S_1} = B_1. \quad (3.25)$$

За кривими намагнічування знаходимо значення напруженості для ділянок магнітного кола ( $B_1 \rightarrow H_1; B_2 \rightarrow H_2$ ).

Напруженість магнітного поля повітряного зазору:

$$H_\delta = \frac{B_1}{\mu_0} \quad (\mu = 1). \quad (3.26)$$

$$\text{Тоді за другим законом Кірхгофа: } F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta. \quad (3.27)$$

2. *Зворотна задача* - задані геометричні розміри магнітного кола, криві намагнічування і МРС  $F = I \cdot w$ . Треба визначити магнітний потік та індукцію.

Розглянемо два способи розв'язання.

2.1. Довільно задаємося значенням магнітної індукції в повітряному зазорі  $B_\delta$ , рівними 0,5; 1,1; 1,2; 1,3 Тл. Для кожного з цих значень підраховуємо значення  $\sum H_K \cdot l_K$  (як для прямої задачі):

$$B_\delta = B_1 = \frac{\Phi}{S_1} \Rightarrow \Phi = B_1 \cdot S_1 \Rightarrow B_2 = \frac{\Phi}{S_2}. \quad (3.28)$$

Далі за кривими намагнічування і значенням  $B_1$  і  $B_2$  визначаємо  $H_1$  і  $H_2$ .

Таким чином, враховуючи, що  $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$ , за другим законом Кірхгофа значення

$$\text{МРС для кожної довільно заданої } B_\delta: F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta.$$

Будуємо залежність  $\Phi = f(F = \sum H_K l_K)$  та за заданим значенням  $F$  знаходимо потік  $\Phi$  (рис. 3.35). Розрахунок зручно вести за допомогою таблиці.

Таблиця 3.2

|   | Значення магнітної індукції |     |     |     |     |
|---|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $B_\delta$ , Тл                                     | 0,5                         | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 |
| $B_1 = B_\delta$ , Тл                               |                             |     |     |     |     |
| $\Phi = B_1 S_1$ , Вб                               |                             |     |     |     |     |
| $B_2 = \Phi / S_2$ , Тл                             |                             |     |     |     |     |
| $H_1$ , $\frac{A}{m}$                               |                             |     |     |     |     |
| $H_2$ , $\frac{A}{m}$                               |                             |     |     |     |     |
| $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$ , $\frac{A}{m}$ |                             |     |     |     |     |
| $\sum H_K \cdot l_K$ , А                            |                             |     |     |     |     |

2.2. Для того ж магнітного кола (рис. 3.34) складаємо схему заміщення - рис.3.36.

За характеристиками  $B(H)$ , наведеними у довідниках, будуємо нелінійні характеристики  $\Phi(F)$  для кожної ділянки магнітного кола, тобто помножуємо значення абсциси ( $H$ ) і ординати ( $B$ ) кривих намагнічування відповідно на довжину ( $l$ ) і площу поперечного перетину ( $S$ ) ділянки:

$$\begin{cases} B_1 \cdot S_1 = \Phi_1, & H_1 \cdot l_1 = F_1, \\ B_2 \cdot S_2 = \Phi_2, & H_2 \cdot l_2 = F_2. \end{cases}$$

Потім будуємо лінійну характеристику  $\Phi(F)$  для повітряного зазору, напруженість магнітного поля якого  $H = \frac{B}{\mu_0} \approx 0,8 \cdot 10^{-6} \cdot B$ ; підсумовуємо за віссю магнітного потоку  $\Phi$  усі три характеристики і за значенням  $F$  знаходимо потік  $\Phi$  (рис. 3.37).

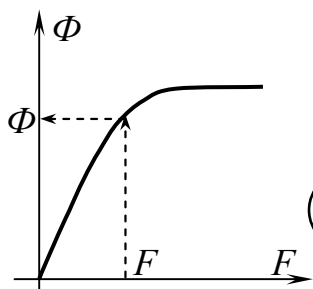


Рис. 3.35

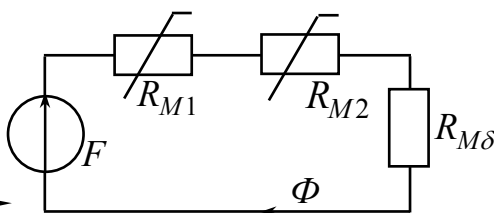


Рис. 3.36

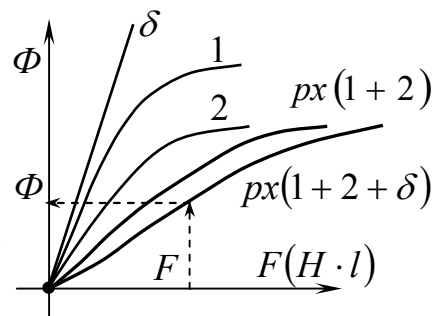


Рис. 3.37

### 3.13. Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму

У розгалуженому магнітному колі існує декілька магнітних потоків, які додаються і віднімаються на певних ділянках. Для розрахунку таких кіл застосовують усі методи, які розглядалися раніше. Розглянемо пряму і зворотну задачі.

1. *Пряма задача*, коли заданий магнітний потік на одній з ділянок кола,

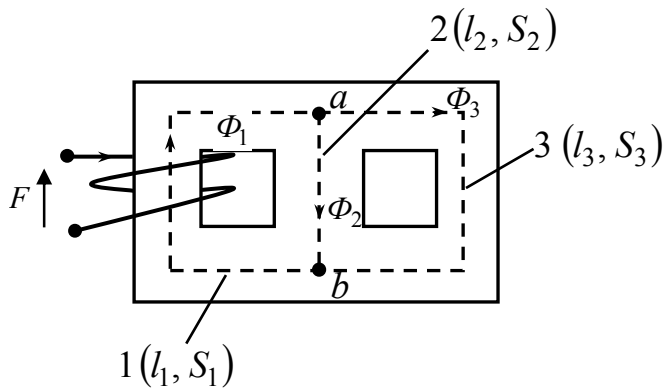


Рис. 3.38

припустимо  $\Phi_3$  (ділянка з перетином  $S_3$ ). Треба визначити  $F, \Phi_1, \Phi_2$ . За допомогою формули

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$$

за кривою намагнічування визначаємо значення напруженості на третій ділянці  $H_3$ . Тоді магнітна напруга між точками «а» і «в»:  $U_{mab} = H_3 \cdot l_3 = H_2 \cdot l_2$ . Далі

визначаємо за кривою намагнічування напруженість на другій ділянці:  $H_2 = \frac{U_{mab}}{l_2}$ , а отже і значення індукції  $B_2$  і магнітного потоку на цій ділянці:  $\Phi_2 = B_2 \cdot S_2$ .

Потік на першій ділянці за першим законом Кірхгофа -  $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ . Для визначення МРС  $F$  достатньо розглянути будь-який замкнутий контур, в який входить перша ділянка. Якщо  $\frac{\Phi_1}{S_1} = B_1$ , то за кривою намагнічування визначаємо  $H_1$ , а після за другим законом Кірхгофа – значення МРС:  $F = H_1 \cdot l_1 + U_{mab}$ .

2. Розглянемо *зворотну задачу*, коли задано значення  $F$  і треба визначити  $\Phi$ . Розглянемо два способи розв'язання.

2.1. Довільно задаємося значеннями  $\Phi_3$  на ділянці кола і знаходимо відповідні значення  $F$  за методикою прямої задачі (7÷8 значень). За отриманими

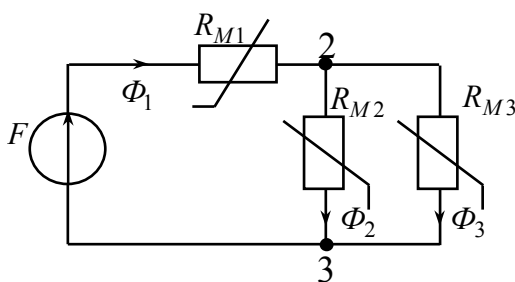


Рис. 3.39

даними будемо графік  $\Phi(F)$  та за заданим значенням  $F$  знаходимо значення  $\Phi$ .

2.2. Складаємо схему заміщення (рис. 3.39).

Для цієї схеми будемо результуючу характеристику, а саме:

- спочатку переходимо від характеристик

$B(H)$  для окремих ділянок магнітного кола до характеристик  $\Phi(F)$ ;

- складаємо нелінійні характеристики ділянок «2» і «3» за віссю  $F$  і отримаємо результуючу характеристику для паралельних віток ( $\Phi_{23}(F_{23})$ );

- остаточно за віссю  $\Phi$  додаємо характеристику  $\Phi_1(F_1)$  до результуючої характеристики  $\Phi_{23}(F_{ab})$  і отримаємо характеристику  $\Phi(F)$ . Отримана характеристика (подібна рис. 3.37) дозволяє за заданим значенням  $F$  знаходити значення потоку  $\Phi$ .

Примітка: індекси потоків  $\Phi$  (МРС  $F$ ) означають номери ділянок з відповідним магнітним опором.

### 3.14. Нелінійні електричні кола змінного струму.

#### Властивості нелінійних елементів при змінному струмі

1. При переході від однієї ділянки ВАХ до іншої статистичні й диференціальні опори не залишаються постійними і в загальному випадку не дорівнюють один одному, але можуть співпадати в окремих точках і на окремих ділянках ВАХ.

2. Нелінійний елемент може мати несиметричну ВАХ, отже, опір нелінійного елемента залежить від знака прикладеної напруги (тобто нелінійний елемент має вентильні властивості).

3. Нелінійні елементи бувають інерційними і безінерційними.

Якщо залежність між миттєвими значеннями напруги і струму лінійна, а залежність між діючими струмом і напругою нелінійна, то це *інерційний* нелінійний елемент (лампа розжарювання, баретер, напівпровідникові термоопори). Теплові процеси, як відомо, інерційні, тому залежність  $i(u)$  лінійна, а нелінійність характеристик  $I(U)$  деяких нелінійних опорів обумовлена зміною їх опору в результаті нагріву їх струмом (рис. 3.40).

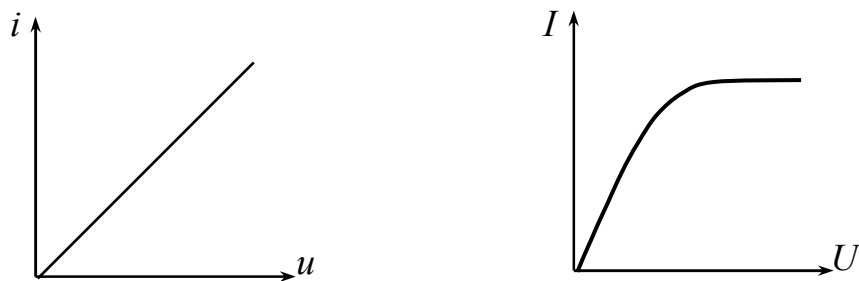


Рис. 3.40

Якщо обидві залежності  $i(U)$  і  $U(i)$  нелінійні – то це безінерційний елемент. *Безінерційний НЕ* має здатність перетворювати спектр коли-

вань, що впливають на нього. Тобто, якщо до НЕ підвести синусоїдну напругу, то струм через нього буде несинусоїдний, і навпаки - при проходженні через НЕ синусоїдного струму напруга на ньому буде несинусоїдною.

### 3.15. Апроксимація нелінійних характеристик

Апроксимація, як відомо, це заміна заданої нелінійної характеристики аналітичною функцією, яка з певною точністю виражає задану залежність. Ця процедура дозволяє досліджувати процеси у нелінійному елементі аналітично. Оскільки нелінійний елемент не є абсолютно стабільними і залежать від різних зовнішніх чинників, то на практиці не прагнуть до особливо точної апроксимації характеристик.

Розглянемо три способи апроксимації:

#### 1. Апроксимація ступенневим поліномом.

Якщо функція  $i(u)$  безперервна і має похідні  $i'(u_0)$ ,  $i''(u_0)$  і т.д., де  $u_0$  - значення функції  $u(t)$  при  $t = 0$ , то вона може бути подана рядом Тейлора:

$$i(u) = i(u_0) + \frac{u-u_0}{1!} \cdot i'(u_0) + \frac{(u-u_0)^2}{2!} \cdot i''(u_0) + \frac{(u-u_0)^3}{3!} \cdot i'''(u_0) + \dots = a_0 + a_1 \cdot (u-u_0) + \quad (3.29)$$

$$+ a_2 \cdot (u-u_0)^2 + a_3 \cdot (u-u_0)^3 + \dots, \text{ де } a_0 = i(u_0); a_1 = \frac{i'(u_0)}{1!}, a_2 = \frac{i''(u_0)}{2!} \text{ і т.д.}$$

Якщо  $u_0 = 0$ , то функція  $i(u)$  відповідає ряду Маклорена:

$$i(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + a_4 \cdot u^4 + \dots \quad (3.30)$$

Розглянемо приклад.

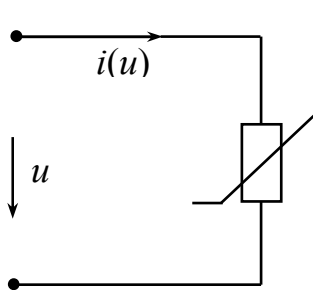


Рис. 3.41

На вхід кола (рис. 3.41) подана синусоїдна напруга  $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$ . ВАХ нелінійного елемента задана у

$$\text{вигляді аналітичної функції: } i = \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{3/2}.$$

Треба знайти закон зміни струму в колі.

Оскільки  $u_0 = 0$ , скористаємося рядом Маклорена:

$$i(u) = \left[ i(0) + i'(0) \cdot u + \frac{i''(0)}{2!} \cdot u^2 + \frac{i'''(0)}{3!} \cdot u^3 + \dots \right]. \text{ Обмежи-}$$

мося трьома членами ряду.

$$i(0) = 1; \quad i'(u) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{a}; \quad i'(0) = \frac{3}{2 \cdot a}; \quad i''(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{a};$$

$$i''(0) = \frac{3}{4 \cdot a^2}.$$

Отже:

$$i(u) = 1 + \frac{3}{2 \cdot a} \cdot u + \frac{3}{4 \cdot a^2 \cdot 2!} \cdot u^2 = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m}^{I_m^{(1)}} \cdot \sin \omega \cdot t + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin^2 \omega t.$$



Надалі можна скористатися тригонометричним співвідношенням:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t). \text{ Тоді:}$$

$$\begin{aligned} i(t) = & 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{I_m^{(1)}} + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) \right) - \dots = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{I_m^{(1)}} + \\ & + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2} - \overbrace{\frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t)}^{I_m^{(2)}} - \dots = \overbrace{\left( 1 + \frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \right)}^{I_m^{(0)}} + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{i^{(1)}}, \\ & - \overbrace{\frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin(2 \omega t + 90^\circ)}^{i^{(2)}} - \dots, \text{ А.} \end{aligned}$$

## 2. Апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат.

Цим методом користуються, якщо ВАХ нелінійного елемента задана у вигляді графіка. За допомогою ВАХ нелінійного елемента  $i(u)$  і графіка прикладеної напруги  $u(\omega t)$  будуємо графік  $i(\omega t)$ , який є функцією часу (рис. 3.41). Побудований графік  $i(\omega t)$  симетричний щодо осі абсцис, тому при розкладанні такої кривої у ряд Фур'є буде присутня нульова гармоніка і косинусні складові гармонік:

$$i(\omega t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \cdot \cos \omega t + I_m^{(2)} \cdot \cos 2 \cdot \omega t + \dots \quad (3.31)$$

Невідомі величини  $I^{(0)}$ ;  $I_m^{(1)}$ ;  $I_m^{(2)}$  знаходять за трьома ординатами характеристики  $i(\omega t)$ , які відповідають фазам прикладеної напруги:

$$\omega t = 0; \quad \omega t = \pi/2; \quad \omega t = \pi.$$

$$\text{Таким чином, якщо } \omega t = 0, \text{ то } i_1 = I^{(0)} + I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (3.32)$$

$$\text{якщо } \omega t = \frac{\pi}{2}, \text{ то } i_2 = I^{(0)} - I_m^{(2)}; \quad (3.33)$$

$$\text{якщо } \omega t = \pi, \text{ то } i_3 = I^{(0)} - I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (3.34)$$

де  $i_1$  - ордината точки, що позначена на графіку  $i(\omega t)$  цифрою «1».

$i_2$  - ордината точки, що позначена на графіку  $i(\omega t)$  цифрою «2».

$i_3$  - ордината точки, , що позначена на графіку  $i(\omega t)$  цифрою «3».

Розв'язуючи спільно рівняння (3.32), (3.33) і (3.34) знаходимо  $I^{(0)}$ ;  $I_m^{(1)}$ ;  $I_m^{(2)}$ :

$$I^{(0)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot [i_1 - i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] - \frac{1}{2} \cdot i_2 \quad (3.35)$$

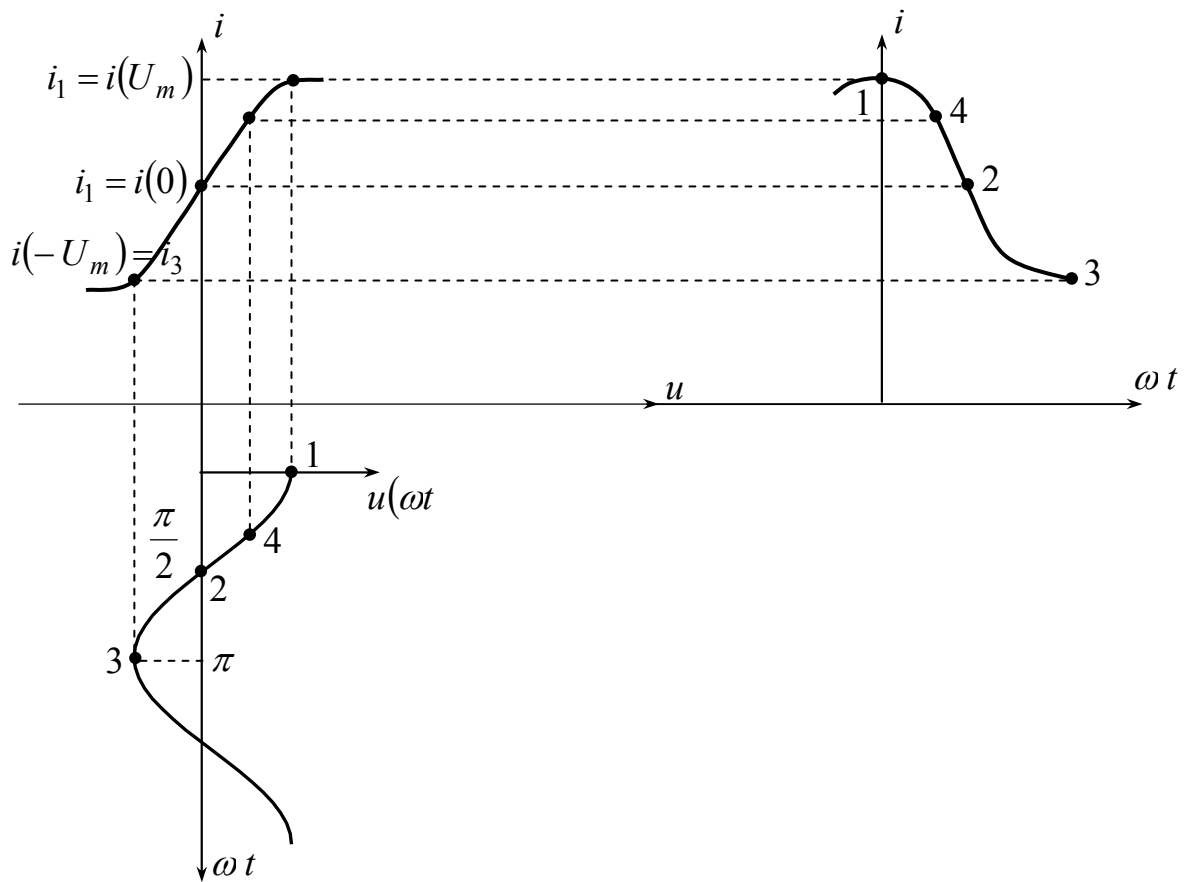


Рис. 3.41

### 3. Кусково-лінійна апроксимація.

Метод полягає у заміні заданої нелінійної характеристики ломаною прямою, яка має одну або декілька точок зламу. Така заміна дозволяє проводити розрахунок аналітично за допомогою лінійних рівнянь.

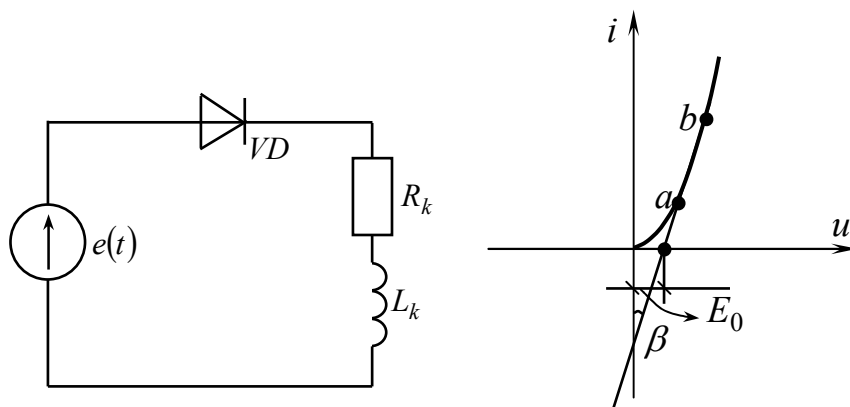


Рис. 3.42

Рис. 3.43

Якщо нелінійність характеристики незначна і задана ділянка роботи нелінійного опору, то така характеристика може бути замінена прямою без злому, а нелінійний елемент - джерелом постійної ЕРС і лінійним опором, рівним диференційному опору нелінійного елемента (див. розділ 3.9).

Розглянемо *приклад*.

Схема кола - на рис. 3.42, ВАХ нелінійного елемента – на рис. 3.43. Діапазон роботи нелінійного елемента за струмом такий:  $a < i(u) < b$ . До входу кола прикладена синусоїдна напруга  $e(t) = E_m \cdot \sin \omega t$ .

Проведемо заміну нелінійного елемента джерелом постійної ЕРС  $E$  і лінійним опором  $R_D$ , що дорівнює  $R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta$ ;  $m_R = \frac{m_U}{m_I}$  - (рис. 3.43).

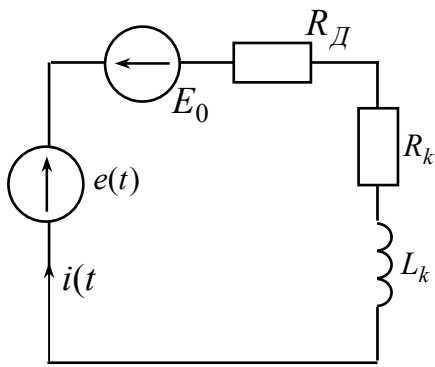


Рис. 3.44

Складемо схему заміщення – (рис. 3.44).

За методом накладання визначаємо струми у схемі від дії кожного джерела ЕРС. Потім підсумовуємо у вигляді функцій струми, знайдені на кожному етапі методу накладання і знаходимо несинусоїдний закон (ряд Фур'є) для струму.

Від дії ЕРС  $E^{(0)}$  струм дорівнює:

$$I' = I^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{R_D + R_k}.$$

Від дії ЕРС  $e(t)$  комплексна амплітуда струму дорівнює:

$$\underline{I}_m'' = \frac{E_m}{\sqrt{(R_D + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot e^{-j \cdot \varphi},$$

де  $\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{X_k}{R_D + R_k} \right)$  - кут зсуву фаз між ЕРС та струмом  $i''(t)$ ;

$X_k = \omega \cdot L_k$  - реактивний опір котушки;

$R_k, L_k$  - активний опір та індуктивність котушки відповідно.

Слід врахувати, що струм  $i''(t)$  відстає від напруги  $e(t)$ , а струм  $I^{(0)}$  не співпадає зі струмом  $i(t)$  за напрямом.

Записуємо ряд Фур'є для струму:

$$i(t) = -I^{(0)} + i''(t) = -\frac{E^{(0)}}{R_D + R_k} + \frac{E_m}{\sqrt{(R_D + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot \sin \left( \omega \cdot t - \operatorname{arctg} \frac{X_k}{R_D + R_k} \right).$$

### Контрольні запитання

- 1) Наведіть основні властивості нелінійних електричних кіл постійного струму.
- 2) Поясніть застосування графоаналітичного методу розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму: при послідовному, при паралельному і змішаному з'єднанні елементів.
- 3) Поясніть порядок розрахунку нелінійного кола постійного струму з двома вузлами.
- 4) Дати визначення статичного й диференційного опорів  $HE$ .
- 5) Поясніть, як проводять заміну  $HE$  лінійним опором і  $EPC$ .
- 6) Наведіть приклади практичного застосування  $HE$  постійного струму в електротехніці.
- 7) Наведіть основні поняття і закони магнітних кіл: закони повного струму та закони Кірхгофа.
- 8) Наведіть формальну аналогію між магнітними й електричними колами.
- 9) Поясніть порядок розрахунку нерозгалуженого магнітного кола при постійному струмі.
- 10) Поясніть порядок розрахунку розгалуженого магнітного кола при постійному струмі.
- 11) Наведіть деякі загальні властивості  $HE$  при змінному струмі.
- 12) Як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ графоаналітичним методом трьох ординат при розрахунку нелінійних кіл змінного струму.
- 13) Як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ ступеневим поліномом.
- 14) Як здійснюють кусково-лінійну апроксимацію.

## ПІСЛЯМОВА

*Отже Ви, шановний студенте, закінчили ознайомлення з нашим текстом лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки", частина II.*

*У ньому були розглянуті наступні теми:*

- 1) несинусоїдні періодичні струми й напруги в лінійних електричних колах;*
- 2) перехідні процеси в лінійних електричних колах;*
- 3) нелінійні електричні кола постійного й змінного струму.*

*При цьому автори намагалися забезпечити доступність викладення матеріалу і дружність тексту до читача.*

*Звісно, текст лекцій не претендує на вичерпність у висвітленні основ сучасної теоретичної електротехніки. Але ми сподіваємося, він сповна відповідає поставленій меті – забезпечити набуття знань, що є необхідними для подальшого успішного вивчення усіх спеціальних електротехнічних дисциплін у вищому навчальному закладі і які в майбутньому повинні допомогти при вирішенні конкретних технічних завдань у Вашій практичній діяльності за основною спеціальністю. Особливо корисним текст лекцій буде для студентів заочної форми навчання.*

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст]: учебник / - Л.А. Бессонов; М.: Гардарики, 2002. – 640 с.
2. Зевеке, Г.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов [Текст] / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, Нетушил, Страхов; М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
3. Паначевний, Б.І. Загальна електротехніка: теорія і практикум: Підручник [Текст] / Б.І. Паначевний, Ю.Ф. Свєргун; К.: Каравела, 2004. - 440 с.
4. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. Учебник [Текст] / Л.А. Бессонов; М.: Гардарики, 2001 г. – 317 с.
5. Рибалко, М.П. Теоретичні основи електротехніки: Лінійні електричні кола: Підручник [Текст] / В.О. Есауленко, В.І. Костенко; Донецьк: Новий світ, 2003. – 513 с.
6. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса [Текст] / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин; Издательство «Питер», 2004 г. (Том 1 – 462 с., Том 2 – 575 с., том 3 – 376 с.).
7. Воробкевич, А.Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки. Частина 1. Навч. посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів [Текст] / В.С. Маляр, Р.Я. Совин, М.О. Соколовський, П.Г. Стахів, О.І. Шегедін, А.Ю. Воробкевича, О.І. Шегедіна; К.: «Магнолія Плюс», 2004. – 224 с.

## НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Текст лекцій з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки", частина II (для студентів усіх форм навчання напрямків 6.050701 - "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 - "Електромеханіка").

**Укладачі:** доц., к.т.н. Яна Борисівна Форкун,  
доц., к.т.н. Володимир Петрович Самошкін,  
доц., к.т.н. Геннадій Валентинович Капустін

**Редактор:** М.З. Аляб'єв

План 2009, поз.101Л

|  |                      |                    |
|--|----------------------|--------------------|
| Підп. до друку 04. 11. 2009 р.           | Формат 60x84 1/16    | Папір офісний      |
| Друк на ризографі                        | Умовн.-друк.арк. 3,8 | Обл.-вид. арк. 4,0 |
| Замовл. № .                              | Тираж 50 прим.       |                    |
| 61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12 |                      |                    |
| Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ |                      |                    |
| 61002, Харків, вул. Революції, 12        |                      |                    |