МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи із спецкурсу теоретичної механіки

(для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 0921 (6.060101) «Будівництво» та слухачів другої вищої освіти)

ХАРКІВ ХНАМГ 2009

Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи із спецкурсу теоретичної механіки (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 0921 (6.060101) «Будівництво» та слухачів другої вищої освіти) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: О. І. Рубаненко, В. П. Шпачук. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 42 с.

Укладачі: О. І. Рубаненко,

В. П. Шпачук

Рецензент: проф. Г. А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,

протокол № 4 від 04.11.2008 р.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Спеціальний курс з теоретичної механіки для студентів спеціальностей ПЦБ, ОПБ включає основи аналітичної механіки, теорії малих коливань механічних систем із скінченним числом степенів вільності, коливань пружних елементів будівельних конструкцій, а також основи теорії удару. Вивчення цих розділів для бакалавра за напрямом «Будівництво» і інженера-будівельника необхідне для проектування, будівництва та експлуатації будівель і споруд з урахуванням динамічних дій, а також захисту робочих місць і вузлів устаткування від шкідливого впливу вібрацій. Динамічні дії викликаються машинами та устаткуванням, яке встановлене в будівлях і спорудах, повітряними, сейсмічними та іншими навантаженнями і можуть приводити до виникнення небезпечних для конструкцій переміщень і напружень. Широке застосування вібрацій, ударів і вибухів як елементів технологічних процесів також вимагає знань із спеціальних розділів механіки. При будуванні та експлуатації будівель і споруд необхідно враховувати вплив на стан працюючих людей вібрацій, допустимий рівень яких регламентується санітарно-гігієнічними нормами.

Цей курс є основою для вивчення таких спецкурсів, як динаміка і стійкість споруд, будівельна техніка, випробування конструкцій та ін.

Важливим критерієм засвоєння теоретичного матеріалу і успішної підготовки до поточного контролю зі змістових модулів є уміння розв’язувати задачі. Для цього потрібно вивчити теоретичний матеріал певної теми, розібрати в аудиторії під керівництвом викладача або за допомогою цих методичних вказівок методику розв’язання типових задач і закріпити отримані знання шляхом виконання домашніх задач і розрахунково-графічної роботи за планом самостійної роботи студента.

Ці методичні вказівки використовуються викладачем при проведенні практичних занять, а студентами у процесі самостійної роботи, при підготовці до занять, контрольних робіт, тестового контролю зі змістових модулів й підсумкового контролю із спецкурсу теоретичної механіки.

1. Тема занять - рівняння Лагранжа другого роду

У результаті вивчення цієї теми студенти отримують теоретичні знання стосовно основних визначень (можливе переміщення, можлива робота, узагальнені координати, швидкості й сили, кінетична енергія, момент інерції тіла), кінематичних співвідношень, законів (рівняння Лагранжа другого роду), а також навички використання цих знань для складання рівнянь руху механічної системи і їх розв’язання для визначення кінематичних параметрів цього руху.

1.1. Теоретичні основи руху механічних систем в узагальнених координатах

Для механічної системи з одним степенем вільності, що підпорядкована ідеальним, стаціонарним, голономним і утримуючим в'язям, ***рівняння Лагранжа другого роду*** записується у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q, \tag{1.1}$$

де q - узагальнена координата; $\dot{q}$ - узагальнена швидкість; T - кінетична енергія механічної системи, виражена через узагальнені координату і швидкість; Q - узагальнена сила.

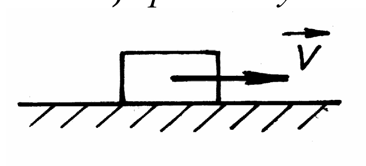
Кінетичною енергією системи називається скалярна величина, що дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок механічної системи:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k} m_k V_k^2, \tag{1.2}$$

де m_k, V_k - маса і швидкість k-ї точки системи відповідно.

Кінетична енергія твердого тіла визначається за формулами:

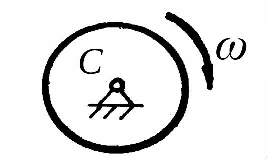
а) *при поступальному русі*:



$$T=\frac{1}{2}MV^2, \tag{1.3}$$

де V - лінійна швидкість будь-якої точки тіла;

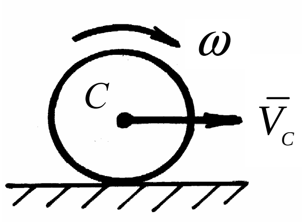
б) *при обертальному русі* навколо нерухомої осі *Cz*, що перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас *C* тіла:



$$T = \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2, \qquad (1.4)$$

де ω - кутова швидкість тіла; J_{cz} - момент інерції тіла відносно осі *Cz*.

с) *при плоскопаралельному русі*:

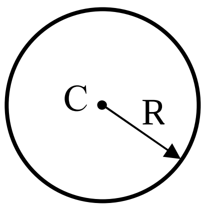


$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2, \qquad (1.5)$$

де V_C - швидкість центра мас *C* тіла.

Моменти інерції деяких однорідних твердих тіл відносно осі *Cz*, що перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас *C* тіла:

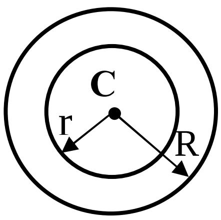
- суцільний круглий *диск* або *циліндр*:



$$J_{cz} = \frac{MR^2}{2}; \qquad (1.6)$$

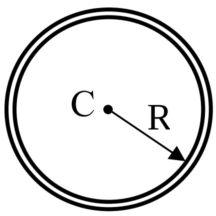
де M, R – маса і радіус диска (циліндра) відповідно;

- *тіло складної форми* (для такого тіла звичайно задається *радіус інерції* i_z):



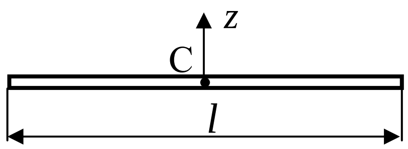
$$J_{cz} = M i_z^2; \qquad (1.7)$$

- *кільце* (маса тіла розподілена по його ободу):



$$J_{cz} = MR^2; \qquad (1.8)$$

- однорідний *стержень*:

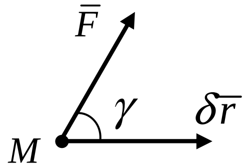


$$J_{cz} = \frac{Ml^2}{12}, \qquad (1.9)$$

де М, l – маса і довжина стержня відповідно.

Можливим переміщенням точки $\delta\overline{r}$ називається уявне нескінченно мале переміщення, що не суперечить накладеним на точку в'язям і відбувається у фіксований момент часу.

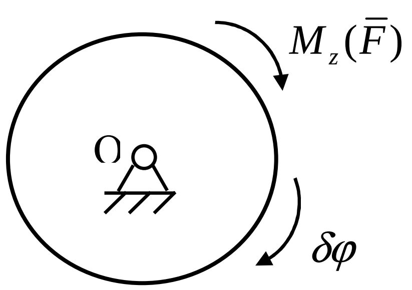
Можливою роботою сили називається скалярний добуток вектора сили $\overline{F}$ на вектор можливого переміщення $\delta\overline{r}$ точки M її прикладення (або добуток модуля сили на модуль можливого переміщення точки її прикладення і на косинус кута між векторами сили і можливого переміщення точки її прикладення):



$$\delta A_F = \overline{F} \cdot \delta\overline{r} = F \cdot \delta r \cdot \cos\gamma. \qquad (1.10)$$

Можлива робота сили, прикладеної до тіла, що обертається (або ***пари сил***), визначається за формулою

$$\delta A_F = \pm M_z\left(\overline{F}\right)\delta\varphi, \qquad (1.11)$$



де $M_z(\overline{F})$ - модуль *моменту сили* відносно осі обертання *Oz*, що перпендикулярна до площини руху (або *моменту пари сил*);

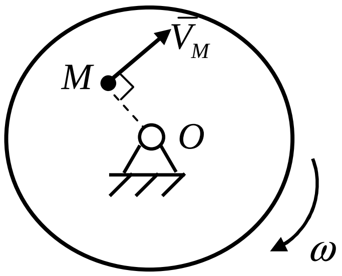
$\delta\varphi$ - можливий кут повороту тіла.

У формулі (1.11) беруть знак «+», якщо сила (або пара сил) намагається повернути тіло в сторону зростання можливого кута повороту, і знак «-», якщо навпаки.

***Кінематичні співвідношення при обертальному і плоскопаралельному рухах тіла*.**

Залежність між лінійною швидкістю точки твердого тіла і його кутовою швидкістю визначається формулами:

а) при *обертальному русі* навколо нерухомої осі:



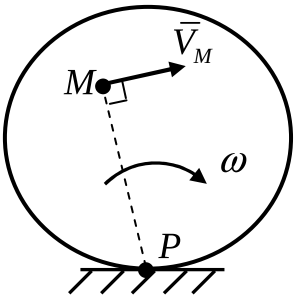
$$V_M = \omega \cdot MO, \qquad (1.12)$$

де ω - кутова швидкість тіла;

MO - відстань від розглядуваної точки M до осі обертання тіла *Oz*, що перпендикулярна до площини руху.

При цьому вектор $\bar{V}_M \perp MO$ і напрямлений згідно з напрямом обертання (зі «стрілкою» ω);

б) при *плоскопаралельному русі*:



$$V_M = \omega \cdot MP, \qquad (1.13)$$

де ω - кутова швидкість тіла;

MP - відстань від розглядуваної точки M до МЦШ (миттєвого центра швидкостей - точки P). При цьому вектор $\bar{V}_M \perp MP$ і напрямлений згідно з напрямом обертання (зі «стрілкою» ω).

Узагальненою силою Q (для механічної системи з одним степенем вільності) називається коефіцієнт при узагальненому можливому переміщенні у виразі суми можливих робіт активних сил:

$$\sum_k \delta A_k^a = Q \cdot \delta q. \qquad (1.14)$$

Для обчислення узагальненої сили Q потрібно у фіксований час надати механічній системі можливе переміщення (бажано у бік позитивного відліку узагальненої координати), обчислити суму робіт активних сил на можливих переміщеннях точок прикладання цих сил, виразити всі можливі переміщення точок прикладання сил через узагальнене можливе переміщення і привести вираження суми можливих робіт активних сил до вигляду (1.14). Тоді узагальнена сила Q дорівнюватиме коефіцієнту при δq у виразі (1.14).

1.2. Методика розв'язання задач за темою занять

Розв'язання задач на складання диференціального рівняння руху механічної системи з одним степенем вільності рекомендується проводити в такій послідовності:

1. Виділити механічну систему, рух якої досліджується, і зобразити її в довільному положенні. Визначити узагальнену координату і швидкість. Записати рівняння Лагранжа другого роду в загальній формі (1.1).
2. Показати активні сили і пари сил (при цьому ідеальні в'язі не відкидаються, а реакції неідеальних в'язей додаються до активних сил).
3. Обчислити кінетичну енергію механічної системи в довільному положенні. При цьому всі лінійні й кутові швидкості, що входять у формули кінетичних енергій тіл системи, потрібно виразити через узагальнену швидкість.
4. Обчислити узагальнену силу, враховуючи (1.14).
5. Скласти рівняння Лагранжа другого роду.
6. Визначити шукану величину.
7. Записати відповідь і проаналізувати отримані результати.

Зауваження. Залежно від умови задачі результати певних кроків наведеної послідовності можуть бути заданими або не виконуватись (наприклад, крок 6).

На практичних заняттях розв'язують задачі № 47.11, 47.12, 48.35 роботи [2].

У процесі самостійної підготовки розв'язують задачі № 47.6 - 47.15, 48.35 роботи [2], а також задачі до теми 3 роботи [7].

1.3. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. На похилій площині (кут $\alpha = 60^0$) лежить вантаж 1 масою $M_1 = 4m$, який прикріплений до кінця нитки (рис.1.1). Нитка перекинута через блок 2 масою $M_2 = 1{,}5m$ і намотана на вісь котушки 3 радіусом $r_3 = r$. При русі вантажу по похилій площині вниз

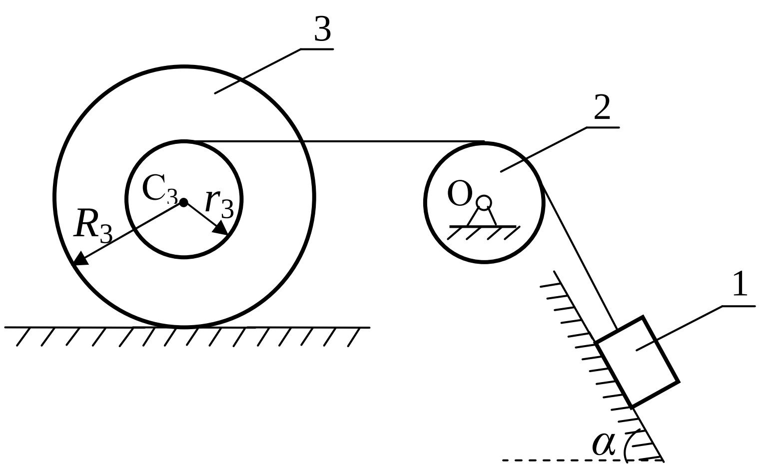


Рис. 1.1

котушка 3 масою $M_3 = 20m$ і радіусом $R_3 = 3r$ котиться без ковзання по горизонтальній площині вправо. Радіус інерції котушки щодо осі, яка проходить через її центр мас, дорівнює $i_{3z} = 4r$. Блок 2 вважати суцільним циліндром. Масою нитки знехтувати. Коефіцієнт тертя ковзання вантажу по похилій площині f = 0,2. Коефіцієнт тертя кочення котушки 3 по горизонтальній площині $f_к = 0,4$ см. Радіус $r = 2$ см.

Визначити: прискорення вантажу 1.

Розв'язання

1. Розглянемо механічну систему, що складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних нерозтяжною ниткою. Зобразимо систему в довільному положенні, вважаючи, що вантаж 1 рухається під дією власної сили ваги (рис.1.2). Система має один степінь вільності (оскільки для повної зупинки системи достатньо уявно зупинити одну будь-яку точку цієї системи). Виберемо як узагальнену координату переміщення вантажу 1 униз по похилій площині:

$$q = S_1. \tag{1.15}$$

Тоді узагальненою швидкістю буде лінійна швидкість вантажу 1

$$\dot{q} = V_1 = \dot{S}_1 \; . \qquad (1.16)$$

Рівняння Лагранжа другого ряду для механічної системи з урахуванням вибраної узагальненої координати матиме вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q_{S_1} . \qquad (1.17)$$

2. Покажемо активні сили, що прикладені до системи: $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ - сили ваги 1, 2, 3 тіл; оскільки похила і горизонтальна площини не є ідеальними в'язями (є тертя ковзання і тертя кочення), то включимо силу тертя ковзання вантажу 1 $\overline{F}_{тр1}$ і пару сил тертя кочення котушки 3 $M_{тк3}$ до активних сил. Реакції ідеальних в'язей на рисунку не показуємо.

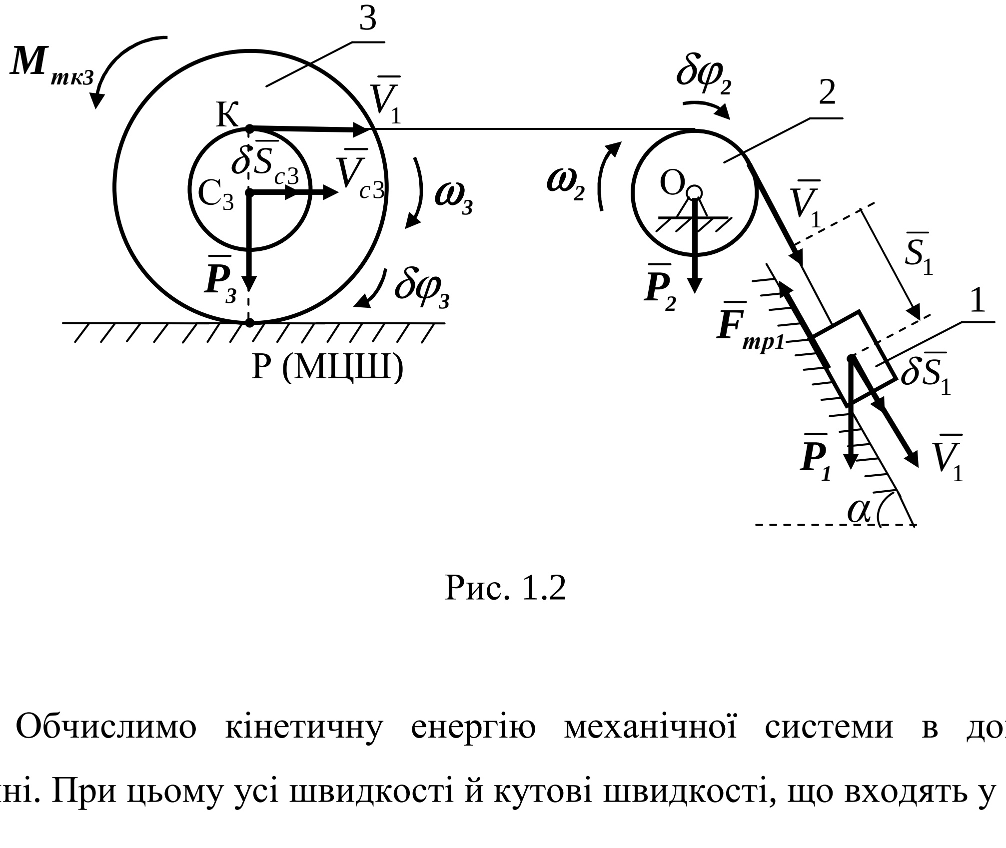


Рис. 1.2

3. Обчислимо кінетичну енергію механічної системи в довільному положенні. При цьому усі швидкості й кутові швидкості, що входять у формули кінетичних енергій тіл системи, виразимо через узагальнену швидкість $\dot{S} = V_1$.

Кінетична енергія системи в довільному положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять у систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 . \qquad (1.18)$$

Вантаж 1 рухається поступально, тому його кінетична енергія визначається за формулою

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2. \tag{1.19}$$

Блок 2 робить обертальний рух, його кінетична енергія дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{z2} \omega_2^2. \tag{1.20}$$

Враховуючи, що блок 2 є суцільним циліндром, його момент інерції

$$J_{z2} = \frac{1}{2} M_2 r_2^2. \tag{1.21}$$

Оскільки швидкість точки нитки на ободі блоку 2 дорівнює швидкості вантажу 1, то кутова швидкість блоку

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2}. \tag{1.22}$$

Підставляючи (1.22) і (1.21) у (1.20), одержимо

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{z2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \cdot \frac{V_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} M_2 V_1^2. \tag{1.23}$$

Котушка 3 здійснює плоскопаралельний рух, її кінетична енергія дорівнює

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 V_{c3}^2 + \frac{1}{2} J_{c_3 z} \omega_3^2. \tag{1.24}$$

Так як за умовою задачі відомий радіус інерції i_{3z}, то котушку вважаємо тілом складної форми і її момент інерції визначаємо за формулою

$$J_{c_3 z} = M_3 i_{3z}^2 = M_3 \cdot 16 \cdot r^2. \tag{1.25}$$

При коченні котушки без ковзання миттєвий центр швидкостей (МЦШ) розташований у точці *P* торкання котушки з горизонтальною площиною. Модуль швидкості точки *K* котушки дорівнює модулю швидкості вантажу 1, тому що вони належать до однієї нитки. Тоді

'

$$\omega_3 = \frac{V_к}{KP} = \frac{V_1}{R_3 + r_3} = \frac{V_1}{3r + r} = \frac{V_1}{4r}, \tag{1.26}$$

$$V_{c3} = \omega_3 \cdot CP = \frac{V_1}{4r} \cdot R_3 = \frac{V_1}{4r} \cdot 3r = \frac{3}{4} V_1. \tag{1.27}$$

Підставляючи (1.25) - (1.27) у (1.24), одержимо

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} M_3 V_{c3}^2 + \frac{1}{2} J_{c_3 z} \omega_3^2 = \frac{1}{2} M_3 \cdot \frac{9}{16} V_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} M_3 \cdot 16 \cdot r^2 \cdot \frac{V_1^2}{16 r^2} = \frac{9}{32} M_3 V_1^2 + \frac{1}{2} M_3 V_1^2 = \frac{25}{32} M_3 V_1^2. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Обчислимо *кінетичну енергію системи*, підставляючи (1.19), (1.23) і (1.28) у формулу (1.18):

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{4} M_2 V_1^2 + \frac{25}{32} M_3 V_1^2 = \\ &= \frac{V_1^2}{32} \left(16 M_1 + 8 M_2 + 25 M_3\right) = \frac{\dot{S}_1^2}{32} \left(16 M_1 + 8 M_2 + 25 M_3\right). \end{aligned} \tag{1.29}$$

4. Обчислимо узагальнену силу Q_{S_1}. Для цього у фіксований момент часу надамо механічній системі можливе переміщення (при цьому бажано, щоб узагальнене можливе переміщення $\delta \overline{S_1}$ було спрямовано в бік позитивного відліку узагальненої координати S_1) і обчислимо роботи активних сил на можливих переміщеннях точок прикладення цих сил:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \delta S_1 \cdot \cos(90^0 - \alpha) = M_1 g \cdot \delta S_1 \cdot \sin\alpha; \tag{1.30}$$

$$\delta A_{P_2} = 0 \tag{1.31}$$

(тому що точка прикладення цієї сили нерухома);

$$\delta A_{P_3} = P_3 \cdot \delta S_{c_3} \cdot \cos 90^0 = 0; \tag{1.32}$$

$$\delta A_{F_{mp1}} = F_{mp1} \cdot \delta S_1 \cdot \cos 180^0 = -F_{mp1} \cdot \delta S_1 = -f M_1 g \cos\alpha \cdot \delta S_1 \tag{1.33}$$

(при цьому було враховано, що в разі похилої площини нормальна реакція опори $N_1 = P_1 \cos\alpha$ і $F_{mp1} = f N_1 = f P_1 \cos\alpha = f M_1 g \cos\alpha$);

$$\delta A_{M_{\text{тк}3}} = -M_{\text{тк}3} \cdot \delta\varphi_3 = -f_\kappa M_3 g \cdot \frac{\delta S_1}{4r} \tag{1.34}$$

(на горизонтальній поверхні нормальна реакція опори $N_3 = P_3$, тому $M_{\text{тк}3} = f_\kappa N_3 = f_\kappa P_3 = f_\kappa M_3 g$; співвідношення між можливими переміщеннями пропорційні відповідним співвідношенням між швидкостями (1.26), тому $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta S_1}{4r}$).

Обчислимо суму можливих робіт активних сил:

$$\sum \delta A_k^a = M_1 g \delta S_1 \sin\alpha - f M_1 g \cos\alpha \delta S_1 - f_\kappa M_3 g \frac{\delta S_1}{4r} =$$
$$\left\{ g \left[M_1 \left(\sin\alpha - f \cos\alpha \right) - \frac{f_\kappa M_3}{4r} \right] \right\} \delta S_1. \tag{1.35}$$

Тоді узагальнена сила Q_{S_1} буде дорівнювати коефіцієнту при δS_1 у виразі (1.35):

$$Q_{S_1} = g \left[M_1 \left(\sin\alpha - f \cos\alpha \right) - \frac{f_\kappa M_3}{4r} \right]. \tag{1.36}$$

5. Складемо рівняння Лагранжа другого роду (1.17).

Часткова похідна кінетичної енергії за узагальненою координатою

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0, \tag{1.37}$$

тому що узагальнена координата S_1 у вираз для кінетичної енергії (1.29) явно не входить.

Часткова похідна кінетичної енергії за узагальненою швидкістю

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = \frac{2 \cdot \dot{S}_1}{32} \left(16M_1 + 8M_2 + 25M_3 \right) = \frac{\dot{S}_1}{16} \left(16M_1 + 8M_2 + 25M_3 \right). \tag{1.38}$$

Повна похідна кінетичної енергії за часом від виразу (1.24) дорівнює:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) = \frac{\ddot{S}_1}{16} \left(16M_1 + 8M_2 + 25M_3 \right). \tag{1.39}$$

Якщо підставити (1.39), (1.37) і (1.36) у рівняння Лагранжа (1.17), одержимо

$$\frac{\ddot{S}_1}{16}\left(16M_1+8M_2+25M_3\right)-0=g\left[M_1\left(\sin\alpha-f\cos\alpha\right)-\frac{f_к M_3}{4r}\right]. \qquad (1.40)$$

6. Шукане прискорення вантажу 1 дорівнює другій похідній за часом від узагальненої координати $a_1=\ddot{S}_1$, тому з рівняння (1.40) отримаємо:

$$a_1=\ddot{S}_1=\frac{16\cdot g\left[M_1\left(\sin\alpha-f\cos\alpha\right)-\frac{f_к M_3}{4r}\right]}{\left(16M_1+8M_2+25M_3\right)}=$$

$$=\frac{16\cdot g\left[4m\cdot\left(\sin\alpha-f\cos\alpha\right)-\frac{f_к\cdot 20m}{4r}\right]}{\left(16\cdot 4m+8\cdot 1{,}5m+25\cdot 20m\right)}=$$

$$=\frac{16gm\left[4\left(\sin\alpha-f\cos\alpha\right)-5\frac{f_к}{r}\right]}{\left(64m+12m+500m\right)}=\frac{160m\left[4\cdot\left(0{,}87-0{,}2\cdot 0{,}5\right)-5\cdot\frac{0{,}4}{2}\right]}{576m}=$$

$$=\frac{160\cdot 2{,}08m}{576m}=\frac{20{,}8}{36}\approx 0{,}58\ \text{м/с}^2. \qquad (1.41)$$

Відповідь. Прискорення вантажу a_1 = 0,58 м/с^2.

Приклад 2. Скласти диференціальне рівняння коливань математичного маятника (рис. 1.3) за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

Розв'язання

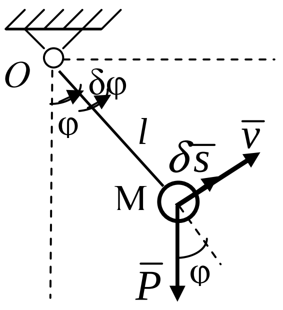


Рис. 1.3

1. Зобразимо систему, що складається з ідеального стержня ОМ і матеріальної точки М, в довільному положенні при коливаннях у вертикальній площині. Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут відхилення стержня ОМ від вертикалі $q=\varphi$.

Рівняння Лагранжа (1.1) з урахуванням вибраної узагальненої координати набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi . \tag{1.42}$$

2. На матеріальну точку M діє тільки сила ваги $\overline{P} = m\overline{g}$.

3. Визначимо кінетичну енергію математичного маятника**:** $T = \dfrac{mv^2}{2}$.

Лінійну швидкість v виразимо через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega$ (кутову швидкість обертання стержня OM): $v = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l$. Тоді отримаємо

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 . \tag{1.43}$$

4. Обчислимо узагальнену силу Q_φ. Зафіксуємо час t і надамо системі можливе переміщення у бік позитивного відліку узагальненої координати φ , тобто повернемо стержень OM на малий кут $\delta\varphi$. Обчислимо суму можливих робіт активних сил

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_P = P \cdot \delta s \cdot \cos(90 + \varphi), \tag{1.44}$$

де можливе переміщення δs точки M (точки прикладення сили ваги) має бути виражене через можливий кут повороту стержня $\delta\varphi$. Для систем із стаціонарними в'язями можливі переміщення пропорційні відповідним швидкостям, отже маємо $\delta s = \delta\varphi \cdot l$. Тоді вираз (1.44) з урахуванням формули зведення тригонометричних функцій $\cos(90 + \varphi) = -\sin\varphi$ набере вигляду

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_P = -mgl \sin\varphi \cdot \delta\varphi , \tag{1.45}$$

звідки узагальнена сила буде

$$Q_\varphi = -mgl \cdot \sin\varphi . \tag{1.46}$$

5. Обчислимо похідні кінетичної енергії (1.43):

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \tag{1.47}$$

(оскільки узагальнена координата φ явно не входить до кінетичної енергії T);

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} ml^2 \cdot 2\dot{\varphi} = ml^2 \dot{\varphi}; \qquad (1.48)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2 \ddot{\varphi}. \qquad (1.49)$$

Складемо рівняння Лагранжа другого роду, підставляючи (1.46), (1.47)-(1.49) у рівняння (1.42):

$$ml^2 \ddot{\varphi} - 0 = -mgl \cdot \sin\varphi$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0. \qquad (1.50)$$

Відповідь. Рівняння (1.50) є диференціальним рівнянням руху (коливань) математичного маятника. Зазначимо, що це рівняння є нелінійним. У разі малих коливань, тобто коли $\sin\varphi \approx \varphi$, рівняння (1.50) набуде вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0. \qquad (1.51)$$

2. Тема занять - визначення положень рівноваги механічної системи з одним степенем вільності і їх стійкості

У результаті вивчення цієї теми студенти отримують теоретичні знання стосовно основних визначень (потенціальна енергія, стійкість положення рівноваги), законів (умови рівноваги механічної системи в узагальнених координатах, теорема Лагранжа-Діріхле про стійкість рівноваги), а також навички використання цих знань для визначення положень рівноваги механічної системи з одним степенем вільності і їх стійкості.

2.1. Теоретичні основи рівноваги механічної системи і її стійкості

Умовою рівноваги механічної системи з одним степенем вільності, що підпорядкована ідеальним, стаціонарним і голономним в'язям, положення якої визначається узагальненою координатою q, є рівняння

$$Q = 0, \qquad (2.1)$$

де Q - узагальнена сила.

Для *консервативної системи* ця рівність матиме вигляд

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0, \qquad (2.2)$$

де Π - потенціальна енергія системи.

Розв'язуючи рівняння (2.1) або (2.2), можна знайти ті положення (тобто ті значення параметра q), в яких система може знаходитись у стані рівноваги.

Потенціальна енергія консервативної системи визначається як робота консервативних сил при переміщенні системи з даного положення M в нульове M_0 (положення, де потенціальна енергія приймається рівною нулю $\Pi = 0$):

$$\Pi = A_{MM_0} . \qquad (2.3)$$

Приклади **консервативних сил**:

- ***сила ваги*** $P = mg$, де m - маса точки (тіла). *Потенціальна енергія* сили ваги визначається за формулою

$$\Pi_P = mg(z - z_0) \ , \tag{2.4}$$

де z, z_0 - вертикальні координати даного і нульового положень точки прикладення сили ваги (за умови напрямлення осі z вертикально уверх). З формули (2.4) випливає, що потенціальна енергія сили ваги додатна $\Pi_P > 0$, якщо дане положення знаходиться вище за нульове $(z > z_0)$, від'ємна $\Pi_P < 0$, якщо дане положення нижче за нульове $(z < z_0)$, і дорівнює нулю $\Pi_P = 0$, якщо дане положення і нульове знаходяться на одному рівні за висотою;

- ***сила пружності пружини*** $F_{пр} = c\lambda$, де c - коефіцієнт жорсткості пружини; λ - деформація пружини (зміна її довжини по відношенню до недеформованої пружини). *Потенціальна енергія* пружини визначається за формулою

$$\Pi_{F_{пр}} = \frac{c}{2} \cdot (\lambda^2 - \lambda_0^2) \ , \tag{2.5}$$

де λ, λ_0 - деформації пружини в даному і нульовому положеннях.

Достатня ***умова стійкості рівноваги*** консервативної системи визначається теоремою Лагранжа – Діріхле і для системи з одним степенем вільності має вигляд

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=0} > 0, \tag{2.6}$$

тобто *положення рівноваги консервативної системи з одним степенем вільності буде стійким, якщо друга похідна потенціальної енергії за узагальненою координатою, що обчислена в положенні рівноваги, є додатною.*

2.2. Методика розв'язання задач за темою занять

Розв'язання задач на *визначення положень рівноваги і їх стійкості консервативної системи* з одним степенем вільності рекомендується проводити в наступному порядку:

1. Виділити механічну систему, рівновага якої досліджується, і зобразити її в довільному (відхиленому від стану рівноваги) положенні. Вибрати узагальнену координату і записати рівняння рівноваги або умову її стійкості у загальній формі.
2. Показати активні сили (при цьому ідеальні в'язі не відкидають).
3. Обчислити потенціальну енергію.
4. Скласти рівняння рівноваги і (або) умову стійкості рівноваги.
5. Розв'язати складене рівняння і (або) нерівність.
6. Записати відповідь і проаналізувати отримані результати.

На практичних заняттях розв'язують задачі № 54.4, 53.6 роботи [2].

У процесі самостійної підготовки розв'язують задачі № 53.11, 53.12 роботи [2].

2.3. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Визначити можливі положення рівноваги математичного маятника, що складається з ідеального стержня ОМ довжиною l і матеріальної точки М масою m (рис. 2.1).

Розв'язання

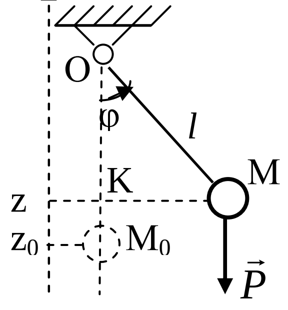


Рис. 2.1

1. Будемо визначати положення точки М у довільному положенні за допомогою кута φ відхилення стержня ОМ від вертикалі. Система має один степінь вільності і за узагальнену координату q приймемо кут повороту стержня $q = \varphi$.

2. На точку М діє консервативна сила ваги $\overline{P} = m\overline{g}$.

3. Визначимо потенціальну енергію системи. За нульове приймемо положення маятника у стані спокою OM_0 (рис. 2.1). Різниця висот між розглядуваним M і нульовим M_0 положеннями дорівнює

$$z - z_0 = OM_0 - OK = l - l \cdot \cos\varphi = l \cdot (1 - \cos\varphi).$$

Обчислимо потенціальну енергію системи, використовуючи формулу (2.4):

$$\Pi = mg(z - z_0) = mgl \cdot (1 - \cos\varphi). \qquad (2.7)$$

4. Складемо рівняння (2.2):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl \cdot \sin\varphi = 0 \text{ , або } \sin\varphi = 0. \qquad (2.8)$$

5. Розв'яжемо рівняння (2.8). Це рівняння має два корені: $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi$.

Відповідь. Кореню $\varphi_1 = 0$ відповідає нижнє вертикальне положення маятника (рис. 2.2, а), кореню $\varphi_2 = \pi$ - верхнє вертикальне положення (рис. 2.2, б).

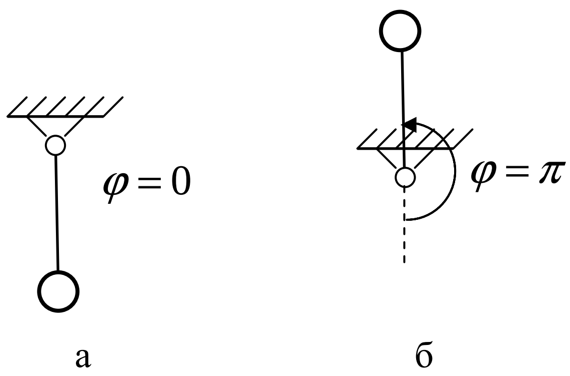


Рис. 2.2

Приклад 2. Визначити стійкість положень рівноваги математичного маятника, що були визначені у прикладі 1 даної теми (рис. 2.1).

Розв'язання

1-3. Перші три пункти методики розв'язання даної задачі такі самі, як у прикладі 1.

4. Обчислимо другу похідну потенціальної енергії (2.7) за узагальненою координатою φ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mgl \cdot \cos\varphi \ . \tag{2.9}$$

5. З'ясуємо далі знак другої похідної у відповідних положеннях рівноваги (рис. 2.2):

- при $\varphi_1 = 0$ значення $\cos\varphi_1 = 1$ і $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi_1 = 0} = mgl > 0$, тобто нижнє положення рівноваги математичного маятника є стійким;

- при $\varphi_2 = \pi$ значення $\cos\varphi_2 = -1$ і $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi_2 = \pi} = -mgl < 0$, отже верхнє положення рівноваги математичного маятника є нестійким.

Відповідь. Нижнє положення рівноваги математичного маятника $\varphi_1 = 0$ є стійким, а верхнє $\varphi_2 = \pi$ - нестійким.

3. Тема занять - малі коливання механічної системи з одним степенем вільності

У результаті вивчення цієї теми студенти отримують теоретичні знання стосовно основних визначень (кінетична і потенціальна енергії, амплітуда, період і колова частота коливань, вільні й вимушені коливання, коефіцієнт динамічності), законів (рівняння Лагранжа 2-го роду, диференціальні рівняння вільних і вимушених коливань), а також навички використання цих знань для складання рівнянь коливального руху механічної системи з одним степенем вільності і визначення основних параметрів цього руху.

3.1. Теоретичні основи малих коливань механічної системи з одним степенем вільності

У випадку ***малих коливань консервативної системи з одним степенем вільності*** навколо положення стійкої рівноваги її ***кінетична і потенціальна енергії*** мають вигляд

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \tag{3.1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2, \tag{3.2}$$

де a, c - узагальнені коефіцієнти інерції і жорсткості відповідно, що є сталими і додатними параметрами.

Диференціальне рівняння, що складається за допомогою рівняння Лагранжа другого роду (1.1), записується у формі

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{3.3}$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \tag{3.4}$$

ω_0 - ***колова (власна) частота коливань.***

Розв'язок диференціального рівняння (3.3):

$$q = q_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \qquad (3.5)$$

де $q\big|_{t=0} = q_0,\ \dot{q}\big|_{t=0} = \dot{q}_0$ - початкові узагальнені координата і швидкість відповідно, є ***рівнянням вільних***, або ***власних***, ***коливань консервативної системи*** навколо положення її стійкої рівноваги. Рівняння (3.5) можна записати в іншій, еквівалентній формі:

$$q = A\sin(\omega_0 t + \varepsilon), \qquad (3.6)$$

де

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0^2}}, \qquad \varepsilon = arctg\left(\frac{q_0\omega_0}{\dot{q}_0}\right), \qquad (3.7)$$

A - ***амплітуда коливань***, ε - ***початкова фаза коливань.***

Колова частота ω_0 вимірюється у *рад/с* і зв'язана з ***періодом коливань*** формулою

$$T_{період} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}. \qquad (3.8)$$

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на механічну систему, крім консервативних, діє збурююча сила, що явно залежить від часу. У випадку гармонійної збурюючої сили відповідна узагальнена сила має вигляд

$$Q_F = H\sin\omega_B t, \qquad (3.9)$$

де H - амплітуда; ω_B - колова частота збурюючої сили.

Диференціальне рівняння, що складається за допомогою рівняння Лагранжа другого роду (1.1), записується у формі

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = h_B \sin\omega_B t, \qquad (3.10)$$

де введені позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad h_B = \frac{H}{a}. \qquad (3.11)$$

Розв'язок диференціального рівняння (3.10) з урахуванням початкових умов $q\big|_{t=0} = q_0$, $\dot{q}\big|_{t=0} = \dot{q}_0$ буде

$$q = q_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{\omega_B}{\omega_0}\cdot\frac{h_B}{\omega_0^2-\omega_B^2}\cdot\sin\omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2-\omega_B^2}\cdot\sin\omega_B t\,. \quad (3.12)$$

Вираз (3.12) є ***рівнянням вимушених коливань*** механічної системи при гармонійній збурюючій силі. Останній доданок рівняння (3.12) описує *чисто вимушені коливання* з амплітудою $\left|A_B\right| = \dfrac{h_B}{\left|\omega_0^2-\omega_B^2\right|}$ і частотою ω_B.

Однією з важливих власних характеристик коливальної системи є ***коефіцієнт динамічності*** μ, що *дорівнює* відношенню амплітуди вимушених коливань $\left|A_B\right|$ до статичного відхилення q_{cm}:

$$\mu = \frac{\left|A_B\right|}{q_{cm}} = \frac{1}{\left|1-\left(\dfrac{\omega_B}{\omega_0}\right)^2\right|}. \quad (3.13)$$

Як випливає з формули (3.13), коефіцієнт динамічності *залежить* тільки від відношення частот вимушених і власних коливань $\dfrac{\omega_B}{\omega_0}$.

3.2. Методика розв'язання задач за темою занять

Розв'язання задач на *визначення характеристик малих коливань консервативної системи* з одним степенем вільності навколо положення її стійкої рівноваги рекомендується проводити в такому порядку:

1. Виділити механічну систему, коливання якої досліджуються, і зобразити її в довільному положенні. Вибрати узагальнену координату і швидкість.

2. Показати активні сили (при цьому ідеальні в'язі не відкидають).

3. Обчислити кінетичну енергію. Визначити узагальнений коефіцієнт інерції a шляхом порівняння виразу кінетичної енергії системи в довільному положенні із загальною формулою (3.1).

4. Обчислити потенціальну енергію. Визначити узагальнений коефіцієнт жорсткості c шляхом порівняння виразу потенціальної енергії системи в довільному положенні із загальною формулою (3.2).

5. Визначити параметри коливального руху, використовуючи формули (3.4), (3.7), (3.8), (3.11) або (3.13).

6. Записати відповідь і проаналізувати отримані результати.

На практичних заняттях розв’язують задачі № 54.4, 48.35 роботи [2].

У процесі самостійної підготовки розв’язують задачі № 54.2, 54.3, 48.36 роботи [2].

3.3. Приклади розв’язання задач

Приклад 1. Визначити період малих коливань математичного маятника (див. приклад 1 теми 2, рис. 2.1).

Розв’язання

Для визначення узагальнених коефіцієнтів інерції a і жорсткості c, що входять у формулу (3.8) для періоду малих коливань, потрібно скласти вирази потенціальної і кінетичної енергії системи в довільному положенні і порівняти їх із загальними формулами (3.1) і (3.2).

1-2. Перші два пункти методики розв’язання даної задачі такі самі, як у прикладі 1 теми 2.

3. Визначимо кінетичну енергію математичного маятника**:** $T = \dfrac{mv^2}{2}$.

Лінійну швидкість v виразимо через узагальнену швидкість $\dot{\varphi} = \omega$ (кутову швидкість обертання стержня ОМ): $v = \omega \cdot l = \dot{\varphi} \cdot l$. Тоді отримаємо

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot (\dot{\varphi} \cdot l)^2}{2} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 . \qquad (3.14)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.1), знаходимо узагальнений коефіцієнт інерції:

$$a = ml^2. \tag{3.15}$$

4. Потенціальна енергія математичного маятника була визначена в прикладі 1 теми 2 (формула (2.7)):

$$\Pi = mgl \cdot (1 - \cos\varphi).$$

Розкладемо функцію $\cos\varphi$ в ряд Маклорена і утримаємо доданки порядку мализни не вищого, ніж другий: $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$. Тоді

$$\Pi = mgl \cdot (1 - \cos\varphi) \approx mgl \cdot (1 - 1 + \frac{1}{2}\varphi^2) = mgl \cdot \frac{\varphi^2}{2}. \tag{3.16}$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (3.2), знаходимо узагальнений коефіцієнт жорсткості:

$$c = mgl. \tag{3.17}$$

5. Визначимо період малих коливань за формулою (3.8):

$$T_{період} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Відповідь. Період малих коливань математичного маятника $T_{період} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

З цієї формули випливає, що період залежить тільки від довжини стержня l. Чим більшою є довжина, тим більший період коливань маятника.

Приклад 2. Кінетична енергія механічної системи $T = 2\dot{x}^2$, потенціальна енергія $\Pi = 8x^2$, де x - узагальнена координата. На систему діє гармонійна збурююча сила, якій відповідає узагальнена сила $Q_F = 10 \cdot \sin(1,414 \cdot t)$. Визначити коефіцієнт динамічності.

Розв'язання

1-2. Перші два пункти методики виконані автоматично за умовою задачі.

3. Визначимо узагальнений коефіцієнт інерції шляхом порівняння заданої кінетичної енергії з формулою (3.1): $a = 4$.

4. Визначимо узагальнений коефіцієнт жорсткості шляхом порівняння заданої потенціальної енергії з формулою (3.2): $c = 16$.

5. Визначимо власну колову частоту системи за формулою (3.4):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2 \text{ (рад/с).}$$

Колова частота вимушених коливань, що випливає з формули заданої збурюючої сили, дорівнює $\omega_B = 1{,}414$ (рад/с).

Коефіцієнт динамічності, згідно з формулою (3.13), дорівнює

$$\mu = \frac{1}{\left|1 - \left(\dfrac{\omega_B}{\omega_0}\right)^2\right|} = \frac{1}{\left|1 - \left(\dfrac{1{,}414}{2}\right)^2\right|} = \frac{1}{\left|1 - \dfrac{1}{2}\right|} = 2.$$

Відповідь. Коефіцієнт динамічності $\mu = 2$. Це означає, що в даній системі амплітуда вимушених коливань у 2 рази перевищує статичне відхилення під дією такої ж за максимальним значенням, але статичної сили.

4. Тема занять - малі коливання механічної системи з двома степенями вільності

У результаті вивчення цієї теми студенти отримують теоретичні знання стосовно основних визначень (кінетична і потенціальна енергії, частотне рівняння, власні частоти і коефіцієнти форм коливань), законів (рівняння Лагранжа другого роду, диференціальні рівняння вільних коливань), а також навички використання цих знань для складання рівнянь коливального руху механічної системи з двома степенями вільності і визначення основних параметрів цього руху.

4.1. Теоретичні основи малих коливань механічної системи з двома степенями вільності

У випадку ***малих коливань консервативної системи з двома степенями вільності*** навколо положення стійкої рівноваги її ***кінетична і потенціальна енергії*** мають вигляд

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \tag{4.1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \tag{4.2}$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{22}$ - узагальнені коефіцієнти інерції і жорсткості відповідно, що є сталими й додатними параметрами. Формули (4.1), (4.2) записані з урахуванням симетрії узагальнених коефіцієнтів інерції ($a_{12} = a_{21}$) і жорсткості ($c_{12} = c_{21}$).

Диференціальні рівняння малих вільних коливань, що складаються за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \end{cases}$$

записують у формі

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Розв'язок диференціальних рівнянь (4.3) має вигляд

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \\ q_2 = \mu_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \varepsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \varepsilon_2), \end{cases} \tag{4.4}$$

де $A_1, A_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ - довільні сталі, що визначаються за допомогою початкових умов; ω_1 і ω_2 - ***колові частоти вільних коливань***, або ***власні частоти***, що є коренями ***частотного рівняння***

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 = 0; \tag{4.5}$$

μ_1, μ_2 - ***коефіцієнти форм коливань*** (*дорівнюють* відношенням амплітуд узагальнених координат у кожному з головних коливань і *показують*, у скільки разів амплітуда коливань в одній з координат q_2 більша (або менша) за амплітуду коливань в іншій координаті q_1), що визначаються співвідношеннями

$$\begin{cases} \mu_1 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2}, \\ \mu_2 = -\dfrac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Рівняння (4.4) є ***рівняннями малих вільних коливань консервативної системи з двома степенями вільності*** навколо положення стійкої рівноваги.

4.2. Методика розв'язання задач за темою занять

Розв'язання задач на *визначення характеристик малих коливань консервативної системи* з двома степенями вільності навколо положення її стійкої рівноваги рекомендується проводити в такому порядку:

1. Виділити механічну систему, коливання якої досліджуються, і зобразити її в довільному положенні. Вибрати узагальнені координати і швидкості.

2. Показати активні сили (при цьому ідеальні в’язі не відкидають).

3. Обчислити кінетичну енергію системи. Визначити узагальнені коефіцієнти інерції $a_{11},\, a_{12},\, a_{22}$ шляхом порівняння виразу кінетичної енергії системи в довільному положенні із загальною формулою (4.1).

4. Обчислити потенціальну енергію системи. Визначити узагальнені коефіцієнти жорсткості c_{11}, c_{12}, c_{22} шляхом порівняння виразу потенціальної енергії системи в довільному положенні із загальною формулою (4.2).

5. Визначити основні параметри коливального руху системи – власні частоти ω_1, ω_2 і коефіцієнти форм коливань μ_1, μ_2, використовуючи частотне рівняння (4.5) і формули (4.6).

6. Записати відповідь і проаналізувати отримані результати.

На практичних заняттях розв’язують задачі № 55.7, 55.30 роботи [2].

У процесі самостійної підготовки розв’язують задачі № 55.37, 55.31 роботи [2].

4.3. Приклади розв’язання задач

Приклад 1. Визначити власні частоти й коефіцієнти форм малих коливань механічної системи, що складається з двох вантажів масами m_1, m_2, які з’єднані між собою і з нерухомою опорою двома пружинами жорсткості c_1, c_2 відповідно (рис. 4.1). Тертям між вантажами і горизонтальною поверхнею знехтувати. Розглянути випадок наступних співвідношень між масами і жорсткостями: $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $\frac{c}{m} = 8$ (рад/с)^2.

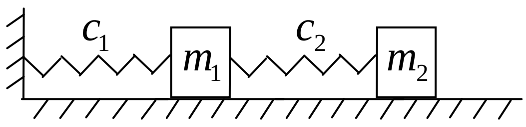


Рис.4.1

Розв’язання

1. Зобразимо механічну системи у довільному положенні (рівні 3 на рис. 4.2). Система має два степеня вільності і за узагальнені координати $q_1,\ q_2$ приймемо декартові координати $q_1 = x_1,\ q_2 = x_2$, що відлічуються від відповідних положень рівноваги вантажів (рівні 2). Ці положення для горизонтальних пружин збігаються з

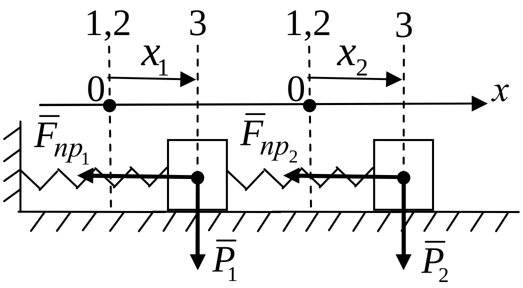


Рис.4.2

кінцями недеформованих пружин (рівні 1). Узагальненими швидкостями будуть проекції швидкостей вантажів на горизонтальну вісь *x*: $\dot{q}_1 = V_{x_1} = \dot{x}_1,\ \dot{q}_2 = V_{x_2} = \dot{x}_2$.

2. Активними силами, що діють на систему, будуть консервативні сили ваги вантажів $\overline{P}_1 = m_1\overline{g},\ \overline{P}_2 = m_2\overline{g}$ і сили пружності пружин $\overline{F}_{np_1}$, $\overline{F}_{np_2}$.

3. Вантажі здійснюють поступальний рух, тому кінетична енергія системи дорівнює

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2. \qquad (4.7)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.1), знаходимо узагальнені коефіцієнти інерції як множники при відповідних узагальнених швидкостях:

$$a_{11} = m_1,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = m_2. \qquad (4.8)$$

4. Потенціальна енергія системи складається з потенціальних енергій сил ваги вантажів і двох пружин:

$$\Pi = \Pi_{P_1} + \Pi_{P_2} + \Pi_{F_{np_1}} + \Pi_{F_{np_2}}.$$

За нульове положення приймемо положення рівноваги системи. Оскільки різниця висот між довільним і нульовим положеннями вантажів дорівнює нулю, то згідно з формулою (2.4)

$$\Pi_{P_1} = \Pi_{P_2} = 0.$$

У положенні рівноваги пружини недеформовані, в довільному положенні деформація першої пружини дорівнює $\lambda_1 = x_1$, а другої, враховуючи переміщення першого вантажу (або точки закріплення другої пружини) $\lambda_2 = x_2 - x_1$. Тому, зважаючи на формулу (2.5), отримаємо

$$П_{F_{пр_1}} = \frac{1}{2}c_1 x_1^2, \qquad П_{F_{пр_2}} = \frac{1}{2}c_2(x_2 - x_1)^2.$$

Таким чином, потенціальна енергія системи дорівнює

$$П = \frac{1}{2}c_1 x_1^2 + \frac{1}{2}c_2(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}c_1 x_1^2 + \frac{1}{2}c_2 x_2^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2}c_2 x_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(c_1 + c_2)x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2}c_2 x_1^2. \qquad (4.9)$$

Порівнюючи цей вираз з формулою (4.2), знаходимо узагальнені коефіцієнти жорсткості як множники при відповідних узагальнених координатах:

$$c_{11} = c_1 + c_2,\ c_{12} = -c_2,\ c_{22} = c_2. \qquad (4.10)$$

5. Складемо частотне рівняння (4.5). З урахуванням формул (4.8), (4.10) і чисельних даних задачі воно набуде вигляду

$$(c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2 =$$

$$= [(c_1 + c_2) - m_1\omega^2](c_2 - m_2\omega^2) - (-c_2 - 0\cdot\omega^2)^2 =$$

$$= (2c - 2m\omega^2)(c - m\omega^2) - c^2 = 0.$$

Перетворимо останній вираз у біквадратне рівняння

$$2m^2\omega^4 - 4mc\omega^2 + c^2 = 0$$

або

$$\omega^4 - 2\left(\frac{c}{m}\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 0. \qquad (4.11)$$

Знайдемо корені алгебраїчного рівняння (4.11):

$$\omega_{1,2}^2 = \left(\frac{c}{m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}\right)^2} = \frac{c}{m}\left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right) = 8\left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right) = 4(2 \pm \sqrt{2}).$$

Отже, власні частоти системи дорівнюють:

$$\omega_1 = \sqrt{4(2-\sqrt{2})} = 2\sqrt{(2-\sqrt{2})} \approx 2\sqrt{0,6} \approx 1,55 \text{ рад/с};$$

$$\omega_2 = \sqrt{4(2+\sqrt{2})} = 2\sqrt{(2+\sqrt{2})} \approx 2\sqrt{3,4} \approx 3,69 \text{ рад/с}.$$

Визначимо коефіцієнти форм коливань системи. З урахуванням виразів для узагальнених коефіцієнтів інерції і жорсткості (4.8), (4.10) і даних задачі рівняння (4.6) для коефіцієнтів форм коливань набудуть вигляду

$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_1^2}{c_{12} - a_{12}\omega_1^2} = -\frac{2c - 2m\omega_1^2}{-c} = 2\frac{\frac{c}{m} - \omega_1^2}{\frac{c}{m}} = 2\frac{\frac{c}{m} - \frac{c}{m}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{c}{m}} =$$

$$= 2\frac{1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}}{1} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1,4 \ ,$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}\omega_2^2}{c_{12} - a_{12}\omega_2^2} = 2\frac{\frac{c}{m} - \frac{c}{m}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{c}{m}} = 2\frac{1 - \frac{2+\sqrt{2}}{2}}{1} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \approx -1,4.$$

Відповідь. Власні частоти системи $\omega_1 \approx 1,55$ (рад/с); $\omega_2 \approx 3,69$ (рад/с). Коефіцієнти форм коливань $\mu_1 \approx 1,4$; $\mu_2 \approx -1,4$. При першій формі коливань з частотою ω_1 обидва вантажі рухаються в одному напрямку, при цьому амплітуда коливань другого вантажу у 1,4 раза більша за амплітуду коливань першого вантажу. Другій формі коливань відповідає рух вантажів у протилежних напрямках з таким же співвідношенням амплітуд коливань.

5. Тема занять - основи теорії удару матеріальної точки і механічної системи

У результаті вивчення цієї теми студенти отримують теоретичні знання стосовно основних визначень (удар, ударні сили, ударний імпульс, коефіцієнт відновлення, пружний, абсолютно пружний і абсолютно непружний удари, кількість руху, момент кількості руху і кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи при ударі), законів (загальні теореми теорії удару матеріальної точки і механічної системи: про зміну кількості руху, про зміну моменту кількості руху, про зміну кінетичної енергії (теорема Карно)), а також навички використання цих знань для складання і розв’язання рівнянь теорії удару.

5.1. Теоретичні основи теорії удару

Явище, при якому швидкість точки за малий проміжок часу τ змінюється на скінченну величину, називається ***ударом***. Проміжок часу τ, протягом якого відбувається удар, називається ***часом удару***. Сила $\overline{F}^{уд}$, яка діє протягом часу удару і досягає значної величини, називається ***ударною силою***.

Вектор

$$\overline{S}^{уд} = \int_0^{\tau} \overline{F}^{уд} \cdot dt \approx \overline{F}^{уд}_{ср} \cdot \tau, \qquad (5.1)$$

де $F^{уд}_{ср}$ - середнє значення ударної сили, називається ***ударним імпульсом***.

Розглянемо матеріальну точку масою m, що рухається відносно інерціальної системи відліку. Позначимо її швидкість до удару $\overline{v}$, а після удару $\overline{u}$. Тоді за час удару для неї буде справедливою *теорема про зміну кількості руху*:

$$m(\overline{u} - \overline{v}) = \sum_{k=1}^{N} \overline{S}^{уд}_k, \qquad (5.2)$$

де N – кількість ударних сил. Рівняння (5.2) є ***основним рівнянням теорії удару матеріальної точки.***

При ударі тіл, як показує досвід, виконується ***гіпотеза Ньютона*** щодо відносної швидкості тіл, що стикаються: *відношення модуля проекції на нормаль до поверхні в точці контакту відносної швидкості тіл після удару* u_n^r *до її значення до удару* v_n^r *є величиною сталою, яка в певних межах не залежить від відносної швидкості і мас тіл, а визначається тільки матеріалом тіл, що стикаються.* Цю сталу величину називають ***коефіцієнтом відновлення*** k при ударі

$$k = \frac{\left|u_n^r\right|}{\left|v_n^r\right|}. \tag{5.3}$$

Значення коефіцієнта відновлення знаходяться в межах $0 \le k \le 1$.

При $k = 0$ удар називають ***абсолютно непружним***. При $k = 1$ удар називають ***абсолютно пружним***. В інших випадках $0 < k < 1$ удар називають ***не зовсім пружним*** або просто ***пружним***.

Теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі в інтегральній формі має такий же вигляд, як і при звичайному навантаженні, але у праву частину будуть входити тільки ударні імпульси:

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \bar{S}_k^{уде}, \tag{5.4}$$

де n- число точок системи; $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ - кількість руху системи до і після удару відповідно; $\bar{S}_k^{уде}$ - зовнішні ударні імпульси.

Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи при ударі в інтегральній формі має вигляд

$$\bar{K}_{2O} - \bar{K}_{1O} = \sum_{k=1}^{n} \bar{M}_O(\bar{S}_k^{уде}), \tag{5.5}$$

де n- число точок системи; $\bar{K}_{1O}$, $\bar{K}_{2O}$ - моменти кількості руху системи відносно центра О до і після удару відповідно; $\bar{M}_O(\bar{S}_k^{уде})$- моменти зовнішніх ударних імпульсів відносно того ж центра.

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи (теорема Карно) при поступальному русі двох тіл, що складають систему, у випадку пружного удару цих тіл ($0 < k < 1$) записується у вигляді

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} \cdot [\frac{M_1(v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u_2)^2}{2}]. \qquad (5.6)$$

У формулі (5.6) різниці $(v_1 - u_1), (v_2 - u_2)$ показують, на скільки зменшується при ударі швидкість кожного з тіл, їх називають «***втраченими швидкостями***».

5.2. Методика розв'язання задач за темою занять

Розв'язання задач на *визначення основних параметрів удару тіл* рекомендується проводити в такому порядку:

1. Виділити матеріальну точку або механічну систему, удар якої досліджуються, і зобразити її під час удару.
2. Показати зовнішні ударні сили (при цьому неударні сили не показуються) і швидкості точки (або тіл системи) до і після удару.
3. Зобразити осі координат (у разі, якщо для розв'язання задачі використовується векторний закон).
4. Скласти рівняння ударної взаємодії тіл (для точки це звичайно рівняння (5.2), а для механічної системи – рівняння (5.4), (5.5), (5.6)). У разі необхідності додати до отриманих рівнянь співвідношення (5.3) гіпотези Ньютона.
5. Визначити шукані параметри.
6. Записати відповідь і проаналізувати отримані результати.

На практичних заняттях розв'язують задачі № 44.15, 44.3 роботи [2].

У процесі самостійної підготовки розв'язують задачі № 44.1, 44.19 роботи [2].

5.3. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Матеріальна точка маси m падає на горизонтальну нерухому поверхню з того самого матеріалу зі швидкістю v під кутом падіння α. Коефіцієнт відновлення дорівнює k. Потрібно визначити кут відбиття β, швидкість точки після удару u і ударний імпульс $S^{уд}$ реакції поверхні.

Розв'язання

1. Зобразимо матеріальну точку під час удару об поверхню (рис. 5.1).

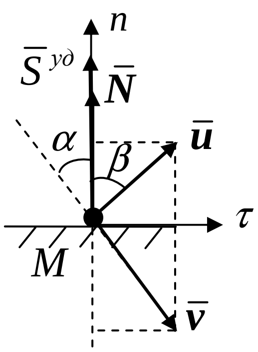


Рис. 5.1

2. На матеріальну точку під час удару об поверхню діють сила тяжіння і нормальна реакція поверхні $\bar{N}$. Сила тяжіння не є ударною, тому діючий на точку ударний імпульс визначається як

$$\bar{S}^{уд} = \int_0^{\tau} \bar{N} \cdot dt.$$

3. Проведемо осі натуральної системи координат τ, n.

4. Складемо теорему про зміну кількості руху точки при ударі (5.2) в проекціях на осі τ, n:

$$\begin{cases} m(u_\tau - v_\tau) = S_\tau^{уд}, \\ m(u_n - v_n) = S_n^{уд}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} m(u \cdot \sin\beta - v \cdot \sin\alpha) = 0, \\ m[u \cdot \cos\beta - (-v \cdot \cos\alpha)] = S^{уд}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Додамо до отриманої системи співвідношення (5.3):

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} = \frac{u \cdot \cos\beta}{v \cdot \cos\alpha}. \tag{5.8}$$

5. З системи трьох останніх алгебраїчних рівнянь знайдемо три шукані величини. З рівняння (5.8)

$$u = \frac{k \cdot v \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}. \tag{5.9}$$

Підставимо отриманий результат у перше рівняння системи (5.7):

$$m \cdot [\frac{k \cdot v \cdot \cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \sin\beta - v \cdot \sin\alpha] = 0.$$

Звідки $k \cdot \cos\alpha \cdot tg\beta - \sin\alpha = 0$ або $tg\beta = \frac{1}{k} \cdot tg\alpha$.

Тоді
$$\beta = arctg(\frac{1}{k} \cdot tg\alpha). \tag{5.10}$$

Нарешті, з другого рівняння системи (5.7) отримаємо формулу для ударного імпульсу:

$$S^{уд} = m[u \cdot \cos\beta + v \cdot \cos\alpha)],$$

яка з урахуванням (5.9) може бути записана у вигляді

$$S^{уд} = m \cdot (1 + k) \cdot v \cdot \cos\alpha. \tag{5.11}$$

Відповідь. Кут відбиття $\beta = arctg(\frac{1}{k} \cdot tg\alpha)$, швидкість точки після удару $u = \frac{k \cdot v \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$, ударний імпульс реакції поверхні $S^{уд} = m \cdot (1 + k) \cdot v \cdot \cos\alpha$.

Проаналізуємо отримані результати (5.10), (5.9), (5.11).

1). З формул (5.9), (5.10) випливає, що для абсолютно пружного удару ($k = 1$) кут відбиття дорівнює куту падіння $\beta = arctg(tg\alpha) = \alpha$, а швидкість точки при ударі за модулем не змінюється: $u = v$. При пружному ударі ($0 < k < 1$) кут відбиття більший за кут падіння $\beta > \alpha$ (і тільки при вертикальному падінні $\beta = \alpha = 0$). Модуль швидкості після удару в цьому випадку завжди менший за модуль швидкості до удару $u < v$, оскільки $u \cdot \sin\beta = v \cdot \sin\alpha$ (див. формулу (5.7)), а при вертикальному падінні $u = k \cdot v$ (див. формулу (5.8)).

2). З формули (5.11) видно, що ударний імпульс при абсолютно пружному ударі ($k = 1$) вдвічі більший за ударний імпульс при абсолютно непружному ударі ($k = 0$) і досягає максимальної величини при вертикальному падінні точки на поверхню (при $\alpha = 0$).

Приклад 2. Тверде тіло 1 масою M_1 рухається поступально зі швидкістю $\bar{v}_1$ і ударяється об інше нерухоме тіло 2 ($v_2 = 0$) масою M_2. Вважаючи удар абсолютно непружним ($k = 0$), прямим і центральним, визначити швидкості тіл 1, 2, а також кінетичну енергію системи тіл після удару.

Розв'язання

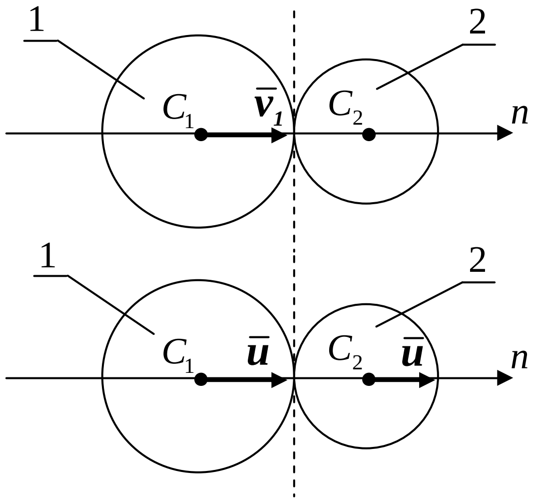


Рис. 5.2

1. Зобразимо механічну систему, що складається з двох тіл, до і після удару (рис. 5.2). Тут C_1, C_2 – центри мас тіл 1, 2 відповідно. Після абсолютно непружного удару тіла рухаються з однаковою швидкістю $u_1 = u_2 = u$.

2. Ударними будуть сили взаємодії двох тіл, що є внутрішніми силами.

3. Проведемо вісь натуральної системи координат n перпендикулярно до дотичній в точці контакту тіл. Оскільки удар центральний і прямий, то центри мас тіл, а також швидкість першого тіла до удару будуть лежати на цій осі.

4. Спроектуємо рівняння (5.4) теореми про зміну кількості руху системи на вісь n:

$$(M_1 + M_2)u - (M_1 v_1 + M_2 \cdot 0) = 0. \qquad (5.12)$$

Додамо вирази кінетичної енергії системи до і після удару. Кінетична енергія системи до удару дорівнює $T_1 = \dfrac{M_1 v_1^2}{2}$. Після удару кінетична енергія буде дорівнюватиме $T_2 = \dfrac{(M_1 + M_2)u^2}{2}$.

5. З рівняння (5.12) знаходимо

$$u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}. \qquad (5.13)$$

Перетворимо формулу для кінетичної енергії T_2 з урахуванням (5.13):

$$T_2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot u^2 = \frac{M_1 + M_2}{2} \cdot (\frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2})^2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_1 v_1^2}{2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot T_1 \ . \quad (5.14)$$

Відповідь. Швидкості тіл 1, 2 $u = \dfrac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}$, кінетична енергія системи тіл після удару $T_2 = \dfrac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot T_1$.

З рівняння (5.14) випливають наступні наслідки:

1). Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в кінетичну енергію руху тіл після удару ($T_2 \approx T_1$), потрібно задовольнити умові $M_1 >> M_2$. Тобто маса тіла, що ударяється, мусить бути якомога більшою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при забиванні цвяхів, паль тощо.

2). Якщо для практичних дій необхідно, щоб кінетична енергія до удару якомога більше переходила в потенціальну енергію деформації тіла після удару ($T_2 \approx 0$), треба виконати зворотню умову $M_2 << M_1$. Тобто маса тіла, що ударяється, мусить бути якомога меншою за масу тіла, по якому відбувається удар. Ця ситуація виникає при куванні, штампуванні металів тощо.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т.- М.: Наука, 1979. – Т.2. – 461 с.

2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.- М.: Наука, 1980.- 446 с.

3. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

4. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. - М.: Машиздат, 1967. - 336 с.

5. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. - М.: Высш. школа, 1975. - 255 с.

6. Теоретична механіка. Спецкурс: Конспект лекцій (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.092100 “Будівництво”)/ О.І. Рубаненко, В.П. Шпачук. - Харків: ХНАМГ, 2008.

7. Методичні вказівки для практичних занять, контрольних робіт і самостійної роботи з розділу “Динаміка” курсу теоретичної механіки (для студентів технічних спеціальностей). Укл.: Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О. - Харків: ХНАМГ, 2008.

8. Методичні вказівки для виконання розрахунково-графічної роботи із спецкурсу теоретичної механіки (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 060601 “Будівництво”)/ Рубаненко О.І., Шпачук В.П. - Харків: ХНАМГ, 2009.

9. Теоретична механіка (Навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей). Укл.: Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О. - Харків: ХНАМГ, 2007.

ЗМІСТ

Стор.

Навчальне видання

Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи із спецкурсу теоретичної механіки (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 0921 (6.060101) «Будівництво» та слухачів другої вищої освіти).

Укладачі: Рубаненко Олександр Ігоревич,
Шпачук Володимир Петрович

Редактор *М. З. Аляб'єв*

План 2009, поз. 247 М

Підп. до друку 22.06.2009 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 1,8
Зам. № Тираж 100 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 731 від 19.12.2001