МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

С.М. Мордовцев, С.О. Станішевський, А.В. Якунин

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт з курсу

«Вища математика: спеціальні розділи»

(для студентів 2-3 курсів напряму підготовки 0922 (6.050702) - «Електромеханіка» денної і заочної форм навчання)

Харків – ХНАМГ – 2009

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ до виконання контрольних робіт з курсу “Вища математика: спеціальні розділи» (для студентів 2-3 курсів напряму підготовки 0922 (6.050702) “Електромеханіка” денної і заочної форм навчання); Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Мордовцев С.М., Станішевський С.О., Якунин А.В. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 47 с.

Укладачі: С.М. Мордовцев,

С.О. Станішевський,

А.В. Якунин

Рецензент: доц. к. ф.-м. н. Коваленко Л.Б.

Рекомендовано кафедрою вищої математики,

протокол № 6 від 23.01.2009 р.

ЗМІСТ

Стор.

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки допоможуть студентові самостійно вирішити розрахунково-графічні роботи по спеціальних розділах вищої математики, присвячених задачам наближеного вирішення нелінійних рівнянь, певних інтегралів, диференціальних рівнянь першого порядку і в приватних похідних, питанням апроксимації функцій. Теоретичний матеріал детально викладений в посібнику [1].

Мета дисципліни — формування у студентів знань і навичок для самостійного застосування чисельних методів при розв’язуванні сучасних інженерних задач з використанням новітніх інформаційних технологій.

Завдання дисципліни полягає в тому, щоб на належному рівні надати студентам теоретичні і практичні знання по спеціальному розділу вищої математики, присвяченому чисельним методам.

Предметом дисципліни є інженерні задачі, рішення яких вимагає знання чисельних методів.

РГР № 1. НАБЛИЖЕНЕ РІШЕННЯ РІВНЯНЬ

Знайти коріння рівняння на відрізку [0,1 ; 4], склавши комп'ютерну програму з використанням MS EXCEL, яка реалізує методи половинного ділення хорд і ітерацій.

1. $\ln x+(x+1)^3=0$	**24.** $arctgx-3x+2=0$
2. $x\cdot 2^x-1=0$	**25.** $3^{x-1}-4-x=0$
3. $\sqrt{x+1}-1/x=0$	**26.** $tg(0{,}44x+0{,}3)-x^2=0$
4. $x-\cos x=0$	**27.** $\sqrt{x}-\cos(0{,}4x)=0$
5. $3x-\cos x-4=0$	**28** $x-\sin x-0{,}25=0$
6. $x+\ln x-0{,}5=0$	**29.** $x\ln x-1{,}2=0$
7. $2-x-3\ln x=0$	**30.** $1{,}8x^2-\sin 10x=0$
8. $(x-1)^2-0{,}5e^x=0$	**31.** $ctgx-0{,}1x=0$
9. $(2-x)e^x-0{,}5=0$	**32.** $\left[(x-2)^2-1\right]\cdot 2^x-1=0$
10. $2{,}2x-2^x=0$	**33.** $0{,}5^x+8-(x+2)^2=0$
11. $x^2+4\sin x-2=0$	**34.** $4x-5\ln x-7=0$
12. $2x-5\ln x-7=0$	**35.** $\sqrt{x+2}-1/3x=0$
13. $5x-8\ln x-8=0$	**36.** $\sin 0{,}8x+2-3x^2=0$
14. $x^2-\ln(x+1)=0$	**37.** $arctg2x-1/x=0$
15. $-2x+\cos x-0.5=0$	**38.** $2e^x+1{,}5x-5=0$
16. $\sin 0.5x+1-x^2=0$	**39.** $arctg(x-1)+2x-3=0$
17. $5x-8\ln x-8=0$	**40.** $3^x+5x-3=0$
18. $0{,}6x+\ln(x+2)-1=0$	**41.** $2e^x-2x-3=0$
19. $\sin(x+0{,}5)-2x+0{,}5=0$	**42.** $(x-3)\cos x+1=0$
20. $\ln(2+x)+2x-3=0$	**43.** $0{,}5x^2+2\sin x-1=0$
21. $2^x+5x-3=0$	**44.** $(2-x)e^x-0{,}5=0$
22. $(x-4)\cos x-1=0$	**45.** $\sin x+1-x^3=0$
23. $arctgx-1/3x^2=0$	**46.** $-7x+\ln(x+1)+3=0$

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Знайти корені рівняння: $-3x+2+\ln(x+1)=0$

<u>Теорія</u>. Метод половинного ділення. В цьому випадку інтервал, у якому виконується нерівність (1.3), ділиться навпіл $x_C = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, і обчислюється значення функції $f(x_C)$. У разі виконання нерівності $f(x_C)\cdot f(x_i)<0$ вважаємо $x_{i-1}=x_C$ Інакше, привласнюємо $x_i = x_C$. Процедура повторюється якщо довжина інтервалу $|x_{i-1};x_i|>\varepsilon$, поки, де ε - дана похибка.

Метод хорд. Через точки з координатами $\{x_{i-1}; f(x_{i-1})\}$, $\{x_i; f(x_i)\}$ проводиться хорда. Точка перетину її з віссю Ох визначається по формулі:

$$x_C = x_{i-1} - \frac{(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

У разі виконання нерівності $f(x_C)\cdot f(x_i)<0$ вважаємо $x_{i-1}=x_C$. Інакше, привласнюємо $x_i = x_C$. Потім розрахунки повторюються, якщо $|x_{i-1};x_i|>\varepsilon$ де ε - задана погрішність.

Метод ітерацій. У ряді випадків для розв'язання рівняння можна застосувати метод ітерацій (повторень). Для цього рівняння переписується у вигляді:

$$x=\varphi(x)$$

Припустимо, що даний відрізок $[a,b]$ має корінь рівняння. Вибираємо довільну точку x_o (нульове наближення) і обчислюємо перше наближення: $x_1=\varphi(x_o)$. Наступні наближення обчислюємо за формулою:

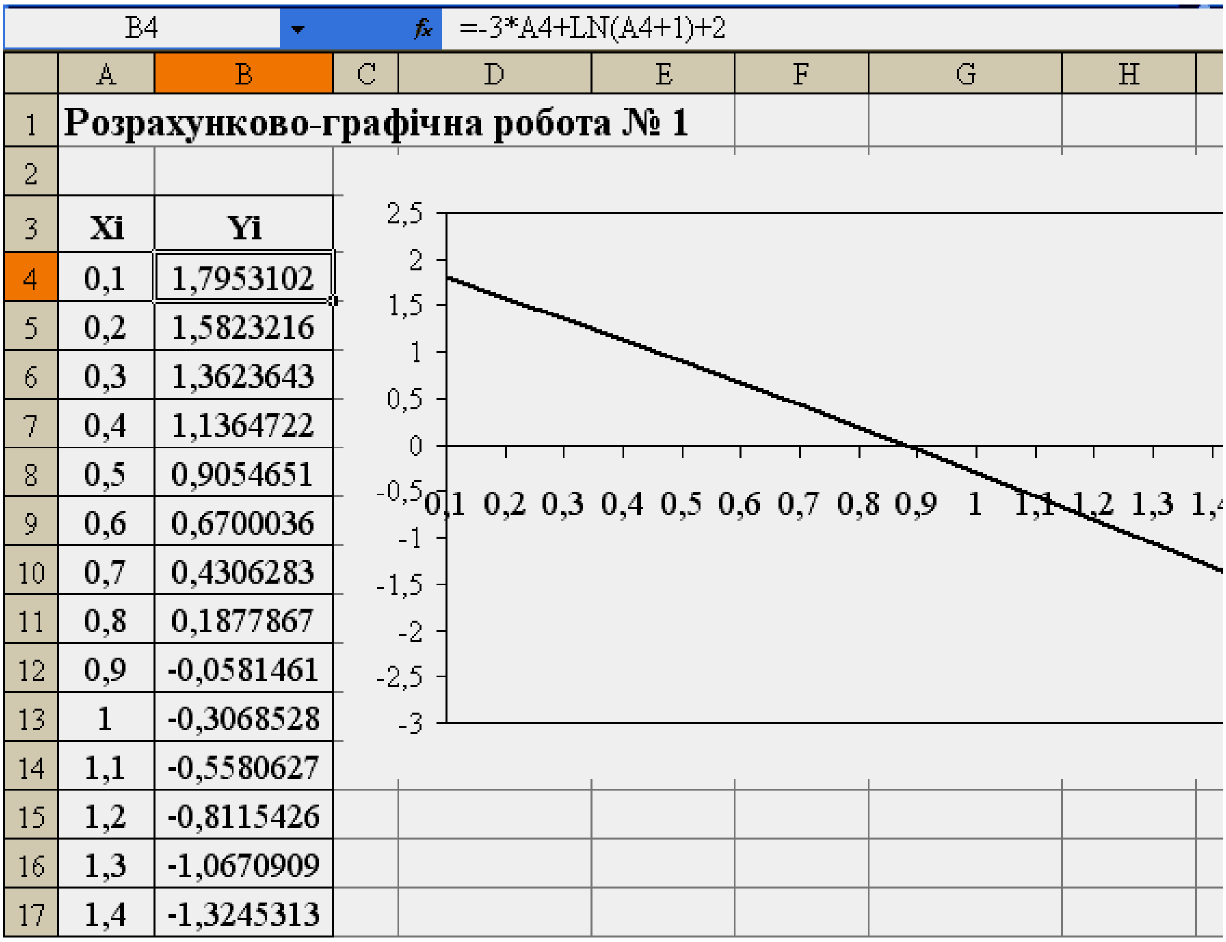
$$x_n=\varphi(x_{n-1})$$

Якщо послідовність $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ має границю x_c, то вона є коренем рівняння.

Необхідне виконання умови $|\varphi'|<1$ для всіх $x\in[a,b]$.

Тоді ітераційна послідовність $x_n=\varphi(x_{n-1})$ збігається при будь-якому початковому наближенні $x_O\in[a,b]$

Розв'язання На робочому листі MS Excel складемо таблицю, яка відображує значення функції $y = f(x) = -3x + \ln(x+1) + 2$ у точках ділення відрізка і будуємо за ними графік:


B4 =-3*A4+LN(A4+1)+2

Розрахунково-графічна робота № 1

Xi	Yi
0,1	1,7953102
0,2	1,5823216
0,3	1,3623643
0,4	1,1364722
0,5	0,9054651
0,6	0,6700036
0,7	0,4306283
0,8	0,1877867
0,9	-0,0581461
1	-0,3068528
1,1	-0,5580627
1,2	-0,8115426
1,3	-1,0670909
1,4	-1,3245313

Рис. 1.1 – Значення і графік функції $y = f(x) = -3x - \ln(x+1) + 2$

Згідно з графіком корінь рівняння знаходиться в інтервалі [0,8; 0,9], його величину уточнюємо за розібраними методами.

Метод ітерацій. Як послідовне наближення вибираємо $x_o = 0.85$. Представимо рівняння у вигляді $x = \varphi(x) = \dfrac{\ln(x+1)+2}{3}$.

Умова $|\varphi'| = \left|\dfrac{1}{3(x+1)}\right| < 1$ виконується, тому послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ сходиться.

У MS Excel складемо таблицю, за результатами ітераційного процесу. Для цього вводимо формули в чарунки таблиці і розмножуємо їх по рядках таблиці (рис. 1.2). Таким чином, обчислений корінь рівняння дорівнює 0,876462847. Ітераційний процес припинено, коли $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 10^{-7}$.

=E4

=(LN(D4+1)+2)/3

X_i	φ_i
0,850000000	0,871729
0,871728546	0,875621
0,875620787	0,876313
0,876313230	0,876436
0,876436268	0,876458
0,876458125	0,876462
0,876462008	0,876463
0,876462698	0,876463
0,876462820	0,876463
0,876462842	0,876463
0,876462846	0,876463
0,876462847	0,876463
0,876462847	0,876463

Рис. 1.2 – Таблиця розрахунків за методом ітерацій

<u>Метод половинного ділення</u>. Для реалізації алгоритму, описаного вище складемо процедуру з використанням Visual Basic for Aplication (VBA). За допомогою панелі «Елементи управління» впроваджуємо об'єкт «Кнопка» (CommandButton1), у вікні «Свойства» у рядку «Caption» вводимо найменування «Метод половинного ділення» (рис. 1.3):

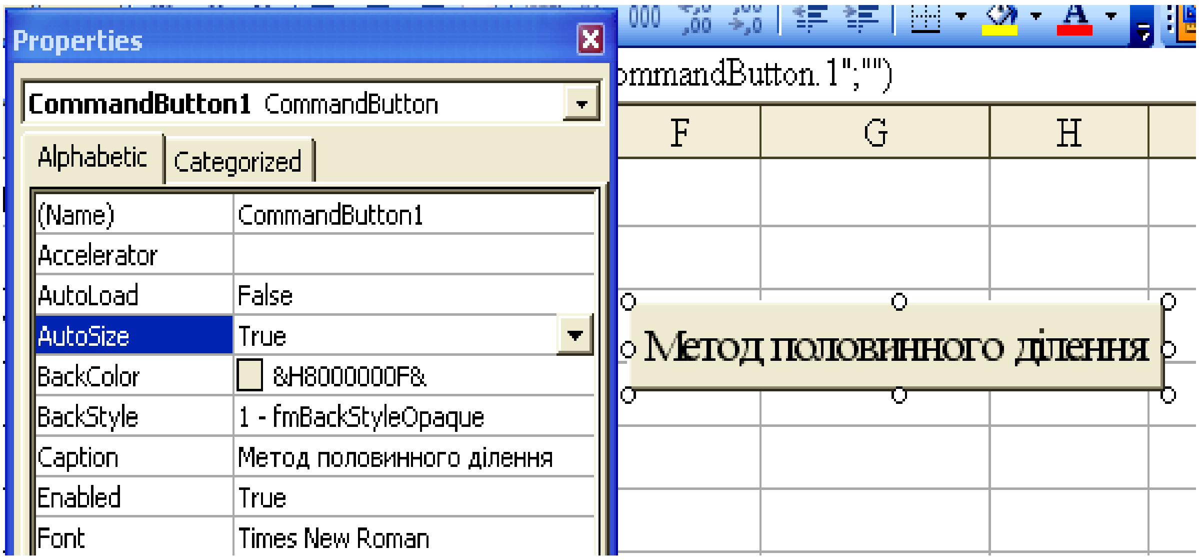


Рис. 1.3 – Впровадження об'єкту «Кнопка»

Двічі натиснемо по кнопці і записуємо текст процедури, яка реалізує обраний метод:

Текст коду	*Коментар (не вводиться)*

Private Sub CommandButton1_Click()
Dim f(1000)
n = 0.1
i = 0
E = 0.0000001
j = 4
For x = 0.1 To 3 Step n
i = i + 1
f(i)=-3* x + Log(x + 1)+ 2
If i > 1 And f(i)* f(i - 1)< 0 Then
j = j + 1
x1 = x - n
x2 = x
L = n
k = 0
While L > E
k = k + 1
xc = (x1 + x2) / 2
fc = -3*xc - Log(xc + 1)+ 2
If f(i)* fc < 0 Then
x1 = xc
Else
x2 = xc
End If
L = x2 - x1
Wend
jj = Trim(Str(j))
Worksheets(1).Range("G" + jj).Value = xc
Worksheets(1).Range("H" + jj).Value = k
End If
Next
End Sub
	Оголошена процедура
	даний масив для значень функції
	даний крок розбиття
	
	дана похибка ε
	даний лічильник рядків
	відкритий цикл для обчислення
	лічильник циклу
	обчислення функції
	перевірка якщо сусідні значення функції різних знаків, то починає роботу обраний метод: визначаються $x_{i-1} \to x1;\ x_i \to x2$
	початкове значення L
	підключається лічильник виконаних кроків
	починає працювати метод поки L>ε
	
	обчислюється $x_C \ \ u \ \ f(x_C)$
	якщо нерівність виконується
	$x_{i-1} \to x_C$
	інакше
	$x_i \to x_C$
	Кінець умови
	перераховується значення L
	кінець внутрішнього циклу
	виведення першого кореня в чарунку G5
	виведення числа кроків в чарунку H5
	кінець зовнішнього циклу
	кінець процедури
	наступний цикл

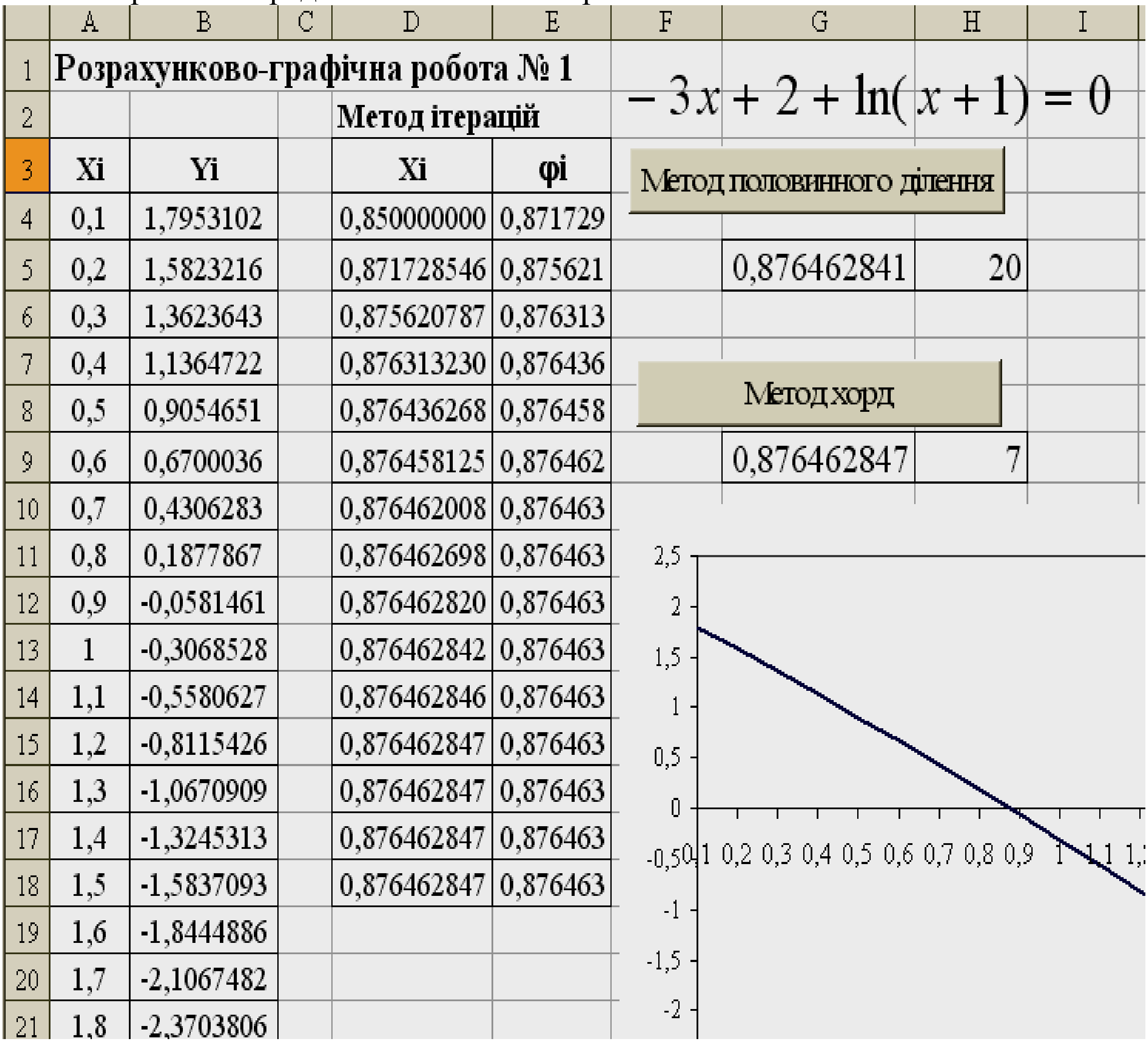
Збережете файл під ім'ям Кр1. Натискайте кнопочку «Выход из режима конструктора» на панелі інструментів «Елементи управління». При натисненні кнопки (подія Click) процедура визначить корінь рівняння: $x_C = 0{,}876462841$, число кроків – 20.

<u>Метод хорд</u>. Упроваджується ще одна кнопка. У вікні «Свойства» у рядку «Caption» вводимо найменування «Метод хорд». Двічі натиснемо по кнопці і записуємо текст процедури, яка реалізує обраний метод:

Текст коду	*Коментар (не вводиться)*
Private Sub CommandButton2_Click()	Оголошена процедура
Dim f(1000)	даний масив для значень функції
n = 0.1	даний крок розбиття
i = 0	
E = 0.00000001	дана похибка ε
j = 8	даний лічильник рядків
For x = 0.1 To 3 Step n	відкритий цикл для обчислення
i = i + 1	лічильник циклу
f(i) = -3 * x + Log(x + 1) + 2	обчислення функції
If i > 1 And f(i) * f(i - 1) < 0 Then	перевірка якщо сусідні значення функції
j = j + 1	різних знаків, то починає роботу обраний
x1 = x - n	метод: визначаються $x_{i-1} \to x1;\ x_i \to x2$
x2 = x	
f1 = f(i - 1)	початкове значення L
f2 = f(i)	підключається лічильник виконаних
L = n	кроків
k = 0	починає працювати метод поки L>ε
Do While L > E	
k = k + 1	
If f1 = f2 Then	якщо f1=f2, то корінь знайдений – вихід з
xc = x2	циклу
Exit Do	
Else	
xc = x1 - (x2 - x1) * f1 / (f2 - f1)	обчислюється x_C *и* $f(x_C)$
fc = -3 * xc + Log(xc + 1) + 2	
If f2 * fc < 0 Then	якщо нерівність виконується
x1 = xc	$x_{i-1} \to x_C$
f1 = fc	інакше
Else	
x2 = xc	$x_i \to x_C$
f2 = fc	
End If	Кінець умови
L = x2 - x1	перераховується значення L
End If	
Loop	кінець внутрішнього циклу
jj = Trim(Str(j))	виведення першого кореня в чарунку G9
Worksheets(1).Range("g" + jj).Value = xc	виведення числа кроків в чарунку H9
Worksheets(1).Range("h" + jj).Value = k	кінець зовнішнього циклу
End If	кінець процедури
Next	наступний цикл
End Sub	

Натисніть кнопку «Выход из режима конструктора» на панелі інструментів «Елементи управління». При натисненні кнопки (подія Click) процедура визначить корінь рівняння: $x_C = 0{,}876462847$, число кроків – 7.

На рис. 1.4. представлена виконана робота:



	A	B	C	D	E
1	**Розрахунково-графічна робота № 1**				
2				**Метод ітерацій**	
3	**Xi**	**Yi**		**Xi**	**φi**
4	0,1	1,7953102		0,850000000	0,871729
5	0,2	1,5823216		0,871728546	0,875621
6	0,3	1,3623643		0,875620787	0,876313
7	0,4	1,1364722		0,876313230	0,876436
8	0,5	0,9054651		0,876436268	0,876458
9	0,6	0,6700036		0,876458125	0,876462
10	0,7	0,4306283		0,876462008	0,876463
11	0,8	0,1877867		0,876462698	0,876463
12	0,9	-0,0581461		0,876462820	0,876463
13	1	-0,3068528		0,876462842	0,876463
14	1,1	-0,5580627		0,876462846	0,876463
15	1,2	-0,8115426		0,876462847	0,876463
16	1,3	-1,0670909		0,876462847	0,876463
17	1,4	-1,3245313		0,876462847	0,876463
18	1,5	-1,5837093		0,876462847	0,876463
19	1,6	-1,8444886			
20	1,7	-2,1067482			
21	1,8	-2,3703806			

$$-3x + 2 + \ln(x+1) = 0$$

Метод половинного ділення

	G	H
5	0,876462841	20

Метод хорд

	G	H
9	0,876462847	7

Рис. 1.4 – РГР № 1 «Наближене рішення рівнянь»

РГР № 2. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Функції $y = f(x)$ подані таблицею. Методом найменших квадратів знайти коефіцієнти функцій, які її апроксимують: лінійно, квадратично, степенево або логарифмічно. Побудувати графіки отриманих функцій.

Варіанти	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	12	18	19	12,5	1,1	10,2	10,9	1,3	-1,8	20
1,5	8,2	17	18	9,7	1,6	8	9	1,7	-1,3	19,5
2	6,5	16	16	7	2,2	6,6	7,7	2,3	-0,7	18,3
2,5	4,8	15	13	6	3,2	6	6,7	3,1	0,3	16,5
3	3,6	12	9	5,5	4,1	5,1	5,5	4	1,2	11
3,5	2,8	8	4	4,8	5,5	4,5	4,8	5,4	2,6	6
4	2,1	4	-2	4,2	7,3	3,8	4,1	7,2	4,4	-1
4,5	1,7	1	-9	3,5	10,5	3	3,6	10,4	7,6	-8
5	1,6	-2	-14	3	14	2,6	3,2	14,1	11,1	-14
5,5	1,3	-6	-19	2,5	16,1	2,2	3,1	16	13,2	-20
Варіанти	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	11,5	13,2	2,2	11,7	19,3	6	5,6	17,1	-6,9	11,8
2	7,7	10,4	2,7	7,4	18,8	3,9	6	13,3	-6,4	9,7
3	6	7,7	3,3	6,1	17,4	2,2	6,6	11,6	-5,8	8,3
4	4,3	6,7	4,3	4,2	13,6	0,5	7,4	9,9	-4,8	7,5
5	3,1	6,2	5,2	3,5	9,1	-0,7	8,3	8,7	-3,9	6,6
6	2,3	5,5	6,6	2,5	4,3	-1,5	9,7	7,9	-2,5	6
7	1,6	4,9	8,4	1,7	1	-2,2	11,5	7,2	-0,7	5,4
8	1,2	4,2	11,6	1,2	-5	-2,6	14,7	6,8	2,5	4,6
9	1,1	3,7	15,1	1,1	-13	-2,8	17,5	6,7	6	4,2
10	0,8	3,2	17,2	0,8	-20	-3	20	6,4	8,1	4
Варіанти	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
0,5	16,4	5	8,4	15,2	5,4	7,8	-4,3	11	4,7	18,1
1,2	15,4	5,5	4,1	12,4	1,6	5	-3,8	10	5,2	14,3
1,8	14,4	6,1	2,8	9,7	-0,1	3,4	-3,2	9	5,8	12,6
2,4	13,4	7,1	0,9	8,7	-1,8	1,3	-2,2	8	6,8	10,9
3	10,4	8	0,2	8	-3	0,6	-1,3	5	7,7	9,7
3,6	6,4	9,4	-0,8	7,2	-3,8	0	0,1	1	9,1	8,9
4,2	3	11,2	-1,6	6,9	-4,5	-0,5	1,9	-2,4	10,9	8,2
4,8	-2	14,4	-2,1	6,2	-4,9	-1,2	5,1	-7,4	14,1	7,8
5,2	-6,1	17,9	-2,2	5,9	-5	-1,5	8,6	-11,5	17,6	7,7
5,8	-10	21	-2,5	5,2	-5,3	-2	12	-15,4	21	7,4

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Дано: Функція $y = f(x)$ подана таблицею

x_i	y_i
0,4	1,1
0,8	1,8
1,2	2,2
1,6	2,5
2,0	2,7
2,4	2,9
2,8	3,1
3,2	3,2
3,6	3,3
4,0	3,4

<u>Теорія</u>. Метод найменших квадратів отримав цю назву, тому що сума квадратів різниці між значеннями початкової функції $y_i = f(x_i)$, заданим в точках $x_i (i = 0, 1, 2, ..., n)$, і апроксимуючої функції $y_i = F(x_i)$ в цих же точках має бути мінімальною. Умова мінімальності має вигляд:

$$S = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - F(x_i)]^2 \to \min \quad . \tag{2.1}$$

Лінійна апроксимація. Нехай $F(x) = a_0 + a_1 x$.

Рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \tag{2.2}$$

Середня помилка апроксимації визначається за формулою:

$$E = \frac{100\%}{n} \sum \left| \frac{F(x_i) - y_i}{F(x_i)} \right| \tag{2.3}$$

Для попередньої оцінки апроксимації функції, заданої таблично, за методом найменших квадратів використовують коефіцієнт кореляції (детермінації) R^2 . Алгоритм обчислення наступний:

1. Визначають середнє значень y_i по формулі: $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$

2. Обчислюють суму квадратів відхилень значень функції $F(x_i)$ в точках x_i від середнього $\sum[F(x_i)-\bar{y}]^2$
3. Обчислюють суму квадратів відхилень вихідних значень y_i функції в точках x_i від середнього $\sum[y_i-\bar{y}]^2$
4. Обчислюють коефіцієнт кореляції (детермінації) за формулою

$$R^2=\frac{\sum[y(x_i)-\bar{y}]^2}{\sum[y_i-\bar{y}]^2} \tag{2.4}$$

Значення коефіцієнта кореляції змінюється від 0 до 1. Чим ближче до одиниці, тим точніше результати відповідної апроксимації.

Поліном другого степеня: $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$.

Відкіля маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими коефіцієнтами a_0 a_1 a_2 другого степеня:

$$\begin{cases} a_0n+a_1\sum x_i+a_2\sum x_i{}^2{}_i=\sum y_i \\ a_0\sum x_i+a_1\sum x_i^2+a_2\sum x_i^3=\sum x_iy_i \\ a_0\sum x^2{}_i+a_1\sum x_i^3+a_2\sum x_i^4=\sum x^2{}_iy_i \end{cases} \tag{2.5}$$

Степенева функція $y=ax^b$. Візьмемо натуральний логарифм від обох частин рівняння.

Тоді $\ln y=\ln a+b\ln x$.

Позначимо: $Y=\ln y,\ X=\ln x.$ *Отже,* $Y=A+bX,$ *де* $A=\ln a$ Отже, маємо лінійну апроксимацію, тобто можна провести дослідження відповідно поданій вище методиці, але величини x_i, y_i треба замінити на $X_i=\ln x_i, Y_i=\ln y_i$.

Логарифмічна функція $y=a+b\ln x$.

Позначимо $X=\ln x\ \Rightarrow\ y=A+bX$. Приходимо до випадку лінійної апроксимації, але в якості x_i використовуватиметься $X_i=\ln x_i$.

<u>Розв'язання.</u>

<u>1 етап.</u> Лінійна апроксимація. $F(x)=a_0+a_1x$.

Для того, щоб скласти рівняння системи (2.2), складемо таблицю:

X_i	Y_i	X_i^2	X_i*Y_i
0,4	1,1	0,1600	0,4400
0,8	1,8	0,6400	1,4400
1,2	2,2	1,4400	2,6400
1,6	2,5	2,5600	4,0000
2,0	2,7	4,0000	5,4000
2,4	2,9	5,7600	6,9600
2,8	3,1	7,8400	8,6800
3,2	3,2	10,2400	10,2400
3,6	3,3	12,9600	11,8800
4,0	3,4	16,0000	13,6000

і обчислимо суми:

$$\sum x_i = 22$$
$$\sum x_i^2 = 61{,}6$$
$$\sum y_i = 26{,}2$$
$$\sum x_i y_i = 65{,}28$$

Тоді система рівнянь (2.2) набирає вигляду:

$$\begin{cases} 10a_0 + 22a_1 = 26{,}2 \\ 22a_0 + 61{,}6a_1 = 65{,}28 \end{cases}$$

із рівняння визначимо невідомі

$$a_0 = 2.62 - 2.2a_1$$
$$22 \cdot (2.62 - 2.2a_1) + 61{,}6a_1 = 65{,}28 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0.5787888 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1{,}346667$$

Таким чином, таблична функція замінюється прямою

$$F(x) = 1{,}346667 + 0{,}578788x$$

2 етап. У MS EXCEL створимо таблицю, ввівши відповідні формули у вічка стовпців З, D, E, F, G. Наприклад, для обчислення твору чисел в стовпцях А і В, у вічку D3 необхідно ввести формулу: **=A3*B3**

У рядку 14 необхідно знайти суми чисел в стовпцях, використовуючи функцію «Автопідсумовування» (значок $\boxed{\Sigma}$ на панелі інструментів). Вид заповненої таблиці показаний на рис. 2.1.

D3 f_x =A3*B3

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Розрахунково-графічна робота № 2**						
2	Xi	Yi	Xi^2	Xi*Yi	Xi^3	Xi^4	Yi*Xi^2
3	0,4	1,1	0,1600	0,4400	0,0640	0,0256	0,1760
4	0,8	1,8	0,6400	1,4400	0,5120	0,4096	1,1520
5	1,2	2,2	1,4400	2,6400	1,7280	2,0736	3,1680
6	1,6	2,5	2,5600	4,0000	4,0960	6,5536	6,4000
7	2,0	2,7	4,0000	5,4000	8,0000	16,0000	10,8000
8	2,4	2,9	5,7600	6,9600	13,8240	33,1776	16,7040
9	2,8	3,1	7,8400	8,6800	21,9520	61,4656	24,3040
10	3,2	3,2	10,2400	10,2400	32,7680	104,8576	32,7680
11	3,6	3,3	12,9600	11,8800	46,6560	167,9616	42,7680
12	4,0	3,4	16,0000	13,6000	64,0000	256,0000	54,4000
13							
14	**22,0000**	**26,2000**	**61,6000**	**65,2800**	**193,6000**	**648,5248**	**192,6400**

Рис. 2.1 – Сформована таблиця

За допомогою вбудованих функцій **МОБР** і **МУМНОЖ** вирішимо систему рівнянь (2.2). Позначимо головну матрицю через А:

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x & \sum x_i^2 \end{pmatrix}, \qquad (2.6)$$

а матрицю вільних членів через В:

$$B = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

Матриця розв’язання X рівна:

$$X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B \qquad (2.8)$$

де A^{-1} – зворотна матриця.

Складіть два масиви для матриці А – область чарунок A16:B17 і матриці В – область чарунок D16:D17. У чарунку A16 введіть число 10 (кількість заданих точок). У чарунку B16 запишіть формулу: **=A14.** Тоді у B16 відображуватиметься значення суми $\sum x_i$. Аналогічно, згідно формулам заповните решту чарунок для матриць A і B (рис. 2.2).

Помітьте квадратну область, починаючи з чарунку A19 по B20 (Рис. 2.2).

	A	B	C	D	
15	матрица А			матрица В	
16	10	22,0000		26,2000	
17	22,0000	61,6000		65,2800	
18	обратная матрица			решение	
19				a0=	
20				a1=	

Рис 2.2 – Підготовка даних

Натисніть кнопку f_x і виберіть із списку функцію **МОБР**(). Помітьте числа матриця A, після чого натисніть **Enter** і **OK**. У чарунку A19 з'явиться перший елемент зворотної матриці. Для віддзеркалення всіх елементів натисніть клавішу **F2**, а потім **Enter** при натиснутих одночасне клавішах **Ctrl** і **Shift**.

Помітьте стовпець чарунку з E19 по E20 і викличте функцію **МУНОЖ**(). Помітьте масив 1 – зворотну матрицю A, масив 2 – матрицю-стовпець B. Натиснуть OK. Для відображення всіх елементів матриці розв'язань **X** натисніть клавішу F2, а потім **Enter** при натиснутих одночасне клавішах **Ctrl** і **Shift**.

На рис 2.3 представлений результат розв'язань рівняння:

15	матрица А			матрица В	
16	10	22,0000		26,2000	
17	22,0000	61,6000		65,2800	
18	обратная матрица			решение	
19	0,46667	-0,16667		a0=	1,346667
20	-0,1667	0,075758		a1=	0,578788

Рис. 2.3 – Розв'язання системи рівнянь матричним методом

Помітьте початкові дані в стовпцях A і B, і, використовуючи «Майстер діаграм», побудуйте **точковий** графік. У головному меню з'явився пункт «Діаграма». Виберіть з цього пункту підпункт «Додати лінію тренда». Помітьте лінійний графік, потім клацніть по вкладишу «Параметри» і встановите галочок в двох останніх рядках (рис. 2.4).

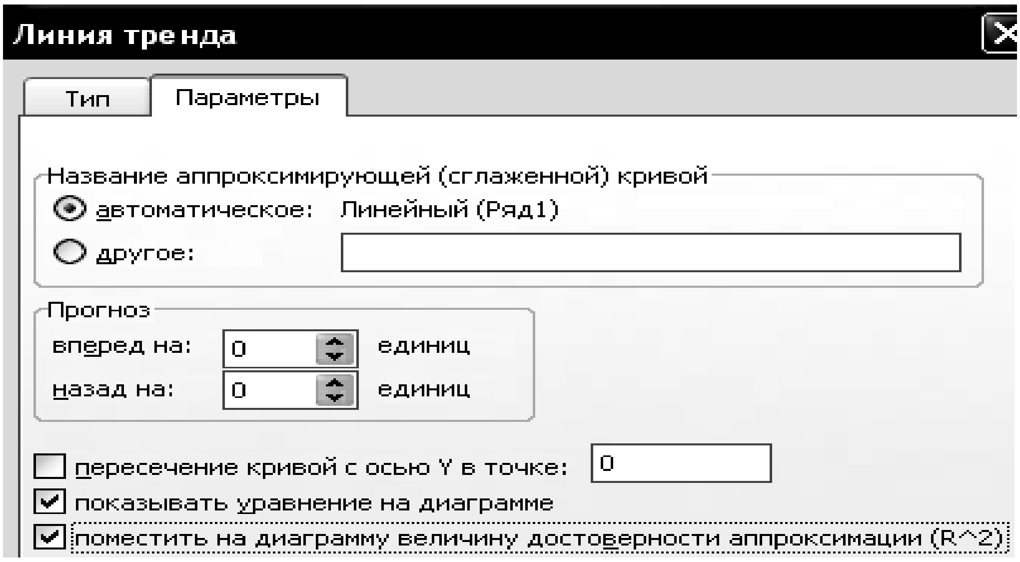


Рис. 2.4 – Параметри

Програма побудує графік лінійної функції, виведе на екран її рівняння і значення коефіцієнта детермінації (рис. 2.5).

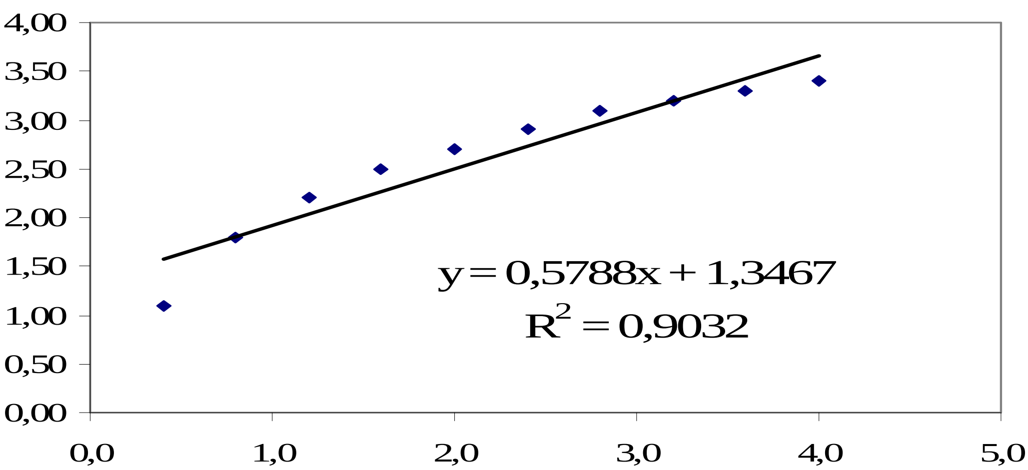


Рис. 2.5 – Лінійна апроксимація

Повторите описаний вище процес вирішення системи рівнянь для випадку квадратичної функції. Матриці A і B мають вид:

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Знайдіть коефіцієнти, побудуйте графік точкової функції і підберіть поліном другого ступеня (режим «Додати лінію тренда»). Знову побудуйте графік точкової функції і підберіть логарифмічну функцію.

По формулі підрахуйте помилку апроксимації, сформувавши таблицю, показану на рис. 2.6 Наприклад, для обчислення значення лінійної функції необхідно у чарунку А32 ввести і скопіювати по рядках формулу:

=$E$19+$E$20*A3

Для розрахунку помилки лінійної апроксимації, у чарунку В32 вводимо і копіюємо по рядках формулу:

=ABS(1-A3/A32)

Потім знаходимо суму значень стовпця В і ділимо результат на кількість точок – 10. Аналогічно підраховується помилка квадратичної апроксимації (рис. 2.6).

31	F(x)	E	F(x)	E
32	1,57818	0,302995	1,241818	0,1142
33	1,8097	0,005358	1,697576	0,06034
34	2,04121	0,077791	2,097273	0,04898
35	2,27273	0,1	2,440909	0,02421
36	2,50424	0,07817	2,728485	0,01044
37	2,73576	0,060035	2,96	0,02027
38	2,96727	0,04473	3,135455	0,01131
39	3,19879	0,000379	3,254848	0,01685
40	3,4303	0,037986	3,318182	0,00548
41	3,66182	0,0715	3,325455	0,02242
42	E=	7,8%		3,3%

Рис. 2.6 – Розрахунок помилки

Результати виконання РГР № 2 представлені на наступних сторінках. Аналіз результатів показав, що логарифмічна функція і поліном другого ступеня дають найкращі результати апроксимації заданої точкової функції.

Розрахунково-графічна робота № 2

Xi	Yi	Xi^2	Xi*Yi	Xi^3	Xi^4	Yi*Xi^2
0,4	1,1	0,1600	0,4400	0,0640	0,0256	0,1760
0,8	1,8	0,6400	1,4400	0,5120	0,4096	1,1520
1,2	2,2	1,4400	2,6400	1,7280	2,0736	3,1680
1,6	2,5	2,5600	4,0000	4,0960	6,5536	6,4000
2,0	2,7	4,0000	5,4000	8,0000	16,0000	10,8000
2,4	2,9	5,7600	6,9600	13,8240	33,1776	16,7040
2,8	3,1	7,8400	8,6800	21,9520	61,4656	24,3040
3,2	3,2	10,2400	10,2400	32,7680	104,8576	32,7680
3,6	3,3	12,9600	11,8800	46,6560	167,9616	42,7680
4,0	3,4	16,0000	13,6000	64,0000	256,0000	54,4000
22,0000	**26,2000**	**61,6000**	**65,2800**	**193,6000**	**648,5248**	**192,6400**

матрица А

10	22,0000
22,0000	61,6000

матрица В

26,2000
65,2800

$$F(x) = a_0 + a_1 x$$

обратная матрица

0,46667	-0,16667
-0,1667	0,075758

решение

a0=	1,346667
a1=	0,578788

матрица А

10	22	61,6000
22	61,6	193,6000
61,6	193,6000	648,5248

матрица В

26,2000
65,2800
192,6400

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

обратная матрица

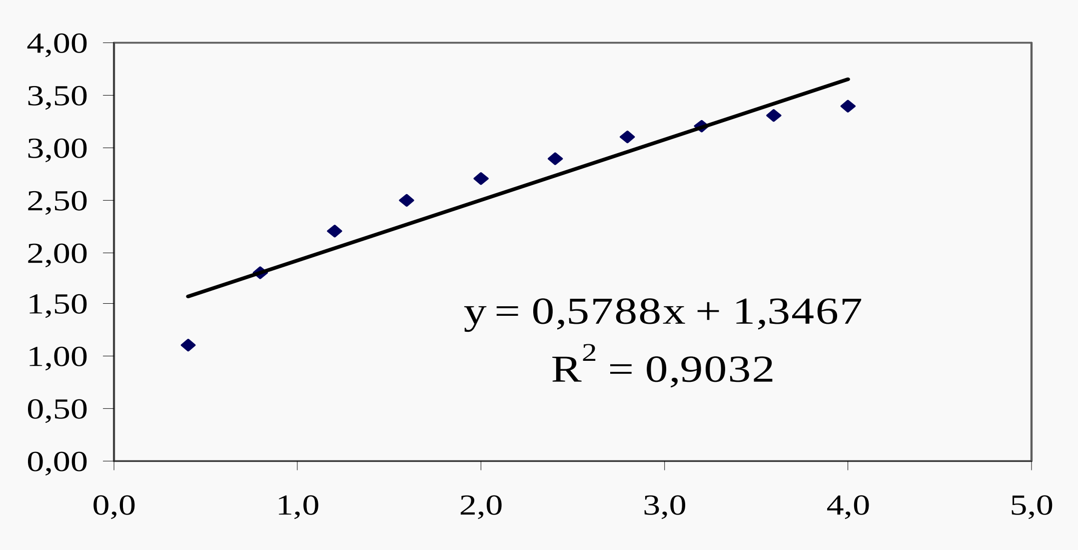
1,38333	-1,3125	0,260417
-1,3125	1,508049	-0,32552
0,26042	-0,32552	0,073982

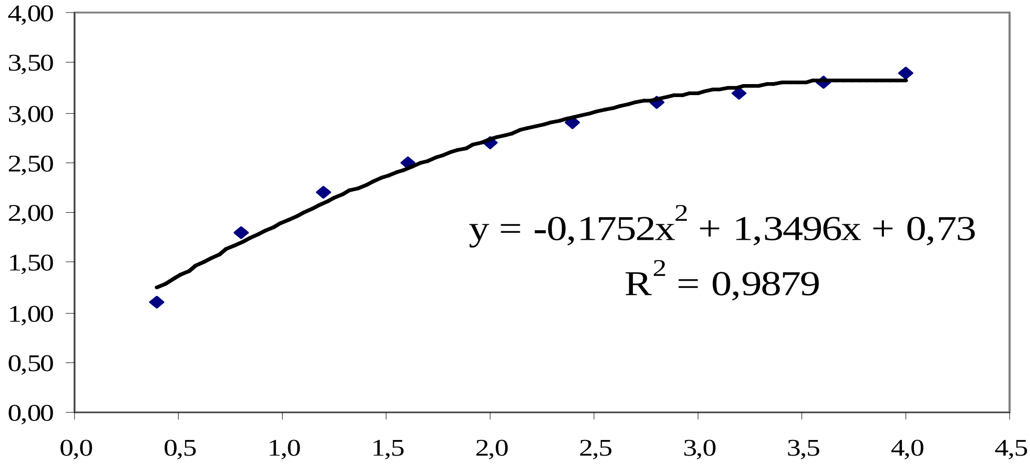
решение

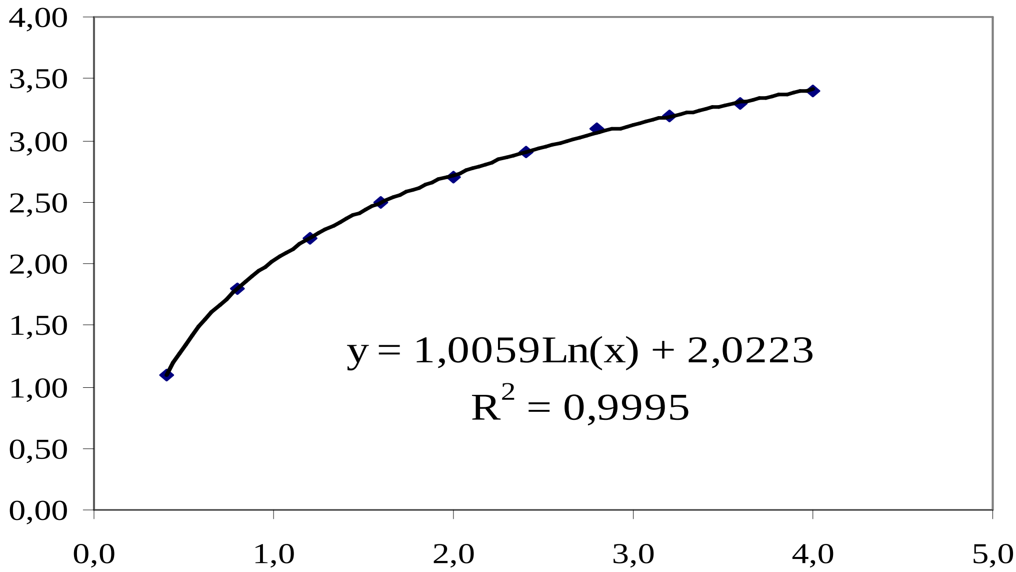
a0=	0,73
a1=	1,349621
a2=	-0,17519

ПОМИЛКА

F(x)	E	F(x)	E
1,57818	0,302995	1,241818	0,1142
1,8097	0,005358	1,697576	0,06034
2,04121	0,077791	2,097273	0,04898
2,27273	0,1	2,440909	0,02421
2,50424	0,07817	2,728485	0,01044
2,73576	0,060035	2,96	0,02027
2,96727	0,04473	3,135455	0,01131
3,19879	0,000379	3,254848	0,01685
3,4303	0,037986	3,318182	0,00548
3,66182	0,0715	3,325455	0,02242
E=	7,8%		3,3%


4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,0
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
y = 0,5788x + 1,3467
R^2 = 0,9032


4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
y = -0,1752x^2 + 1,3496x + 0,73
R^2 = 0,9879


4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,0
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
y = 1,0059Ln(x) + 2,0223
R^2 = 0,9995

РГР № 3. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Знайти наближене значення визначених інтегралів за допомогою методів прямокутників, трапецій, Сімпсона і Монте-Карло. Наближене значення інтеграла а) порівняти з точним значенням і визначити похибку.

1. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx$	13. $\int_4^7 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$	25. $\int_1^2 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$	14. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$	26. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
3. $\int_0^2 \frac{xdx}{(x+3)^2}$	15. $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$	27. $\int_0^1 \frac{x-8}{x^2-4x^2+4}$
4. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$	16. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx$	28. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$
5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	17. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$	29. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$
6. $\int_0^{\pi} x \sin x dx$	18. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$	30. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$
7. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}dx}{x}$	19. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+3x+1}$	31. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$
8. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$	20. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$	32. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}$	21. $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2-2x+4}$	33. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)} dx$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$	22. $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2-2x+2}$	34. $\int_0^{\pi/12} \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx$
11. $\int_1^3 \frac{x^2dx}{2x+3}$	23. $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$	35. $\int_1^2 \frac{arctgxdx}{1+x^2} dx$
12. $\int_0^1 xe^{2x} dx$	24. $\int_0^{0.9} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	36. $\int_0^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$

37. $\int_0^1 \frac{dx}{2-x^2}$	52. $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$	67. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$
38. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}$	53. $\int_1^2 \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$	68. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\, dx$
39. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2}$	54. $\int_1^2 \cos(\ln x)\frac{dx}{x}$	69. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$
40 $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{\sqrt{1+2\sin x}}$	55. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos xdx$	70. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$
41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$	56. $\int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{2+e^{2x}}$	71. $\int_0^1 \frac{dx}{3-2x^2}$
42. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx$	57. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$	72. $\int_2^4 \frac{dx}{1+x+x^2}$
43. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$	58. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{5-x^6}$	73. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin xdx}{1+\cos x}$
44. $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x+x^2}$	59. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$	74. $\int_e^{2e} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$
45. $\int_0^1 \ln(1+x)dx$	60. $\int_0^2 x^2e^{4x}dx$	75. $\int_{-1}^0 \ln(1-x)dx$
46. $\int_0^{0,9} \ln(1-x)dx$	61. $\int_0^2 e^{x^2}xdx$	76. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2+3x+1}$
47. $\int_0^2 x^2e^x dx$	62. $\int_1^2 x^2\ln xdx$	77. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$
48. $\int_1^e x^2\ln xdx$	63. $\int_1^2 \frac{\ln(x+2)}{x^2}dx$	78. $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x}+1}dx$
49. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$	64. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$	79. $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{3+2x}dx$
50. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$	65. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$	80. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$
51. $\int_0^1 xe^{-x}dx$	66. $\int_0^1 \frac{xdx}{4x+3}$	81. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 xdx$

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Дано: $J = \int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

Теорія.

Метод прямокутників. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин. Довжина однієї частини дорівнює $h = \frac{b-a}{n}$ - її звуть кроком. Введемо позначення:

$$y_0 = f(a), y_1 = f(a+h), y_2 = f(a+2h),...y_i = f(a+ih),...y_{n-1}$$
$$= f(a+(n-1)h), y_n = f(a+nh) = f(b)$$

Наближене значення визначеного інтегралу:

$$J_1 \approx S_{П_1} = hy_0 + hy_1 + ...hy_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot h \tag{3.1}$$

або

$$J_2 \approx S_{П_2} = hy_1 + hy_1 + ...hy_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot h \tag{3.2}$$

Повна похибка для методу прямокутників складе $M(b-a)h^2/2$, де $M = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

Метод трапецій. Наближена формула для обчислення визначених інтегралів за методом трапецій має вигляд:

$$J \approx S_T = h \cdot \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right] = h \cdot \left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2} \right] \tag{3.3}$$

Повна похибка для методу трапецій складе $M(b-a)h^3/12$, де $M = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$

Метод парабол (Сімпсона). Наближена формула для обчислення визначених інтегралів за методом Сімпсона має вигляд:

$$J \approx S_C = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + y_n + 4 \cdot (y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})) \tag{3.4}$$

Повна похибка цього метода складе $\dfrac{M(b-a)h^4}{18}$, де $M = \max\limits_{[a,b]}\left| f^{IV}(x)\right|$.

Метод Монте-Карло. Згенеруємо N випадкових чисел, розподілених на відрізку $[a, b]$. Розглядаючи його як середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$J_{MK} \approx \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{3.5}$$

де x_i послідовність випадкових чисел з рівномірним законом розподілу на відрізку $[a, b]$. Похибка методу Монте-Карло міняється як $O(n^{-0.5})$.

<u>**Розв’язання**</u>. Використовуємо табличний процесор MS EXCEL. Спочатку визначимо n=10 частин і обчислимо крок, використовуючи формулу $h = \dfrac{5-3}{10} = 0{,}2$. Для цього введемо значення у чарунку B2. Потім створимо таблицю і як перше значення x введемо нижню межу інтеграції, тобто в нашому випадку дорівнює 3. У чарунку B5 введіть і скопіюйте формулу, що дозволяє обчислювати наступні значення X_i (рис. 3.1).

Наступні значення x отримаємо її збільшенням на величину кроку. На рис. 3.1 показано, як записуються формула для обчислення значень підінтегральної функції $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ в чарунку B4.

	A	B	C	D	E	F
1	**Розрахунково-графічна робота № 3**					
2	**шаг h=**	**0,2**				
3	**Xi**	**Yi**	**i**	$J = \int_3^5 \frac{dx}{x^2-3x+2}$		
4	3	=1/(A4^2-3*A4+2)	0			
5	=A4+$B$2		1			
6			2			

Рис. 3.1 – Формування таблиці для обчислення значень підінтегральної функції

Після застосування n+1 разу даної формули набудемо відповідні значення функції $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, які позначаємо $y_0; y_1; \ldots y_n$. Побудуємо графік функції на відрізку $[3;\ 5]$ (рис 3.2). Таким чином, значення визначеного інтеграла дорівнює площі даної криволінійної трапеції.

Використовуючи значення y_i, за допомогою формул (3.1), (3.2), (3.3) і (3.4) обчислимо наближені значення даного інтеграла, вводячи їх у відповідні чарунки E16, F16, E18, E20.

Наприклад, формула метода трапецій (3.3), яка вводиться у чарунку E18, може бути записана у вигляді:

=B2*((B4+B14)/2+B5+B6+B7+B8+B9+B10+B11+B12+B13)

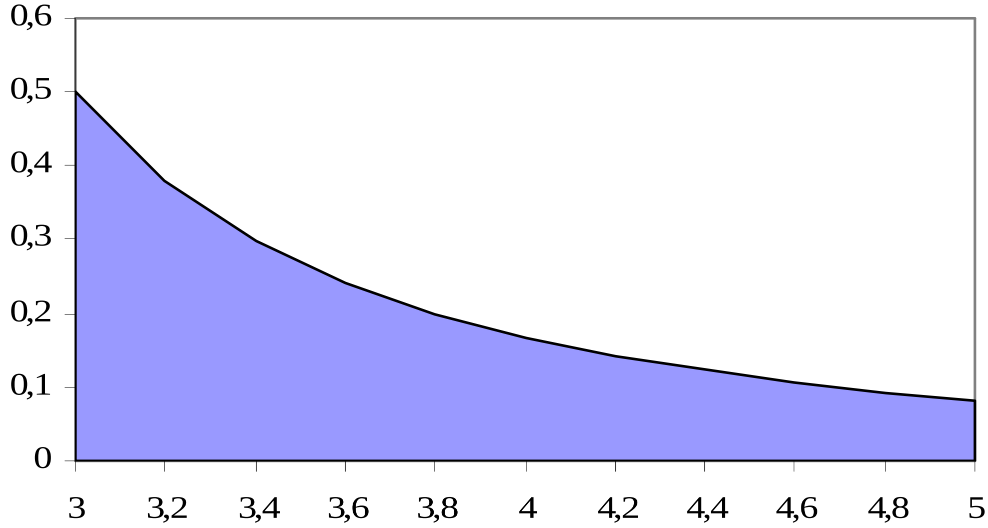


Рис. 3.2 – Графік підінтегральної функції

Знайдемо точне вирішення інтеграла і запишемо його у чарунку E22.

$$\int_3^5 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_3^5 \frac{dx}{(x-1{,}5)^2-0.25} = \ln\frac{x-2}{x-1}\Big|_3^5 = \ln\frac{3}{2} = 0{,}40546511$$

Обчислимо помилку для трьох методів по формулі $\varepsilon = \left|1-\frac{J}{J_T}\right| \cdot 100\%$:

метод прямокутників ε =10,85%

метод трапецій ε =0,57%

метод Сімпсона ε =0,01%

Метод Монте-Карло. За допомогою VBA створимо функцію МК. Для того, щоб з робочої книги запустити редактора VBA, треба натиснути клавіші $\boxed{\text{Alt}}$ і $\boxed{\text{F11}}$. З'явиться вікно, що складається з головного меню, панелі інструментів і декількох вікон. Це вікна проекту, властивостей і модуля. У останньому вікні записується текст програм.

Виберіть пункт Вставка (Insert) головного меню VBA, потім пункт Модуль (Module). Введіть у вікні, що з'явилося, текст коди для створення функції МК (тут використовується функція RND(1), що генерує випадкові числа в інтервалі [0; 1]).

Текст коду	*Коментарі (не вводити)*
Function MK (N, a, b)	Оголошена функція МК, вхідні параметри: N
h = (b - a) / N	– число точок; a, b – нижня і верхня межі
S = 0	інтеграції, визначається h
For i = 1 To N	відкривається цикл, обчислюються випадкові
x = a + (b - a) * Rnd(1)	значення *x* і проводиться підсумовування
S = S + 1/(x*x-3*x+2)	значень функції в точках *x*.
Next	кінець циклу, якщо i>N
MK2 = h * S	обчислення інтеграла за формулою (3.6)
End Function	

Збережіть файл, в чарунку D24 робочого листа Excel введіть значення N, рівне 1000000. У чарунку E24 запишемо формулу, яка здійснює виклик функції МК**:**

=МК(D24;A4;A14)

Результати виконання РГР № 3 представлені на наступній сторінки. Аналіз результатів показав, що помилка обчислень за методом Сімпсона є найменшою.

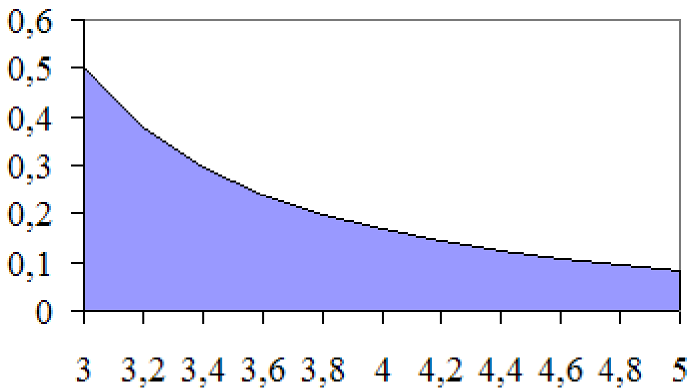
Розрахунково-графічна робота № 3

шаг

h= 0,2

$$J = \int_3^5 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

Xi	Yi	i
3	0,5	0
3,2	0,37878788	1
3,4	0,29761905	2
3,6	0,24038462	3
3,8	0,1984127	4
4	0,16666667	5
4,2	0,14204545	6
4,4	0,12254902	7
4,6	0,10683761	8
4,8	0,09398496	9
5	0,08333333	10



	N			похибка
Формула прямокутників		0,4494576	0,3661243	10,850%
Метод трапецій		0,40779092		0,574%
Метод Симпсона		0,40551037		0,011%
Точне рішення		0,40546511		
Метод Монте-Карло	1000000	0,4050472		0,103%

РГР № 4. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Знайти чисельне вирішення диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(1) = -1$ на відрізку [1;2] з використанням: 1. Методу послідовних наближень; 2. Методам Ейлера; 3. Методу Рунге-Кутта. Порівняти рішення з точним рішенням і оцінити погрішність. Побудувати графік отриманої функції $y = y(x)$.

1. $y' = -\frac{y}{x} + x$	18. $y' = -\frac{y}{2x} - x^2$	35. $y' = \frac{2y}{x} - x^4$	52. $y' = -\frac{y}{x} - 4x^4$
2. $y' = -\frac{y}{x} + x^2$	19. $y' = -\frac{y}{2x} - x^3$	36. $y' = \frac{y}{2x} - x$	53. $y' = -\frac{y}{x} - 6x^4$
3. $y' = -\frac{y}{x} + x^3$	20. $y' = -\frac{y}{2x} - x^4$	37. $y' = \frac{y}{2x} - x^2$	54. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^2$
4. $y' = -\frac{y}{x} + x^4$	21. $y' = -\frac{y}{2x} + x^4$	38. $y' = \frac{y}{2x} - x^3$	55. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^3$
5. $y' = -\frac{2y}{x} + x$	22. $y' = -\frac{y}{2x} + x$	39. $y' = \frac{y}{2x} - x^4$	56. $y' = -\frac{y}{2x} - 5x^4$
6. $y' = -\frac{2y}{x} + x^2$	23. $y' = -\frac{y}{2x} + x^2$	40. $y' = \frac{y}{x} + 2x$	57. $y' = \frac{y}{4x} + 8x$
7. $y' = -\frac{2y}{x} + x^3$	24. $y' = -\frac{y}{2x} + x^3$	41. $y' = \frac{y}{x} + 2x^2$	58. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^2$
8. $y' = -\frac{2y}{x} + x^4$	25. $y' = \frac{y}{x} + x$	42. $y' = \frac{y}{x} + 2x^3$	59. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^3$
9. $y' = -\frac{y}{x} - x$	26. $y' = \frac{y}{x} + x^2$	43. $y' = \frac{y}{x} + 2x^4$	60. $y' = \frac{y}{4x} + 8x^4$
10. $y' = -\frac{y}{x} - x^2$	27. $y' = \frac{y}{x} + x^3$	44. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^3$	61. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^3$
11. $y' = -\frac{y}{x} - x^3$	28. $y' = \frac{y}{x} + x^4$	45. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^4$	62. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^4$
12. $y' = -\frac{y}{x} - x^4$	29. $y' = \frac{y}{x} - x^4$	46. $y' = \frac{2y}{x} + 3x^2$	63. $y' = -\frac{y}{x} + 0{,}5x^2$
13. $y' = -\frac{2y}{x} - x$	30. $y' = \frac{y}{x} - x$	47. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^2$	64. $y' = \frac{y}{x} - 8x$
14. $y' = -\frac{2y}{x} - x^2$	31. $y' = \frac{y}{x} - x^2$	48. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^3$	65. $y' = \frac{y}{x} - 8x^2$
15. $y' = -\frac{2y}{x} - x^3$	32. $y' = \frac{y}{x} - x^3$	49. $y' = \frac{2y}{x} - 3x^4$	66. $y' = \frac{y}{x} - 8x^3$
16. $y' = -\frac{2y}{x} - x^4$	33. $y' = \frac{2y}{x} - x^2$	50. $y' = -\frac{y}{x} - 4x$	67. $y' = -\frac{y}{x} + 8x$
17. $y' = -\frac{y}{2x} - x$	34. $y' = \frac{2y}{x} - x^3$	51. $y' = -\frac{y}{x} - 4x^2$	68. $y' = -\frac{y}{x} + 8x^2$

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Дано: $y' = \dfrac{y}{3x} + 2x^2$; $y(1) = -1$

<u>Теорія</u>.

Метод послідовних наближень Пікара. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y),$$

(4.1)

з якого відома початкова умова $y(x_0) = y_0$. Маємо задачу Коші. Тобто, треба знайти рівняння кривої $y = y(x)$, яка задовольняє рівнянню (4.1) і проходить через точку (x_0, y_0). Передбачаємо, що в околі точки (x_0, y_0) рівняння (4.1) задовольняє умовам теореми існування і єдиності рішення.

Побудуємо рішення для $x \geq x_0$. Інтегруючи (4.1) отримаємо інтегральне рівняння:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx, \tag{4.2}$$

яке повинно задовольняти початковій умові.

Для розв'язання рівняння (4.2) застосуємо розроблений Пікаром метод послідовних наближень. Перше наближення має вигляд:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx. \tag{4.3}$$

Визначивши y_1 з цього рівняння, знайдемо друге наближення:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx. \tag{4.4}$$

Всі подальші наближення будуються за рекурентною формулою:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx. \tag{4.5}$$

Похибка $\varepsilon_n = \left| y - y_n \right| \le MN^n \dfrac{d^{n+1}}{(n+1)!}$. (4.6)

Метод Ейлера. Розглянемо те саме диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \;\; ; \;\; y(x_0) = y_0$$

Задаємо крок h <u>*настільки малим*</u>, що для всіх x в інтервалі $[x_0; x_1]$, $(x_1 = x_0 + h)$ значення функції y мало відрізнятимуться від y_0. Рекурентна формула Ейлера, що реалізовує чисельне вирішення диференціальних рівнянь першого порядку, має вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i) \tag{4.7}$$

Модифікація методу Ейлера. Знову розглянемо диференціальне рівняння (4.1) з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Вибравши крок h, покладемо $x_i = x_0 + ih,\ (i = 0,1,2...)$. За методом Ейлера послідовні значення шуканого рішення обчислюються за наближеною формулою. Точнішим є вдосконалений метод, при якому спочатку обчислюють проміжні значення.

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i) \tag{4.8}$$

а потім обчислюють поле напрямку інтегральних кривих у середніх точках. Тобто:

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}}(x_i + h/2; y_{i+\frac{1}{2}}) \tag{4.9}$$

Метод Рунге-Кутта. Дано диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$. Вибираємо крок h, покладемо $x_i = x_0 + ih,\ (i = 0,1,2...)$. Розглядатимемо числа:

$$\begin{aligned}
k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i),\\
k_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}),\\
k_3^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}),\\
k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Тоді, згідно методу Рунге-Кутта послідовні чисельні значення функції визначаються по формулі:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i\ ,$$
$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \qquad (4.11)$$

Похибка методу на кожному кроці – величина порядку h^5. У таблиці 4.1 представлена схема реалізації методу Рунге-Кутта.

Таблиця 4.1 - Схема реалізації методу Рунге-Кутта

xi	*yi*	k_1^i	k_2^i	k_3^i
x_0	y_0	$k_1^0 = hf(x_0, y_0)$	$k_2^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2})$	$k_3^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2})$
x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$k_1^1 = hf(x_1, y_1)$	$k_2^1 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^1}{2})$	$k_3^1 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^1}{2})$
.	..	..	...	..

продовження таблиці 4.7

k_4^i	*Δyi*
$k_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0)$	$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$
$k_4^1 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3^1)$	$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)})$
....	...

Розв’язання. Знайти рішення диференціального рівняння.

$$y' = \frac{y}{3x} + 2x^2 \qquad (4.12)$$

яке відповідає початковій умові $y(1) = -1$

Етап 1. Знайдемо загальне рішення даного диференціального рівняння. Для цього вважаємо $y = u \cdot v$, де $u = u(x)\, і\, v = v(x)$ добуток двох невідомих функцій. Підставимо в дане рівняння (*). Отримаємо:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \left(\frac{dv}{dx} - \frac{v}{3x} \right) = 2x^2 \qquad (4.13)$$

Прирівняємо до нуля вираз в дужках і проінтегруємо його. Отримаємо

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x},$$

звідки $\ln v = \frac{1}{3}\ln x = \ln x^{\frac{1}{3}}$. Отже, перша невідома функція знайдена: $v = x^{\frac{1}{3}}$.

Підставимо отриману функцію у рівняння (4.13) і про інтегруємо його. Отримаємо $\int du = 4\int x^{2-\frac{1}{3}}dx = 2\int x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}$. Звідки: $u = \frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}} + C$.

Отже, друга невідома функція знайдена. Загальне рішення даного рівняння має вигляд: $y = u \cdot v = x^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}} + C) = \frac{3}{4}x^{3} + Cx^{\frac{1}{3}}$

Для визначення постійної інтеграції використовуємо початкову умову $y(1) = -1$. Тоді $-1 = \frac{3}{4} + C \;\Rightarrow\; C = -\frac{7}{4}$.

Таким чином, частинне точне рішення, що відповідає початковій умови, має диференціального рівняння має вигляд .

$$y = \frac{\left(3x^{3} - 7x^{\frac{1}{3}}\right)}{4} \tag{4.14}$$

Етап 2. Метод послідовних наближень

Згідно (4.5):

$$y_n = -1 + \int_1^x f(x, y_{n-1})dx, \text{ де } f(x, y_{n-1}) = \frac{y_{n-1}}{3x} + 2x^2$$

Крок 1 (n=1). $f(x, y_0) = -\frac{1}{3x} + 2x^2$; тоді

$$y_1 = -1 - \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dx}{x} + 2\int_1^x x^2 dx = 1 - \frac{1}{3}\ln x\Big|_1^x + \frac{2}{3}x^3\Big|_1^x = -1 - \frac{\ln x}{3} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{\ln x}{3} + \frac{2}{3}x^3$$

Крок 2 (n=2). $f(x, y_1) = \frac{1}{3x}\cdot\left(-\frac{5}{3} - \frac{\ln x}{3} + \frac{2}{3}x^3\right) + 2x^2 \Rightarrow$

$$f(x, y_1 0 = -\frac{5}{9x} - \frac{\ln x}{9x} + \frac{2}{9}x^2 + 2x^2 = \frac{5}{9x} - \frac{\ln x}{9x} + \frac{20}{9}x^2$$

тоді

$$y_2 = -1 - \frac{5}{9}\int_1^x \frac{dx}{x} - \frac{1}{9}\int_1^x \frac{\ln x dx}{x} + \frac{20}{9}\int_1^x x^2 dx = -1 - \frac{5}{9}\ln x\Big|_1^x + \frac{1}{18}\ln^2 x\Big|_1^x + \frac{20}{27}x^3\Big|_1^x \Rightarrow$$

$$y_2 = -1 - \frac{5}{9}\ln x - \frac{1}{18}\ln^2 x + \frac{20}{27}x^3 - \frac{20}{27} = -\frac{47}{27} - \frac{5}{9}\ln x + \frac{1}{18}\ln^2 x + \frac{20}{27}x^3$$

<u>Крок 3</u> (n=3). $f(x, y_2) = \frac{1}{3x}\cdot\left(-\frac{47}{27} - \frac{5}{9}\ln x - \frac{1}{18}\ln^2 x + \frac{20}{27}x^3\right) + 2x^2 \Rightarrow$

$$f(x,y_2) = -\frac{47}{81x} - \frac{5}{27}\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{54}\frac{\ln^2 x}{x} + \frac{20}{81}x^2 + 2x^2 = -\frac{47}{81x} - \frac{5}{27}\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{54}\frac{\ln^2 x}{x} + \frac{182}{81}x^2$$

тоді:

$$y_3 = -1 - 0{,}5802469\ln x - 0{,}0925926\ln^2 x + 0{,}0061728\ln^3 x + 0{,}748971\cdot(x^3 - 1) \tag{4.15}$$

<u>Етап 3.</u> Відкрийте чистий робочий лист MS Excel. Відрізок [1; 2] розіб'ємо на 20 частин з кроком h=0.05.У чарунку B2 введіть значення кроку h, рівне 0,05. Створіть заголовок першої таблиці (рис.4.1), введіть в чарунку A4 перше значення X, рівне 1. У чарунку A5 введіть формулу, яка дозволить набути наступного значення X_i, рівного попередньому значенню плюс крок. Скопіюйте формулу до 24-го рядка.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Розрахунково-графічна робота № 4					$y' = \frac{y}{3x} + 2x^2$		$y(1) = -1$	
2	шаг h=	0,05							
3	Xi	Yt	Y3	Yэ	h*f	Y3-Yt	Yэ-Yt		

Рис. 4.1 – Заголовок першої таблиці

У чарунку B4 запишіть формулу (4.14), що дозволяє обчислювати точне рішення Y_t: **=(3*A4^3-7*F4^(1/3))/4**

Скопіюйте формулу для всіх значень X. У чарунку C4 запишіть формулу (4.15), що дозволяє обчислити третє наближення Y_3:

=-1-0,5802469*LN(A4)+0,0925926*LN(A4)^2+0,0061728*LN(A4)^3+0,748971*(A4^3-1)

Метод Ейлера. У чарунку D4 введіть початкове значення Y_0, рівне -1. У чарунку E4 введемо формулу, яка дозволяє підрахувати твір кроку на праву частку диференціального рівняння (перше значення X зберігається в чарунці A4, а значення Y – в чарунці D4):

=$B$2*(D4/(3*A4)+2*A4*A4)

У чарунку D5 введіть формулу Ейлера (4.7) для початкових значень X і Y:

=D4+E4

Скопіюйте формули для всіх значень X. Вичислите погрішність наближених рішень: $\varepsilon_{20} = abs(1 - y_3 / y_t)$ =2,4%; $\varepsilon_{20} = abs(1 - y_э / y_t)$ =5%.

Побудуйте графіки функцій Y_t, Y_3, $Y_Э$:

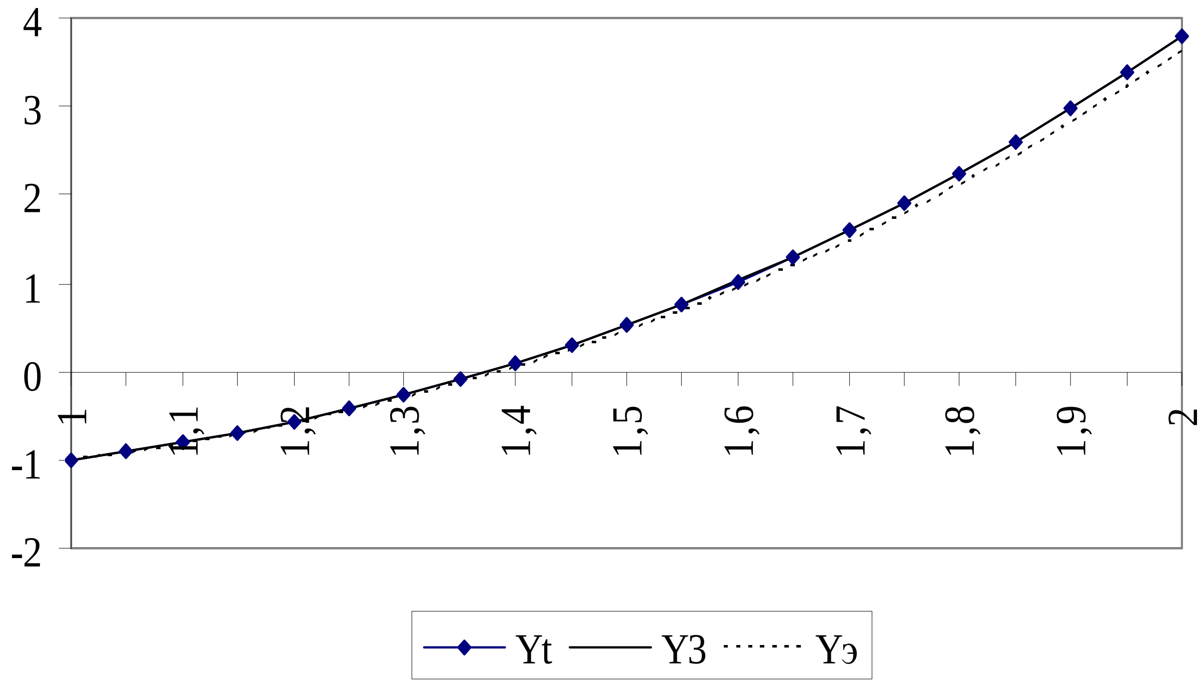


Рис. 4.2 – Порівняння точного і наближених вирішень диференціального рівняння

Модифікація методу Ейлера. У MS Excel створимо другу таблицю, яку розміщаємо знайти чисельне рішення диференціального рівняння за модифікованим методом Ейлера (рис 4.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
42	**Модифікація методу Ейлера**							
43	шаг h=	0,05						
44	Xi	Yэм	Xi+1/2	h*f/2	Yi+1/2	h*fi+1/2	Yt	Yэм-Yt

Рис. 4.3 – Заголовок другої таблиці

Наше – ввести формули для модифікованого методу Ейлера (4.8) і (4.9). Введіть в чарунку А45 перше значення Х, рівне 1. У чарунку А46 введіть формулу, яка дозволить набути наступного значення X_i, рівного попередньому значенню плюс крок. Скопіюйте формулу.

У чарунку В45 введіть початкове значення Y_o, рівне -1.

У чарунку С45 введіть формулу: **=A45+$B$43/2**

(визначає значення $x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + h/2$);

У чарунку D45 введіть формулу: **=$B$43*(B45/(3*A45)+2*A45*A45)/2**

(визначає значення $h \cdot f(x_0; y_o)/2 = h \cdot \left(y_0 /(3x_0) + 2x_0^2\right)/2$);

У чарунку Е45 введіть формулу: **=B45+D45**

(визначає значення $y_{0+\frac{1}{2}} = y_o + h \cdot f(x_0; y_o)/2$);

У чарунку F45 введіть формулу: **=$B$43*(E45/(3*C45)+2*C45*C45)**

(визначає значення

$$h \cdot f_{0+\frac{1}{2}}(x_{0+\frac{1}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}) = h \cdot \left(y_{0+\frac{1}{2}} /(3x_{0+\frac{1}{2}}) + 2x^2_{0+\frac{1}{2}} \right)$$);

У чарунку В46 введіть формулу: **=D45+F45**

(визначає значення $y_1 = y_0 + h \cdot f_{0+\frac{1}{2}}\left(x_{0+\frac{1}{2}}; y_{0+\frac{1}{2}}\right)$);

Скопіюйте формули для всіх значень Х. Вичислите абсолютну погрішність наближених рішень.

Метод Рунне-Кутта. У MS Excel створимо таблицю, яку розміщаємо знайти чисельне рішення диференціального рівняння за методом Рунне-Кутта (рис 4.4).

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	**Метод Рунге-Кутта**								
2	шаг h=	0,05							
3	**Xi**	**Yрк**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**ΔY**	**Yt**	**Yрк-Yt**

Рис. 4.4 – Заголовок таблиці

Введіть в чарунку J4 перше значення X, рівне 1. У чарунку J5 введіть формулу, яка дозволить набути наступного значення X_i, рівного попередньому значенню плюс крок. Скопіюйте формулу.

Введемо формули таблиці 4.1 у чарунку K4 введіть початкове значення Y, рівне -1. У чарунку L4 введіть формулу:

=$K$2*(K4/(3*J4)+2*J4*J4)

(визначає значення $k_1^0 = hf(x_0, y_0) = h \cdot \left(y_0 /(3x_0) + 2x_0^2\right)$);

У чарунку M4 введіть формулу:

=$K$2*(($K4+L4/2)/(3*($J4+$K$2/2))+2*($J4+$K$2/2)^2)

(визначає значення

$k_2^0 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_1^0/2) = h \cdot \left((y_0 + k_1^0/2)/(3 \cdot (x_0 + h/2) + 2(x_0 + h/2)^2\right)$);

У чарунку N4 введіть формулу:

=$K$2*(($K4+M4/2)/(3*($J4+$K$2/2))+2*($J4+$K$2/2)^2)

(визначає значення

$k_3^0 = hf(x_0 + h/2, y_0 + k_2^0/2) = h \cdot \left((y_0 + k_2^0/2)/(3 \cdot (x_0 + h/2) + 2(x_0 + h/2)^2\right)$);

У чарунку O4 введіть формулу:

=$K$2*(($K4+N4)/(3*($J4+$K$2))+2*($J4+$K$2)^2)

(визначає значення

$k_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3^0 2) = h \cdot \left((y_0 + k_3^0)/(3 \cdot (x_0 + h) + 2(x_0 + h)^2\right)$);

У чарунку P4 введіть формулу:

=(L4+2*M4+2*N4+O4)/6

(визначає значення $\Delta y_0 = \dfrac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$);

У чарунку K5 введіть формулу: **=K4+P4**

(визначає значення $y_1 = y_0 + \Delta y_0$);

Скопіюйте формули для всіх значень X. Вичислите абсолютну погрішність наближених рішень. Даний метод найбільш точний, оскільки абсолютна похибка рішення y_{20} не перевищує 10^{-8}.

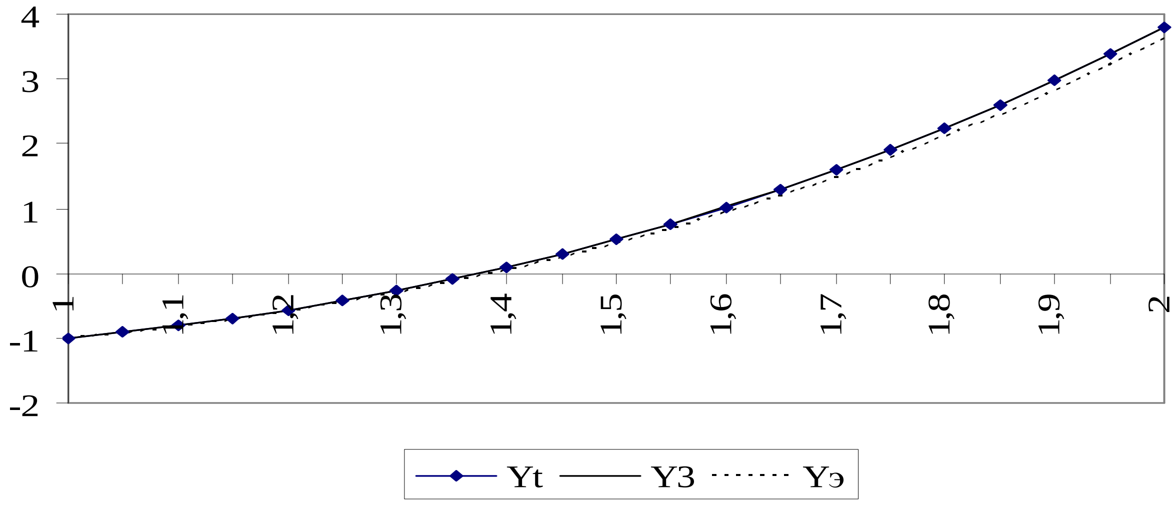
Результати виконання РГР № 4 представлені на наступних сторінках.

Розрахунково-графічна робота № 4

$$y' = \frac{y}{3x} + 2x^2 \qquad y(1) = -1$$

шаг h= 0,05

Xi	Yt	Y3	Yэ	h*f	Y3-Yt	Yэ-Yt
1	-1	-1	-1	0,08333	0	0
1,05	-0,9105	-0,9105	-0,9167	0,0957	0,00000	-0,0062
1,1	-0,8082	-0,8082	-0,821	0,10856	0,00001	-0,0127
1,15	-0,6928	-0,6928	-0,7124	0,12193	0,00003	-0,0196
1,2	-0,5637	-0,5636	-0,5905	0,1358	0,00007	-0,0268
1,25	-0,4203	-0,4202	-0,4547	0,15019	0,00013	-0,0344
1,3	-0,2622	-0,262	-0,3045	0,1651	0,00021	-0,0423
1,35	-0,0888	-0,0885	-0,1394	0,18053	0,00031	-0,0506
1,4	0,10029	0,10072	0,04113	0,19649	0,00043	-0,0592
1,45	0,30573	0,3063	0,23762	0,21298	0,00057	-0,0681
1,5	0,528	0,52873	0,4506	0,23001	0,00073	-0,0774
1,55	0,76764	0,76854	0,68061	0,24757	0,00090	-0,087
1,6	1,02519	1,02628	0,92818	0,26567	0,00110	-0,097
1,65	1,30118	1,30248	1,19385	0,28431	0,00130	-0,1073
1,7	1,59615	1,59768	1,47815	0,30349	0,00153	-0,118
1,75	1,91066	1,91241	1,78165	0,32322	0,00176	-0,129
1,8	2,24523	2,24723	2,10486	0,34349	0,00200	-0,1404
1,85	2,60042	2,60267	2,44835	0,36431	0,00225	-0,1521
1,9	2,97677	2,97927	2,81266	0,38567	0,00251	-0,1641
1,95	3,37482	3,37759	3,19833	0,40759	0,00277	-0,1765
2	3,79514	3,79817	3,60592	0,43005	0,00303	-0,1892



Модифікація методу Ейлера

шаг h=	0,05						
Xi	Yэм	Xi+1/2	h*f/2	Yi+1/2	h*fi+1/2	Yt	Yэм-Yt
1	-1	1,025	0,04167	-0,9583	0,08948	-1	0
1,05	-0,9105	1,075	0,0479	-0,8626	0,10219	-0,9105	-5E-05
1,1	-0,8083	1,125	0,05438	-0,754	0,11539	-0,8082	-9E-05
1,15	-0,6929	1,175	0,0611	-0,6318	0,1291	-0,6928	-0,0001
1,2	-0,5638	1,225	0,06808	-0,4958	0,14332	-0,5637	-0,0002
1,25	-0,4205	1,275	0,07532	-0,3452	0,15805	-0,4203	-0,0002
1,3	-0,2625	1,325	0,08282	-0,1797	0,1733	-0,2622	-0,0003
1,35	-0,0892	1,375	0,09057	0,00141	0,18908	-0,0888	-0,0003
1,4	0,09991	1,425	0,09859	0,19851	0,20538	0,10029	-0,0004
1,45	0,3053	1,475	0,10688	0,41218	0,22222	0,30573	-0,0004
1,5	0,52752	1,525	0,11543	0,64295	0,23959	0,528	-0,0005
1,55	0,7671	1,575	0,12425	0,89135	0,25749	0,76764	-0,0005
1,6	1,0246	1,625	0,13334	1,15794	0,27594	1,02519	-0,0006
1,65	1,30054	1,675	0,14269	1,44323	0,29492	1,30118	-0,0006
1,7	1,59546	1,725	0,15232	1,74778	0,31445	1,59615	-0,0007
1,75	1,90991	1,775	0,16222	2,07213	0,33452	1,91066	-0,0007
1,8	2,24443	1,825	0,17239	2,41682	0,35513	2,24523	-0,0008
1,85	2,59956	1,875	0,18283	2,7824	0,37629	2,60042	-0,0009
1,9	2,97586	1,925	0,19355	3,16941	0,398	2,97677	-0,0009
1,95	3,37386	1,975	0,20454	3,5784	0,42026	3,37482	-0,001
2	3,79412	2,025	0,21581	4,00993	0,44307	3,79514	-0,001

Метод Рунге-Кутта

шаг

h= 0,05

Xi	Yрк	K1	K2	K3	K4	ΔY	Yt	Yрк-Yt
1	-1	0,083333	0,08948	0,08953	0,095798	0,089525	-1	0,00000000
1,05	-0,91047	0,095798	0,102189	0,102239	0,108754	0,102235	-0,91047	0,00000000
1,1	-0,80824	0,108754	0,115394	0,115443	0,122209	0,11544	-0,80824	0,00000000
1,15	-0,6928	0,122209	0,129102	0,129151	0,136172	0,129148	-0,6928	0,00000000
1,2	-0,56365	0,136171	0,14332	0,143369	0,150646	0,143366	-0,56365	0,00000000
1,25	-0,42029	0,150646	0,158053	0,158102	0,165639	0,158099	-0,42029	0,00000000
1,3	-0,26219	0,165639	0,173306	0,173355	0,181153	0,173352	-0,26219	-0,00000001
1,35	-0,08884	0,181153	0,189084	0,189132	0,197194	0,18913	-0,08884	-0,00000001
1,4	0,100294	0,197194	0,205389	0,205437	0,213764	0,205435	0,100294	-0,00000001
1,45	0,305729	0,213764	0,222225	0,222273	0,230867	0,222271	0,305729	-0,00000001
1,5	0,528	0,230867	0,239595	0,239642	0,248504	0,239641	0,528	-0,00000001
1,55	0,767641	0,248504	0,257501	0,257548	0,266679	0,257547	0,767641	-0,00000001
1,6	1,025188	0,266679	0,275945	0,275992	0,285393	0,275991	1,025188	-0,00000001
1,65	1,301179	0,285393	0,294929	0,294977	0,304649	0,294976	1,301179	-0,00000001
1,7	1,596154	0,304649	0,314456	0,314503	0,324447	0,314502	1,596154	-0,00000001
1,75	1,910657	0,324447	0,334526	0,334573	0,344789	0,334573	1,910657	-0,00000001
1,8	2,245229	0,344789	0,355141	0,355189	0,365677	0,355188	2,245229	-0,00000001
1,85	2,600417	0,365677	0,376303	0,37635	0,387112	0,376349	2,600417	-0,00000001
1,9	2,976766	0,387112	0,398011	0,398058	0,409095	0,398058	2,976766	-0,00000001
1,95	3,374824	0,409095	0,420268	0,420315	0,431626	0,420315	3,374824	-0,00000001
2	3,795138	0,431626	0,443074	0,443122	0,454707	0,443121	3,795138	-0,00000001

РГР № 5. РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Скласти програму для чисельного вирішення рівняння диференціального рівняння

$$-a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{5.1}$$

($w = w(x,t)$ - поперечні переміщення стержня довжиною *L,* площа поперечного перетину *S*; стержень зроблений з матеріалу щільності *ρ,* який має модуль пружності *E,* $a = \sqrt{EJ / \rho S}$; *EJ* – жорсткість стержня, *J* – момент інерції поперечного перетину щодо нейтральної осі) на основі методу поділу змінних за наступних граничних умов:

$$w(0,t) = 0;\ w(L,t) = 0;\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0;\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0 \tag{5.2}$$

і початкових умовах:

$$w(x,0) = \varphi(x) = 0{,}01 \cdot x(L - x),\ \dot{w}(x,t) = \psi(x) = 0 \tag{5.3}$$

Задані наступні значення: довжина балки L=2 м.; щільність матеріалу ρ=7800 кг/м^3; модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11}$ ·н/м^2; площа поперечного перетину *S* м^2; момент інерції *J* м^4 представлені в таблиці 5.1.

Вказівки. При складанні програми рекомендується вибрати крок рівний $t_i = \frac{T_1}{20} = \frac{2\pi}{20\omega_1}$ де T_1 – період коливань, відповідний першій власній частоті $\omega_1 = \pi^2 a / L^2$.

Теорія. Для наближеного вирішення краєвого задачі використовуємо метод поділу змінних. Розв’язання шукатимемо у вигляді:

$$u = X(x)T(t) \tag{5.4}$$

Розв’язання (5.1) прийме вигляд:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_K \cos \omega_K t + B_K \sin \omega_K t) \sin \frac{\pi k x}{L} \qquad (5.5)$$

Таблиця 5.1. Дані по варіантах

№ варіанту	Номер швелера	$S \cdot 10^4$	$J \cdot 10^8$	**№ варіанту**	Номер двутавра	$S \cdot 10^4$	$J \cdot 10^8$
1	5	6,16	5,95	**16**	10	12	198
2	6,5	7,51	9,35	**17**	12	14,7	350
3	8	8,98	13,9	**18**	14	17,4	572
4	10	10,9	20,5	**19**	16	20,2	873
5	12	13,3	29,7	**20**	18	23,4	1290
6	14	15,6	51,5	**21**	18a	25,4	1430
7	14a	17	65,2	**22**	20a	26,8	1840
8	16	18,1	72,8	**23**	22	28,9	2030
9	16a	19,5	90,5	**24**	22a	30,6	2550
10	18	20,7	100	**25**	24	32,8	2790
11	18a	22,2	123	**26**	24a	34,8	3460
12	20	23,4	134	**27**	27	37,5	3800
13	20a	25,2	162	**28**	27a	40,2	5010
14	22	26,7	178	**29**	30	43,2	5500
15	22a	28,8	220	**30**	30a	46,5	7080

Підставимо початкові умови $w(x,0) = \varphi(x), \quad \dot{w}(x,0) = \psi(x)$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = \sum A_k \sin \frac{\pi k x}{L}; \quad \psi(x) = \sum B_k \omega_k \sin \frac{\pi k x}{L}; \\ &A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx; \quad B_k = \frac{2}{L\omega} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Згідно формулам (5.3) и (5.6) отримаємо

$$A_k = \frac{0{,}02}{L} \int_0^L x(L-x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx; \quad B_k = \frac{2}{L\omega} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx = 0,$$

Врахувавши формули обчислення інтегралів

$$\int_a^b u \sin u du = [\sin u - u \cos u]_a^b, \quad \int_a^b u^2 \sin u du = [2u \sin u - (u^2 - 2) \cos u,]_a^b$$

отримаємо

$$A_k = 0{,}02\int_0^L x\sin p_K x dx - \frac{0{,}02}{L}\int^L x^2 \sin p_K x =$$

$$= \frac{0{,}02}{p_K^2}\left[\sin p_K x - p_K x\cos p_K x\right]_0^L - \frac{0{,}02}{L}\left[2p_K x\sin p_K x - (p_K^2 x^2 - 2)\cos p_K x\right]^L$$

звідки
$$A_K = \frac{0{,}04}{Lp_K^3}(1-\cos p_K L) = \frac{0{,}04L^2}{\pi^3 k^3}(1-\cos \pi k) = \frac{0{,}08L^2}{\pi^3 k^3} \quad (k = 1,3,5,7,....)$$

Таким чином, розв’язання диференціального рівняння (5.1) для шарнірно опертого пружного стержня за заданих початкових умов має вигляд, згідно (5.3):

$$w(x,t) = \frac{0{,}08L^2}{\pi^3}\sum_{k=1,3,5..}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\frac{\pi kx}{L}\cdot\cos\omega_K t \qquad (5.7)$$

Розв’язання.

Дано: L=2 м.; ρ=7800 кг/м^3; $E = 2\cdot 10^{11}$ н/м^2; $S = 0{,}0012$ м^2; $J = 0{,}00000015$ м^4.

Складемо процедуру з використанням Visual Basic for Aplication (VBA). За допомогою панелі «Елементи управління» упроваджуємо об'єкт «Кнопка» (CommandButton1), у вікні «Свойства» у рядку «Caption» вводимо найменування «Розрахунок» (рис. 5.1):

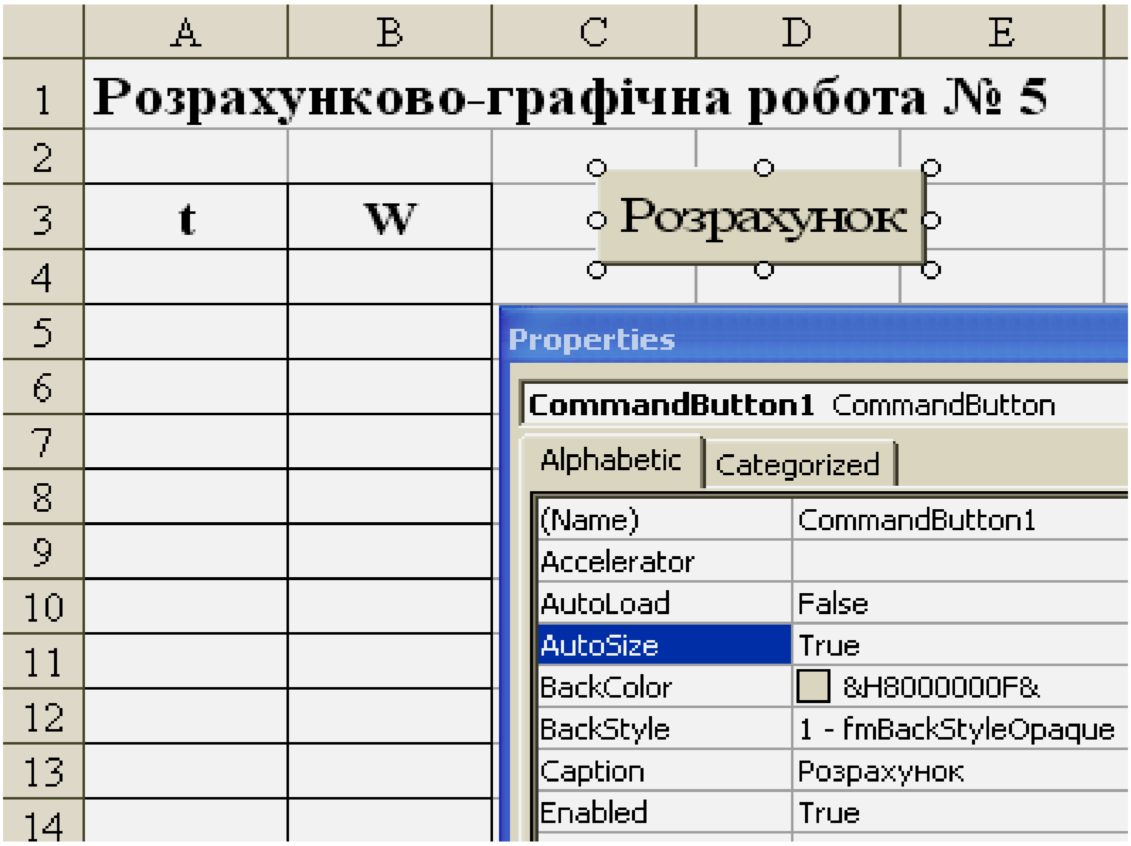


Рис. 5.1 – Впровадження об'єкту «Кнопка»

Двічі натиснемо по кнопці і записуємо текст процедури, що визначає чисельне вирішення даного рівняння :

```
Private Sub CommandButton1_Click()
E = 2 * 100000000000#
p = 7.8 * 1000
J=0.00000015
S=0.0012
a = SQR(E*J/(p*S))
L = 2
PI= 3.14159265358979
w1 = PI *PI*a /(L*L)
T1= 2 * PI / w1
X=L/2
i = 3
For t= 0 To 2*T1 Step T1/20
w = 0
For k = 1 To 40 Step 2
pk = PI * k / L
wk = pk * pk * a
w = w + 0,08*L*L*cos(wk * t)* Sin(pk*X)/ ((PI*k)^3)
Next
i = i + 1
ii = Trim(Str(i))
Worksheets(1).Range("a" + ii).Value = t
Worksheets(1).Range("b" + ii).Value = w
Next
End Sub
```

Збережете файл під ім'ям КР5. Натискайте кнопочку «Выход из режима конструктора» на панелі інструментів «Елементи управління». При натисненні кнопки (подія Click) у стовпцях A і B буде сформована таблиця, що показує залежність переміщень від часу в середньої точки . Побудуйте графік цієї залежності. Результати виконання РГР № 5 представлені на рис. 5.2:

Розрахунково-графічна робота № 5

Розрахунок

t	W
0	0,0100001
0,00225	0,0102077
0,0045	0,0079456
0,00675	0,0063087
0,009	0,0031454
0,01124	0,0000000
0,01349	-0,0031454
0,01574	-0,0063087
0,01799	-0,0079456
0,02024	-0,0102077
0,02249	-0,0100001
0,02474	-0,0102077
0,02699	-0,0079456
0,02924	-0,0063087
0,03149	-0,0031454
0,03373	0,0000000
0,03598	0,0031454
0,03823	0,0063087

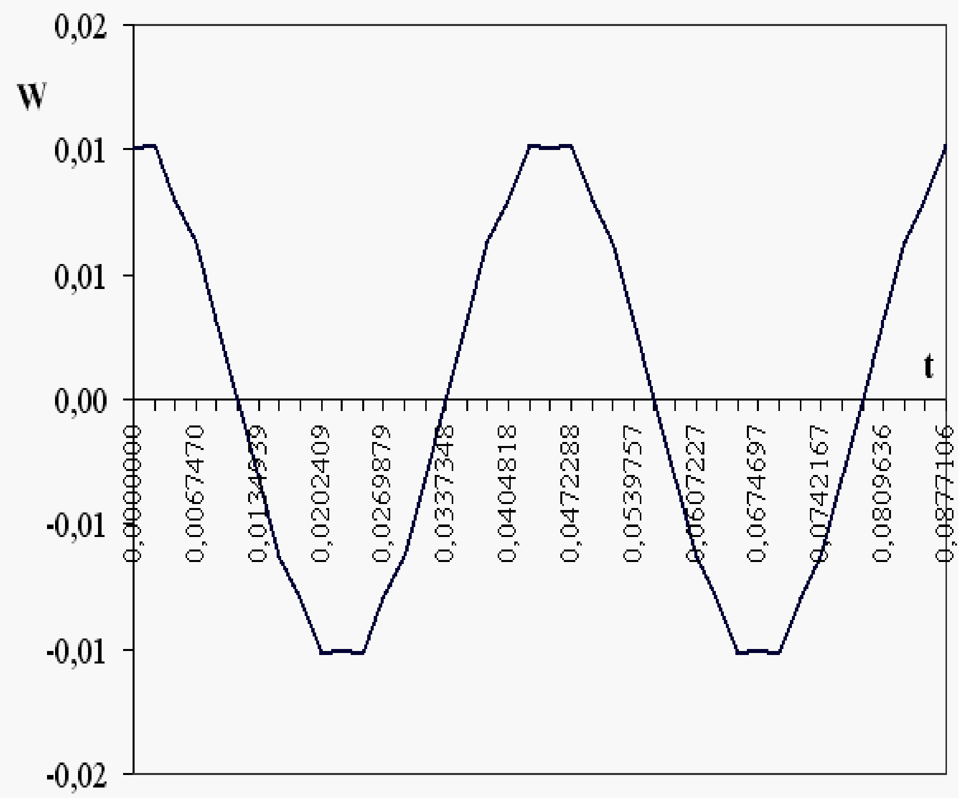


Рис. 5.2 – Результати виконання РГР № 5

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. А.І.Колосов, С.М. Мордовцев, С.О. Станішевський, С.П. Данилевський, Л.П. Вороновська. Спеціальні розділи вищої математики. Навчальний посібник (для студентів технічних і природничих спеціальностей денної і заочної форми навчання). Харків: ХНАМГ, 2008 – 108 с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. - СПб.: Лань, 2003.-736 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. - М.:Наука, 1985.
4. Станішевський С.О. Вища математика. - Харків: ХНАМГ, 2005.-270 с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. Наука.
6. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad.- СПб.: БХВ-Петербург, 2005 . – 464 с.
7. Демидович Б.П., Марон И. А. Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: ГИФМЛ, 1963 – 400 с.
8. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. - М.: ГИФМЛ, 1962 – 356 с.
9. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.
10. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977. – 228 с.
11. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М.: Высшая школа, 1990. -208 с.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.- 576 с.
13. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - К.: Наукова думка, 1988. – 725 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт з курсу “Вища математика: спеціальні розділи» (для студентів 2-3 курсів напряму підготовки 0922 (6.050702) “Електромеханіка денної і заочної форм навчання)

Укладачі: Мордовцев Сергій Михайлович,

Станішевський Степан Олександрович,

Якунин Анатолій Вікторович

План 2009, поз. 192 М

Підп. до друку 07.07.2009 р.	Формат 60х84 1 /16	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк. арк. 1,8	Обл.-вид. арк. 2,0
Замовл №	Тираж 100 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, Харків, вул. Революції, 12