МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

В.Т. Доля, К.А. Мамонов

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи
з дисципліни

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

(для студентів заочної форми навчання спеціальності
6.030509 «Облік і аудит»)

Харків – ХНАМГ – 2009

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни «Економіко–математичне моделювання» (для студентів заочної форми навчання спеціальності 6.030509 «Облік і аудит») / Укл.: Доля В.Т., Мамонов К.А. - Харків: ХНАМГ, 2009. – 38 с.

Укладачі: В.Т. Доля, К.А. Мамонов

Рецензент: В.В. Димченко

Рекомендовано кафедрою обліку і аудиту,
протокол №8 від 9.01.09 р.

ЗМІСТ

1. Завдання для виконання контрольної роботи й вихідні дані

Завдання для виконання контрольної роботи складається з двох етапів:

1 етап – вирішення завдань заснованих на побудові оптимізаційних економіко-математичних моделей, задач лінійного програмування і задач цілочислового програмування. Завдання подані нижче:

1.1. За статистичними даними підприємства:

1) побудувати модель залежності;
2) визначити оптимальний склад суміші симплексним методом;
3) визначити найбільш дешевий склад асфальтобетону;
4) обґрунтувати отримані результати.

Статистичні дані:

j	**Складові**	**Вартість 1 т., в грн.**	**Межі складових в 1 кг суміші за ДБН**
1	щебінь	5,06	0,38-0,53
2	пісок	1,0	0,39-0,44
3	бітум	8,7	0,10-0,25

1.2. На чотирьох складах тресту «Ремонтбуд» є цемент марки «400» в кількості відповідно 200, 150, 80 і 120 т. Цей цемент повинен бути доставлений на три бетонних заводи, відповідно в кількості 280, 90 і 180 т.:

1) побудувати модель задачі;
2) сформувати базове рішення, використовуючи метод північно-західного кута;
3) побудувати вантажооборот поліпшеного плану;
4) скласти план перевезень, який забезпечує мінімум вантажообороту в т. км.
5) обґрунтувати отримані результати.

Статистичні дані:

склад, i	**завод, j**		
1	1	5	3
2	6	8	9
3	2	7	4
4	4	1	11

1.3. Органам місцевого самоврядування підпорядковуються три цегляних заводи з річною продуктивністю відповідно, 15, 23 і 6 млн. штук цегли в рік. Продукція цих заводів використовується на трьох будівельних майданчиках тресту «Ремонтбуд», які розташовані в різних районах міста, в кількості відповідно 8, 19 і 17 млн. штук в рік.

Витрати на перевезення 1 тис. штук цегли від заводів-виробників до будівельних майданчиків, які розташовані в різних районах міста, подані в таблиці:

Споживач	**Район по будмайданчиках**		
Постачальник	**8**	**19**	**17**
15	0,8	1	0,4
23	1,4	0,7	0,6
6	0,2	0,5	1,7

1) побудувати матрицю показників;
2) побудувати математичну модель;
3) визначити базове рішення;
4) перевірити план на оптимальність;
5) поліпшити базове рішення;
6) скласти математичну модель з мінімальними витратами на транспортування цегли;
7) обґрунтувати отримані результати.

1.4. П’ять учасників будівництва міських доріг отримують пісок з двох кар’єрів. Обсяг виробництва піску в кар’єрах відповідно 150 і 230 м^3 на добу. Добова потреба в піску учасників будівництва доріг 60, 40, 80, 100 і 100 м^3. Відстань перевезень піску (в км) представлена в таблиці:

j		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
i		**60**	**40**	**80**	**100**	**100**
1	**150**	13	9	6	1	4
2	**230**	7	9	3	5	11

1) встановити тип задачі;
2) скласти табличну схему задачі;
3) скласти математичну модель задачі;
4) здійснити базове вирішення задачі;
5) скласти вантажообіг поліпшеного плану;
6) скласти план перевезень піску, що забезпечує найменший вантажообіг;
7) обґрунтувати отримані результати.

1.5. Знайдіть екстремум функції $y = x_1 + x_2$ за умови $x_1 + x_2 - 1 = 0$ або розв'яжіть задачу на умовний екстремум методом Лагранжа. Обґрунтуйте отримані результати.

1.6. Підприємство випускає протягом планового періоду два види продукції - столи і стільці. При їх виробництві використовуються три види ресурсів. Дані по їх витратах на випуск одного виробу, запаси ресурсів, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці:

	Столи	**Стільці**	**Запас ресурсів**
Ресурс 1	4	6	24
Ресурс 2	3	2	12
Ресурс 3	1	1	8
Прибуток	4	5	

Необхідно спланувати кількість столів і стільців, які виробляються таким чином, щоб при цих умовах виробництва прибуток був максимальним. Обґрунтувати отримані результати.

1.7. Припустимо, що в денний раціон тварин повинні входити поживні речовини двох видів у кількості, яка подана в таблиці. Є можливість складати раціон з кормів двох видів, для яких задано вміст поживних речовин в одиниці корму і ціну однієї одиниці кожного з видів кормів:

	Корм 1	Корм 2	Поживні речовини в раціоні
Поживна речовина 1	2	1	12
Поживна речовина 2	6	4	30
Ціна корму	5	2	

При задоволенні умов щодо необхідного змісту поживних речовин в цьому раціоні необхідно досягти його мінімальної вартості. Обґрунтувати отримані результати.

1.8. Фірма виробляє дві моделі А і В збірних книжкових полиць. Їх виробництво обмежено наявністю сировини (високоякісних дощок) і часом машинної обробки. Для кожного виробу моделі А потрібно 2 м^2 дощок, а для моделі В - 5 м^2. Фірма може одержувати від своїх постачальників до 1300 м^2 дощок за тиждень. Для кожного виробу моделі А потрібно 15 хв. машинного часу, а для виробу моделі В - 30 хв. У тиждень можна використовувати 180 годин машинного часу. Скільки виробів кожної моделі слід випускати фірмі за тиждень, якщо кожний виріб моделі А приносить 4 грн. прибутку, а кожний виріб моделі В - 2 грн. прибутку. Обґрунтувати отримані результати.

1.9. Знайти оптимальний цілочисловий план задачі $Z(X) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4$ –max за умови:

$x_1+x_2+x_3 =15$

$2x_1+ 3x_3+x_4=8,$

$x_j, > 0,$ x_j — цілі числа, $j = 1, 2, 3, 4.$

Обґрунтувати отримані результати.

1.10. Контейнер обсягом 5 м^3 розташований на контейнеровозі вантажністю 12 т. Контейнер необхідно заповнити вантажем двох найменувань. Маса одиниці вантажу m_j (в тонах), обсяг одиниці вантажу V_j (в м^3), вартість Cj (в умовних грошових одиницях) наведені в таблиці:

Вид вантажу *у*	^{m}**j**	^{V}**,**	^{C}**j**
1	3	1	10
2	1	2	12

Необхідно завантажити контейнер таким чином, щоб вартість вантажу, який перевозиться, була максимальною. Обґрунтувати отримані результати;

2 етап - полягає в побудові економетричної функції прибутковості (рентабельності) у формі рівняння регресії цієї функції на зміну двох внутрішньогосподарських факторів виробництва за статистичними даними якісно однорідних підприємств.

Перелік, позначення, зміст операційних характеристик й одиниці виміру змінних такі:

ендогенні (залежні) змінні:

доходність витрат ($Y_1; Р_д$)	– відношення виручки підприємства від реалізації продукції (робіт, послуг) до їх собівартості, тобто витрат на виробництво, коефіцієнт;
рівень витрат ($Y_2; У_3$)	_ відношення собівартості виробленої підприємством продукції (робіт, послуг) до виручки від їх реалізації, коп./грн. або %;
прибутковість (рентабельність) реалізації ($Y_3; Р_р$)	– відношення прибутку підприємства від реалізації продукції (робіт, послуг) до виручки від їх реалізації, коп./грн. або %;
прибутковість (рентабельність) витрат ($Y_4; Р$)	– відношення прибутку підприємства від реалізації продукції (робіт, послуг) до витрат на виробництво, коп./грн. або %;

екзогенні (незалежні) змінні

фондоозброєність праці ($X_0; Ф$)	– відношення балансової первісної вартості основних виробничих засобів до чисельності працівників підприємства, тис.грн./чол.;
структура основних виробничих засобів ($X_1; А$)	– питома вага активних основних виробничих засобів (машин і обладнання) у загальній балансовій первісній вартості основних виробничих засобів, %;
коефіцієнт придатності ($X_2; Г$)	– відношення залишкової вартості основних виробничих засобів до їх первісної вартості, %;
енергоозброєність праці ($X_3; Э$)	– відношення сумарної потужності двигунів машин, обладнання тощо до чисельності працівників підприємства, кВТ/чол.;

спеціалізація підприємства (X_4;С)	– питома вага обсягу реалізації одного (головного) виду продукції (робіт, послуг) в загальному обсязі реалізації, %;
кооперування виробництва (X_5;К)	– питома вага вартості покупних комплектуючих деталей і вузлів у загальних матеріальних витратах на виробництво продукції (робіт, послуг), %;
кількість видів продукції (робіт, послуг) (X_6;П)	– кількість найменувань продукції (робіт, послуг), що виробляється підприємством, од.;
питома вага зарплати (X_7;З)	– питома вага витрат на оплату праці в загальній собівартості продукції (робіт, послуг), %;
бригадна організація праці (X_8;Б)	– питома вага робітників, залучених до бригадної форми організації та оплати праці, в загальній чисельності робітників підприємства, %;
плинність кадрів (X_9;Т)	– відношення чисельності звільнених за рік працівників за власним бажанням і за порушення трудової дисципліни до середньорічної чисельності працівників підприємства, %.

Статистичні дані 15 підприємств про числові значення чотирьох ендогенних (залежних) і десяти екзогенних (незалежних) змінних наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Статистичні дані 15 підприємств

j	Змінні														j
	ендогенні (залежні)				екзогенні (незалежні)										
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	
	$Р_Д$	$У_З$	$Р_Р$	Р	Ф	А	Г	Э	С	К	П	З	Б	Т	
1	1,067	93,7	6,3	6,7	1,5	36	36	4,5	58	46	18	21	24	33	1
2	1,073	93,2	6,8	7,3	1,7	48	44	4,8	68	49	17	23	35	27	2
3	1,115	89,7	10,3	11,5	6,4	62	65	16,3	73	68	14	34	62	12	3
4	1,109	90,2	9,8	10,9	4,7	61	67	19,4	84	71	11	35	68	11	4
5	1,054	94,9	5,1	5,4	1,6	41	28	3,5	60	31	21	18	15	31	5
6	1,097	91,2	8,8	9,7	4,2	51	48	11,4	74	54	16	29	71	25	6
7	1,101	90,8	9,2	10,1	7,6	54	50	14,1	78	52	18	33	67	11	7
8	1,114	89,8	10,2	11,4	6,9	76	64	14,9	88	64	12	37	84	7	8
9	1,079	92,7	7,3	7.9	2,4	53	49	6,7	72	51	22	21	44	24	9
10	1,089	91,8	8,2	8,9	2,9	68	61	11,5	81	68	13	28	52	21	10
11	1,095	91,3	8,7	9,5	3,8	64	65	11,9	77	74	15	32	61	23	11
12	1,127	88,7	11,3	12,7	7,3	73	72	21,5	86	79	9	39	77	7	12
13	1,189	84,1	15,9	18,9	9,1	82	77	27,6	91	67	14	38	51	4	13
14	1,098	91,1	8,9	9,8	5,6	49	54	12,1	75	72	9	31	64	19	14
15	1,104	90,6	9,4	10,4	7,1	54	58	13,8	82	58	15	36	69	17	15

2. Варіанти завдань

Варіанти завдання контрольної роботи вибирають залежно від напряму вивчення дисципліни і поставлених завдань. Варіант завдання студент визначає самостійно.

Вибір завдань першого блоку студент вибирає за останньою цифрою номера залікової книжки. Наприклад: остання цифра номера залікової книжки закінчується на 1. Студент вибирає завдання за номером 1.

Для виконання завдань 2 етапу варіант ендогенної (залежної) змінної Y_φ (φ=1,2,3,4) визначається викладачем єдиним для всієї групи. Варіанти двох екзогенних (незалежних) змінних визначаються за останніми двома цифрами номера залікової книжки. Наприклад:

№ залікової книжки	Склад екзогенних (незалежних) змінних - факторів
… 01	X_0(Ф); X_1(А)
… 27	X_2(Г); X_7(З)
… 30	X_3(Э); X_0(Ф)

Повний перелік варіантів складу факторів наведений вище (див. п.п. 1). Якщо останні дві цифри номера залікової книжки однакові (наприклад, 44, 00 тощо), варіант беруть довільно за умови зміни однієї цифри на найближчу (наприклад, 44→43 або 45, або 34, або 54).

3. Приклади завдань для розробки контрольної роботи

Приклади завдань, що розглядаються на першому етапі виконання контрольної роботи:

1. Завдань про найкраще використання ресурсів. Нехай деяка виробнича одиниця (цех, завод, об’єднання і т. п.), виходячи з кон'юнктури ринку, технічних або технологічних можливостей і наявності ресурсів, може випускати n різних видів продукції (товарів), відомих під номерами, які позначаються індексом j $(j=\overline{1.n})$. Її позначатимемо Π_j.

Підприємству при виробництві цих видів продукції необхідно обмежиться наявними видами ресурсів, технологій, інших виробничих чинників (сировини, напівфабрикатів, робочої сили, устаткування, електроенергії і т. п.). Всі ці види обмежуючих називаються називають інгредієнтами R_i. Нехай їх число дорівнює m; припишемо їм індекс i $(i=\overline{1.m})$. Вони обмежені, їх кількість дорівнює $b_1, b_2, ..., b_m$ відповідно умовних одиниць. Таким чином, $b=(b_1;...;b_i;...;b_m)$ - вектор ресурсів.

Відома економічна вигода (міра корисності) виробництва продукції кожного вигляду, розрахована, скажімо, за відпускною ціною товару, його прибутковістю, витратами виробництва, ступенем задоволення потреб і т.п. Визначимо цю міру, наприклад, ціну реалізації c_j $(j=\overline{1.n})$, тобто $c=(c_1;c_2;...;c_j;...;c_n)$ - вектор ціни. Відомі також технологічні коефіцієнти a_{ij}, які вказують, скільки одиниць і-го ресурсу необхідно для виробництва одиниці продукції j-го виду.

Матрицю коефіцієнтів a_{ij} називають технологічною і визначають буквою А. Маємо $A=[a_{ij}]$. Позначимо через $x=(x_1;...;x_j;...;x_n)$ план виробництва, що показує, які види товарів $\Pi_1,...,\Pi_j,...,\Pi_n$ потрібно виробляти і в яких кількостях, щоб забезпечити підприємству максимум об'єму реалізації при тих, що є ресурсах.

Оскільки c_j - ціна реалізації одиниці j'-й продукції, ціна x_j реалізованих одиниць буде дорівнювати $x_j c_j$, а загальний обсяг реалізації $Z=c_1x_1+...+c_nx_n$.

Це співвідношення - цільова функція, яку потрібно максимізувати.

Оскільки $a_{ij}x_j$ - витрати і-го ресурсу на виробництво x_j одиниць j-й продукції, то, підсумувавши витрату і-го ресурсу на випуск всіх n видів продукції, отримаємо загальну витрату цього ресурсу, який не повинен перевищувати b_i $(i=\overline{1.m})$ одиниць:

$$a_{i1}x_1+...+a_{ij}x_j+...a_{in}x_n \le b_i. \qquad (1.1)$$

Щоб план $x = (x_1; x_2; ...; x_j; ...; x_n)$ був реалізований, разом з обмеженнями на ресурси потрібно накласти умову позитивності на обсяги x_j випуску продукції:

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1.n}) . \tag{1.2}$$

Таким чином, модель задачі про найкраще використання ресурсів має вигляд

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.3}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \ (i = \overline{1.m}) \tag{1.4}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1.n}) \tag{1.5}$$

Оскільки змінні x_j входять у функцію $z(x)$ і систему обмежень тільки в першому ступені, а показники a_{ij}, b_i, c_j є постійними в плановий період, то співвідношення (1.3)-(1.5) - задача лінійного програмування.

2. Задача на визначення оптимального плану виробництва або реалізації продукції при забезпеченні максимального результату. Фірма - булочно-кондитерський комбінат (БКК) випускає види продукції, перераховані в табл. 1.2

Таблиця 1.2 – Види продукції

Номер продукції *j*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Найменування продукції	булки	тістечка	ватрушки	коржики	слойки

Для випуску цих видів продукції необхідні ресурси, які подані в табл. 1.3, де також вказана кількість кожного виду ресурсу, що є на складі БКК.

Таблиця 1.3 - Види і кількість ресурсу для випуску продукції

Номер ресурсу *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Найменування ресурсу	мука	цукор	масло	сир	яйця
Кількість ресурсу	200 кг	50кг	50 кг	50 кг	500 шт.

У табл. 1.4 наведена рецептура, тобто необхідна кількість кожного виду ресурсу для вироблення кожного виду продукції.

Таблиця 1.4 – Кількість кожного виду ресурсу для вироблення кожного виду продукції

Продукція *j* **Ресурси *i***	**1 Булка**	**2 Тістечка**	**3 Ватрушка**	**4 Коржик**	**5 Слойка**
1 Борошно, кг	0,1	0,04	0,08	0,06	0,05
2 Цукор, кг	0,01	0,05	0,02	0,04	0,03
3 Масло, кг	0	0,05	0,01	0,02	0,02
4 Сир, кг	0	0	0,05	0,02	0,03
5 Яйця, шт.	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

У табл. 1.5 наведена відпускна ціна на одиницю кожного виду продукції.

Таблиця 1.5 – Відпускна ціна на одиницю кожного виду продукції

Вид продукції *j*	**1 Булка**	**2 Тістечка**	**3 Ватрушка**	**4 Коржик**	**5 Слойка**
Відпускна ціна на одиницю продукції C_j, грн.	0,84	3,2	1,6	1,5	2,1

Фірмі треба визначити такий оптимальний план випуску кожного виду продукції: чого і в якій кількості приготувати, щоб при тих ресурсах, що є в БКК отримати максимальний дохід від реалізації, тобто максимізувати наступну цільову функцію:

$$D = \sum_{j=1}^{5} C_j x_j = \max, \tag{1.6}$$

де Cj - ціна одиниці j - го виду продукції

xj - кількість виробленого j - го виду продукції.

Обмеження на ресурси задаються системою:

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1;5}, \tag{1.7}$$

де a_{ij} - кількість i - го ресурсу для виробництва одиниці j - виду продукції (табл. 1.4)

b_i - кількість i - го виду ресурсу (табл. 1.3).

3. Задача на суміші. У різних галузях народного господарства виникає проблема складання робочих сумішей на основі вихідних матеріалів, які б забезпечували отримання кінцевого продукту, що володіє певними властивостями. До цієї групи задач відносяться задачі про вибір дієти, складання кормового раціону в тваринництві, шихт в металургії, пальних сумішей в нафтопереробній промисловості, сумішей в будівництві і т.п. Високий рівень витрат на вихідні сировинні матеріали і необхідність підвищення ефективності виробництва висуває на перший план наступну задачу: отримати продукцію із заданими властивостями при найменших затратах на вихідні сировинні матеріали.

Приклад. Необхідно скласти модель дешевої шахту, в якій було б не менше 80% глинозему, не менше 10% піску і не більше 4% органічних домішок. Є чотири виду сировини, характеристика яких подана в табл. 1.6.

Таблиця 1.6 – Характеристика сировини

Сировина	**Вартість 1т, грн.**	**Склад, в %**			
		глинозем	**пісок**	**органічні домішки**	**інші**
1	1,04	84	11	5	-
2	0,83	74	8	3	15
3	1,21	80	10	7	3
4	1,42	83	9	4	4

1. Складаємо матрицю:

i	**j**				
	1	**2**	**3**	**4**	$\mathbf{b_i}$
1	$0{,}84\ x_1$	$0{,}74\ x_2$	$0{,}8\ x_3$	$0{,}83\ x_4$	$\geq 0{,}80$
2	$0{,}11\ x_1$	$0{,}08\ x_2$	$0{,}1\ x_3$	$0{,}09\ x_4$	$\geq 0{,}10$
3	$0{,}05\ x_1$	$0{,}03\ x_2$	$0{,}07\ x_3$	$0{,}04\ x_4$	$\geq 0{,}04$
$\mathbf{C_j}$	1,04	0,83	1,21	1,42	

2. На основі матриці складаємо модель дешевої шахти.

Модель: $1{,}04x_1 + 0{,}83x_2 + 1{,}21x_3 + 1{,}42x_4 = \min$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Включаючи обмеження, складаємо систему моделей:

$0{,}84x_1 + 0{,}74x_2 + 0{,}80x_3 + 0{,}83x_4 \geq 0{,}80$,

$0{,}11x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}09x_4 \geq 0{,}10$,

$0{,}05x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}07x_3 + 0{,}04x_4 \geq 0{,}04$,

$x_j \geq 0$.

4. Транспортна задача. Є *m* складів і *n* пунктів споживання. На складах є товар в кількості $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$ одиниць. Пункти споживання подали заявки на $b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_n$ одиниць товару.

Заявки можуть бути виконані, якщо сума всіх заявок не перевершує суми всіх наявних запасів:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{1.8}$$

Склади зв'язані з пунктами споживання мережею доріг. Вартість перевезення однієї одиниці товару з *i-го* складу в *j-й* пункт дорівнює $c_{ij} (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Необхідно скласти такий план перевезень, щоб всі заявки були виконані, а загальні витрати були мінімальними.

Рішення (план перевезень) складається з *mxn* чисел:

$$\begin{matrix} x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}; \\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}, \end{matrix} \tag{1.9}$$

де x_{ij} - кількість одиниць товару, що перевозиться з *i* - го складу в *j* - й пункт споживання.

Потрібно вибрати такі значення змінних x_{ij}, щоб були виконані наступні умови:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} \le a_1;\\
x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} \le a_2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} \le a_m,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

тобто при плануванні перевезень місткість складів не повинна перевищувати:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{m1} = b_1;\\
x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n,
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

тобто заявки споживачів повинні бути виконані.

Загальна вартість перевезень L дорівнюватиме:

$$
L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}\,. \tag{1.12}
$$

Необхідно так вибрати план перевезень $\|x_{ij}\|$, щоб вартість всіх перевезень обернути в мінімум. Таким чином знову виникає типова задача лінійного програмування: вибрати ненегативні значення змінних x_{ij} так, щоб при виконанні умови (1.10), (1.11) лінійна функція цих змінних (1.12) досягала мінімуму.

5. Завдання на визначення оптимального цілочислового плану.

Знайти оптимальний цілочисловий план задачі $Z(X) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4$ – max за умови:

$x_1+x_2+x_3 = 15$

$2x_1 + 3x_3+x_4=8$

$xj > 0$, xj - цілі числа, $j = 1, 2, 3, 4$.

<u>Рішення.</u> Покрокове рішення задачі наведено в табл. 1.7.

Таблиця 1.7 – Покрокове рішення задачі

Шаг	Б	$C_б$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	
0	A_2 A_4	−3 2	15 8	1 2	1 0	1 $\boxed{3}$	0 1	
	Δ_j		−29	0	0	−2	0	A_5
1	A_2 A_3	−3 5	$^{37}/_3$ $^{8}/_3$	$^{1}/_3$ $^{2}/_3$	1 0	0 1	$-^{1}/_3$ $^{1}/_3$	0 0
	Δ_j		$-^{71}/_3$	$^{4}/_3$	0	0	$^{2}/_3$	0
	A_5	0	$-^{2}/_3$	$-^{2}/_3$	0	0	$\boxed{-^{1}/_3}$	1

Шаг	Б	$C_б$	A_0	A_1 (1)	A_2 (−3)	A_3	A_4	A_5
2	A_2 A_3 A_4	−3 5 2	13 2 2	1 0 2	1 0 0	0 1 0	0 0 1	−1 1 −3
	Δ_j		−25	0	0	0	0	2

Оптимальний план задачі без умови цілочисельності.

X = (0, 37/3, 8/3, 0)- для подальшого вирішення задачі до таблиці оптимального плану додана умова $-2/3x_1-1/3x_4 \leq -2/3$.

Номер індексу г вибраний за умови більшої дробової частини компоненти a_{i0}. Маємо г = 2; j = 0: [8/3] = 2, 2 - 8/3 = -2/3; j=1: [2/31 = 0, 0- 2/3 = -2/3; j = 2: [0] = 0, 0 - 0 = 0; j = 3: [0]= 0, 0 - 0 = 0; j = 4: [1/3] = 0, 0 - 1/3 = -1/3.

Зробивши один крок (у загальному випадку для отримання цілочисельного вирішення однієї ітерації, звичайно, недостатньо) методу послідовного уточнення оцінок, отримали оптимальний план цілочисельної задачі X*= (O, 13, 2, 2)

Трудомісткість вирішення цілочисельної задачі обумовлена введенням нових додаткових обмежень і нових змінних. У зв'язку з цим необхідно дотримуватися наступного правила, що дозволяє за відповідних умов скорочувати поточні таблиці. Додаткова змінна $x_{п+1}$ вводиться у процесі рішення з додатковим обмеженням як базова змінна чергового псевдо плану і відразу, на цій же ітерації, переводиться в число небазових компонент. Якщо на

подальших ітераціях, згідно з правилом перетворення таблиці, змінна $x_{п+1}$ знову виявиться базовою, її значення стане неістотним для основних змінних задачі, так що рядок і стовпець поточної таблиці, який відповідає $x_{п+1}$, викреслюють. Правило скорочення таблиць обмежує їх розміри: не більше n рядків і не більше (2n-m) стовпців.

Цей алгоритм цілочисельного програмування зводиться до методу послідовного уточнення оцінок з додатковими правилами розширення і скорочення поточної таблиці вирішення задачі.

Приклад задачі, що розглядається на другому етапі виконання контрольної роботи.

Крок 1. ***Постановка задачі*** включає: а) вибір змінних та їх операційних характеристик (у прикладі – Р, Ф, К) для складання рівняння регресії щодо варіанта завдання; б) теоретичне обґрунтування наявності й математичної форми кореляційної залежності прибутковості (або рівняння витрат) від обох факторів; в) складання розроблюваного рівня регресії у загальному вигляді. Початкове розуміння сутності розроблюваного рівняння регресії дуже важливе для кількісних і якісних оцінок багатьох попередніх і заключних результатів моделювання.

Крок 2. ***Матриця статистики*** складається щодо варіанта завдання за даними 15 підприємств. Наприклад, для варіанта на практичні заняття вона має вигляд (табл. 1.8).

Таблиця 1.8 – Матриця статистики

№ підприємства	**Р, коп./грн.**	**Ф, тис. грн./чол.**	**К, %**
1			
2			
…			
15			

Матриця статистики характеризується:

- мірністю, тобто кількістю змінних (m+1);
- обсягом вибірки, тобто кількістю об'єктів спостереження (n);
- обсягом матриці (m+1)n;
- співвідношенням розмірів матриці n / (m+1), яке для отримання незміщених і дійсних оцінок кореляції і регресії повинно бути не менше восьми. Ця умова порушується, що виправдовується навчальним характером роботи, де процес моделювання набагато вагоміший за кінцевий результат. Скорочення матриці дає виграш у трудомісткості процесу без жодних витрат щодо його змісту й методики виконання.

Крок 3. ***Показники варіації змінних*** розраховуються за формулами (наприклад, для змінної P):

- середня арифметична

$$\overline{P} = \frac{1}{15}\sum_{1}^{15} P \qquad (1.13)$$

- абсолютний розмах варіації

$$R_p = P_{max} - P_{min} \qquad (1.14)$$

- відносний розмах варіації

$$i_p = P_{max} / P_{min} \qquad (1.15)$$

- дисперсія (середній квадрат відхилення)

$$D_p = \overline{P^2} - \overline{P}^2 \qquad (1.16)$$

- середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_p = \sqrt{D_p} \qquad (1.17)$$

- коефіцієнт варіації

$$\nu_p = \sigma_p / \overline{P}. \qquad (1.18)$$

Розрахунок показників варіації змінних рекомендується внести до табл.1.9

Таблиця 1.9 – Розрахунок показників варіації змінних (для варіанта Р=f(Ф, К))

	Р	**Ф**	**К**	**$Р^2$**	**$Ф^2$**	**$К^2$**
1						
2						
…						
15						
Сума	ΣР	ΣФ	ΣК	$ΣР^2$	$ΣФ^2$	$ΣК^2$
Середнє	$\overline{Р}$	$\overline{Ф}$	$\overline{К}$	$\overline{Р^2}$	$\overline{Ф^2}$	$\overline{К^2}$
Абсолютний розмах варіації	$R_Р$	$R_Ф$	$R_К$			
Відносний розмах варіації	$i_Р$	$i_Ф$	$i_К$			
Квадрат середнього	$\overline{Р}^2$	$\overline{Ф}^2$	$\overline{К}^2$			
Дисперсія	$D_Р$	$D_Ф$	$D_К$			
Середнє квадратичне відхилення	$\sigma_Р$	$\sigma_Ф$	$\sigma_К$			
Коефіцієнт варіації	$\nu_Р$	$\nu_Ф$	$\nu_К$			

Крок 4. ***Поля кореляції*** (графічні зображення залежності) будують за матрицею статистики (табл. 1.8) на міліметровому папері формату А4. Масштаб зображення за осями координат вибирають таким, щоб поле кореляції виглядало "стоячим", якщо $i_p > i_{X_i}$ (рис. 1.1,а), "лежачим", якщо $i_p < i_{X_i}$ (рис. 1.1,б) або квадратним, якщо $i_p \approx i_{X_i}$ (рис.1.1, в).

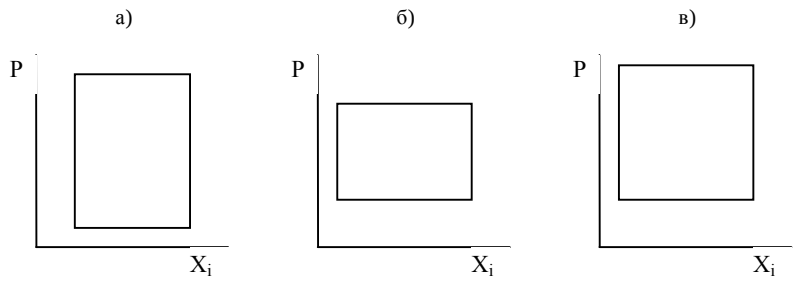

Рис. 1.1 – Типи полів кореляції

Розмітка координаційної сітки диктується мінімальними і максимальними значеннями змінних, тому площина полів повинна використовуватися повністю. На "міліметрівці" повинно залишатися вільне

місце з усіх боків, бо до полів кореляції доведеться звертатися багаторазово для виконання на них розрахункових операцій і графічних побудов (кроки 5, 8, 9, 19, 23).

Аналіз полів кореляції проводять з метою визначення за графічними критеріями:

- наявності кореляційних залежностей;
- напряму й математичної форми залежностей;
- кількісної однорідності об'єктів спостереження, зокрема, наявності аномальних об'єктів.

Крок 5. ***Аномальні об'єкти спостережень***, тобто об'єкти, що "випадають" з вибіркової сукупності на полях кореляції, визначаються так:

1) на поле кореляції накладається прямокутний шаблон двомірного розсіювання з центром у точці $\overline{P}, \overline{X}_i$ й напівсторонами $t\sigma_p$ і $t\sigma_{X_i}$ (рис. 1.2). Коефіцієнт довіри t беруть за таблицею t-розподілу Ст'юдента залежно від кількості об'єктів спостереження і бажаної імовірності. За умови, що $n=15$ і $P=0{,}95$, $t=1{,}76$.

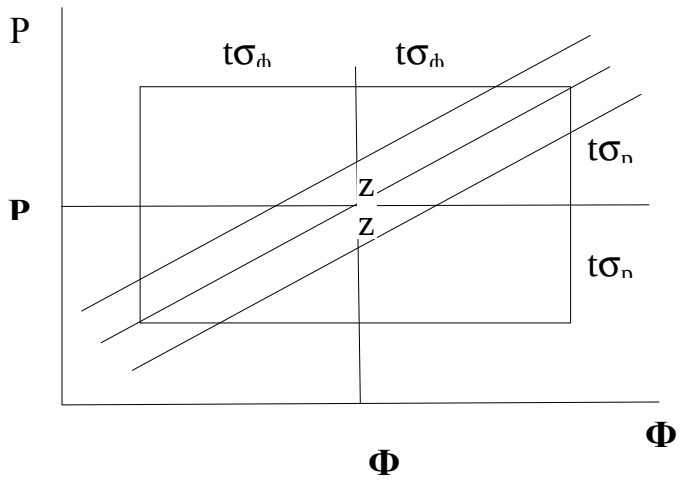

Рис. 1.2 – Шаблони для виявлення аномальних об'єктів спостереження

Об'єкти спостереження, які знаходяться на полі кореляції за межами прямокутного шаблону двомірного розсіювання, вважаються аномальними 1-го роду;

2) на поле кореляції наноситься "коридор регресії". Його вісь – це діагональ прямокутного шаблону розсіювання, навколо якої розташовані точки поля кореляції (додатна або від'ємна), а напівширина – це величина, що визначається залежно від бажаної імовірності й щільності полів кореляції за формулою

$$z = tq\sigma_p, \tag{1.19}$$

де t – коефіцієнт довіри за таблицею нормального розподілу (якщо P=0,95, то t=1,96); q – коефіцієнт щільності поля кореляції, який приймається за шкалою:

дуже щільне ……. 0,53

щільне ……...…… 0,72

середньої щільності ……. 0,80

"пухке" ……..…… 0,87

дуже "пухке" ……..… 0,92

Об'єкти спостереження, що знаходяться за межами "коридору регресії", вважаються аномальними 2-го роду (див. рис. 1.2).

Крок 6. Для *прийняття рішень щодо аномальних об'єктів спостереження* складають зведення аномальних об'єктів (табл. 1.10).

Таблиця 1.10 – Зведення аномальних об'єктів спостереження

№ аномальних об'єктів	1-го роду		2-го роду		Рішення
	Ф	К	Ф	К	
5	–	+	–	–	залишається в матриці
13	+	+	–	+	вилучається з матриці

У табл. 1.10 вносять всі аномальні об'єкти, виявлені на полях кореляції Р←Ф і Р←К за критеріями випадань за межі прямокутника двомірного розсіювання (1-й рід) та "коридору регресії" (2-й рід). Рішення приймають при більшості знаків "+" (випадання) або "–" (не випадання). Якщо кількість знаків

"+" і "–" однакова, рішення приймають з урахуванням більшої значущості випадань 2-го роду.

Крок 7. Вилучення з матриці аномальних об'єктів викликає необхідність ***коригування показників варіації змінних*** (див. крок 3). Для цього з табл. 1.9 вилучають відповідні рядки і перераховують всі показники, починаючи з рядка "сума".

Крок 8. ***Аналітична перевірка наявності кореляційних залежностей*** здійснюється на доповнення теоретичній (див. крок 1) і графічній (див. крок 4) шляхом визначення коефіцієнтів Фехнера або асоціації. Для розрахунку цих коефіцієнтів на поля кореляції наносяться лінії $\overline{P}$ і $\overline{X}_i$, завдяки чому об'єкти спостереження діляться на чотири підгрупи:

a – кількість об'єктів у лівій верхній чверті поля;

b – те саме у правій верхній;

c – те саме у лівій нижній;

d – те саме у правій нижній.

Очевидно, що a+b+c+d=n. Ці підрахунки виконують на полях кореляції і на них фіксують.

Коефіцієнт Фехнера визначають за формулою

$$К_ф = \frac{c + b - a - d}{n}, \qquad (1.20)$$

а коефіцієнт асоціації

$$К_a = \frac{bc - ad}{bc + ad}. \qquad (1.21)$$

Ці коефіцієнти приймають значення від –1 до +1. Якщо вони рівні або близькі до нуля, то кореляційна залежність практично відсутня. Чим ближче значення коефіцієнтів до одиниці, тим наявна залежність сильніша. Знаки $К_ф$ і $К_a$ показують лише напрямок залежності – додатний, або від'ємний – і до оцінки її сили не мають відношення.

Крок 9. ***Перевірка суттєвості (невипадковості) кореляційних залежностей*** здійснюється за дисперсійним F-критерієм Фішера у наступному порядку (для кожного фактора):

1) на полях кореляції проводять групування об'єктів по x_i в інтервалах, що визначаються за формулою Стерджеса (з округленням):

$$i_{x_i} = R_{x_i} / (1 + 3{,}32 \lg n), \qquad (1.22)$$

підраховують кількість об'єктів у кожній групі (n_f) і визначають групові середні показники рентабельності $\tilde{P}_f$. Кількість груп дорівнює К, очевидно, що $n_1 + n_2 + ... + n_к = n$;

2) визначають міжгрупову. систематичну дисперсію рентабельності

$$S^2_{сист.} = \frac{\sum_1^К \left(\tilde{P}_f - \overline{P}\right)^2 n_f}{К - 1}, \qquad (1.23)$$

а також внутрішньогрупову залишкову дисперсію рентабельності

$$S^2_{зал.} = \frac{\sum_1^{n_f} \sum_1^К \left(P - \tilde{P}_f\right)^2}{n - К}; \qquad (1.24)$$

3) визначають розрахункове значення дисперсійного відношення

$$F_{розр.} = S^2_{сист.} / S^2_{зал.} \qquad (1.25)$$

і залежно від кількості ступенів свободи (к-1) та (n-к) за таблицею F-розподілу Снедекера знаходиться критичне значення $F_{крит.}$;

4) розрахункове значення відношення зіставляється з критичним. Якщо $F_{розр.} \geq F_{крит.}$, то з імовірністю 0,95 кореляційна залежність Р від x_i є суттєвою, тобто невипадковою і навпаки.

Наведені вище розрахунки з дисперсійного аналізу оформляють в таблицях (див. табл. 1.11).

Таблиця 1.11 – Розрахунок систематичної і залишкової дисперсії рентабельності*

Інтервали по Ф	n_f	P_j	$\sum_1^{n_f} P_j$	$\tilde{P}_f$	**Систематична**			**Залишкова**	
					$\tilde{P}_f - \overline{P}$	$(\tilde{P}_f - \overline{P})^2$	$(\tilde{P}_f - \overline{P})^2 n_f$	$(P_j - \tilde{P}_f)^2$	$\sum(P_j - \tilde{P}_f)^2$
0 – 1,5	1	6,7	6,7	6,700	-2,743	7,524	7,524	0	0
1,5 – 3	4	5,4; 7,3; 7,9; 8,9	29,5	7,375	-2,068	4,277	17,108	3,901; 0,006; 0,276; 2,326	6,509
…									
Всього	14	$\sum P_j$ =132,2	$\sum P_j$ = =132,2	$\overline{P}$ = =9,443			$\sum(\tilde{P}_f - \overline{P})^2 n_f$ = = 43,684		$\sum_1^{n_f}\sum_1^{K}(P_j - \tilde{P}_f)^2$ = 9,795
Кількість ступенів свободи							$к-1$ =6-1		$n-к$ =14-6
s^2							8,737		1,224

Фрагмент таблиці F-розподілу Снедекора для визначення $F_{крит.}$ з імовірністю 0,95 наводиться нижче:

n-к	**к-1**			
	4	**5**	**6**	**7**
8	3,84	3,69	3,58	3,50
9	3,63	3,48	3,37	3,29
10	3,48	3,33	3,22	3,14
11	3,36	3,20	3,09	3,01
12	3,26	3,11	3,00	2,92

Фактор, вплив якого за F-критерієм визначають несуттєвим, випадковим, вилучають з матриці статистики і з подальшого процесу моделювання.

* Для наочності розрахунків табл.1.11 частково заповнена.

Крок 10. Для ***розрахунку коефіцієнтів кореляції*** необхідно попередньо виконати розрахунок середніх добутків змінних (табл. 1.12),

Таблиця 1.12 – Розрахунок середніх добутків змінних

j	**РФ**	**РК**	**ФК**
1			
2			
…			
15			
Сума	ΣРФ	ΣРК	ΣФК
Середній добуток	$\overline{РФ}$	$\overline{РК}$	$\overline{ФК}$

після чого виконати розрахунок коефіцієнтів кореляції за формулами

$$\left.\begin{aligned} r_{рф} &= (\overline{РФ} - \overline{Р} \cdot \overline{Ф}) / \sigma_р \sigma_ф \\ r_{рк} &= (\overline{РК} - \overline{Р} \cdot \overline{К}) / \sigma_р \sigma_к \\ r_{фк} &= (\overline{ФК} - \overline{Ф} \cdot \overline{К}) / \sigma_ф \sigma_к \end{aligned}\right\}. \qquad (1.26)$$

Коефіцієнти кореляції показують напрямок і силу впливу факторів на рентабельність ("+" – додатний, "–" – від'ємний). Слід мати на увазі, що $-1 \le r_{рx_i} \le +1$.

Крок 11. Наявність і сила ***мультиколінеарності факторів***, тобто взаємозв'язку між ними оцінюють за повною матрицею коефіцієнтів кореляції:

$$\begin{array}{c} \\ (Ф) \\ (К) \\ (Р) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (Ф) & (К) & (Р) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & r_{фк} & r_{рф} \\ r_{кф} & 1 & r_{рк} \\ r_{рф} & r_{рк} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

за наступною шкалою оцінок (за модулями коефіцієнтів кореляції для загального випадку $y = f(X_1, X_2)$:

$r_{12} = 0$ – відсутня,

$0 < r_{12} < r_{yx_{i\,min}}$ – слабка,

$r_{yx_{i\,min}} < r_{12} < r_{yx_{i\,max}}$ – помірна,

$r_{yx_{i\,max}} < r_{12} < 1$ – сильна,

$r_{12} = 1$ – абсолютна, з двох факторів один є зайвим.

Крок 12. Розрахунок ***коефіцієнтів парціальної кореляції*** особливо важливий при сильній мультиколінеарності факторів. Ці коефіцієнти визначають напрямок і силу впливу факторів за умови очищення цих оцінок від викривлення через мультиколінеарність. Їх розраховують за формулою

$$\dot{r}_{рф} = \frac{-1^{i+j+1}\Delta_{px_i}}{\sqrt{\Delta_0 \Delta_{x_i x_i}}}, \qquad (1.27)$$

де Δ_{px_i} – визначник (детермінант) повної матриці коефіцієнтів кореляції з вилученням з неї стовпця x_i і рядка p; Δ_0 – те саме з вилученням з неї стовпця i рядка p; $\Delta_{x_i x_i}$ – те саме з вилученням з неї стовпця i рядка x_i; i, j – номери вилучених стовпця і рядка матриці при розрахунку визначника Δ_{px_i}. Наприклад (див. крок 11):

$$\dot{r}_{рф} = \frac{-1^{1+3+1}\begin{vmatrix} r_{фк} & r_{рф} \\ 1 & r_{рк} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & r_{фк} \\ r_{кф} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & r_{рк} \\ r_{рк} & 1 \end{vmatrix}}}.$$

Крок 13. β***-коефіцієнти***, які також визначають напрямок і силу впливу факторів на рентабельність з урахуванням мультиколінеарності, розраховують за формулою

$$\beta_i = \Delta_i / \Delta_0, \qquad (1.28)$$

де Δ_i – визначник (детермінант) матриці взаємної кореляції (мультиколінеарності) із заміною в ній і-го стовпця стовпцем коефіцієнтів

кореляції r_{px_i}. Наприклад (див. кроки 11 і 12):

$$\beta_ф = \frac{\begin{vmatrix} r_{рф} & r_{фк} \\ r_{рк} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{фк} \\ r_{кф} & 1 \end{vmatrix}}.$$

Крок 14. Розрахунок ***коефіцієнта множинної кореляції*** необхідний для визначення сили впливу на рентабельність обох факторів разом, його розраховують за формулою Боярського:

$$R_{р.фк} = \sqrt{\frac{-1^{\alpha}\Delta_*}{\Delta_0}}, \qquad (1.29)$$

де α – порядок повної матриці коефіцієнтів кореляції; Δ_* – визначник повної матриці коефіцієнтів кореляції із заміною нижнього правого елемента нулем.

У нашому прикладі формула Боярського має вигляд

$$R_{р.фк} = \sqrt{\frac{-1^{3}\begin{vmatrix} 1 & r_{фк} & r_{рф} \\ r_{кф} & 1 & r_{рк} \\ r_{рф} & r_{рк} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{фк} \\ r_{кф} & 1 \end{vmatrix}}}.$$

З метою контролю правильності розрахунків рекомендується цей коефіцієнт визначати також за формулою

$$R_{р.фк} = \sqrt{r_{рф}\beta_{ф} + r_{рк}\beta_{к}}. \qquad (1.30)$$

Значення коефіцієнта повинні співпадати, розбіжність можлива лише в кілька тисячних або десятитисячних за рахунок округлення в розрахунках.

Крок 15. ***Оцінка сили впливу факторів*** на рентабельність за допомогою U-критерія Фішера з імовірністю 0,95:

$$U_i \geq 1{,}96,$$

де U_i – розрахункове значення U, що визначається за формулою

$$U_i = \sqrt{n} \cdot \lg\frac{1 + \left|\dot{r}_{рx_i}\right|}{1 - \left|\dot{r}_{рx_i}\right|}. \qquad (1.31)$$

Якщо $U_i \geq 1{,}96$,сила впливу x_i на P з імовірністю 0,95 визнається достатньою для подальшої участі x_i у процесі моделювання.

Крок 16. ***Оцінка незалежності (автономності) впливу факторів*** на рентабельність визначається за допомогою γ-критерія:

$$0 < \gamma_i < 1,$$

де γ_i – рівень автономності, що розраховується за формулою

$$\gamma_i = \beta_i / r_{px_i}. \qquad (1.32)$$

Якщо γ_i>0, фактор x_i має певну автономність впливу на рентабельність; γ_i=0 – ніякої автономності він не має і його вплив на рентабельність через мультиколінеарність проявляється завдяки іншим факторам; γ_i<0 – в такому випадку і-й фактор вилучається з подальшого процесу розробки рівняння регресії.

Крок 17. ***Значущість впливу факторів*** на рентабельність оцінюють на основі коефіцієнтів множинної кореляції за ρ-критерієм

$$\rho \geq 1{,}96,$$

де

$$\rho_i = 0{,}742\sqrt{n}\sqrt{R^2_{p.x_1x_2} - r^2_{px_j}} \quad (i, j=1,2;\ i \neq j) \qquad (1.33)$$

У нашому прикладі формула (3.21) для визначення $\rho_ф$ і $\rho_к$ набуває такого вигляду:

$$\rho_ф = 0{,}742\sqrt{n}\sqrt{R^2_{р.фк} - r^2_{рк}};$$

$$\rho_к = 0{,}742\sqrt{n}\sqrt{R^2_{р.фк} - r^2_{рф}}.$$

Якщо $\rho_i \geq 1{,}96$, то з імовірністю 0,95 можна стверджувати, що вплив фактора x_i досить значущий, вагомий для включення його у рівняння регресії.

Крок 18. Для ***прийняття рішення щодо включення факторів у рівняння регресії*** складають зведення результатів, одержаних на кроках 15, 16, 17 (табл. 1.13).

Таблиця 1.13 – Зведення оцінок сили, автономності й значущості впливу факторів

Фактори	**U_i** **$U_i \geq 1{,}96$**	**γ_i** **$0<\gamma_i<1$**	**ρ_i** **$\rho_i \geq 1{,}96$**	**Рішення**
Ф				
К				

Поради щодо прийняття рішень такі:

- якщо $\gamma_i < 0$, X_i вилучають з матриці (див. крок 16);
- значення U_i та ρ_i дуже залежать від обсягу вибірки (див. формули (1.31) і (1.33)), тому рішення приймають з огляду на порушення вимоги $n/(m+1) \geq 8$. Отже, якщо критерії U_i і ρ_i виконуються не в повній мірі, обидва фактори треба включати до рівняння регресії.

Крок 19. ***Для обґрунтування математичної форми рівняння регресії*** необхідно скористатися раніше сформульованими щодо цього висновками з теоретичного обґрунтування (див. крок 1), а також з візуального аналізу полів кореляції (див. крок 4). Ці джерела вибору математичної форми рівняння регресії (пряма, гіпербола, парабола тощо) достатньо надійні й ними можна обмежитися.

Для аналітичного підтвердження правильності вибору форми регресії можна користуватися способом перших різниць з використанням результатів кроку 9. Нарешті, не буде великої помилки, якщо форма регресії буде прийнята лінійною і модель рівняння регресії матиме такий вигляд (для нашого прикладу):

$$\hat{P} = a_0 + a_1\Phi + a_2 K, \qquad (1.34)$$

де a_0, a_1, a_2 – коефіцієнти регресії. Коефіцієнт a_0 показує частину P, що не залежить від факторів Φ і K; a_1 визначає, на скільки копійок змінюється P за рахунок зміни Ф на одну тисячу гривень; a_2 визначає зміну P в копійках при зміні K на один відсоток.

Крок 20. ***Для розрахунку коефіцієнтів регресії*** a_0, a_1 і a_2 методом найменших квадратів слід скласти систему нормальних рівнянь і вирішити її. У нашому прикладі в разі вибору лінійної форми регресії ця система така:

$$\left.\begin{aligned} \sum P &= n \cdot a_0 + a_1 \sum Ф + a_2 \sum К \\ \sum PФ &= a_0 \sum Ф + a_1 \sum Ф^2 + a_2 \sum КФ \\ \sum PК &= a_0 \sum К + a_1 \sum ФК + a_2 \sum К^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.35)$$

Числові значення параметрів цієї системи беруть за табл. 1.3 (крок 3 з урахуванням коригування на кроці 7), 1.6 (крок 10).

Для контролю правильності розрахунків коефіцієнтів регресії рекомендується варіант розрахунку їх через β-коефіцієнти, а саме

$$a_i = \beta_i \frac{\sigma_p}{\sigma_{x_i}}, \quad a_0 = \overline{P} - \sum a_i \overline{X}_i. \qquad (1.36)$$

Ця перевірка можлива за умови, що обидва фактори включені до рівняння регресії. Отже, модель рівняння регресії (1.22) прийме конкретний вигляд.

Крок 21. ***Розрахунок оцінок рентабельності*** за рівнянням регресії необхідний, по-перше, для контролю правильності розрахунку коефіцієнтів регресії і, по-друге, для визначення помилок апроксимації. Розрахунки доцільно ввести до табл. 1.14.

Таблиця 1.14 – Розрахунок оцінок рентабельності

№ підприємства	P_j	**Розрахунок оцінок**				**Помилка апрок-симації** $P_j - \hat{P}_j$	**Те саме, %**
		a_0	$a_1Ф$	$a_2К$	$\hat{P}_j$		
1							
2							
Всього	ΣP_j	X	X	X	$\Sigma_{\hat{P}_j}$	0	X

Необхідною (хоч і не достатньою) умовою правильності розрахунку коефіцієнтів регресії є

$$\sum P_j = \sum \hat{P}_j.$$

Крок 22. ***Розрахунок кореляційного відношення*** проводять за формулою

$$\eta = \sqrt{D_{\hat{P}} / D_P}\ , \qquad (1.37)$$

де $D_{\hat{P}}$ – дисперсія оцінок рентабельності, визначених у табл. 1.14, яку розраховують так само, як і дисперсію фактичних значень, за формулою (1.16), тобто в даному разі

$$D_{\hat{P}} = \overline{\hat{P}^2} - \overline{P}^2 .$$

Слід пам'ятати, що оскільки $\sum \hat{P}_j = \sum P_j$, то $\overline{\hat{P}_j} = \overline{P_j}$. Для визначення середнього квадрату оцінок рентабельності треба скласти табл. 1.15.

Таблиця 1.15 – Розрахунок середнього квадрату оцінок рентабельності

№ підприємства	$\hat{P}_j$	$\hat{P}_j^2$
1		
2		
Сума	$\sum P_j$	$\sum \hat{P}_j^2$
Середнє	$\overline{P}_j$	$\overline{\hat{P}_j^2}$

Величину дисперсії D_p беруть за таблицею кроку 7.

Для контролю правильності визначення η слід керуватися наступним:

1) якщо обидва фактори залишилися у рівнянні регресії, то (див. крок 14) $\eta = R_{р.фк}$;
2) якщо до рівняння регресії введено тільки один (і-й) фактор, то $\eta = r_{px_i}$.

Крок 23. ***Розрахунок помилки апроксимації*** включає:

- визначення середньої помилки апроксимації за формулою

$$\overline{\varepsilon} = \sigma_p \sqrt{1 - \eta^2}\ ; \qquad (1.38)$$

- визначення граничної помилки апроксимації з певною імовірністю її неперевищення. Якщо прийнятна імовірність 0,95, то гранична помилка така:

$$\Delta_p = 1{,}96 \cdot \bar{\varepsilon}. \qquad (1.39)$$

Гранична помилка апроксимації є довірчою границею визначення P за рівнянням регресії (P=0,95)

$$\hat{P} - \Delta_p \le P \le \hat{P} + \Delta_p .$$

Бажано перевірити виконання цієї умови за даними табл. 1.8.

Крок 24. ***Економічна інтерпретація рівняння регресії*** повинна включати:

1) операційні характеристики змінних (у нашому прикладі Р, Ф і К – див. крок 1);
2) розкриття змісту й одиниці виміру коефіцієнтів регресії a_0, a_1 і a_2 - див. крок 19);
3) те саме довірчої границі помилки апроксимації;
4) оцінку якості отриманого рівняння регресії, у нашому прикладі

$$P = a_0 + a_1\Phi + a_2 K \pm \Delta_p \ (P=0{,}95).$$

У висновках бажано вказати, для яких цілей можна використовувати отримане рівняння регресії рентабельності.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ашманов С. А. Введення в математичну економіку. - М.: Наука 1984.
2. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финанси и статистика, 2001.
3. Бирман И. Оптимальное программирование. - М.: Радио и Связь, 1976.
4. Высшая математика для экономистов \ Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2003.
5. Горчаков А.А., Орлова И.В., Половников В.А. Методы экономико-математического моделирования и прогнозирования в новых хозяйственных условиях хозяйствования. – М.: ВЗФЭИ, 1991.
6. Грубер Й. Економетрія: Посібник для студ. екон. спец., Т. 2. – К.: ЗАТ «Нічлава», 1998. – 295 с.
7. Джонстон Д.Ж. Эконометрические методы. – М.: Финансы и статистика, 1980.
8. Доля В.Т. Економетрія: Методичний посібник з вивчення дисципліни (для студентів за напрямами підготовки 0501 “Економіка”, 0592 “Менеджмент”). – Харків: ХНАМГ, 2006.
9. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Статистика, 1973.
10. Доугерти К. Введение в економетрику / Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001.- 402 с.
11. Жданов С. Экономические модели и методы управления. – М.: Эльта 1998г.
12. Замков О.О., Толстонятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДНСС, 1997.
13. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 2003.
14. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.Н. Математические методы и модели в планировании. – М.: Экономика, 1987.

15.Конюховский П. Математические методы исследования в экономике. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.
16.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.; под ред. Проф.Н.Ш.Кремера: Исследование операций в экономике; Уч. пособие для вузов.
17.Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. - М.: Финстат, 2003.
18.Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. - М.: Логос, 2000.
19.Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О. Економетрія: Навч. посібник для студ. вищ. навч. закл. – К.: МАУП, 2003.-208 с.
20.Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. – К.: Т-во "Знання", КОО, 1998. – 494 с.
21.Лук'яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах: Навч. посібник.-К.: Літера ЛТД, 2002.-352 с.
22.Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища шк., 1999.
23.Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. – М.: Изд-во УРАО, 1998.
24.Малыхин В.И. Финансовая математика. – М.: ЮНИТИ, 2002.
25.Малиш Н. А. Моделювання еколого-економічних систем агропромислового комплексу на території радіоактивно забрудненого регіону. Дис. на зд. нвч. ступ. к. е. н. КНУім. Тараса Шевченка, 1993.
26.Методичні вказівки для вивчення курсу "Економетрія" / Укл. Скоков Б.Г. – Х.: ХНАМГ, 2002. – 39 с.
27.Методичні вказівки до виконання практичних завдань і самостійної роботи з дисципліни «Економетрія» (для студентів 3 курсу денної форми навчання спец. 7.050201 «Менеджмент організацій») / Укл. Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 27 с.
28.Методичні вказівки «Використання пакету програм «Statistica» в економетричних дослідженнях» (для студентів 3 курсу денної форми

навчання, спец. 6.050200 «Менеджмент організацій») / Укл. Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 51 с.

29. Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретично-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К. Інформтехніка. – 1995. – 380 с.
30. Монахов А. Математические методы анализа экономики. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
31. Петров Е. Г., Новожилова М. В.. Методи і засоби прийняття рішень у соціально – економічних системах: Навч. посібник./ За ред. Е. Г. Петрова. – К.: Техніка, 2004 – 256с.
32. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. - М.; Наука, 1968.
33. Робоча програма і короткий конспект лекцій до самостійного вивчення курсу «Економетрія» (для студентів денної і заочної форм навчання спеціаль-ностей «Менеджмент організацій», «Облік і аудит» та «Економіка підприємства») / Укл. Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 105 с.
34. Скурихин Н.П. Математическое моделирование. - М.: Высш. шк., 1989.
35. Сытник В.Ф. Каратодава Е.А. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. - К.: Вища школа, 1985.
36. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х томах. / Пер. с английского. 1991. - 360с.
37. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. М. Статистика 1988г.
38. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М.: Финстатинформ, 1996.
39. Четыркин Е.М. Статистические методи прогнозирования. – М.: Финансы и статистика, 1979.
40. Хазанова Л. Математическое моделирование в экономике. - М., 1998.
41. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. М.: Наука, 1978.

42. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. / Пер. с англ. 1974.
43. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Уч. пособие для вузов. — М.: ЮНИ-ТИ-ДАНА, 2000.
44. Ю.А. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. - М.: Радио и Связь, 1982.
45. Экономико-математические методы и прикладные модели: Уч. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
46. Merril William C., Fox Karl A. Introduction to Economic statistics.- John. Wiley&Sans.- 1970.-658.
47. V.Lofti, C. Pegels. Decision Support System for Production and Operations Managament (DSSPOW). IRWIN, 1991.-359c.

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» (для студентів заочної форми навчання спеціальності 6.030509 «Облік і аудит»).

Автори: Володимир Тимофійович Доля,
Костянтин Анатолійович Мамонов

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009, поз. 420М

Підп. до друку 25.06.2009р.	Формат 60х84/16	Папір офісний.
Друк на ризографі	Умовн.– друк. арк. 1,6	Обл.- вид. арк. 2,1
Замовл. №	Тираж 100 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

61002, Харків, вул. Революції, 12