

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

С.О.Станішевський

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Модуль 3

Напрямок підготовки 6.060101 – «Будівництво»

Харків – ХНАМГ – 2009

УДК 517.2 + 517.51

С.О.Станішевський. *Вища математика. Конспект лекцій*. Модуль 3. Напря́м підготовки 6.060101 – «Будівництво». – Х.: ХНАМГ, 2009. – 84 с.

Конспект містить сімнадцять лекцій з вищої математики, зміст яких відповідає діючій програмі третього модуля дисципліни для бакалаврів денної та заочної форм навчання за фаховим напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво».

У лекціях наведено стислі теоретичні відомості з криволінійних та поверхневих інтегралів; числових та функціональних рядів; скалярних та векторних полів, які підкріплені відповідними прикладами й рисунками.

Рецензент: д-р ф.-м. наук, професор А.І.Колосов

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 10 від 7.05.2009 р.

ПЕРЕДМОВА

Цей конспект є третьою частиною циклу лекцій з вищої математики, які автор читає на факультеті інженерної екології міст Харківської національної академії міського господарства (ХНАМГ).

Програма курсу вищої математики для бакалаврів денної і заочної форм навчання за фаховим напрямом підготовки 6.060101 «Будівництво» складається з трьох модулів, що розраховані на 14,5 кредитів або 522 години.

Для денної форми навчання ці години розподіляються так: 138 – аудиторні лекційні заняття; 156 – аудиторні практичні заняття; 228 – самостійна робота по засвоєнню лекційного курсу. Для заочної форми навчання відповідно: 30 – лекції; 24 – практичні заняття і 468 – самостійна робота.

Кожний модуль містить залікові модулі, що охоплюють відповідні теми курсу.

Програма за третім модулем (122 години) містить такі розділи вищої математики, як криволінійні та поверхневі інтеграли; числові та функціональні ряди; скалярні та векторні поля.

Кожна лекція має відповідні приклади і рисунки, що дає змогу студентам усіх форм навчання самостійно опанувати курс вищої математики.

Нумерація рисунків і формул має дві цифри. Перша цифра вказує на порядковий номер теми, а друга – номер у темі.

Зауваження і пропозиції щодо конспекту лекцій надсилайте на кафедру вищої математики за адресою: м. Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ.

ТЕМА 1. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

ЛЕКЦІЯ № 1

Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива. Такі інтеграли називаються криволінійними. Розрізняють два види криволінійних інтегралів: першого роду і другого роду.

Криволінійний інтеграл першого роду. Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву $\overset{\cup}{AB}$ (рис. 1.1) і на цій кривій визначено обмежену функцію $f(x, y)$.

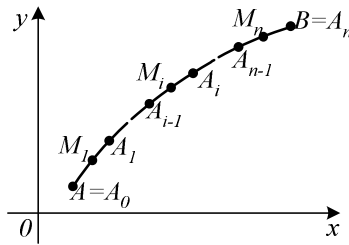


Рис. 1.1

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i} = \Delta \ell_i$ виберемо яку-небудь точку $M_i(x_i; h_i)$, $i = \overline{1, n}$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \ell_i, \quad (1.1)$$

де $\Delta \ell_i$ - довжина дуги. Сума (1.1) називається інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по кривій AB . Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta \ell_i$ - найбільша з дов-

жин окремих дуг $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$.

Якщо при $\lambda \rightarrow 0$ інтегральні суми (1.1) мають скінчену границю, яка не залежить від розбиття кривої $\overset{\cup}{AB}$ і вибору точок M_i , то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду (по довжині дуги)* від функції $f(x, y)$ по кривій $\overset{\cup}{AB}$ і позначають

$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dl$. Таким чином, за означенням

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dl = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i. \quad (1.2)$$

Якщо границя (1.2) існує, то функція $f(x, y)$ називається інтегрованою на кривій $\overset{\cup}{AB}$, сама крива $\overset{\cup}{AB}$ - контуром інтегрування, A - початковою, а B - кінцевою точками інтегрування.

Фізичний зміст. Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої AB розподілено масу m з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, то

$$m = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i = \int_{\overset{\cup}{AB}} \gamma(x, y) dl,$$

тобто з фізичної точки зору криволінійний інтеграл першого роду від невід'ємної функції вздовж деякої кривої дорівнює масі цієї кривої.

Геометричний зміст. При $f(x, y) \geq 0$ криволінійний інтеграл чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x, y)$ і паралельні вісі Oz , а напрямна збігається з кривою $\overset{\cup}{AB}$ на площині Oxy .

Якщо AB - не крива, а відрізок $[a; b]$, ($a < b$), що лежить на вісі Ox , то $f(x, y) = f(x, 0) = f(x)$, $Dl_i = Dx_i$ і криволінійний інтеграл першого роду стає звичайним визначеним інтегралом.

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то площа циліндричної поверхні чисельно дорівнюватиме довжині дуги $\overset{\cup}{AB}$, тому довжину L дуги $\overset{\cup}{AB}$ можна знайти за формулою $L = \int_{\overset{\cup}{AB}} dl$.

Обчислення криволінійних інтегралів першого роду. Нехай крива $\overset{\cup}{AB}$ задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $t \in [\alpha; \beta]$. Значення α відповідає точці A , а значення β - точці B . Вважатимемо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ разом з похідними $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функція $f(x, y)$ неперервна вздовж кривої $\overset{\cup}{AB}$. Для довільної

точки $M(x(t); y(t))$ кривої $\overset{\cup}{AB}$ довжину дуги l можна розглядати як функцію параметра $t: l = l(t)$, тоді $l = \int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau$.

Звідси, згідно з правилом диференціювання визначеного інтеграла по верхній межі, маємо $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

$$\text{Отже, } \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (1.3)$$

Зокрема, якщо крива $\overset{\cup}{AB}$ в прямокутних координатах задана рівнянням $y = y(x), a \leq x \leq b$, де функція $y(x)$ неперервна разом із своєю похідною $y'(x)$ на відрізку $[a; b]$, то формула (1.3) набирає вигляду

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (1.4)$$

Якщо крива $\overset{\cup}{AB}$ задається рівнянням $x = x(y), c \leq y \leq d$ і функції $x(y)$ і $x'(y)$ неперервні на відрізку $[c; d]$, то

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (1.5)$$

Досі ми вважали, що криволінійний інтеграл першого роду розглядається для плоскої кривої $\overset{\cup}{AB}$. Знайдені результати легко перенести на випадок просторових кривих.

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна на просторовій кривій $\overset{\cup}{AB}$, яку задано рівняннями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$, де функції $x(t), y(t), z(t)$ та $x'(t), y'(t), z'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл $\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl$ і справджується формула:

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (1.6)$$

Застосування криволінійного інтеграла першого роду.

В геометрії. Нехай у площині Oxy задано кусково-гладку криву

$\overset{\cup}{AB}$ замкнену чи незамкнену і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x, y)$, тоді:

а) площу S циліндричної поверхні, визначеної функцією $z = f(x, y)$, знаходять за формулою

$$S = \int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y) dl. \quad (1.7)$$

Приклад. Обчислити $\int_{\overset{\cup}{AB}} (x^2 + 2y^2) dl$, де $\overset{\cup}{AB}$ відрізок прямої від

точки $A(0; 1)$ до точки $B(1; 0)$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої: $y = 1 - x$. За формулою (1.4) обчислимо

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 2(1-x)^2) \sqrt{1+(-1)^2} dx &= \sqrt{2} \int_0^1 (x^2 + 2 - 4x + 2x^2) dx = \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 (3x^2 - 4x + 2) dx = \sqrt{2} (3x^3/3 - 4x^2/2 + 2x) \Big|_0^1 = \sqrt{2}(1 - 2 + 2) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Отже, площа циліндричної поверхні, визначеної еліптичним параболоїдом $z = x^2 + 2y^2$, вздовж відрізка прямої $y = 1 - x$ дорівнює $\sqrt{2}$.

б) довжину L кривої $\overset{\cup}{AB}$ визначають за формулою

$$L = \int_{\overset{\cup}{AB}} dl. \quad (1.8)$$

Приклад. Обчислити довжину першого витка гвинтової лінії: $x = a \cos t$; $y = a \sin t$; $z = at$, $a > 0$.

Розв'язання. Щоб пройти перший виток параметр $t \in [0, 2\pi]$. Скористаємося формулою (1.6), поклавши $f(x, y, z) = 1$. Тут: $x'_t = -a \sin t$; $y'_t = a \cos t$; $z'_t = a$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + a^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + a^2} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt = a\sqrt{2}t \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}a. \end{aligned}$$

В механіці. Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, тоді:

а) маса кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl; \quad (1.9)$$

б) координати x_c, y_c центра маси кривої L знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{\int_L x\gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int_L y\gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_x}{m}, \quad (1.10)$$

де M_x, M_y — статичні моменти кривої L відносно вісей Ox і Oy ;

Приклад. Знайти координати центра маси півкола однорідної щільності $\gamma(x, y) = \gamma_0$ радіуса $R = 2$.

Розв'язання. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 4$ залишимо у параметричній формі: $x = 2 \cos t$; $y = 2 \sin t$; $t \in [0; \pi]$. Скористаємося формулами (1.9) і (1.10). Оскільки дуга симетрична відносно вісі Oy то $x_c = 0$.

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\pi} \gamma_0 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + a^2} dt = \gamma_0 \int_0^{\pi} \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + a^2} dt = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{\pi} dt = 2\pi\gamma_0. \end{aligned}$$

$$y_c = M_x / m. \quad M_x = \int_0^{\pi} y\gamma_0 dl = 2\gamma_0 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2\gamma_0(-\cos t) \Big|_0^{\pi} = 4\gamma_0.$$

$y_c = 4\gamma_0 / (2\pi\gamma_0) = 2/\pi$. Отже, координати центра маси півкола: $(0; 2/\pi)$.

в) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої відносно вісей Ox, Oy і початку координат відповідно дорівнюють:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) dl; \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl; \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl. \quad (1.11)$$

Визначення статичних моментів і моментів інерції тіла були дані у попередніх лекціях.

У випадку, коли крива однорідна, тобто має сталу густину γ_0 , у формулах (1.9)-(1.11) слід вважати $\gamma(x, y) = \gamma_0$.

Приклад. Знайти момент інерції I_x відносно вісі Ox однорідної ($\gamma_0 = 1$) дуги кола $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, яка міститься в першій чверті.

Розв'язання. Скориставшись першою з формул (1.11), маємо

$$I_x = \int_L y^2 dl = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2\pi.$$

ЛЕКЦІЯ № 2

Криволінійний інтеграл другого роду. Криволінійний інтеграл другого роду визначається майже так само, як інтеграл першого роду.

Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву $\overset{\cup}{AB}$ і на цій кривій визначено обмежену і неперервну функцію $P(x, y)$. На відміну від інтегралів першого роду вважатимемо криву напрямною лінією, у якій точки A та B є відповідно початковою та кінцевою точками. Розіб'ємо криву $\overset{\cup}{AB}$ точками $A=A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n=B$ на n довільних частин, на кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \tag{1.12}$$

де Δx_i - проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox (рис.1.2).

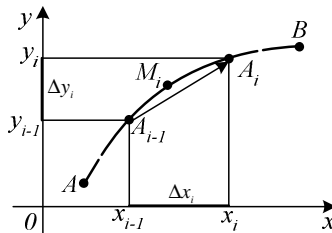


Рис. 1.2

Відмінність сум (1.1) і (1.12) очевидна.

Якщо при $l = \max Dl_i \rightarrow 0$, $1 \leq i \leq n$ інтегральні суми (1.12)

мають скінчену границю, яка не залежить ні від розбиття кривої $\overset{\cup}{AB}$, ні від вибору точок M_i , то цю границю називають криволінійним інтегралом від функції $P(x,y)$ по координаті x вздовж кривої $\overset{\cup}{AB}$ і позначають $\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y) dx$. Таким чином,

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i. \quad (1.12)$$

Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл від обмеженої і неперервної функції $Q(x,y)$ по координаті y :

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} Q(x,y) dy = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i, \quad (1.13)$$

де Δy_i - проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Oy (рис. 1.2). Суму

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y) dx + \int_{\overset{\cup}{AB}} Q(x,y) dy$$

називають **криволінійним інтегралом другого роду (по координатах)** або криволінійним інтегралом другого роду від функцій P і Q по кривій $\overset{\cup}{AB}$ і позначають символом

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} P(x,y) dx + Q(x,y) dy. \quad (1.14)$$

Функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ іноді позначатимемо через P і Q , а криволінійний інтеграл запишуватимемо у вигляді $\int_{\overset{\cup}{AB}} P dx + Q dy$.

Фізична інтерпретація криволінійного інтеграла другого роду.

Розглянемо задачу про роботу змінної сили на криволінійному шляху. Нехай матеріальна точка $M(x,y)$ під дією змінної сили $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де \vec{i} та \vec{j} - орти; $P=P(x,y)$, та $Q=Q(x,y)$ - проекції сили

на вісі Ox та Oy , рухається на площині Oxy вздовж кривої $\overset{\cup}{BC}$. Треба обчислити роботу A сили \vec{F} при переміщенні точки M з точки B в точку C (рис. 1.3).

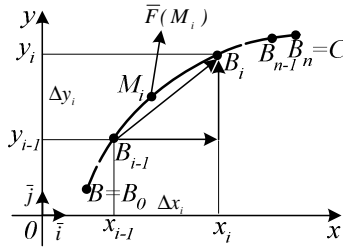


Рис. 1.3

Розіб'ємо криву $\overset{\cup}{BC}$ точками $B=B_0, B_1, \dots, B_{i-1}, B_i, \dots, B_n=C$ на n частин i на кожній окремій дузі $\overset{\cup}{B_{i-1}B_i}$ візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, де $i = \overline{1, n}$. На цю точку діє сила $\vec{F}(M_i) = P\vec{i} + Q\vec{j}$. Роботу ΔA_i , яку виконує ця сила при переміщенні точки по вектору $\vec{B_{i-1}B_i} = D x_i \vec{i} + D y_i \vec{j}$, можна знайти за допомогою скалярного добутку

$$\Delta A_i = \vec{F}(M_i) \cdot \vec{B_{i-1}B_i} = P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили \vec{F} при переміщенні матеріальної точки по дузі $\overset{\cup}{B_{i-1}B_i}$ довжиною Δl_i .

Робота сили вздовж усієї ламаної $B_0, B_1, \dots, B_{i-1}, B_i, \dots, B_n$ дорівнює

$$A_n = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

Цей вираз дає наближене значення шуканої роботи A . Перейшовши до границі при $l = \max \Delta l_i \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n$, знайдемо точне її значення:

$$A = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left(\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i \right) = \int_{\overset{\cup}{BC}} P dx + Q dy. \quad (1.15)$$

Отже, з погляду фізики криволінійний інтеграл другого роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Зведемо криволінійний інтеграл другого роду до визначеного інтеграла. Нехай

крива $\overset{\cup}{BC}$ задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $x \leq t \leq \beta$, де функції $x(t)$ та $y(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ та $y'(t)$, причому точці B кривої відповідає параметр α , а точці C - параметр β .

$$\text{Тоді, } \int_{\overset{\cup}{BC}} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt.$$

$$\text{Аналогічно, } \int_{\overset{\cup}{BC}} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Отже,

$$\int_{\overset{\cup}{BC}} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \quad (1.16)$$

Якщо крива $\overset{\cup}{BC}$ задана рівнянням $y=y(x)$, $a \leq x \leq b$, де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a; b]$, то з формули (1.16) дістанемо

$$\int_{\overset{\cup}{BC}} P dx + Q dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx. \quad (1.17)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x=x(y)$, $c \leq y \leq d$, причому функції $x(y)$ та $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c; d]$, то з формули (1.16) дістанемо

$$\int_{\overset{\cup}{BC}} P dx + Q dy = \int_c^d [P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y)] dy. \quad (1.18)$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду можна поширити й на просторові криві. Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій $\overset{\cup}{BC}$, яку задано функціями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, які із своїми похідними $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[a; b]$. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$A = \int_{\overset{\cup}{BC}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

який обчислюємо за формулою:

$$A = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \quad (1.19)$$

Формули (1.16)-(1.19) використовуються для обчислення криволінійних інтегралів другого роду. З цих формул випливає, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла.

На відміну від криволінійного інтеграла першого роду криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку шляху інтегрування і при зміні його на протилежний він теж змінює свій знак на протилежний.

Часто доводиться розглядати криволінійні інтеграли по замкненому контуру, тобто контуру інтегрування, в якому початкова та кінцева точки збігаються (мова йде про замкнені контури без точок самоперетину).

Для замкненого контуру існує лише два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контуру). Іншими словами, контур вважається позитивно орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по позитивно орієнтованому контуру L позначають так:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Застосування криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення площі плоскої фігури. Нехай на площині задана правильна область $D: \{y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$ (рис. 1.4).

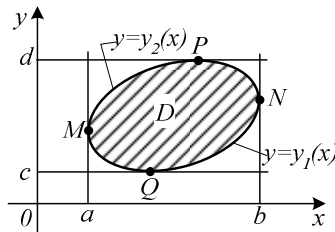


Рис. 1.4

Межу області D , тобто криву $PNQM$, позначимо через L і вважаємо позитивно орієнтованою. Розглянемо інтеграл $\oint_C y dx$ і зведемо

його до визначених інтегралів:

$$-\oint_L y dx = -\left(\int_{MQN} y dx - \int_{NPM} y dx \right) = \int_{NPM} y dx - \int_{MQN} y dx = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx = S,$$

де S — площа області D .

Отже, площу S правильної області D , обмеженої кривою L , знаходять за формулою $S = -\oint_L y dx$. (1.20)

Аналогічно можна довести, що $S = \oint_L x dy$. (1.21)

Додаючи формули (1.20) і (1.21), дістаємо ще одну формулу для обчислення площі $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$.

Приклад. Знайти площу області, обмеженої еліпсом $x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Розв'язання. За формулою (1.22)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t) dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

Обчислення роботи. Роботу A сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, яка переміщає матеріальну точку вздовж кривої L , обчислюємо за формулою (1.15).

Приклад. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (y+x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ від точки $O(0;0)$ у точку $B(1;1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дані точки: $y = x$; $dy = dx$. Межа інтегрування: $x \in [0;1]$. Обчислюємо

$$\begin{aligned} \text{мо роботу: } A &= \int_{OB} yx dx + (y+x) dy = \int_0^1 (x^2 dx + (x+x) dx) = \\ &= \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left(x^3 / 3 + 2x^2 / 2 \right) \Big|_0^1 = 4 / 3. \end{aligned}$$

ЛЕКЦІЯ № 3

Інтегрування диференціальних рівнянь вигляду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \quad (1.22)$$

Нехай в деякій однозв'язній області D функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні, причому $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, тоді диференціальне рівняння (1.22) має назву диференціального рівняння у повних диференціалах. Загальний інтеграл цього рівняння $u(x,y)=C$ можна знайти за формулою:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy + C, \quad (1.23)$$

де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні $y=y_0$, а другий - при сталому значенні x .

$$\text{Або } u(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0,y)dy + C, \quad (1.24)$$

Де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні y , а другий – при сталому значенні $x = x_0$.

Початкову точку (x_0,y_0) в цих формулах треба вибирати так, щоб підінтегральні вирази якомога спрощувались.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(1/x + 1/y)dx + (2/y - x/y^2)dy = 0$$

Переконуємося, що це диференціальне рівняння у повних диференціалах.

$$\text{Розв'язання. Тут: } P(x,y) = 1/x + 1/y; \quad Q(x,y) = 2/y - x/y^2.$$

Знайдемо їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$. Вони рівні між собою. Отже, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Для її знаходження скористаємося формулою (1.23). Координати (x_0,y_0) – довільної початкової точки візьмемо рівними: $x_0 = 1$; $y_0 = 1$, (не можна брати $x_0=0$, $y_0=0$, бо в точці $(0;0)$ функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ не визначені). Отже, маємо

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_1^x P(x,1)dx + \int_1^y Q(x,y)dy + C = \\ &= \int_1^x (1/x + 1)dx + \int_1^y (2/y - x/y^2)dy + C = (ln|x| + x) \Big|_1^x + (2ln|y| + x/y) \Big|_1^y + C = \\ &= ln|x| + x - ln 1 - 1 + 2ln|y| + x/y - 2ln 1 - x + C = ln|x| + 2ln|y| + x/y + C_1, \end{aligned}$$

де $C_1 = C - 1$ – довільна стала.

Формула Гріна. Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області. Вона широко застосовується у математичному аналізі:

$$\iint_D (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) dx dy = \oint_L P dx + Q dy . \quad (1.25)$$

Тут D - деяка однозв'язна область, обмежена замкненим контуром L , а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\partial P / \partial y$ і $\partial Q / \partial x$ в цій області.

З формули (1.25) легко дістати формули для обчислення площі плоскої фігури: якщо у цю формулу підставити $P=-y$, $Q=0$, то дістанемо формулу (1.20); якщо $P=0$, $Q=x$ - формулу (1.21).

Приклад. Обчислити безпосередньо і за формулою (1.25) криволінійний інтеграл $I = \oint_L (x-2y)dx + (x+y)dy$,

де L - коло $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язання. Скористаємось параметричними рівняннями кола:

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Тоді $dx = -R \sin t dt$, $dy = R \cos t dt$, тому

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} ((R \cos t - 2R \sin t)(-R \sin t) + (R \cos t + R \sin t)R \cos t) dt = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 t) dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)) dt = 3\pi R^2 . \end{aligned}$$

За формулою Гріна:

$$P = x - 2y, \quad Q = x + y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1;$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 3 \iint_D dx dy = 3\pi R^2 .$$

Площа кола πR^2 , це $\iint_D dx dy$. Маємо такий самий результат.

Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Значення криволінійного інтеграла може залежати від того, якою саме кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування, а може і не залежати. Сформульована нижче теорема відбиває ті умови, за яких існує така незалежність.

Теорема. Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\partial P / \partial y$ і $\partial Q / \partial x$ в деякій замкненій однозв'язній області D . Тоді наступні чотири умови еквівалентні (виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання

останніх трьох):

- 1) для довільної замкненої кусково-гладкої кривої, що належить області D , $\oint_L Pdx + Qdy = 0$;
- 2) для довільних точок M та N області D значення інтеграла $\int_L Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D ;
- 3) вираз $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D ;
- 4) в усіх точках області D виконується рівність частинних похідних $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$.

Доводити цю теорему не будемо, а розглянемо приклад.

Приклад. Обчислити $J = \int y^2 dx + 2xy dy$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$ по лінії AB : а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання: а) підставимо у J замість y змінну x і замість dy величину dx , тому що $y = x$. Маємо:

$$J = \int_0^1 x^2 dx + 2x^2 dx = 3 \int_0^1 x^2 dx = 3x^3 / 3 \Big|_0^1 = 1;$$

б) підставимо у J замість y величину x^2 і замість $dy = 2xdx$, тому що $y = x^2$. Маємо:

$$J = \int_0^1 x^4 dx + 4xx^2 x dx = \int_0^1 5x^4 dx = 5x^5 / 5 \Big|_0^1 = 1;$$

в) підставимо у J замість y величину \sqrt{x} і замість $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

$$\text{Маємо: } J = \int_0^1 x dx + 2x \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

Отже, тут всі три відповіді однакові. Перевіримо, якій з умов теореми відповідає даний інтеграл. Він задовольняє другій умові. Перевіримо четверту умову. Тут: $P(x, y) = y^2$; $Q(x, y) = 2xy$; $\partial P / \partial y = 2y$; $\partial Q / \partial x = 2y$. Отже, виконується і четверта умова.

ТЕМА 2. ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

ЛЕКЦІЯ № 4

Числові ряди. Основні визначення. Нехай є нескінченна послідовність дійсних чисел: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, де $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Вираз:} \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (2.1)$$

називається *числовим рядом*. Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ є члени ряду. Якщо $u_i \geq 0$ для $i = \overline{1, n}$, то числовий ряд (2.1) звать додатним.

Сума ряду. Суму n перших членів ряду звать n -ю частковою сумою і позначають через S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Якщо існує скінченна границя $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то вона є сумою ряду і кажуть, що ряд збігається.

Якщо границя не існує, то кажуть, що ряд є розбіжним і суми не має.

Приклад. Розглянемо ряд $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$, який має назву "геометрична прогресія" з першим членом a ($a \neq 0$) і знаменником q .

Сума n перших членів геометричної прогресії дорівнює

$$S_n = (a - aq^n) / (1 - q), \text{ де } q \neq 1.$$

Зробимо аналіз цього виразу:

- якщо $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ коли $n \rightarrow \infty$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a / (1 - q) - aq^n / (1 - q)) = a / (1 - q).$$

У цьому випадку ряд збігається і його сума дорівнює: $S = a / (1 - q)$;

- якщо $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ коли $n \rightarrow \infty$ і тоді $S_n \rightarrow \pm \infty$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ не існує. Таким чином, коли } |q| > 1 \text{ ряд є розбіжним;}$$

- якщо $|q| = 1$, ряд має вигляд $a + a + a + \dots + a + \dots$

У цьому разі $S_n = na$, і отже $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує. Таким чином, ряд є розбіжним;

- якщо $q = -1$, ряд має вигляд $a - a + a - a + a - \dots$

У цьому разі $S_n = 0$, коли $n = 2k$, $S_n = a$, коли $n = 2k + 1$. Отже,

S_n границі не має - ряд є розбіжним.

Таким чином, геометрична прогресія являє собою числовий ряд, який збігається тільки тоді, коли $|q| < 1$.

Залишок ряду. Залишком ряду $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots$ після k -го члена є нескінченний ряд $u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+l} + \dots$, який утворюється з початкового ряду відкиданням перших k членів.

Властивості числових рядів:

- якщо числовий ряд збігається, то збігається і будь-який з його залишків і навпаки, із збіжності залишку впливає збіжність вихідного ряду;
- якщо числовий ряд збігається, то залишок ряду після k -го члена прямує до нуля коли $k \rightarrow \infty$;
- якщо члени збіжного ряду помножити на один і той самий множник C , то його збіжність не порушиться, а сума буде помножена

$$\text{на } C: \sum_{n=1}^{\infty} C u_n = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n;$$

- два збіжні ряди $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = a$,

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = b \text{ можна додавати (або віднімати)}$$

ти), і отриманий ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

також збігається, а його сума дорівнює $a \pm b$.

Необхідна ознака збіжності числового ряду. Загальний член u_n збіжного числового ряду прямує до нуля, коли $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Нехай ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ збігається, тобто має місце рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

де S - сума ряду (скінчене фіксоване число). Тоді має місце також рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$,

бо при $n \rightarrow \infty$ і $(n-1) \rightarrow \infty$. Віднімемо з першої рівності другу, маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$, або $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$. Але $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, що і треба було довести.

Підкреслимо, що розглянута ознака є тільки необхідною. Тобто, з того що n -й член числового ряду прямує до нуля, ще не випливає, що ряд є збіжним.

Достатня ознака розбіжності числового ряду. Якщо n -й член ряду не прямує до нуля коли $n \rightarrow \infty$, то ряд є розбіжним.

Приклад. Ряд $1/3 + 2/5 + 3/7 + \dots + n/(2n + 1) + \dots$ є розбіжним, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n/(2n + 1) = 1/2 \neq 0$.

Достатні ознаки збіжності додатних числових рядів.

Послідовність часткових сум додатного ряду - зростаюча послідовність. Додатний числовий ряд збігається, якщо послідовність часткових сум ряду обмежена зверху, і розбігається в протилежному разі (необхідна і достатня умова збіжності додатного числового ряду).

Збіжність (або розбіжність) додатного числового ряду часто встановлюють, порівнюючи даний числовий ряд з іншим, який напевно є збіжним (або розбіжним) числовим рядом. Наприклад, це ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad \{ \text{збіжний при } |q| < 1, \text{ розбіжний при } |q| \geq 1 \};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \quad \{ \text{збіжний при } \alpha > 1, \text{ розбіжний при } \alpha \leq 1 \}.$$

Ознака порівняння. Нехай маємо додатні числові ряди (2.1) і (2.2)

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (2.2)$$

Якщо, починаючи з деякого члена, для усіх $n > N$ виконується нерівність $u_n \leq v_n$, то із збіжності ряду (2.2) випливає збіжність ряду (2.1), а з розбіжності ряду (2.1) випливає розбіжність ряду (2.2).

Доведення першого твердження. Нехай S_n і σ_n відповідні n -і часткові суми (2.1) і (2.2) рядів. Тому що $u_n \leq v_n$, то $S_n \leq \sigma_n$. Оскільки ряд (2.2) збігається, то існує границя його часткової суми $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$.

З того, що члени рядів (2.1) і (2.2) додатні, випливає, що $\sigma_n < \sigma$ і тоді $S_n < \sigma$. Отже, часткові суми S_n обмежені. Але коли n зростає, то зростає і S_n . З того, що послідовність S_n зростаюча і обмежена, випливає, що вона має границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

причому очевидно, що $S \leq \sigma$. Тобто ряд (2.1) теж збіжний.

Приклад. Ряд $1 + 1/2^2 + 1/3^3 + 1/4^4 + \dots + 1/n^n + \dots$ збігається, бо його члени (починаючи з другого) не більше відповідних членів ряду

$$1 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \dots + 1/2^n + \dots,$$

який збігається. Це геометрична прогресія із $q = 1/2$. Його сума $S = 2$. Отже, перший ряд збігається і його сума не перевищує 2.

Доведення другого твердження. Нехай S_n і σ_n відповідні n -і часткові суми (2.1) і (2.2) рядів. Так як $u_n \leq v_n$, то $\sigma_n \geq S_n$. Оскільки ряд (2.1) розбігається то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Тобто ряд (2.2) теж розбігається.

Приклад. Ряд $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \dots + 1/\sqrt{n} + \dots$ є розбіжним, так як його члени (починаючи з другого) більше відповідних членів розбіжного гармонічного ряду $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots$

Гранична ознака порівняння. Якщо дано два ряди (2.1) і (2.2) з додатними членами, причому існує скінчена, відмінна від нуля границя: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n/v_n) = A$, то ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3}$.

Розв'язання. Порівняємо цей ряд із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n^3} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2}{n^3} = 2 \neq 0.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння даний ряд теж збіжний.

Ознака Д'Аламбера. Якщо для ряду (2.1) існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}/u_n) = d,$$

тоді: якщо $d < 1$, то - ряд збігається; якщо $d > 1$, то ряд розбігається; якщо $d = 1$, то відповіді на питання про збіжність або розбіжність ряду сформульована ознака не дає.

Доведення першого твердження. Нехай $d < 1$. Візьмемо число q , яке задовольняє нерівності $d < q < 1$. З визначення границі і відношення u_{n+1}/u_n випливає, що для $n \geq N$ буде мати місце нерівність $u_{n+1}/u_n < q$.

Запишемо цю нерівність, починаючи з номера N :

$$u_{N+1} < qu_N,$$

$$u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N,$$

$$u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2 u_{N+1} < q^3 u_N$$

.....

Розглянемо два ряди:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots;$$

$$u_N + qu_N + q^2 u_N + q^3 u_N + \dots$$

Другий ряд збігається як геометрична прогресія із знаменником $q < 1$. Члени першого ряду, починаючи з u_{N+1} менші відповідних членів другого ряду. За ознакою порівняння перший ряд теж збігається.

Доведення другого твердження. Нехай $d > 1$. Тоді з рівності $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1}/u_n) = d$ випливає, що, починаючи з деякого номера N , тобто для $n \geq N$, буде мати місце нерівність $u_{n+1}/u_n > 1$, або $u_{n+1} > u_n$ для усіх $n \geq N$. Але це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N+1$, і тому загальний член ряду не прямує до нуля.

За достатньою ознакою розбіжності, числовий ряд є розбіжним.

Приклад. Дослідити збіжність ряду:

$$1 + 1/(1 \cdot 2) + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3) + \dots + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) + \dots$$

Розв'язок. Тут: $u_n = 1/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = 1/n!$;

$$u_{n+1} = 1/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)) = 1/(n+1)!;$$

$u_{n+1}/u_n = n!/(n+1)! = 1/(n+1)$. Застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1) = 0 < 1. \text{ Ряд збігається.}$$

Приклад. Дослідити збіжність ряду: $2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} + \dots$

Розв'язок. Тут: $u_n = 2^n/n$; $u_{n+1} = 2^{n+1}/(n+1)$;

$u_{n+1}/u_n = (2^{n+1}/(n+1))/(2^n/n) = 2n/(n+1)$; Застосуємо ознаку

Д'Аламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n/(n+1) = 2 > 1$. Ряд є розбіжним.

ЛЕКЦІЯ № 5

Ознака Коші. Якщо для ряду (2.1) існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = d$,

тоді: якщо $d < 1$, то ряд збігається; якщо $d > 1$, то ряд розбігається; якщо $d = 1$, то відповіді на питання про збіжність або розбіжність ряду сформульована ознака не дає.

Доведення цієї ознаки аналогічне доведенню ознаки

Д'Аламбера.

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ збіжний, бо, за ознакою Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/2^n} = 1/2 < 1.$$

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (2n/(n+1))^n$ розбіжний, бо, за ознакою Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n/(n+1))^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n/(n+1) = 2 > 1.$$

Інтегральна ознака. Нехай члени ряду (2.1) додатні і не зростаючі, тобто $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$ і $f(x)$ - така неперервна незростаюча функція, що $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n$. Сформуємо невластний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx. \tag{2.3}$$

Числовий ряд (2.1) збіжний, якщо збігається невластний інтеграл (2.3) і розбіжний, якщо (2.3) розбігається.

Доведення. Зобразимо члени ряду геометрично, відкладемо на площині xOy точки, координатами яких є номери $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, членів ряду, це x_i , і значення функції $f(i)$, яким відповідають члени ряду u_1, u_2, \dots, u_n , це y_i (рис. 2.1). Через ці точки проведемо криву, яка є графіком неперервної незростаючої функції $y = f(x)$.

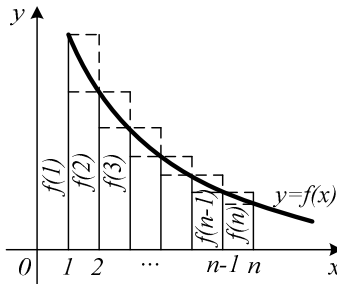


Рис. 2.1

Площа криволінійної трапеції дорівнює інтегралу $I_n = \int_1^n f(x) dx$.

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1; 2], [2; 3], \dots$, а висоти дорі-

вноють u_1, u_2, \dots , тоді $u_2 + u_3 + \dots + u_n < I_n < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$, або $S_n - f(1) < I_n < S(n) - f(n)$, звідки $S_n < f(1) + I_n$ і $S_n > f(n) + I_n$, де $S_n - n$ - та частинна сума ряду (2.1).

Нехай $\int_1^{\infty} f(x) dx$ збіжний. Це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = S \text{ і } S_n < f(1) + S, \text{ тобто послідовність } S_n$$

обмежена зверху і тому має границю. Отже ряд (2.1) збіжний.

Нехай тепер $\int_1^{\infty} f(x) dx$ розбіжний. Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$

і $S_n > f(n) + \infty$, тобто послідовність S_n необмежена. Ряд (2.1) розбіжний.

Приклад. Дослідити збіжність узагальненого гармонічного ряду

$$1/1^p + 1/2^p + 1/3^p + \dots + 1/n^p + \dots$$

Розв'язання. Тут $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо інтеграл

$$\int_1^N dx/x^p = \begin{cases} 1/(1-p)x^{1-p} \Big|_1^N = 1/(1-p)(N^{1-p} - 1), & p \neq 1, \\ \ln x \Big|_1^N = \ln N, & p = 1. \end{cases}$$

Напрямяючи N до нескінченності, з'ясуємо, коли збігається невластний інтеграл. На основі цього можна буде робити висновки про збіжність або розбіжність ряду при різних значеннях p .

1) $p > 1$, $\int_1^{\infty} dx/x^p = 1/(p-1)$ - інтеграл збіжний; отже, даний ряд збігається;

2) $p \leq 1$, $\int_1^{\infty} dx/x^p = \infty$ - інтеграл розбіжний; отже, даний ряд розбігається.

Одночасно доведено, що гармонічний ряд ($p = 1$) розбігається.

Ряди, в яких знаки членів строго чергуються.

Розглянемо тепер ряд, знаки членів якого строго чергуються, тобто ряд, довільні два сусідні члени якого мають різні знаки:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (2.4)$$

де $u_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Цей ряд досліджується на збіжність за допомогою

такої достатньої ознаки.

Ознака Лейбніца. Ряд (2.4) збіжний, якщо:

$u_{n+1} < u_n$, де $n = 1, 2, \dots$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. При цьому сума ряду додатна і не перевищує першого його члена.

Доведення. Розглянемо частинну суму з парним числом членів:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = \\ &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}). \end{aligned}$$

Кожна різниця в дужках додатна $u_n > u_{n+1}$, тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ зростає із зростанням n . Крім того, $S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n}] < u_1$, тобто послідовність обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, тоді $S \leq u_1$.

Обчислимо границю сум з непарним індексом.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

З рівностей $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$ випливає, що ряд (2.4) збіжний і сума його $S \leq u_1$.

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (2.4) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто $|S - S_n| \leq u_{n+1}$.

Дійсно, залишок збіжного ряду (2.4) є

$$r_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \dots$$

- це збіжний ряд, члени якого за знаком строго чергуються. За доведеним, абсолютна величина суми ряду не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $|r_n| \leq u_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n)^3} = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} + \frac{1}{12^3} - \frac{1}{16^3} + \dots$$

збіжний і знайти його суму з точністю до $0,001$.

Розв'язання. Очевидно, всі три умови ознаки Лейбніца вико-

нуються: 1) знаки членів даного ряду строго чергуються; 2) модулі його членів монотонно спадають; 3) n -й член ряду прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Отже, ряд збіжний і має певну суму S .

Для того щоб обчислити цю суму з точністю до $0,001$, треба взяти стільки його членів, щоб перший з наступних членів був за модулем менший від $0,001$. Тоді весь залишок ряду, починаючи з цього члена, буде менший від $0,001$. У даному разі маємо $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} > 0,001$;

$$\frac{1}{8^3} = \frac{1}{512} > 0,001; \quad \frac{1}{12^3} = \frac{1}{1728} < 0,001.$$

тобто, щоб знайти суму даного ряду з точністю до $0,001$, досить залишити перші два члени ряду, а решту відкинути. Таким чином,

$$S \approx S_2 = \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} = \frac{1}{64} - \frac{1}{512} \approx 0,015.$$

Знакозмінні ряди. Ряд називається *знакозмінним*, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. (Зрозуміло, що розглядається випадок, коли ряд містить нескінченну кількість додатних членів і нескінченну кількість від'ємних членів.)

Розглянуті в попередньому пункті ряди, в яких знаки чергуються, є, очевидно, окремим випадком знакозмінних рядів.

Візьмемо довільний знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (2.5)$$

де числа u_i можуть мати довільний знак. Одночасно розглянемо ряд, утворений з модулів ряду (2.5):

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots. \quad (2.6)$$

Для знакозмінних рядів справедлива така ознака збіжності.

Якщо останній ряд збіжний, то збіжний і ряд (2.5).

Ця ознака показує, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності знакододатних рядів.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{\sin \alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^3} + \dots,$$

де α - довільне дійсне число.

Розв'язання. Складемо ряд з модулів членів даного ряду

$$\frac{|\sin \alpha|}{1^3} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^3} + \dots + \frac{|\sin n\alpha|}{n^3} + \dots.$$

Оскільки $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ збіжний як узагальнений гармонічний, то за ознакою порівняння ряд з модулів збіжний, тому збіжний і даний ряд.

Абсолютна і умовна збіжності. Зауважимо, що ця ознака дає лише достатню умову збіжності і не є необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду, оскільки існують знакозмінні ряди, які є збіжними, а ряди, утворені з модулів їхніх членів, розбіжні. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ збіжний за ознакою Лейбніца, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ утворений з модулів його членів, розбіжний. У зв'язку з цим всі збіжні ряди можна розділити на абсолютно збіжні і умовно збіжні.

Знакозмінний ряд (2.5) називають абсолютно збіжним, якщо ряд (2.6) є збіжним.

Якщо ж ряд (2.5) збіжний, а ряд (2.6) розбіжний, то ряд (2.5) називають умовно збіжним. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ умовно збіжним.

ЛЕКЦІЯ № 6

Степеневі ряди. Степеневим рядом, називається функціональний ряд (членами якого є не числа, а функції) вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad (2.7)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ - дійсні числа, які називаються коефіцієнтами ряду, а $u_n(x) = x^n$ - степеневі функції.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$, де x_0 - дійсне число, називають функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (2.8)$$

Ряд (2.8) заміною змінної $x - x_0 = t$ зводиться до ряду вигляду (2.7).

Кожний степеневий ряд (2.7) збіжний в точці $x = 0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку. Детальніші відомості про область збіжності ряду

(2.7) дістанемо з наступної теореми.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (2.7) збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$.

Якщо при $x = x_1$ ряд (2.7) розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.

Доведення. Оскільки за умовою ряд (2.7) збіжний в точці x_0 , то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, отже, $a_n x_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_n x_0^n\}$ обмежена, тобто існує таке число M , що $|a_n x_0^n| \leq M, n = 0, 1, 2, \dots$.

Враховуючи, що для $|x| < |x_0|$ величина $q = |x/x_0| < 1$, маємо

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot |x/x_0|^n \leq M q^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Тобто модуль кожного члена ряду (2.7) не перевищує відповідного члена збіжної геометричної прогресії. Тоді за ознакою порівняння при $|x| < |x_0|$ ряд (2.7) абсолютно збіжний.

Нехай тепер ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ розбіжний, при $x = x_1$. Тоді ряд (2.7)

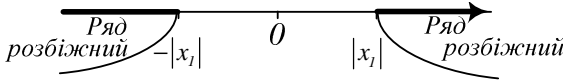
буде розбіжним і для всіх x , що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$. Справді, якби припустити, що він збіжний в якій-небудь точці x , що задовольняє цю нерівність, то за доведеним він був би збіжним і в точці x_1 бо $|x_1| < |x|$. А це суперечить тому, що в точці x_1 ряд розбіжний.

Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду.

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Дійсно, якщо x_0 - точка збіжності ряду (2.7), то весь інтервал $(-|x_0|; |x_0|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 2.2, а). Якщо x_1 - точка розбіжності ряду (2.7), то вся нескінченна напівпряма $(-\infty; -|x_1|)$ ліворуч від точки $-|x_1|$ і вся нескінченна напівпряма $(|x_1|; +\infty)$ праворуч від точки $|x_1|$ (рис. 2.2, б) складається з точок розбіжності цього ряду.



а



б

Рис. 2.2

Отже, для області збіжності степеневому ряду (2.7) можливі три випадки: 1) збіжний лише в точці $x = 0$; 2) збіжний при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$; 3) існує таке скінчене число $R \in (0; +\infty)$, що при $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ - розбіжний (рис.2.3).

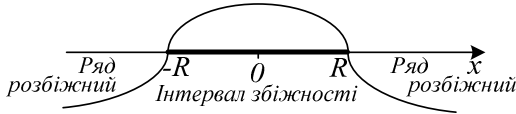


Рис. 2.3

Число R називають радіусом збіжності степеневому ряду, а інтервал $(-R; R)$ - інтервалом збіжності.

Вкажемо спосіб визначення радіуса збіжності степеневому ряду. Складемо ряд із модулів членів ряду (2.7): $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = b|x| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Згідно з ознакою Д'Аламбера, ряд (2.7) є абсолютно збіжним при $b|x| < 1$, або $|x| < 1/b$, і розбіжним при $b|x| > 1$, або $|x| > 1/b$.

Отже, інтервал $(-1/b; 1/b)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (2.7), а число $R = 1/b = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$ (2.9) - радіусом збіжності.

Аналогічно, скориставшись ознакою Коші, можна встановити, що $R = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|}$. (2.10)

Рівномірна збіжність. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *рівномірно збіжним* на множині D , якщо для довільного $\varepsilon > 0$

існує таке число $N = N(\varepsilon)$, яке залежить лише від ε і не залежить від x , що для всіх $x \in D$ і всіх $n > N$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$. Тут $r_n(x)$ - n -й залишок ряду.

Ознака Вейерштрасса. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно і рівномірно збіжний на множині D , якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такий, що $|u_n(x)| \leq a_n$ для будь якого $x \in D$ і $n = 1, 2, 3, \dots$.

Зауваження 1. Неважко переконатись, що коли $b=0$, то ряд (2.7) є абсолютно збіжним на всій числовій осі. У цьому разі вважають $R = +\infty$. Якщо ж $b = \infty$, то $R = 0$, і степеневий ряд має лише одну точку збіжності $x = 0$.

Зауваження 2. Питання про збіжність ряду при $x = \pm R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 3. Радіус збіжності ряду (2.8) визначається за тими самими формулами (2.9) і (2.10), що і ряду (2.7).

Інтервал збіжності ряду (2.8) знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Зауваження 4. На практиці інтервал збіжності степеневого ряду часто знаходять за ознакою Д'Аламбера або за ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду.

Приклад. Знайти область збіжності ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Розв'язання. Для даного ряду маємо

$$|u_n| = \frac{|x+3|^n}{n^2}; |u_{n+1}| = \frac{|x+3|^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+3|^{n+1} n^2}{(n+1)^2 |x+3|^n} = |x+3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x+3|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд буде абсолютно збіжним, якщо $|x+3| < 1$, звідки $-1 < x+3 < 1$, або $-4 < x < -2$. Таким чином, $(-4; -2)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R = 1$ - його радіус збіжності.

Дослідимо даний ряд на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = -4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$,

який є збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x = -2$ дістаємо узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

який також збіжний ($\alpha = 2 > 1$). Отже, областю збіжності даного ряду є відрізок $[-4; -2]$.

Властивості степеневих рядів:

- степеневий ряд абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізьку $[-\rho; \rho]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R; R)$;
- сума степеневого ряду неперервна всередині його інтервалу збіжності;
- якщо межі інтегрування a і β лежать всередині інтервалу збіжності $(-R; R)$ степеневого ряду, то на відрізьку $[a; \beta]$ цей ряд можна інтегрувати.

Зокрема, якщо степеневий ряд інтегрувати на відрізьку $[0; x]$, де $|x| < R$, то в результаті дістанемо новий степеневий ряд, який має той самий інтервал збіжності, що і даний ряд; при цьому, якщо $S(x)$ - сума

даного ряду, то $\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / (n+1) x^{n+1}$.

- якщо степеневий ряд має інтервал збіжності $(-R; R)$, то новий степеневий ряд, утворений диференціюванням даного степеневого ряду, має той самий інтервал збіжності $(-R; R)$; при цьому,

якщо $S(x)$ - сума даного степеневого ряду, то $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Таким чином, даний степеневий ряд можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно разів у будь-якій точці $x \in (-R; R)$. При цьому інтервалом збіжності кожного нового степеневого ряду є той самий інтервал $(-R; R)$.

Сформульовані властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад. Знайти суму $S(x)$ ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Розв'язання. За ознакою Д'Аламбера знаходимо інтервал збіжності. Позначимо суму даного ряду через $S(x)$, тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + K.$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$. Знайшовши суму прогресії, дістанемо

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Інтегруючи ці рівності на відрізку $[0; x] \subset (-1; 1)$, маємо:

$$\int_0^x S'(x) dx = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\text{звідки } S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctg x.$$

Отже, шукана сума $S(x) = \arctg x$ для кожного $x \in [-1; 1]$.

ЛЕКЦІЯ № 7

Ряд Тейлора. Досі ми вивчали властивості суми даного степеневого ряду. Вважатимемо тепер, що функція відома, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти цей ряд.

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (2.11)$$

в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$. У цьому разі кажуть, що функція $f(x)$ розкладена в степеневий ряд в околі точки x_0 або за степенями $x - x_0$. Знайдемо коефіцієнти ряду (2.11). Для цього, згідно з четвертою властивістю збіжного степеневого ряду 2.11 його послідовно диференціюватимемо і підставлятимемо в знайдені похідні замість змінної x її значення $x = x_0$:

$$f(x_0) = a_0;$$

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + K;$$

$$f'(x_0) = 1 \cdot a_1 = 1! a_1;$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + K;$$

$$f''(x_0) = 1 \cdot 2a_2 = 2! a_2;$$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 (x - x_0) + K ; \\
 f'''(x_0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 = 3! a_3 ; \\
 f^{IV}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 a_5 (x - x_0) + \dots ; \\
 f^{(4)}(x_0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 = 4! a_4 ; \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \\
 f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 a_n + (n+1)n(n-1)\dots \cdot 2 a_{n+1} (x - x_0) + K ; \\
 f^{(n)}(x_0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n a_n = n! a_n .
 \end{aligned}$$

Звідси знаходимо коефіцієнти степеневому ряду (2.11):

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} . \quad (2.12)$$

Ряд Маклорена.

Рядом Маклорена функції $f(x)$ називають степеневий ряд, який можна дістати з ряду (2.11) після обчислення його коефіцієнти (2.12) при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (2.13)$$

Розкладання елементарних функцій в степеневий ряд Маклорена:

- знаходимо похідні $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$;
- обчислюємо значення похідних в точці $x = 0$;
- записуємо шуканий ряд;
- знаходимо інтервал $(-R; R)$ його збіжності.

Якщо такий інтервал існує, то в цьому інтервалі функція $f(x)$ і сума степеневому ряду Маклорена збігаються. Отже, маємо (2.13). Нижче приведені степеневі ряди Маклорена і інтервали їх збіжності до відповідних елементарних функцій:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad (2.14)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad (2.15)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad (2.16)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + K, \quad m \in R, \quad x \in (-1; 1); \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1); \quad (2.18)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1; 1]; \quad (2.19)$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; 1]. \quad (2.20)$$

Доведення формул (2.14) - (2.20) виконайте самостійно.

Ці ряди використовуються при знаходженні степеневих рядів для інших функцій і їх наближених значень у точках, які належать відповідній області збіжності.

Приклад. Розкласти в степеневий ряд Маклорена функцію

$$f(x) = x^2 \ln(1-x^3).$$

Розв'язання. Поклавши у формулі (2.19) $(-x^3)$ замість x , маємо

$$\ln(1-x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \dots - \frac{x^{3n}}{n} - \dots, \quad x \in (-1; 1].$$

Далі помножимо обидві частини на x^2 і отримаємо шукане:

$$x^2 \ln(1-x^3) = -x^5 - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{11}}{3} - \dots - \frac{x^{3n+2}}{n} - \dots, \quad x \in (-1; 1].$$

Приклад. Розкласти в степеневий ряд Маклорена функцію

$$f(x) = (1-x^2)^{-1/2}.$$

Розв'язання. Поклавши у формулі (2.17) $(-x^2)$ замість x , при $m = -1/2$ дістанемо

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1; 1).$$

Приклад. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x) = \arcsin x$.

Розв'язання. Інтегруючи в межах збіжності обидві частини рівності, знайденої в попередньому прикладі, дістанемо:

$$\int_0^x (1-x^2)^{-1/2} dx = \arcsin x; \quad \int_0^x (1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dots) dx = x + \frac{1x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$\text{Отже, } \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Доведіть самостійно, що ця рівність вірна і в точках $x = \pm 1$.

Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів.

Наближені обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R; R)$ і $x_0 \in (-R; R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене - частинній сумі $S_n(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $r_n(x_0)$. Для рядів типу (2.4)

$$|r_n(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + u_{n+3}(x_0) + \dots| < |u_{n+1}(x_0)|.$$

Для знакозмінних і знакододатних рядів величину $r_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$|r_n(x_0)| \leq |u_{n+1}(x_0)| + |u_{n+2}(x_0)| + |u_{n+3}(x_0)| + \dots < a_1 + a_2 + a_3 + \dots = S,$$

де $|u_{n+1}(x_0)| \leq a_1$, $|u_{n+2}(x_0)| \leq a_2$, $|u_{n+3}(x_0)| \leq a_3$,

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - певний знакододатний збіжний ряд, сума якого S легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія).

Приклад. Обчислити з точністю до $0,001$ значення $\sin 18^\circ$.

Розв'язання. Переведемо градуси у радіани $x = \pi/10$ і скористаємося формулою (2.15):

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} + \dots$$

Дістали знакозмінний числовий ряд. Оскільки

$$\frac{\pi}{10} > 0,001, \quad \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} > 0,001, \quad \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} < 0,001,$$

то з точністю до $0,001$ (за теоремою Лейбніця) маємо наближене значення шуканої величини

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0,309.$$

Наближені обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно знайти інтеграл $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, який або не береться у елементарних функціях, або складний і незручний для обчислень. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, що рівномірно збігається на деякому відрізку, то для обчислення даного інтеграла можна скористатись властивістю почленного інтегрування цього ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

Приклад. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$.

Розв'язання. Формула Ньютона - Лейбніца тут не застосовна, тому що інтеграл від e^{-x^2} в елементарних функціях не береться.

Скориставшись рядом (2.14), маємо $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$

Цей ряд рівномірно збіжний на всій числовій осі, тому його можна почленно інтегрувати:

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx = x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots,$$

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\text{Отже, } \int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^{1/3} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 3^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 3^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 3^6} + \dots$$

Дістали знакозмінний числовий ряд. Оскільки

$$\frac{1}{3} > 0,001, \quad \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 3^3} = \frac{1}{81} > 0,001, \quad \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0,001,$$

то з точністю до 0,001 за теоремою Лейбніца маємо:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0,321.$$

Наближене інтегрування диференціальних рівнянь. Якщо інтегрування диференціального рівняння не зводиться до квадратур, то для наближеного інтегрування можна скористатись рядом Тейлора.

Нехай треба знайти частинний розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Припустимо, що шуканий розв'язок даного диференціального рівняння в околі точки x_0 , в якій задані початкові умови, можна розкласти в ряд Тейлора (2.11) з коефіцієнтами (2.12):

Нам треба знайти $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ... Значення $y(x_0) = y_0$ задано початковою умовою. Щоб знайти значення похідної $y'(x_0) = y'_0$, треба в початковому диференціальному рівнянні покласти $x = x_0$, $y = y_0$. Щоб знайти значення похідної $y''(x_0) = y''_0$ треба виконати дифере-

нціювання початкового рівняння, отже $y'' = f_1(x, y, y')$, а потім замість x , y і y' – підставити початкові умови: $x = x_0$, $y = y_0$, і знайдене значення y_0' похідної $y' = y_0'$.

Для знаходження значення третьої похідної знову диференціюємо останнє рівняння і покладемо: $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$. Отже, дістанемо $y'''(x_0) = y_0'''$ і т. д. Процес або обірветься на деякому коефіцієнті, або завершиться знаходженням загального закону побудови коефіцієнтів.

Зауваження 1. За допомогою ряду Тейлора можна знаходити наближений розв'язок диференціального рівняння будь-якого порядку: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Зауваження 2. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді ряду Тейлора, а також яка похибка цього розв'язку, ми не розглядаємо. Це не передбачено програмою.

Приклад. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розкладу у ряд Тейлора розв'язку диференціального рівняння: $y'' = xy' + y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді степеневого ряду Тейлора:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Для знаходження $y''(0)$ у початкове рівняння підставимо: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Маємо: $y''(0) = 0 \cdot 1 + 0 = 0$.

Послідовно диференціюючи дане рівняння і підставляючи відомі величини, маємо:

$$\begin{aligned} y''' &= y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \quad y'''(0) = 2; \\ y^{(4)} &= 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''', \quad y^{(4)}(0) = 0; \\ y^{(5)} &= 3y''' + y''' + xy^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)}, \quad y^{(5)}(0) = 8. \end{aligned}$$

Знайдено три відмінних від нуля члена шуканого ряду. Процес знаходження частинного розв'язку даного диференціального рівняння з відмінними від нуля членами степеневого ряду Тейлора припиняємо.

$$\text{Отже, } y(x) \approx \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

ЛЕКЦІЯ № 8

Гармонічні коливання. У природі і техніці дуже поширені процеси, які через певні проміжки часу повторюються. Такі процеси називаються періодичними. Прикладами періодичних процесів є механічні і електричні коливання, періодичні рухи в теорії пружності, радіотехніці, електротехніці і інше.

Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. Нагадаємо, функція $f(x)$ називається періодичною з періодом $T > 0$, якщо $f(x+T) = f(x)$, $x \in R$.

Найпростішим коливанням є просте гармонічне коливання, яке задається функцією $y(x) = a \sin(\omega x + \varphi_0)$, $x \geq 0$, де a – амплітуда, ω – частота, φ_0 – початкова фаза коливання.

Колівання, утворені внаслідок накладання кількох простих гармонік, називають складними гармонічними коливаннями.

Графік складного гармонічного коливання, яке складається з кількох простих гармонік, може значно відрізнитися від графіків самих гармонік.

Приклад. Побудувати графік складної гармоніки

$$S(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}.$$

Розв'язок. Функція $S(x)$ має період $T = 2\pi$. Послідовно побудуємо графіки функцій: $\sin x$; $\frac{\sin 3x}{3}$; $\frac{\sin 5x}{5}$, а потім їх складемо (рис. 2.4).

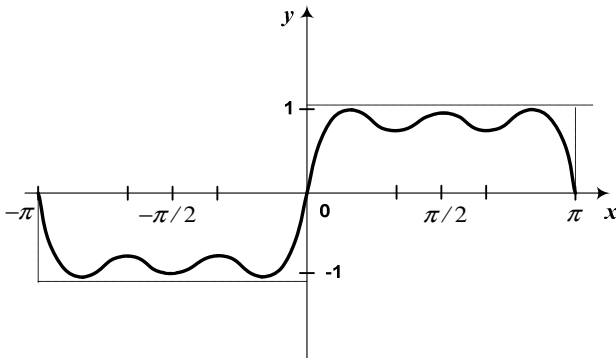


Рис. 2.4

Отже, постає задача, чи можна періодичний рух, заданий деякою періодичною функцією, подати як суму простих гармонік? Цю задачу розв'язав Фур'є (французький математик).

Ряди Фур'є. Ряд виду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.21)$$

називається тригонометричним рядом Фур'є, а дійсні числа a_0 , a_n , b_n ($n = 1, 2, \dots$) - його коефіцієнти. Припустимо, що ряд (2.21) на відрізку $[-\pi; \pi]$ рівномірно збіжний до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2.22)$$

Оскільки члени ряду (2.21) є неперервними функціями, то його сума $f(x)$ є також неперервною функцією.

Коефіцієнти Фур'є. Інтегруючи рівність (2.22) на відрізку $[-\pi; \pi]$ дістанемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx \right),$$

звідки

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0 \pi, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (2.23)$$

оскільки: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0$.

Множимо обидві частини рівності (2.22) на $\cos kx$ і інтегруємо їх на відрізку $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kxdx \right). \quad (2.24)$$

Проте: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kxdx = 0$, $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nxdx = 0$

(перевірте самостійно) тому з рівності (2.24) при $k = n$ дістанемо

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx$. Виконаємо інтегрування:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nxdx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi.$$

Отже, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = a_n \pi$, відкіля заходимо коефіцієнти:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Аналогічно, множимо обидві частини рівності (2.22) на $\sin kx$ і інтегруємо їх на відрізку $[-\pi; \pi]$, знайдемо коефіцієнти:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Вище припустили, що $f(x)$ – неперервна і інтегровна функція на відрізку $[-\pi; \pi]$. Числа a_0, a_n, b_n , які визначаються формулами (2.23), (2.25), (2.26), називаються коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$. Тригонометричний ряд (2.21), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають рядом Фур'є цієї функції і записують

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (2.27)$$

Знак відповідності \sim означає, що інтегрованій на відрізку $[-\pi; \pi]$ функції $f(x)$ поставлено у відповідність її ряд Фур'є.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Розв'язання. Дана функція кусково-монотонна на проміжку $(-\pi; \pi]$ (рис. 2.5), тому її можна розкласти у ряд Фур'є.

Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nxdx + \int_0^{\pi} x \cos nxdx \right) = \frac{\cos nx}{\pi^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx dx + \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = - \left. \frac{x \cos nx}{\pi n} \right|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

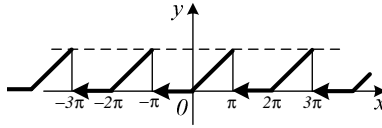


Рис. 2.5

Ряд Фур'є заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right).$$

Або $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right).$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x \neq \pm(2n-1)\pi$; $n \in N$, у яких сума ряду дорівнює $\pi/2$.

Ряд Фур'є для парних і непарних функцій. Нехай функцію $f(x)$ можна розкласти на відрізьку $[-\pi; \pi]$ у ряд Фур'є. Тоді парна функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{2.28}$$

де $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$; $\tag{2.29}$

непарна функція $f(x)$ має вигляд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $\tag{2.30}$

де $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$. $\tag{2.31}$

Формули (2.28) – (2.31) випливають з того, що коли функція $\varphi(x)$ інтегрована на відрізьку $[-l; l]$, то $\int_{-l}^l \varphi(x) dx = 2 \int_0^l \varphi(x) dx$, якщо $\varphi(x)$ парна і $\int_{-l}^l \varphi(x) dx = 0$, якщо $\varphi(x)$ непарна.

Зазначимо, що ряди (2.28) і (2.30) відображають характер фу-

нкції $f(x)$. Отже, ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси (парні функції), а ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси (непарні функції).

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичні функції

а) $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$;

б) $\varphi(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

Розв'язання. Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розкладені в ряди Фур'є.

а) оскільки функція $f(x)$ парна (рис. 2.6), то, користуючись формулами (2.28) і (2.29), дістанемо

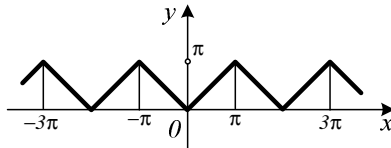


Рис. 2.6

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1);$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{p}{2} - \frac{4}{p} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).$$

Ця рівність виконується на всій числовій вісі, тому що задана функція неперервна для всіх дійсних значень x .

б) Функція $\varphi(x)$ непарна (рис. 2.7), тому, згідно з формулами (2.30) і (2.31), маємо

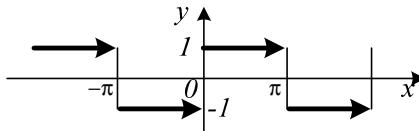


Рис. 2.7

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{pn} \cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{pn} ((-1)^n - 1);$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx = \frac{4}{p} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

Ця рівність справедлива у всіх точках $x \in (-\infty; +\infty)$, крім точок розриву. В точках розриву $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ сума знайденого ряду дорівнює нулю.

ЛЕКЦІЯ № 9

Ряд Фур'є для $2l$ -періодичної функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$ має період $2l$ ($l > 0$) і є на відрізку $[-l; l]$ кусково-монотонною.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x = \frac{lt}{\pi}$ і розглянемо функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$. Ця функція, визначена на відрізку $[-\pi; \pi]$ і кусково-монотонна на ньому.

Розкладемо функцію $\varphi(t)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ в ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (2.32)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt. \quad (2.33)$$

Повернемось до змінної x . При $t = \frac{\pi x}{l}$, $dt = \frac{\pi}{l} dx$ формули (2.32) і (2.33) набувають вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right), \quad (2.34)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx. \quad (2.35)$$

Ряд (2.34) і є рядом Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $2l$. Коефіцієнти цього ряду знаходять за формулами (2.35). Зауважимо, що всі теореми, які справджуються для рядів Фур'є 2π -періодичних функцій,

зберігаються і для рядів Фур'є $2l$ -періодичних функцій.

Приклад. Розкласти ряд Фур'є функцію

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad f(x+2) = f(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Розв'язання. Ця функція неперервна на всій числовій вісі, парна (рис. 2.8) і має період $2l = 2$, тому її можна подати через ряд Фур'є вигляду (2.34).

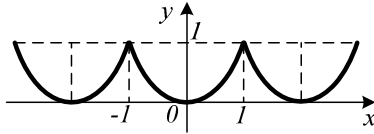


Рис. 2.8

Враховуючи, що задана функція парна, то всі $b_n = 0$. Згідно з формулами (2.34) і (2.35), маємо:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}; \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = 2 \int_0^1 x^2 \cos \pi n x dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{\pi} \sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \sin \pi n x dx \right) = -\frac{4}{\pi} \int_0^1 x \sin \pi n x dx = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{x}{\pi n} \cos \pi n x \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi n x dx \right) = \frac{4x}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

Виконали інтегрування частинами. Шуканий розклад в ряд Фур'є даної функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi n x, \quad \text{де } (-\infty < x < +\infty), \text{ або}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(-\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 4\pi x}{4^2} - \dots \right).$$

Ряд Фур'є для функцій заданих на відрізку. Нехай треба розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$ задану на відрізку $[0, \ell]$. Ми можемо довільним способом продовжити функцію на відрізок $[-\ell, 0]$, але так, щоб нова функція, утворена на відрізку $[-\ell, \ell]$ збігалась з функцією

$f(x)$. Найчастіше функцію продовжують парним або непарним чином. Це робиться за для того, щоб зменшити обсяг обчислювань. Оскільки парна функція розкладається в ряд Фур'є по косинусах, а непарна по синусах. Якщо функція загального положення, то треба знаходити всі коефіцієнти Фур'є.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Продовжимо функцію парним чином (рис. 2.9) і обчислимо коефіцієнти Фур'є. Тут $\ell = 2$.

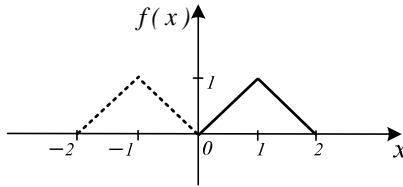


Рис. 2.9

$$a_0 = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + (2x - x^2/2) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + (4-2) - (2 - \frac{1}{2}) = 1.$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2x}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 -$$

$$- \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \frac{2(2-x)}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 + \frac{2}{\pi n} \int_1^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2 = -\frac{4}{\pi^2 (2n+1)}.$$

Отже, $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x) = x^2$ в інтервалі $[0, \pi]$.

Розв'язання. Продовжимо дану функцію на відрізок $[-\pi, 0]$ непарним чином, а потім періодично з періодом 2π на всю дійсну вісь (рис. 2.10).

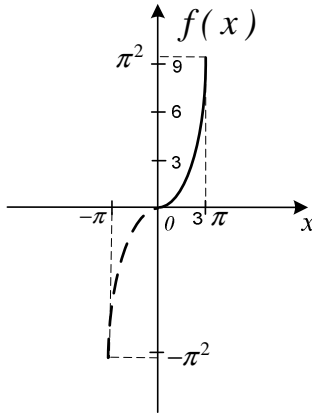


Рис. 2.10

Визначимо коефіцієнти Фур'є:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} x^2 \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^2 \cos n\pi}{n} + \frac{2}{n} \left(\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right); \quad a_n = 0.
 \end{aligned}$$

Отже,
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right) \sin nx.$$

Якщо записати декілька членів суми, то отримаємо:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 (\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots) - \right. \\
 &\quad \left. -4(\sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots) \right).
 \end{aligned}$$

ТЕМА 3. СКАЛЯРНІ ТА ВЕКТОРНІ ПОЛЯ

ЛЕКЦІЯ № 10

Скалярне поле. Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини u (M), називають скалярним полем. Інакше кажучи, скалярне поле - це скалярна функція u (M) разом з областю її визначення.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів даного електростатичного поля тощо.

Для того щоб задати скалярне поле, досить задати скалярну функцію u (M) точки M і область її визначення.

Якщо функція u (M) не залежить від часу, то скалярне поле називають стаціонарним, а скалярне поле, яке змінюється з часом, - нестаціонарним. Надалі розглядатимемо лише стаціонарні поля.

Якщо в просторі ввести прямокутну систему координат $Oxyz$, то точка M в цій системі матиме певні координати $(x; y; z)$ і скалярне поле u стане функцією цих координат:

$$u = u(M) = u(x, y, z).$$

Якщо скалярна функція u (M) залежить тільки від двох змінних, наприклад x і y , то відповідне скалярне поле $u(x, y)$ називають плоским; якщо ж функція u (M) залежить від трьох змінних: x , y і z , то скалярне поле $u(x, y, z)$ називають просторовим.

Геометрично плоскі скалярні поля зображають за допомогою ліній рівня, а просторові - за допомогою поверхонь рівня.

Похідна за напрямом. Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u(x, y, z)$. Візьмемо в ньому точку $M(x; y; z)$ і проведемо з цієї точки вектор \vec{l} , напрямні косинуси якого $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (рис. 3.1).

На векторі \vec{l} на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$.

$$\text{Тоді } \Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Обчислимо тепер приріст $\Delta_l u$ функції $u(x, y, z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора \vec{l} :

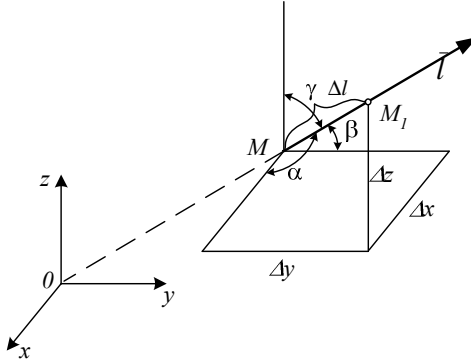


Рис. 3.1

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \rightarrow 0$, то цю границю називають похідною функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{l} і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Знайдемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція $u(x, y, z)$ диференційована в точці M . Тоді її повний приріст в цій точці можна записати так:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - нескінченно малі функції при $\Delta l \rightarrow 0$. Оскільки

$$\Delta x = \Delta l \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta l \cos \beta, \quad \Delta z = \Delta l \cos \gamma, \text{ то}$$

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma.$$

Перейшовши до границі при $\Delta l \rightarrow 0$, дістанемо формулу для обчислення похідної за напрямом:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (3.1)$$

Частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо \vec{l} збігається з одним із ортів \vec{i} , \vec{j} або \vec{k} , то похідна за напрямом \vec{l} збігається з відповідною частинною похідною.

Наприклад, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подібно до того як частинні похідні u'_x , u'_y , u'_z характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ показує швидкість зміни скалярного поля $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора \vec{l} .

Абсолютна величина похідної $\left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$ відповідає значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції $u(x, y, z)$ в напрямі \vec{l} (зростання чи спадання).

Очевидно, що похідна за напрямом $\vec{l}_1 = -\vec{l}$, який протилежний напрямку \vec{l} , дорівнює похідній за напрямом \vec{l} , взятій з протилежним знаком.

Справді, при зміні напрямку на протилежний кути α , β , γ зміняться на π , тому

$$\frac{\partial u}{\partial l_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\alpha + \pi) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\beta + \pi) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\gamma + \pi) = -\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напрямку на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на характер зміни поля. Якщо, наприклад, в напрямі \vec{l} поле зростає, то в напрямі $\vec{l}_1 = -\vec{l}$ воно спадає, і навпаки.

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x, y)$, то напрям вектора \vec{l} цілком визначається кутом $\alpha = (\vec{l}, \hat{Ox})$. Тому, поклавши в

формулі (3.1) $\gamma = \frac{\pi}{2}$ та $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha.$$

Приклад. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1; 2; -1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2; 4; -3)$. З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі.

Розв'язання. Знаходимо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси:

$$\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{Отже: } \cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Тепер обчислимо значення частинних похідних у точці A і скористаємось формулою (3.1):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_A = (2x - 2z)|_A = 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_A = 2y|_A = 4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_A = -2x|_A = -2;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_A = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} - 2 \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

Оскільки $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_A > 0$, то дана функція у даному напрямі зростає.

Гرادієнт. Нехай задано поле $u = u(x, y, z)$ і точку $M(x, y, z)$. У якому напрямі похідна $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M$ має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення і дається на основі поняття градієнта поля.

Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, називають градієнтом функції в цій точці і позначають $\overrightarrow{\text{grad}} u$. Отже,

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.2)$$

Властивості градієнта:

1. Похідна в даній точці за напрямом вектора \vec{l} має найбільше значення, якщо напрям вектора \vec{l} збігається з напрямом градієнта, причому

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\overrightarrow{\text{grad}} u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}. \quad (3.3)$$

Тобто, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному до напрямку градієнта, поле найшвидше зменшується.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Інакше кажучи, швидкість зміни поля у напрямі,

перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю, тобто скалярне поле залишається сталим.

3. Вектор-градієнт у кожній точці поля $u(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

4. Справедливі рівності:

$$\overline{\text{grad}}(u + v) = \overline{\text{grad}} u + \overline{\text{grad}} v ;$$

$$\overline{\text{grad}}(Cu) = C \overline{\text{grad}} u , \quad C = \text{const} ;$$

$$\overline{\text{grad}}(uv) = u \overline{\text{grad}} v + v \overline{\text{grad}} u ;$$

$$\overline{\text{grad}}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \overline{\text{grad}} u - u \overline{\text{grad}} v}{v^2} ;$$

$$\overline{\text{grad}} f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \overline{\text{grad}} u ,$$

які прямують з визначення градієнта.

Доведемо. наприклад, останню рівність. Маємо:

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}} f(u) &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \overline{\text{grad}} u . \end{aligned}$$

Решта доводиться аналогічно.

Приклад. Знайти значення i напрямні косинуси градієнта скалярного поля, яке подано функцією $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$, в точці $M_0(0; 1; 2)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні в точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (2x - 2yz) \Big|_{M_0} = -4 ; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (2y - 2xz) \Big|_{M_0} = 2 ;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = (2z - 2xy) \Big|_{M_0} = 4 .$$

За формулою (3.2) маємо: $\overline{\text{grad}} u \Big|_{M_0} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

Для знаходження напрямних косинусів останнього вектора обчислимо його довжину. Отже: $\left| \overline{\text{grad}} u \Big|_{M_0} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = 6 ;$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} ; \quad \cos \beta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} ; \quad \cos \gamma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} .$$

Приклад. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного

поля, яке подано функцією $u = x^y - z$, в точці $M_0(1; 2; 3)$.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні даної функції у точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = yx^{y-1} \Big|_{M_0} = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = x^y \ln x \Big|_{M_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = -1.$$

За обчисленими похідними запишемо вектор $\overline{\text{grad } u} \Big|_{M_0} = \vec{2i} - \vec{k}$.

Найбільшу швидкість зростання поля знаходимо за формулою (3.3)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)_{\max} = |\vec{2i} - \vec{k}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Користуючись визначенням градієнта, формулу для похідної за напрямом можна записати таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \overline{\text{grad } u} \cdot \vec{e}_\ell, \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial \ell} = \nabla u \cdot \vec{e}_\ell. \quad (3.4)$$

Градієнт функції $u(x, y, z)$ часто позначають також символом ∇u .

Таким чином, похідна функції у даному напрямі дорівнює скалярному добутку градієнта функції на одиничний вектор цього напрямку.

Згідно з визначенням скалярного добутку двох векторів формулу (3.4) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = |\overline{\text{grad } u}| \cdot \cos \varphi, \quad (3.5)$$

де φ – кут між векторами $\overline{\text{grad } u}$ і напрямом вектора \vec{e}_ℓ (рис. 3.2).

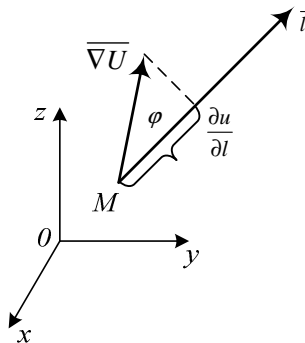


Рис. 3.2

Звідси випливає, що похідна за напрямом досягає найбільшого значення, коли $\cos \varphi = 1$, тобто при $\varphi = 0$. Це найбільше значення дорівнює $|\overline{\text{grad}} u|$. Звідси $|\overline{\text{grad}} u|$ – найбільше можливе значення похідної

$\frac{\partial u}{\partial \ell}$ у точці P , а напрям $\overline{\text{grad}} u$ збігається з напрямом променя, що виходить із точки M , вздовж якого функція змінюється найшвидше, тобто градієнт є напрямом найшвидшого зростання функції. У протилежному напрямі функція u буде найшвидше спадати.

Виберемо довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і запишемо рівняння поверхні рівня, що проходить через точку M_0

$$u(x, y, z) = u_0,$$

де $u_0 = u(x_0, y_0, z_0)$.

Запишемо рівняння нормалі до цієї поверхні в точці M_0 :

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}}. \quad (3.6)$$

Звідси градієнт функції $u(x, y, z)$ у точці M_0 є напрямним вектором нормалі.

Таким чином, градієнт функції $u(x, y, z)$ у кожній точці направлений по нормалі до поверхні рівня скалярного поля, що проходить через цю точку (рис. 3.3).

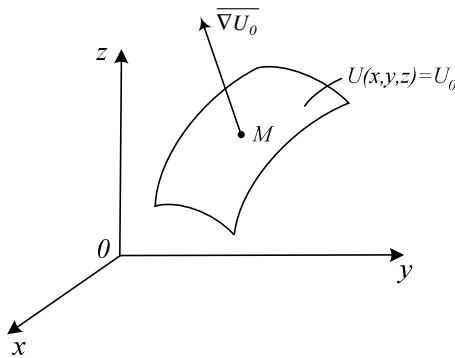


Рис. 3.3.

ЛЕКЦІЯ № 11

Векторне поле. Якщо кожній точці M тривимірного простору G ставиться у відповідність вектор \vec{a} , тоді кажуть про *векторне поле* (наприклад, поле швидкостей потоку рідини, яке описується в кожній точці вектором \vec{a} ; силове поле сонця; поле електричної напруги; поле магнітної напруги).

Векторне поле у декартових координатах має вигляд:

$$\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Для наочного зображення векторних полів використовують *лінії току* і *векторні трубки*. Це криві, в кожній точці яких вектор поля $\vec{a}(M)$ є дотичний вектор.

Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – параметричне рівняння векторної лінії, тоді її радіус-вектор дорівнює $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Вектор $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ напрямлений по дотичній до l . З означення векторної лінії вектори \vec{a} і $d\vec{r}$ колінеарні в кожній точці l . Умови колінеарності

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad (3.7)$$

визначають систему рівнянь векторних ліній поля. Якщо $\vec{a}(M)$ – поле швидкостей потоку рідини, то його векторні лінії – це траєкторії частинок рідини, які називаються *лініями току рідини*.

Поверхні, складені з векторних ліній, називаються *векторними поверхнями*. Якщо l – який-небудь замкнений контур, який не збігається з векторною лінією, то векторні лінії, що проходять через точки цього контура, утворюють векторну поверхню (*векторну трубку*).

Приклад. Знайти векторне поле і векторні лінії поля лінійних швидкостей \vec{V} точок твердого тіла, яке обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі Oz .

Розв'язання. Швидкість \vec{V} точки M дорівнює векторному добутку $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості; \vec{r} – радіус-вектор точки M відносно якої-небудь точки осі обертання. Прийемо цю нерухому точку осі за початок координат, а ось обертання – за ось Oz . Тоді $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}.$$

Шукане векторне поле є плоским. Векторними лініями такого поля є кола, що лежать в площинах, паралельних площині Oxy , з центром на осі Oz (рис. 3.4). Рівняння таких кіл мають вигляд $x^2 + y^2 = R^2$; $z = z_0 = const$. Легко перевіряється, що рівність

$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x}$ виконується. Продиференціювавши рівняння кола, діста-

ємо $2xdx + 2ydy = 0$, тобто $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$. Помножимо знаменник цієї

рівності на ω і прийдемо до рівності $\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x}$.

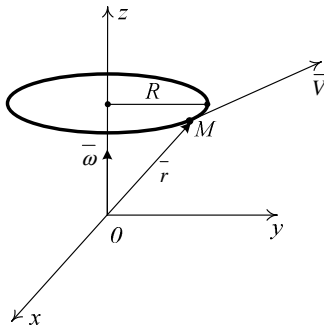


Рис. 3.4

Приклад. Знайти векторні лінії векторного поля $\vec{a}(M) = \text{grad } u$, де $u = xyz$.

Розв'язання. Для векторного поля $\vec{a}(M) = \overline{\text{grad } u}$ дорівнює $\overline{\text{grad}(xyz)} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$.

Векторні лінії, згідно з (3.7), мають вигляд $\frac{dx}{yx} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$ або

$xdx = ydy$ і $ydy = zdz$. Звідси $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_1$; $\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + c_2$.

Ці рівняння визначають дві сім'ї гіперболічних циліндрів, твір-

ні яких паралельні відповідно осям Oz і Ox .

Якщо $(c_1 = c_2 = 0)$, тоді рівняння визначають дві пари площин $(x = \pm y; y = \pm z)$.

Будь-яка векторна лінія поля $\vec{a}(M)$ є лінією перетину двох поверхонь, які одержують із сім'ї гіперболічних циліндрів при фіксованих значеннях c_1 і c_2 .

Потенціальне векторне поле. Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається *потенціальним в області G* , якщо вектор поля \vec{a} є градієнтом деякої скалярної функції $u = u(M)$:

$$\vec{a} = \overline{grad} u(M). \quad (3.8)$$

Функцію $u(M)$ у цьому випадку називають потенціалом векторного поля.

Розглянемо властивості потенціального поля.

1. Циркуляція вектора $\vec{a}(M)$ вздовж будь-якого замкненого контура, який належить G , дорівнює нулю.
2. Лінійний інтеграл від вектора поля, взятий між двома точками поля, не залежить від шляху інтегрування й дорівнює різниці значень потенціалу поля в кінці і початку інтегрування:

$$\int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \overline{grad} u \cdot d\vec{r} = \int_A^B du = u(B) - u(A). \quad (3.9)$$

Легко перевірити, що $\overline{grad} u \cdot d\vec{r} = du$.

3. У потенціальному полі \vec{a} потенціал поля $u(M)$ у довільній точці M можна обчислити за формулою

$$u(M) = \int_A^M \vec{a} \cdot d\vec{r} + C, \quad (3.10)$$

причому $C = u(A)$.

Для обчислення інтеграла (3.10) можна вибрати будь-який шлях – це може бути ламана, паралельна осям координат, яка сполучає точки A і M . За точку A простіше вибрати початок координат.

Приклад. Показати, що поле $\vec{a} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$ – потенціальне і знайти його потенціал.

Розв'язання. Тут $P(x, y, z) = 2xyz + y^2z + yz^2$;
 $Q(x, y, z) = x^2z + 2xyz + xz^2$; $R(x, y, z) = x^2y + xy^2 + 2xyz$.

Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z^2 + 2zy + 2xz$;
 $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y^2 + 2xy + 2yz$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x^2 + 2xz + 2xy$.

За шлях інтегрування оберемо ламану $OABM$, де $O(0,0,0)$,
 $A(X,0,0)$, $B(X,Y,0)$, $M(X,Y,Z)$. Знаходимо:

$$u(X, Y, Z) = \int_{OABM} (\bar{a} \cdot d\bar{r}) + C = \int_0^A \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_A^B \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_B^M \bar{a} \cdot d\bar{r} + C;$$

$$\bar{a} \cdot d\bar{r} = yz(2x + y + z)dx + xz(x + 2y + z)dy + xy(x + y + 2z)dz.$$

Тоді на $[AB]$ маємо: $x = X$; $dx = 0$; $z = 0$; $dz = 0$;

$$0 \leq y \leq Y; \int_A^B \bar{a} \cdot d\bar{r} = 0.$$

Аналогічно на $[OA]$ маємо: $y = z = 0$, $dy = dz = 0$.

$$0 \leq x \leq X; \int_B^M \bar{a} \cdot d\bar{r} = 0.$$

На $[BM]$ маємо: $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leq z \leq Z$

$$\int_B^M (\bar{a} \cdot d\bar{r}) = \int_0^Z XY(X + Y + 2Z)dZ =$$

$$= XY(XZ + YZ + Z^2) = XYZ(X + Y + Z).$$

Таким чином, $u(X, Y, Z) = XYZ \cdot (X + Y + Z) + C$. Повертаючись до змінних x, y, z , дістанемо

$$u(M) = xyz(x + y + z) + C.$$

Зауваження. Такий метод знаходження потенціалу поля може застосовуватися при інтегруванні диференціальних рівнянь в повних диференціалах.

Робота силового поля. Для обчислення роботи A , яку здійснюють сили поля при переміщенні точки M одиничної маси вздовж даної кривої BC із положення B в положення C використовуємо криволінійний інтеграл другого роду, який дорівнює лінійному інтегралу (3.9). Отже,

$$A = \int_{BC} \bar{a} \cdot (M) d\bar{r} = \int_{BC} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (3.11)$$

Якщо контур l являє собою замкнену лінію, то робота векторного поля називається *циркуляцією вектора* вздовж цього замкненого контура.

Приклад. Знайти роботу силового поля $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж першого витка гвинтової лінії: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

Розв'язання. За формулою (3.11)

$$A = \int_{BC} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_{BC} xy dx + yz dy + zx dz.$$

Оскільки: $dx = -a \sin t dt$; $dy = a \cos t dt$; $dz = b dt$, маємо:

$$\int_{BC} xy dx + yz dy + zx dz = \int_0^{2\pi} (-a^3 \sin^2 t \cos t + a^2 b t \sin t \cos t + ab^2 t \cos t) dt = -\frac{\pi}{2} a^2 b.$$

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{a} = (xy + x + y)\bar{i} + (xy + x - y)\bar{j}$ вздовж контура l , де l – коло $x^2 + y^2 = ax$. Інтегрування провести в додатному напрямі двома способами:

- а) безпосередньо;
- б) за допомогою формули Гріна.

Розв'язання. а) Рівняння кола приведемо до параметричного вигляду з центром в точці $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, тобто: $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t$; $y = \frac{a}{2} \sin t$; $0 \leq t \leq 2\pi$; $dx = -\frac{a}{2} \sin t dt$; $dy = \frac{a}{2} \cos t dt$.

$$A = \int_l [(xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy] = \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a}{2} (1 + \cos t) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 t - (1 + \cos t) \sin t - \sin^2 t + \frac{a}{2} (1 + \cos t) \sin t \cos t + \right. \\ \left. + (1 + \cos t) \cos t - \sin t \cos t \right] dt = -\frac{\pi a^3}{8}.$$

б) За формулою Гріна. Позначимо $P(x, y) = xy + x + y$,
 $Q(x, y) = xy + x - y$. Тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = x + 1$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1$.

$$\oint_{\Gamma} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy = \int_D (y - x) dx dy.$$

У подвійному інтегралі область D є круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = ax$, тобто $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, перейдемо до полярних координат з полюсом в центрі $O\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ і обчислимо одержаний інтеграл.

Рівняння, яке зв'язує (x, y) і полярні координати (ρ, φ) з полюсом в точці $O\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, має вигляд $x - \frac{a}{2} = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, причому видно, що за проміжок зміни φ можна взяти $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а $0 \leq \rho \leq \frac{a}{2}$. Якобіан $|J| = \rho$.

Таким чином:

$$\begin{aligned} \int_{AA} (y - x) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a/2} \left(\rho \sin \varphi - \frac{a}{2} - \rho \cos \varphi \right) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3} \sin \varphi - \frac{a}{4} \rho^2 - \frac{\rho^3}{3} \cos \varphi \right) \Big|_0^{a/2} d\varphi = \\ &= \left(-\frac{a^3}{24} \cos \varphi - \frac{a^3}{16} \varphi - \frac{a^3}{24} \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{\pi a^3}{8}. \end{aligned}$$

Отже, обидва результати збігаються.

Дивергенція вектора. Скалярна функція точки, яка визначається рівністю:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (3.12)$$

називається *дивергенцією* або *розбіжністю* вектора $\bar{a}(M)$.

Якщо $\bar{a}(M)$ – швидкість потоку однорідної нестисливої рідини, то $\operatorname{div} \bar{a}(M)$ характеризує питому інтенсивність джерела або сто-

ку в точці M заданого поля швидкості. У загальному випадку, коли $\vec{a}(M)$ не є швидкістю потоку рідини, приходимо до висновку, що $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ характеризує потужність джерела або стоку поля в точці M . При $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$ – це буде потужність джерела, а при $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ – потужність стоку в точці M .

Приклад. Знайти дивергенцію векторного поля $a = x^3 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^3 \vec{k}$ у точці $M(1, -1, 2)$.

Розв'язання. Згідно з визначенням (3.12) дивергенції векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ знаходимо

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M = (3x^2 + 2y + 3z^2)_{M(1, -1, 2)} = 13.$$

ЛЕКЦІЯ № 12

Соленоїдне векторне поле. Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається соленоїдним в області G , якщо в цій області виконана умова

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$$

Потік соленоїдного вектора через поперечний переріз векторної трубки сталий.

Приклад. Обчислити дивергенцію і потік вектора напруги електростатичного поля, утвореного зосередженим джерелом.

Розв'язання. Нехай джерело знаходиться у початку координат.

Тоді $\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Похідні проекції вектора \vec{E} відпо-

відно будуть дорівнювати:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qx}{r^3} \right) = \frac{q}{r^5} (r^2 - 3x^2); \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{qy}{r^3} \right) = \frac{q}{r^5} (r^2 - 3y^2);$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{qz}{r^3} \right) = \frac{q}{r^5} (r^2 - 3z^2).$$

Звідси

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{r^5} [3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)] = 0$$

Оскільки $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то дивергенція електростатичного поля зосередженого джерела дорівнює нулю скрізь навколо джерела. Отже це поле соленоїдне.

Обчислимо потік вектора напруги через замкнену поверхню S у бік її зовнішньої нормалі.

Якщо поверхня S не містить всередині себе джерела, тоді за формулою Остроградського-Гаусса, оскільки $\operatorname{div} \vec{E}(M) = 0$, дістанемо

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

Нехай S – сфера з центром у початку координат. Тоді

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\sigma = 4\pi q.$$

Отже, потік вектора напруги через поверхню кулі з центром у джерелі в напрямі зовнішньої нормалі не залежить від радіуса і дорівнює $4\pi q$.

Ротор. Векторна функція $\vec{a}(M)$, яка визначається рівністю

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (3.13)$$

або символічною формулою

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

називається *ротором* або *розбіжністю вектора* $\vec{a}(M)$.

Циркуляція векторного поля \vec{a} по довільному кусково-гладкому замкненому контуру l дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot} \vec{a}$ через поверхню S , обмежену цим контуром l .

У випадку довільного векторного поля відношення циркуляції по плоскому контуру l до площі σ , обмеженій цим контуром, буде величиною змінною:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a}(M) = \frac{2\omega\sigma}{\sigma} = 2\omega.$$

Якщо вектори \vec{n} і $\text{rot}_n \vec{a}$ ортогональні, то $\text{rot}_n \vec{a} = 0$ і $\omega = 0$. Величина ω досягає найбільшого значення, коли вектори \vec{n} і $\text{rot}_n \vec{a}$ колінеарні, при цьому найбільша кутова швидкість обертання дорівнює

$$2\omega_{\text{найб}} = |\text{rot} \vec{a}|.$$

Таким чином вихор вектора \vec{a} характеризує обертальну компоненту швидкостей потоку вектора \vec{a} , його довжина дорівнює подвоєній найбільшій кутовій швидкості обертання нескінченно малої частини рідини, його напрям збігається з напрямом осі, навколо якої частинки обертаються з найбільшою швидкістю.

Приклад. Знайти ротор поля $[\vec{a}, \vec{b}]$, якщо: $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} - x^2 \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Згідно з визначенням векторного добутку, маємо:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^2 & y^2 & -x^2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2y^2 - x^2) \vec{i} - (2x^2 + x^2) \vec{j} - (x^2 + y^2) \vec{k}.$$

За формулою (3.13) ротор даного векторного поля дорівнює:

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2 - x^2 & -3x^2 & -x^2 - y \end{vmatrix} = -2y \vec{i} + 2x \vec{j} - 2(3x + 2y) \vec{k}.$$

Безвихрове векторне поле. Векторне поле $\vec{a}(M)$ в області B називається *безвихровим*, якщо в кожній точці цієї області ротор вектора $\vec{a}(M)$ дорівнює нулю:

$$\text{rot } \vec{a}(M) = 0.$$

Якщо поле безвихрове, тоді згідно з (3.13) виконуються такі умови:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

які збігається з умовою потенціальності векторного поля. А тому всяке безвихрове поле потенціальне, а всяке потенціальне поле безвихрове.

Поле градієнтів завжди безвихрове:

$$\operatorname{rot} \overline{\operatorname{grad} u}(M) = 0.$$

Довести, що поле вихорів соленоїдне, тобто має місце формула

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0.$$

Доведення. Розглянемо векторне поле \vec{a} і поле його вихорів $\operatorname{rot} \vec{a}$. Складемо вираз дивергенції:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{rot} \vec{a})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{rot} \vec{a})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{rot} \vec{a})_z = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

якщо P , Q , R двічі неперервно диференційовані, тобто поле вихорів не має джерел і стоків.

Поле $\vec{a}(M)$ називається *гармонічним*, якщо воно безвихрове і соленоїдне, тобто $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$ і $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$. Звідси $\vec{a} = \overline{\operatorname{grad} u}(M)$, причому потенціал цього поля $u(M)$ задовольняє рівняння Лапласа $\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} u} = 0$.

Електростатичне поле зосередженого джерела – гармонічне.

ЛЕКЦІЯ № 13

Векторні диференціальні операції другого порядку. Знаходження градієнта, дивергенції і ротора – це векторні диференціальні операції першого порядку. В них беруть участь тільки перші похідні скалярних функцій.

Розглянемо векторні диференціальні операції другого порядку. Нехай маємо скалярне поле $u(M)$ і знайдемо градієнт цього поля $\overline{\operatorname{grad} u}$. Поле градієнта є векторним і ми можемо шукати його дивергенцію і ротор: $\operatorname{div} \overline{\operatorname{grad} u}$ і $\operatorname{rot} \overline{\operatorname{grad} u}$.

Якщо задане векторне поле $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то воно породжує два поля: скалярне $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ і векторне $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$. Звідси можемо знайти градієнт першого поля $\overline{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}(M)}$ і дивергенцію та ротор другого $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}(M)$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}(M)$. Всього маємо п'ять вектор-

них диференціальних операцій другого порядку. Звернемо увагу на три із них і розглянемо їх детальніше.

1. Оскільки $\overline{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$, утворюючи дивергенцію

цього вектора, отримаємо

$$\text{div } \overline{\text{grad}} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Частина рівності, яка розташована праворуч, називається *оператором Лапласа* від функції u і позначається ще й так:

$$\text{div } \overline{\text{grad}} u = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u,$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ – символічний вектор («набла-вектор»). Йому

притаманні такі властивості:

1) добуток набла-вектора ∇ на скалярну функцію $u(M)$ дає градієнт цієї функції

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} = \overline{\text{grad}} u;$$

2) скалярний добуток набла-вектора ∇ на векторну функцію $\bar{a}(M)$ дає дивергенцію цієї функції:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{a}(M)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot (P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \bar{a}(M); \end{aligned}$$

3) векторний добуток набла-вектора ∇ на векторну функцію $\bar{a}(M)$ дає ротор цієї функції:

$$\begin{aligned} [\nabla, \bar{a}(M)] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = \text{rot } \bar{a}(M). \end{aligned}$$

Таким чином, дія з набла-вектором відбувається згідно з правилами дій векторної алгебри.

2. $\overline{\text{rot grad}} u = 0$. Кожна дужка у виразі для ротора являє собою в даному випадку різницю мішаних похідних функцій u , що відрізняється лише порядком диференціювання, наприклад

$$\text{rot}_x \overline{\text{grad}} u = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

За допомогою набла-вектора це співвідношення записується таким чином:

$$\overline{\text{rot grad}} u = \nabla \times \nabla u = (\nabla \times \nabla) u = 0,$$

оскільки векторний добуток однакових «векторів» дорівнює нулю.

$$3. \quad \text{div rot } \overline{a}(M) = 0.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \text{div rot } \overline{a}(M) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned}$$

Якщо записати це за допомогою набла-вектора

$$\text{div rot } \overline{a}(M) = \nabla \cdot [\nabla, \overline{a}] = 0,$$

то отримаємо мішаний добуток трьох векторів, з яких два будуть однакові. Але такий добуток дорівнює нулю. Не будемо записувати вирази для останніх двох векторних операцій другого порядку $\text{grad div } \overline{a}(M)$ і $\text{rot rot } \overline{a}(M)$, оскільки вони зустрічаються рідше. Вкажемо лише на зв'язок між ними:

$$\text{rot rot } \overline{a}(M) = \overline{\text{grad div}} \overline{a}(M) - \Delta \overline{a}(M),$$

де $\Delta \overline{a}(M) = \Delta P \bar{i} + \Delta Q \bar{j} + \Delta R \bar{k}$ (Δ – оператор Лапласа).

Довести самостійно, що в результаті виконання диференціальних операцій другого порядку справедливі ще такі формули:

$$\nabla \nabla u = \nabla \cdot \overline{\text{grad}} u = \text{div } \overline{\text{grad}} u = \nabla u;$$

$$\nabla \times \nabla \overline{a} = \nabla \times \text{rot } \overline{a} = \text{rot rot } \overline{a};$$

$$\nabla \nabla \overline{a} = \nabla \text{div } \overline{a} = \overline{\text{grad div}} \overline{a}.$$

ТЕМА 4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

ЛЕКЦІЯ № 14

Визначення поверхневих інтегралів та їх властивості. Гладка поверхня S називається *двосторонньою*, якщо обхід по будь-якому замкненому контуру, який лежить на S і не має спільних точок з границею, не змінює напрямку нормалі. Сторони двосторонніх поверхонь можуть бути, таким чином, охарактеризовані напрямком відповідних нормалей. Надалі під поверхнею будемо розуміти двосторонню поверхню.

Нехай на гладкій поверхні S визначені й неперервні скалярна функція $F(M)$ і векторна функція $\vec{a}(M)$, яка має проєкції $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ на відповідні координатні осі. Фіксуємо ту сторону цієї поверхні, яка представлена вибраним одиничним вектором нормалі до поверхні $\vec{n} = \vec{n}(M)$.

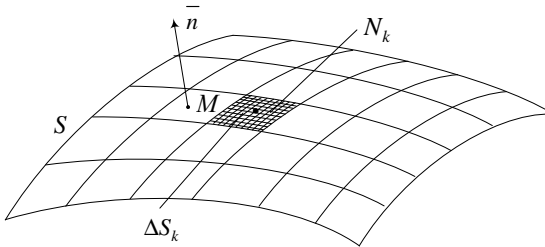


Рис. 4.1

Розділимо поверхню S довільними гладкими лініями на n елементарних частини $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ з площами відповідно $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$ (рис. 4.1) і нехай $N_k (k = 1, 2, \dots, n)$ – довільні точки на елементарних поверхнях ΔS_k . Суми двох типів:

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n F(N_k) \Delta \sigma_k; \quad \beta_n = \sum_{k=1}^n \vec{a}(N_k) \vec{n}(N_k) \Delta \sigma_k \quad (4.1)$$

називаються *інтегральними сумами розбиття* δ_n , де $F(N_k)$ – значення скалярної функції в точці N_k ; $\vec{a}(N_k)$ – значення вектора $\vec{a}(M)$ в точці N_k ; $\vec{n}(N_k)$ – одиничний вектор нормалі в точці N_k .

Якщо існує границя інтегральної суми a_n при $\max \Delta \sigma \rightarrow 0$ (і $n \rightarrow \infty$), яка не залежить від способу розбиття поверхні S на елементарні частини й вибору точок N_k на цих частинних поверхнях, то ця границя називається *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $F(M)$ на поверхні S і позначається через

$$\iint_S F(M) d\sigma \equiv \iint_S F(x, y, z) d\sigma = \lim_{\substack{\max \Delta \sigma_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n (N_k) \Delta \sigma_k \quad (4.2)$$

($d\sigma$ – диференціал площі поверхні).

Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду залежить від фізичного характеру даного скалярного поля: він може визначати масу, розподілену по деякій поверхні з густиною речовини $F(M)$, електричний заряд і т.д.

Якщо на поверхні S неперервно розподілена речовина з густиною $\rho(M)$, тоді наближено маса елемента ΔS_k дорівнює $\Delta m_k \approx \rho(N_k) \Delta \sigma_k$, а маса всього тіла дорівнює $m \approx \sum_{k=1}^n \rho(N_k) \Delta \sigma_k$. Точне значення шуканої величини одержимо в результаті граничного переходу

$$m = \lim_{\substack{\max \Delta \sigma_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \rho(N_k) \Delta \sigma_k = \iint_S \rho(M) d\sigma. \quad (4.3)$$

Скінченна границя інтегральної суми β_n при $\max \Delta \sigma \rightarrow 0$ (якщо він існує і не залежить від способу розбиття S на елементи і вибору точок N_k) називається *поверхневим інтегралом другого роду* від векторної функції $\vec{a}(P, Q, R)$ по вибраній стороні поверхні і позначається через

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{a} d\sigma &\equiv \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \lim_{\substack{\max \Delta \sigma_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \vec{a}(N_k) \vec{n}(N_k) \Delta \sigma_k, \end{aligned} \quad (4.4)$$

де $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – одинична нормаль до поверхні; $\vec{a} \cdot \vec{n}$ і $\vec{a}(N_k) \cdot \vec{n}(N_k)$ – скалярний добуток векторів.

Вирази $(\cos \alpha) d\sigma$, $(\cos \beta) d\sigma$, $(\cos \gamma) d\sigma$ є проєкціями нескінченно малого елемента площі поверхні на координатні площини Oxy ,

Oxz і Oxy , які позначимо відповідно через $dydz$, $dx dz$ і $dx dy$. На основі цього інтеграл (4.4) записується також в іншій формі

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{a} n d\sigma &\equiv \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_S (P dydz + Q dx dz + R dx dy). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Перепишемо інтегральну суму β_n у вигляді

$$\beta_n = \sum_{k=1}^n \bar{a}(N_k) \cdot \bar{n}(N_k) \Delta\sigma_k = \sum_{k=1}^n a(N_k) \Delta\sigma_k, \quad (4.6)$$

де $a(N_k)$ – проекція вектора $\bar{a}(N_k)$ на нормаль $\bar{n}(N_k)$.

При переході в цій рівності до границі отримаємо формулу зв'язку між поверхневими інтегралами першого й другого родів

$$\iint_S \bar{a}(M) \bar{n}(M) d\sigma = \iint_S a_n(M) d\sigma. \quad (4.7)$$

Обчислення поверхневих інтегралів першого роду. Обчислення інтеграла (4.2) зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай пряма паралельна осі Oz перетинає гладку поверхню S тільки в одній точці. Рівняння поверхні має вигляд $z = f(x, y)$ і S проєкується на площину Oxy в область D . Припущення гладкості поверхні S означає неперервність частинних похідних z'_x і z'_y . Елемент $\Delta\sigma_{xy}$ площі D виражається у вигляді $\Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma \cos \gamma$. Виберемо ту сторону поверхні, для якої виконана умова $\cos \gamma > 0$ (рис. 4.2), де γ – гострий кут, який утворює нормаль \bar{n} до поверхні S з віссю Oz . Отже,

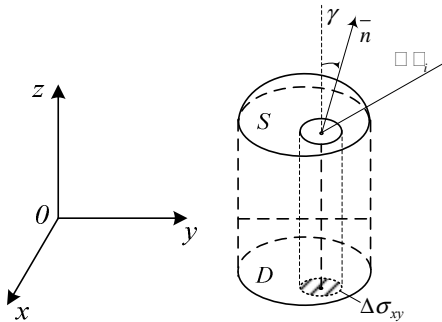


Рис. 4.2

$$\cos \gamma = 1 / \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} ;$$

$\cos \gamma$ – напрямний косинус нормалі до S в деякій точці N^* елемента ΔS . А тому маємо

$$\Delta \sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \Big|_{N^*} \Delta \sigma_{xy} .$$

Змінимо в інтегральній сумі, яка відповідає інтегралу (4.2), величину $\Delta \sigma$ за останньою формулою, а величину z – за формулою $z = f(x, y)$ і оскільки точка N_k – довільна, тоді можна покласти $N_k = N_k^*$ і перейти до границі при $\max \Delta \sigma_k \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$. Отримаємо формулу, яка виражає поверхневий інтеграл першого роду через подвійний інтеграл по проекції поверхні S на площину Oxy

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy . \quad (4.8)$$

Якщо $F(M) \equiv 1$ на S , з визначення поверхневого інтеграла маємо

$$\iint_S d\sigma = F_S, \text{ де } F_S \text{ – площа поверхні } S. \text{ У цьому випадку формула}$$

(4.8) дає вираз площі поверхні через подвійний інтеграл:

$$S_D = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy .$$

Замість площини Oxy поверхню S можна проектувати на площини Oxz і Oyz і аналогічно одержати формули, які виражають інтеграл на поверхні S через подвійні по її проекціях на площини Oyz і Oxz . Якщо гладку поверхню S задано рівняннями $x = x(y, z)$ або $y = y(x, z)$, то можна дістати відповідні формули:

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} F(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz ;$$

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} F(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz ,$$

де D_{yz} , D_{xz} – проекції заданих поверхонь на площині Oyz та Oxz .

ЛЕКЦІЯ № 15

Обчислення поверхневих інтегралів. Обчислення поверхневих

інтегралів першого роду, якщо поверхня задана параметрично.

Нехай гладка поверхня задана параметрично: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, причому $(u, v) \in S'$.

Розглянемо дотичну площину в деякій її точці M . Вектори, які лежать в дотичній площині, будемо позначати символом $d\vec{r}$. Вони розкладаються на два неколінеарних вектори \vec{r}_u і \vec{r}_v , що дотикаються до параметричних ліній в точці M (рис. 4.3).

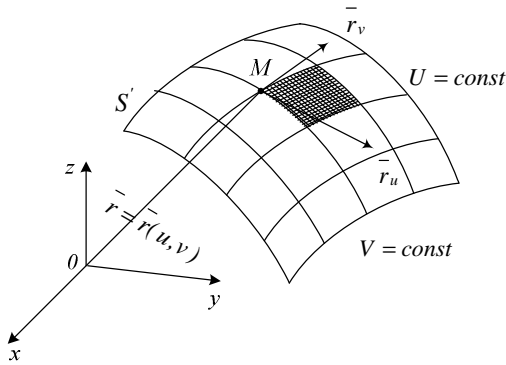


Рис. 4.3

Елементом площі $d\sigma(u, v)$ параметризованої поверхні $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ називається *площа паралелограма*, побудованого на частинних диференціалах $\vec{r}_u du$, $\vec{r}_v dv$ радіуса-вектора \vec{r} точки поверхні. Площа паралелограма, побудованого на двох векторах, дорівнює модулю їх векторного добутку. А тому для елемента площі поверхні ми отримаємо формулу

$$d\sigma(u, v) = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv. \quad (4.9)$$

Повний диференціал $d\vec{r}$ радіуса-вектора точки поверхні зображається у вигляді

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Знайдемо квадрат довжини вектора, який лежить у дотичній площині

$$|d\vec{r}|^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v du dv + \vec{r}_v^2 dv^2.$$

Введемо позначення: $E = \vec{r}_u^2$; $F = \vec{r}_u \vec{r}_v$; $G = \vec{r}_v^2$, тоді

$$|d\bar{r}|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Зазначимо, що для будь-яких векторів \bar{a} і \bar{b} справедливі формули

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b}), \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}),$$

де (\bar{a}, \bar{b}) – кут між векторами \bar{a} і \bar{b} . Піднесемо до квадрату і додамо ці формули:

$$|\bar{a} \times \bar{b}|^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2.$$

Звідси

$$\begin{aligned} |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|^2 &= \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v - (\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v)^2 = EG - F^2; \\ |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Для елемента площі згідно з (4.9) дістанемо вираз

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (4.10)$$

Звідси для обчислення поверхневого інтеграла (4.2) справедлива фор-

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_S F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv, \quad (4.11)$$

де

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2; \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2; \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Приклад. Площина $3x + 4y - 5z = 6$ перетинає еліптичний циліндр $2x^2 + y^2 = 1$. Яка площа перерізу?

Розв'язання. Запишемо рівняння поверхні S у вигляді $z = \frac{1}{5}(3x + 4y - 6)$ і застосуємо формулу (4.8), знайшовши спочатку:

$$z'_x = \frac{3}{5}; \quad z'_y = \frac{4}{5}; \quad \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 F_S &= \iint_S d\sigma = \iint_A \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dx \int_{\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dy = \\
 &= 2\sqrt{2} \cdot 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-2x^2} dx = \left| \sqrt{2}x = \sin t, \sqrt{2}dx = \cos t dt, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right| = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi.
 \end{aligned}$$

Деякі застосування поверхневих інтегралів першого роду до механіки. Нехай на поверхні S (поверхня гладка або кусково-гладка) розподілено масу з поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y, z)$, причому μ неперервна функція на цій поверхні. Таку поверхню називатимемо *матеріальною*.

Поверхневі інтеграли першого роду застосовують при обчисленні маси, координат центра маси, моментів інерції матеріальної поверхні. Виведення відповідних формул фактично не відрізняється від виведення формул для плоскої області або кривої. Тому наведемо формули без доведення.

Маса матеріальної поверхні

$$m = \iint_S \mu d\sigma.$$

Координати центра маси:

$$x_c = \frac{1}{m} = \iint_S x \mu(x, y, z) d\sigma;$$

$$z_c = \frac{1}{m} = \iint_S z \mu(x, y, z) d\sigma;$$

$$y_c = \frac{1}{m} = \iint_S y \mu(x, y, z) d\sigma.$$

Момент інерції поверхні S відносно осей координат

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \rho d\sigma; \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \rho d\sigma;$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \rho d\sigma.$$

Приклад. Обчислити масу сфери, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює квадрату віддалі цієї точки від деякого діаметра сфери ($\mu = x^2 + y^2$).

Розв'язання. Нехай поверхня S є сферою радіуса R з параметричним зображенням $x = R \sin \theta \cos \varphi$; $y = R \sin \theta \sin \varphi$; $z = R \cos \theta$, тоді S' є прямокутник $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Використаємо формули (4.3) і (4.11) з врахуванням, що $\mu = x^2 + y^2$ і $u = \varphi$, $v = \theta$. Знаходимо:

$$\begin{aligned} E &= R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = R^2 \sin^2 \theta; \\ G &= R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta = R; \\ F &= -R \sin \theta \sin \varphi \cdot R \cos \theta \cos \varphi + R \sin \theta \cos \varphi \cdot R \cos \theta \sin \varphi = 0; \\ \sqrt{EG - F^2} &= R^2 \sin \theta; \\ m &= \iint_S \mu d\sigma = \iint_S (x^2 + y^2) d\sigma = \iint_S R^4 \sin^3 \theta d\varphi d\theta = \\ &= R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 2\pi R^4 \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \\ &= 2\pi R^4 \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_\pi^0 = \frac{8}{3} \pi R^4. \end{aligned}$$

Приклад. Нехай поверхня конуса $a^2 x^2 = h^2 (y^2 + z^2)$ покрита масою з густиною $\mu = 1$. Обчислити центр маси.

Розв'язання. Із умови симетрії $y_c = z_c = 0$, оскільки поверхня S задана рівнянням $x = \frac{h}{a} \sqrt{y^2 + z^2}$, причому y і z пробігають внутрішню частину круга D , яке має рівняння $y^2 + z^2 = a^2$. Дістанемо

$$S_{yz} = \iint_S x d\sigma = \iint_D x \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz = \frac{h}{a} \iint_D \sqrt{y^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} dy dz.$$

Після введення в площині y, z полярних координат $y = \rho \cos \varphi$, $z = \rho \sin \varphi$ одержуємо

$$S_{yz} = \frac{h}{a} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi h a \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Оскільки площа поверхні конуса $\sigma = \pi a \sqrt{h^2 + a^2}$, то $x_c = \frac{2}{3} h$.

ЛЕКЦІЯ № 16

Обчислення поверхневих інтегралів другого роду. З метою зведення поверхневого інтеграла другого роду $\iint_S R(x, y, z) dx dy$ до подвійного інтеграла, замінимо у відповідній інтегральній сумі z на $z = f(x, y)$

$$\sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k) \cdot (\Delta\sigma_{xy})_k = \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, f(x_k, y_k)) (\Delta\sigma_{xy})_k.$$

Перехід у цій рівності до границі при $\lambda_n \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$ дає значення інтеграла по зовнішній стороні поверхні

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли другого роду за координатами x, z і y, z :

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz &= \iint_{D_{yz}} P[f(y, z), y, z] dy dz; \\ \iint_S Q(x, y, z) dz dx &= \iint_{D_{xz}} Q[x, f(x, z), z] dz dx, \end{aligned}$$

де поверхня S задана відповідно рівняння $x = f(y, z)$ і $y = f(x, z)$, а D_{yz} і D_{xz} – проекції поверхні S відповідно на площини Oyz і Oxz .

Для обчислення інтеграла загального вигляду (4.5) використовують ці формули, якщо поверхня S проектується на всі три координатні площини

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{a} \cdot \bar{n} d\sigma &= \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz + \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz + \\ &+ \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (4.13)$$

У складніших випадках поверхня S розбивається на частини з такими властивостями, а інтеграл (4.5) – на суму інтегралів по цих частинах.

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I = \iint_S yz dx$, де S – зовнішня сторона частини параболоїда

$$z = x^2 + y^2 \text{ при } 0 \leq z \leq 2.$$

Розв'язання. Розіб'ємо дану поверхню на дві частини S_1 і S_2

(рис. 4.4) рівняння яких $y = \sqrt{z - x^2}$ при $y \geq 0$ і $y = -\sqrt{z - x^2}$ при $y \leq 0$. Відповідно обидві частини проєктуються на область D площини Oxz , межа якої складається із дуги параболи $z = x^2$ і відрізка прямої $z = 2$, тобто

$$D = \{(x, z) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq z \leq 2\}.$$

Зведемо поверхневі інтеграли по S_1 і S_2 до відповідних інтегралів по області D . Дістанемо

$$\iint_{S_1} y dz dx = - \iint_D y(x, z) dz dx = - \iint_D \sqrt{z - x^2} dz dx;$$

тут перед подвійним інтегралом стоїть знак мінус, оскільки

$$\left(\operatorname{sgn}(\cos \beta) = \begin{cases} -1 & \text{при } y > 0 \\ 1 & \text{при } y < 0 \end{cases} \right);$$

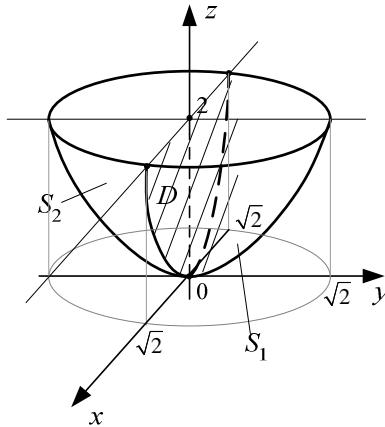


Рис. 4.4

$$\iint_{S_2} y dz = \iint_D y(x, z) dz dx = - \iint_D \sqrt{z - x^2} dz dx.$$

Остаточно маємо:

$$I = \iint_D y dz dx = -2 \iint_D \sqrt{z - x^2} dz dx.$$

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторного ін-

тегрування:

$$I = -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 \sqrt{z-x^2} dz = -\frac{4}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{(2-x^2)^3} dx.$$

Скористаємося заміною змінної: $x = \sqrt{2} \sin t$; $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

$$dx = \sqrt{2} \cos t dt.$$

$$\text{Отже, } I = -\frac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt = -\frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)^2 dt = -2\pi.$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $J = \iint_S yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, де S – зовнішня сторона поверхні,

яка розміщена в першому октанті і складається з циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ і площин: $x=0$, $y=0$; $z=0$; $z=H$.

Розв’язання. Обчислимо кожний з трьох інтегралів по відповідній проекції тіла на координатні площини (рис. 4.5):

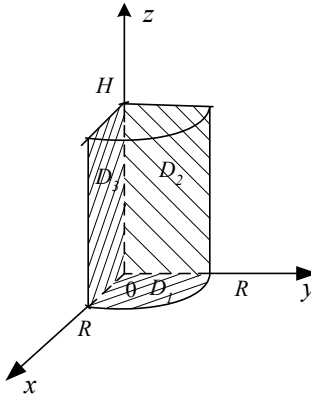


Рис. 4.5

$$\begin{aligned} \iint_S yz dx dy &= \iint_{D_1} Hy dx dy = H \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \\ &= \frac{H}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{H}{2} \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{HR^3}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S xz dydz &= \iint_{D_2} z\sqrt{R^2 - y^2} dydz = \int_0^H z dz \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy = \\ &= \frac{H^2 R^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi H^2 R^2}{8}; \end{aligned}$$

$$\iint_S xy dx dz = \iint_{D_3} x\sqrt{R^2 - x^2} dx dz = \int_0^H dz \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{HR^3}{3}.$$

Остаточо: $J = \frac{HR^3}{3} + \frac{\pi H^2 R^2}{8} + \frac{HR^3}{3} = R^2 H \left(\frac{\pi H}{8} + \frac{2}{3} R \right).$

Приклад. Обчислити потік вектора $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ через зовнішню сторону сфери $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Розв'язання. Згідно з визначенням потоку обчислимо поверхневий інтеграл другого роду (4.4)

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) d\sigma,$$

де S – зовнішній бік даної сфери. Знаходимо одиничний вектор нормалі \vec{n} до поверхні

$$\vec{n} = \left\{ \frac{x-a}{R}, \frac{y-b}{R}, \frac{z-c}{R} \right\},$$

який визначає зовнішній бік сфери. Враховуючи зв'язок (4.7) між поверхневими інтегралами, перепишемо інтеграл у вигляді

$$\iint_S \left(x^2 \frac{x-a}{R} + y^2 \frac{y-b}{R} + z^2 \frac{z-c}{R} \right) d\sigma$$

і обчислимо його за формулою (4.11).

Для цього запишемо параметричне рівняння сфери:

$$x = a + R \cos v \sin u; \quad y = b + R \sin v \sin u; \quad z = c + R \cos u; \quad 0 \leq u \leq \pi;$$

$0 \leq v \leq 2\pi$. За формулами (4.10) і (4.12) знаходимо E , F , G і $d\sigma$.

Підставимо їх у останній інтеграл і одержимо:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} R^2 \sin u [(a + R \cos v \sin u) \cos v \sin u + \\ &+ (b + R \sin v \sin u)^2 \sin v \sin u + (c + R \cos u)^2 \cos u] du = \\ &= 2aR^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 v dv \int_0^{\pi} \sin^3 u du + 2bR^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 v dv + \int_0^{\pi} \sin^3 u du + \end{aligned}$$

$$+2cR^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 u \sin u du dv = \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c).$$

ЛЕКЦІЯ № 17

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні з потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Ця формула є аналогом формули Гріна, яка зв'язує криволінійний інтеграл по замкненій кривій з подвійним інтегралом по плоскій області, обмеженій цією кривою

Замкнена просторова область, межа якої перетинається з будь-якою прямою, паралельною осям координат, не більше ніж у двох точках, називається *простою*. При цьому будемо розглядати зовнішню сторону поверхні, яка обмежує цю область. Вважатимемо, що ця поверхня гладка або кусково-гладка. Отже, якщо проста просторова область є обмежена кусково-гладкою поверхнею S і $P(x, y, z)$,

$Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – функції неперервні в G разом з частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, тоді справедлива формула Остроградського-Гаусса:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dr = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (4.14)$$

причому поверхневий інтеграл другого роду слід обчислювати по зовнішній стороні поверхні S , яка обмежує область G .

Приклад. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчислити інтеграл другого роду:

$$I = \iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz,$$

де S – зовнішня сторона поверхні, розміщена в першому октанті й складається з параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і координатних площин.

Розв'язання. За формулою (4.14) маємо:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) = xz; & \quad Q(x, y, z) = x^2 y; & \quad R(x, y, z) = y^2 z; \\ \frac{\partial P}{\partial x} = z; & \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2; & \quad \frac{\partial R}{\partial z} = y^2; \end{aligned}$$

$$\iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz = \iiint_G (z + x^2 + y^2) dx dy dz .$$

Для обчислення потрібного інтеграла перейдемо до циліндричних координат $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $z = z$. Якобіан переходу дорівнює ρ . Отже,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\rho^2} (z + \rho^2) dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2} + \rho^2 z \right) \Big|_0^{\rho^2} \rho d\rho = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \frac{\pi}{8} . \end{aligned}$$

Формула Стокса. Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневими і криволінійними інтегралами.

Нехай S – двостороння поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$, де функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ – неперервні в замкненій області, D – проекція S на площину Oxy ; l – контур, який обмежує S , а λ – його проекція на площину Oxy , яка є межею області D (рис. 4.6). Вибираємо верхню сторону поверхні, тобто $\cos \gamma = \cos(nz) > 0$.

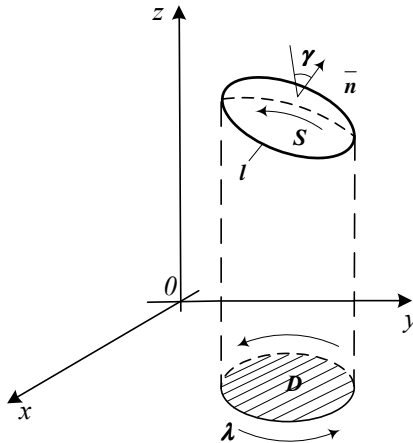


Рис. 4.6

Нехай кусково-гладка двостороння незамкнена поверхня S з границею l розміщена всередині просторової області G і функції: $P(x, y, z)$; $Q(x, y, z)$; $R(x, y, z)$ разом зі своїми першими частинними похідними неперервні в G . Тоді

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx = \int_l P dx + Q dy + R dz, \quad (4.17)$$

причому шлях інтегрування вздовж l такий, щоб вибрана сторона поверхні S знаходилась ліворуч.

Напрямні косинуси нормалі \vec{n} у такому випадку будуть:

$$\cos \alpha = -z'_x / |\vec{n}|; \quad \cos \beta = -z'_y / |\vec{n}|; \\ \cos \gamma = -1 / |\vec{n}|, \quad \text{де } |\vec{n}| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}.$$

Звідси $z'_x \cos \gamma = -\cos \alpha$; $z'_y \cos \gamma = -\cos \beta$.

Формулу (4.17) називають *формулою Стокса*.

Її можна записати у вигляді (4.18), якщо покласти: $\cos \alpha d\sigma = dy dz$; $\cos \beta d\sigma = dx dz$; $\cos \gamma d\sigma = dx dy$.

$$\int_l P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma. \quad (4.18)$$

Формула Стокса залишається справедливою для поверхонь, які можна розбити на скінченне число двосторонніх поверхонь, для яких виконуються відповідні умови.

Якщо поверхня S – це область D , яка лежить у площині Oxy , то $z = 0$, $dz = 0$. Із формули Стокса дістаємо формулу Гріна

$$\int_l P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Формула Стокса дозволяє обчислити криволінійний інтеграл по замкнених межах за допомогою поверхневих інтегралів.

Приклад. Використовуючи формулу Стокса обчислити інтеграл $\int_l x^2 y^3 dx + dy + z dz$. Контур l – коло $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$; поверхня S

є півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Інтегрування вздовж кола в площині xOy провести в додатному напрямі.

Розв'язання. Тут: $P(x, y, z) = x^2 y^3$; $Q(x, y, z) = I$;

$$R(x, y, z) = z; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 y^2; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Отже, за формулою (4.17) маємо:

$$\begin{aligned} \int_l x^2 y^3 dx + dy + z dz &= -3 \iint_S x^2 y^2 dx dy = \\ &= -3 \int_{-R}^R x^2 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = -2 \int_{-R}^R x^2 \sqrt{(R^2 - x^2)^3} dx = \\ &= -4 \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t \cdot \sqrt{(R^2 - R^2 \sin^2 t)^3} = R \cos t dt = \\ &= -4R^6 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^4 t dt = -4R^6 \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t - \cos^6 t) dt = -\frac{\pi R^6}{8}. \end{aligned}$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Физматгиз, 1959. - 432 с.
2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. - М.: Физматгиз, 1961. - 300 с.
3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Физматгиз, 1963. - 748 с.
4. Цубербиллер О.М. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Физматгиз, 1966. - 336 с.
5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Для ВТУЗОВ - М.: "Наука", 1973. - 720 с.
6. Російсько-український словник. – К.: "Радянська школа", 1979. - 1012 с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: "Наука", 1985. - 384 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1, ч.2: Учебное пособие для вузов. - М.: «Наука», 1985. – С. 430, 560.
9. Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів. – К.: "Вища школа", 1988. - 414 с.
10. Вища математика. Основні розділи. Книга 1. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1995. – 372 с.
11. Вища математика. Спеціальні розділи. Книга 2. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1996. – 336 с.
12. Печеніжський Ю.Є., Станішевський С.О., Тихонович О.Ю. Посібник для розв'язування задач з вищої математики. – Х.: ХНАМГ, 2003. – 125 с.
13. Станішевський С.О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
14. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: „Вид-во А.С.К.“, 2003. – 648 с.
15. Короткий російсько-український математичний словник. Печеніжський Ю.Є., Колосов А.І., Станішевський С.О. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 100 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
Тема 1. Криволінійні інтеграли.	4
Лекція № 1.	4
Лекція № 2.	9
Лекція № 3.	14
Тема 2. Числові та функціональні ряди	18
Лекція № 4.	18
Лекція № 5.	22
Лекція № 6.	27
Лекція № 7.	32
Лекція № 8.	38
Лекція № 9.	43
Тема 3. Скалярні та векторні поля	47
Лекція № 10.	47
Лекція № 11.	54
Лекція № 12	60
Лекція № 13	63
Тема 4. Поверхневі інтеграли.	66
Лекція № 14	66
Лекція № 15	69
Лекція № 16	74
Лекція № 17	78
Список літератури.	82

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

МОДУЛЬ 3

Напрямок підготовки 6.060101 «Будівництво»

Автор: Степан Олександрович Станішевський

Редактор: *М.З. Аляб'єв*

План 2009, поз. 69Л

Підп. до друку 07.09.2009 р.
Папір офісний
Тираж 100 прим.
Замовл. №

Формат 60x84 1/16
Умовн.-друк. арк. 5,0
Друк на ризографі

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12