Розглядаються питання математичного моделювання світлового розподілу напівпровідникових джерел світла на основі експериментально отриманих даних. Проведена і подана апроксимація таблично представлених параметрів світлодіодів за допомогою описаних методів.

УДК 621.327.534

О. Б. Кошик, асп.
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

АНАЛІЗ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ СВІТЛОРОЗПОДІЛУ СВІТЛОДІОДНИХ ДЖЕРЕЛ СВІТЛА

Аналіз публікацій, присвячених напівпровідниковим джерелам світла, показав, що питання аналітичного опису кривих їх світлорозподілу є мало висвітлені і вимагають ґрунтовнішого дослідження.

Широкий вибір кольорів свічення, комбінація випромінювання з будь-якою формою просторового розподілу в динамічному діапазоні яскравостей відкрили великі перспективи практичного використання світлодіодів [1]. Для реалізації можливості їх впровадження у світлотехніку вимагається вирішення ряду задач, пов’язаних з оптичними характеристиками напівпровідникових джерел світла. Фотометрія світлодіодів повинна проводитися з врахуванням їх розмірів, просторового, кутового і поверхневого розподілу випромінювання [2,3].

Актуальним на всіх етапах світлотехнічного розрахунку джерел світла є використання таблично або графічно заданих функцій, таких, як залежність сили світла або світлового потоку від кута випромінювання. При математичному моделюванні світлових параметрів числовими методами необхідно, щоб всі застосовані функції були неперервними, що не забезпечується при їх табличному представленні.

В роботі ставилася задача перетворення таблично і графічно представлених експериментальних даних світлорозподілу напівпровідникових джерел світла в аналітичні, які будуть використані в подальших розрахунках.

Методи апроксимації таблично заданих функцій

Нехай величина y є функцією аргументу x. Разом з тим, на практиці часто невідомий дійсний зв’язок між y та x, тобто складно записати цей зв’язок у вигляді функції $y=f(x)$. Для напівпровідникових джерел світла такою функцією може бути залежність сили світла від кута випромінювання $I=f(\alpha)$.

Цій меті служить задача про наближення (апроксимації) функцій: дана функція $f(x)$ апроксимується деякою функцією $g(x)$, при цьому коефіцієнти a_i підбираються так, щоб відхилення $g(x)$ від $f(x)$ в заданій області було мінімальним [4] :

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \qquad (1)$$

Одним з основних типів точкової апроксимації є інтерполювання. Воно полягає у наступному: для даної функції $y=f(x)$ будується многочлен, що приймає в заданих точках x_i ті самі значення, що і функція $f(x_i)$, тобто $g(x_i)= f(x_i)=y_i$, $i=0,1,\ldots n$.

При цьому припускається, що серед значень x_i немає однакових, тобто $x_i \neq x_k$ при цьому $i \neq k$. Точки x_i називаються вузлами інтерполяції, а многочлен $g(x)$ - інтерполяційним многочленом.

Метод інтерполяції многочленом Лагранжа

При знаходженні сили світла для кута випромінювання, який не співпадає з табличними даними, доцільно застосувати метод інтерполювання многочленом Лагранжа.

Інтерполяція многочленом Лагранжа на відрізку $[x_0, x_n]$ з використанням великої кількості вузлів часто приводить до наближення, що дає значне накопичення похибок в процесі підрахунків. Для того, щоб уникнути цього, весь відрізок $[x_0, x_n]$ розбивають на частинні відрізки і на кожному з них замінюють функцію многочленом невисокого степеня. В цьому і полягає кусково-поліноміальна інтерполяція.

Для випадку, коли функція залежить від одного аргументу $y_i = f(x_i)$, $(i=\overline{0,n})$, інтерполяційна формула Лагранжа записується у вигляді:

$$F(x_i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\cdot y_i=\sum_{i=0}^{n}y_i\cdot\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}. \qquad (2)$$

Причому $F(x_i) = f(x_i) = y_i$.

При оцінці похибки інтерполяції виходять з того, що вузли в таблиці рівно віддалені: $x_{i+1}-x_i=\Delta x$; $(i=\overline{0,n})$, а многочлен $F(x)$ у вузлових точках співпадає з $f(x)$:

$$F(x_i) = f(x_i)$$

Для довільної точки x, відмінної від вузла інтерполяції, різниця $f(x)-F(x) = R(x)$ не дорівнює нулю і характеризує близькість полінома $F(x)$ до функції $f(x)$ в межах вибраної ділянки таблиці. Величина $R(x)$ називається залишковим членом інтерполяційної формули і є абсолютною похибкою інтерполяції. Для оцінки точності інтерполяції представляється вираз для залишкового члена $R(x)$. При цьому вважається, що задана таблична функція $f(x)$ на вибраній ділянці $[p, p + r; q, q + r]$ має неперервні похідні до $(r+1)$ порядку включно, а залишковий член у вузлах інтерполяції дорівнює нулю. Оціночна формула для залишкового члена буде:

$$\left|R_r(x)\right| \le \frac{\dfrac{\partial^{r+1} f(x)}{\partial x^{r+1}}}{(r+1)!}\cdot P_{r+1}(x), \qquad (3)$$

де $P_{r+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_r)$; .

Оскільки вузли інтерполювання рівновіддалені, то оціночна формула (3) для залишкового члена набирає виду

$$\left|R_r(x)\right| \le \frac{\dfrac{\partial^{r+1} f(x)}{\partial x^{r+1}}}{(r+1)!}\cdot \Delta x^{r+1}\left|t(t-1)(t-2)\cdots(t-r)\right|, \qquad (4)$$

де $t=\dfrac{x-x_0}{\Delta x}$.

З (4) видно, що величина похибки многочлена Лагранжа залежить від того, як вибрано вузли інтерполювання (вони визначаються функцією $P_{r+1}(x)$).

Повертаючись до рівняння (4), остаточна формула для оцінки абсолютної похибки інтерполювання буде мати вигляд:

$$R_r(x)\le\frac{\Delta^{r+1} f(x)}{(r+1)!}\cdot\left|t(t-1)(t-2)\cdots(t-r)\right|\cdot \qquad (5)$$

Вираз (5) для $r = 1$:

$$R_1(x)\le\frac{\Delta^2 f(x)}{2!}\cdot\max_{0\le t\le 1}\left|t(t-1)\right|\cdot \qquad (6)$$

Врахувавши, що $\max\limits_{0\le t\le 1}\left|t(t-1)\right|=\dfrac{1}{4}$, вираз (6) матиме вигляд

$$R_1(x)\le\frac{1}{8}\left(\Delta^2 f(x_0)\right)\cdot \qquad (7)$$

Метод сплайн-апроксимації

Точність апроксимації падає при збільшенні степеня апроксимуючого полінома. Апарат сплайн-апроксимації дозволяє отримати поліноми, які дають у вузлових точках безперервність не лише функції, що представляється ними, але і її перших і навіть других похідних. Недоліком сплайн-апроксимації є відсутність загального вираження для всієї кривої. Фактично доводиться використовувати набір сплайн-функцій для різних інтервалів між вузловими точками.

Найчастіше застосовують інтерполяцію кубічним сплайном [4], який збільшує число точок на графіку світлорозподілу. Нехай деяка функція *f(x)* задана на відрізку [*a,b*], який розбивається на частинні відрізки $[x_{i-1}, x_i]$. Кубічним сплайном є функція *S(x)*, представлена на кожному відрізку поліномом третього степеня; має неперервну другу похідну; в точках x_i для якої виконується рівність $S(x_i)=f(x_i)$; $S''(a)= S''(b)=0$.

Представимо $h_i = x_i - x_{i-1}$ і $S_i(x)=a_i + b_i (x- x_i)^2 + \frac{c_i}{2} (x- x_i)^2 + \frac{d_i}{6} (x- x_i)^3$. (8)

З (8) отримуються формули для розрахунку коефіцієнтів сплайну:

$$a_i = f(x_i), \quad c_i = c_n = 0,$$

$$b_i = -\frac{1}{2} h_i c_i - \frac{1}{6} h_i^2 d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \quad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}. \tag{9}$$

Для інтерполяційного кубічного сплайну абсолютна похибка представляється:

$$\left| f(x) - S_3(x) \right| \le CM_4 h_{\max}^4 \cdot \tag{10}$$

Моделювання світлорозподілу світлодіодів рядом Фур'є

При моделюванні рядом Фур'є повинні задовольнятися умови Дирихлє:

- не повинно бути розривів другого роду (з відгалуженнями функції, що прямують в нескінченність);
- число розривів першого роду (скачків) повинно бути скінченним;
- число екстремумів повинно бути скінченним.

Стандартна форма запису ряду Фур'є має вигляд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \cdot \tag{11}$$

Для круглосиметричного розподілу функція *f(t) = f(-t)*. Тоді з (11) випливає, що всі $b_k \sin(k\omega t) = 0$, тобто всі b_k =0. Залишаються лише складові $a_k \cos(k\omega t)$.

Конкретні межі інтегрування вибираються у відповідності з граничним значенням повного кута випромінювання світлодіода, $\alpha \in [-\alpha_{гр1/2}, +\alpha_{гр1/2}]$.

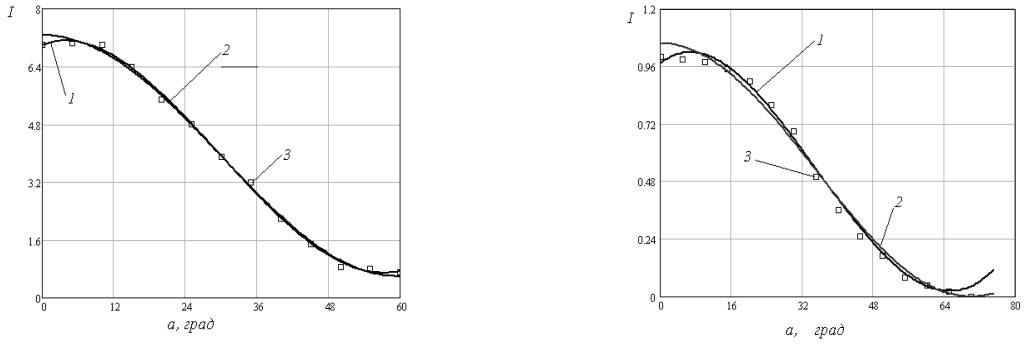
Аналітичний вираз світлорозподілу $I(\alpha)$, представленого рядом Фур'є в інтервалі (*-l,l*) буде матиме наступний вигляд:

$$I(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{\pi \cdot n \cdot \alpha}{l}, \tag{12}$$

де $a_0 = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(\alpha) d\alpha, \quad a_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(\alpha) \cdot \cos \frac{\pi \cdot n \cdot \alpha}{l} d\alpha \cdot$

В даній роботі проводилася апроксимація таблично представлених світлових параметрів світлодіодів за допомогою вище описаних методів [2,3]. На рис.1 приведені результати апроксимації кривих сили світла досліджених світлодіодів типу У-266 Бл (а) та світлодіодів фірми OSRAM типу 05W580EWC (б) [6] .

Як видно з наведених залежностей функції $I = f(\alpha)$ точність апроксимації при інтерполяції многочленом Лагранжа складає 99,7% і 80-95% для моделі світлорозподілу світлодіодів рядом Фур'є.



а) б)

Рис.1 - Графіки апроксимації кривих світлорозподілу світлодіодів (1 - апроксимація даних інтерполяційним многочленом Лагранжа; 2 – апроксимація даних рядом Фур'є; 3 – експериментальні результати)

Такі математичні моделі можуть використовуватися для аналітичного представлення світлорозподілу напівпровідникових джерел світла. Проте, треба враховувати, що похибки апроксимації знижують точність розрахунків. У відповідності з цим, для такого опису напівпровідникових джерел світла доцільно використовувати метод інтерполяції многочленом Лагранжа.

Література

1. Никифоров С. Проблемы ,теория и реальность светодиодов // Компоненты и технологии // 2005 №5. С.176-185.
2. Коган Л.М., Гальчина Н.А., Рассохин И.Т., Афанасьєв В.Б. Светодиодные осветительные и светосигнальные приборы с увеличенным световым потоком. //Светотехника// 2004. №6. С. 52-56.
3. Коган Л.М., Гальчина Н.А., Рассохин И.Т. Мощные красные и желтые светодиоды. //Светотехника// 2005. №3. С. 45-47.
4. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970. – 427 с.
5. Заутер Г., Линдеманн М., Шперлинг А., Оно И. Фотометрия светодиодов. //Светотехника// 2004. №3. С. 5-11.
6. Гвоздев-Карелин С.В., Хартманн Р. Светодиодные модули фирмы OSRAM. //Светотехника// 2002. №3. С. 38-40.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРИВИХ СВЕТОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕТОДИОДНЫХ ИСТОЧНИКОВ СВЕТА

О.Б. Кошик

Рассматриваются вопросы математического моделирования светораспределения полупроводниковых источников света на основе экспериментально полученных данных. Проведена и подана аппроксимация табличных представленных параметров светодиодов с помощью описанных методов.

ANALYSIS OF METHODS DESIGNS CROOKED OF SVITLOROZPODILU OF THE LIGHT-EMITTING-DIODE SOURCES

O.B. Koshyk

The questions of mathematical design of light division of the light-emitting-diode sources are examined on the basis of experimentally findings. Approximation of the tabular presented parameters of light-emitting diodes is conducted and given by the described methods.