

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять за темою
**«РОЗРАХУНОК ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ З ДЖЕРЕЛАМИ
СИНУСОЇДНОЇ НАПРУГИ І СТРУМУ»**

з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки"
(для студентів усіх форм навчання напрямів
6.050701 - "Електротехніка та електротехнології",
6.050702 - "Електромеханіка", 6.030601 - "Менеджмент")

Методичні вказівки до практичних занять за темою «Розрахунок лінійних електричних кіл з джерелами синусоїдної напруги і струму» з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 - "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 - "Електромеханіка", 6.030601 - "Менеджмент"). Укл.: Форкун Я.Б., Тугай Д.В. – ХНАМГ, 2009. – 47 с.

Укладачі: доц., к.т.н. Я.Б. Форкун,
к.т.н. Д.В. Тугай

Рецензент: проф., д.т.н. А.Г. Сосков

**Рекомендовано кафедрою електротехніки,
протокол № 10 від 14.05.2009 р.**

ВСТУП

Електротехнікою називається широка область науки і техніки, що розглядає закони функціонування та методи розрахунку різних електричних кіл. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) - дисципліна, яка займається питаннями розрахунку і вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою усіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Видами аудиторних занять з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» є лекції, лабораторні й практичні заняття. Ці методичні вказівки призначені для проведення практичних занять з першої частини курсу ТОЕ для студентів усіх форм навчання вказаних напрямів. Практичні заняття є дуже важливими для засвоєння теоретичного матеріалу, що розглядається на лекціях. У вказівках подано загальні теоретичні відомості й приклади вирішення практичних задач, що пов'язані з розрахунком електричних кіл синусоїдного струму тригонометричним і комплексним методом. Розглянуті приклади розрахунку нерозгалужених і розгалужених електричних кіл при резонансних явищах. Окремо подано методику розрахунку симетричних і несиметричних режимів трифазних кіл синусоїдного струму.

Ці вказівки допоможуть студентам напрямів 6.050701 - "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 - "Електромеханіка" набути навиків самостійного вирішення задач з дисципліни ТОЕ, підготуватися до лабораторних робіт і до розрахунково-графічної роботи №1 (частина2) за темою „Розрахунок розгалуженого електричного кола синусоїдного струму”.

Крім того, ці методичні вказівки, що містять стисле роз'яснення деяких теоретичних положень розділу «Лінійні електричні кола синусоїдного струму», будуть особливо корисними студентам напряму 6.030601 - "Менеджмент", яким дисципліна ТОЕ викладається протягом тільки одного семестру і містить у якості аудиторних тільки лекційні й практичні заняття.

ТЕМА І. КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ (МИТТЄВЕ, ДІЮЧЕ, СЕРЕДНЄ, АМПЛІТУДНЕ ЗНАЧЕННЯ, КОЕФІЦІЄНТИ). РОЗРАХУНОК КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ

Загальні відомості

Гармонічний режим – це основний режим роботи електроенергетичних мереж і систем.

Гармонічним називається струм чи напруга, закон зміни якого описується функцією синуса чи косинуса:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i), \\ u(t) &= U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Гармонічний процес характеризується трьома параметрами:

- амплітудою (I_m, U_m, E_m, J_m), що завжди є додатною величиною;
- кутовою (круговою, циклічною) частотою $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$,

де T – період гармонічного коливання;

- початковою фазою φ , що вимірюється в радіанах.

Величина $f = \frac{1}{T}$ називається просто частотою, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$;

Величина $\varphi(t) = \omega t + \varphi$ називається повною фазою.

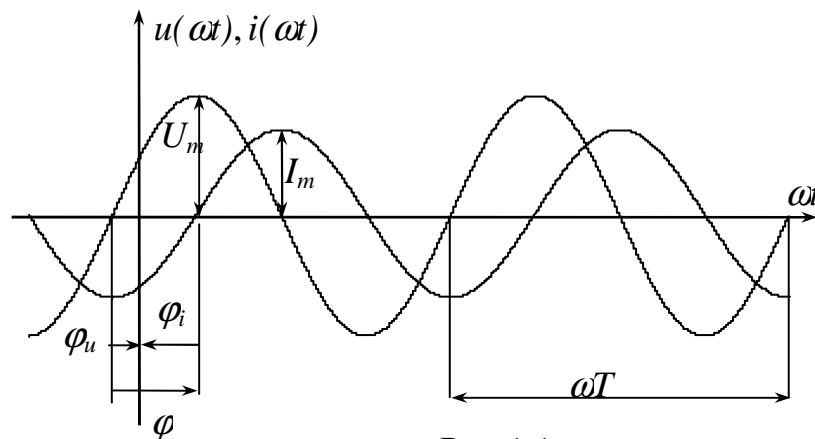


Рис.1.1

У даній темі вивчаються процеси в лінійних електричних колах із гармонічними джерелами однакової частоти. У таких колах усі струми й напруги змінюються за гармонічним законом з тією ж частотою, що і джерела. Тому струми й напруги в колі відрізняються лише амплітудами (I_m, U_m) і початковими фазами (φ_i, φ_u). На рис.1.1 зображено часові графіки гармонічного струму й напруги в колі.

Різниця початкових фаз напруги й струму має назву кута зсуву фаз

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

При розрахунках кіл змінного струму використовують поняття діючого (ефективного) значення струму, напруги, електрорушійної сили (ЕРС), струморушійної сили (СРС). Це середньоквадратична величина за період. Наприклад, для гармонічного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (1.2)$$

Коефіцієнти, що характеризують синусоїдну функцію:

- коефіцієнт амплітуди $k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}$;
- коефіцієнт форми $k_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{2 / \pi \cdot I_m} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}}$.

Для миттєвих значень закони Кірхгофа формулюються так:

- алгебраїчна сума миттєвих струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю ($\sum i_k = 0$);
- алгебраїчна сума миттєвих ЕРС у замкненому контурі дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих напруг на всіх його елементах ($\sum e_k = \sum u_k$).

Правило знаків і запис рівнянь цілком аналогічні колам постійного струму. За додатній напрямок струму (напруги) приймають напрямок додатної півхвилі. Наприклад, для послідовного з'єднання активного опора (R), індуктивності (L), ємності (C), яке показано на рис.1.2, другий закон Кірхгофа для миттєвих значень має вигляд

$$u = u_R + u_L + u_C = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt. \quad (1.3)$$

Якщо у цьому колі протікає струм $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, то напруга на резистивному елементі збігається за фазою зі струмом:

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{Rm} \sin(\omega t + \varphi_{u_R}), \quad (1.4)$$

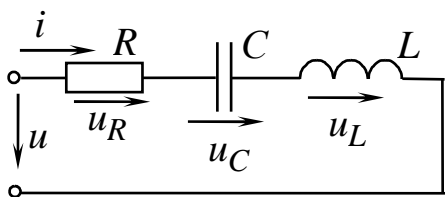


Рис.1.2

де $U_{Rm} = R \cdot I_m$ - амплітуда напруги на резистивному елементі; $\varphi_{u_R} = \varphi_i$ - початкова фаза напруги на резистивному елементі, що збігається з початковою фазою струму.

Напруга на індуктивному елементі випереджає струм за фазою на кут $\frac{\pi}{2}$:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = \omega \cdot L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u_L}), \quad (1.5)$$

де $U_{Lm} = \omega \cdot L \cdot I_m = X_L \cdot I_m$ - амплітуда напруги на індуктивному елементі;
 $X_L = \omega \cdot L$ - індуктивний опір; $\varphi_{u_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$ - початкова фаза напруги на індуктивному елементі.

Напруга на ємнісному елементі відстає від струму на кут $\frac{\pi}{2}$:

$$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i dt = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) = U_{Cm} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{u_C}), \quad (1.6)$$

де $U_{Cm} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m = X_C \cdot I_m$ - амплітуда напруги на ємнісному елементі;

$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ - ємнісний опір;

$\varphi_{u_C} = \varphi_i - \frac{\pi}{2}$ - початкова фаза напруги на ємнісному елементі.

Таким чином, математична модель даного кола описується тригонометричним рівнянням. Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} = \frac{U_m}{Z}, \quad (1.7)$$

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi,$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ - повний опір кола;}$$

R - активний опір;

$$X = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} = X_L - X_C \text{ - реактивний опір.}$$

Активний, реактивний і повний опори утворюють прямокутний трикутник опорів (рис.1.3).

$$\text{З трикутника випливає: } R = Z \cdot \cos \varphi, \quad X = Z \cdot \sin \varphi, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

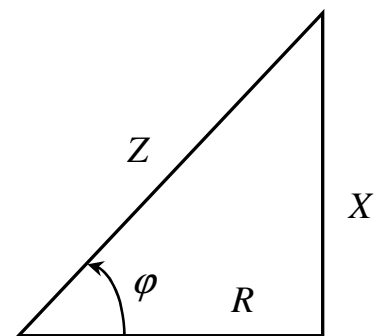


Рис.1.3

Реактивний опір X - алгебраїчна величина. Якщо $X_L > X_C$, то $X > 0$, $\varphi > 0$ і коло має індуктивний характер (напруга випереджає за фазою струм). Якщо $X_L < X_C$, то $X < 0$, $\varphi < 0$ і коло має ємнісний характер (струм випереджає за фазою напругу).

Величина, зворотна повному опору, називається повною провідністю кола $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}$.

Для паралельного з'єднання R , L і C (паралельний контур) провідності визначають таким чином: $G = \frac{1}{R}$ - активна провідність; $B_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$ - індуктивна провідність; $B_C = \omega \cdot C$ - ємнісна провідність; $B = B_L - B_C$ - реактивна провідність. Повна провідність $Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$.

ЗАДАЧА 1

Розрахунок миттєвої напруги на ємності

У момент $t=0$ ємність C підключається до напруги $u(t) = 180 \cdot \sin(314 \cdot t - 30^\circ)$ В.

Визначити, до якої напруги зарядиться ємність через час $t_1 = 0,05$ с, $t_2 = 0,1$ с.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвої напруги;
- вміти визначати повну фазу синусоїдної напруги в електричних градусах.

Вирішення

1. Визначимо напругу на ємності в момент часу t_1 :

$$u(t_1) = 180 \cdot \sin(314 \cdot 0,05 - 30^\circ) = 180 \cdot \sin(15,7 - 30^\circ) \text{ В.}$$

2. Представимо повну фазу синусоїдальної величини в електричних гра-

дусах $\omega \cdot t_1 = \frac{15,7 \cdot 360^\circ}{6,28} = 900^\circ$.

3. З отриманого результату віднімемо $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$, тоді $\omega \cdot t_1 = 180^\circ$ і

$$u(t_1) = 180 \cdot \sin(180^\circ - 30^\circ) = 180 \cdot \sin(150^\circ) = 90 \text{ В.}$$

4. Визначимо напругу на ємності в момент часу t_2 :

$$u(t_2) = 180 \cdot \sin(314 \cdot 0,1 - 30^\circ) = 180 \cdot \sin(31,4 - 30^\circ) = 180 \cdot \sin(0 - 30^\circ) = -90 \text{ В.}$$

ЗАДАЧА 2

Розрахунок нерозгалуженого кола синусоїдного струму тригонометричним методом

Електрична схема, зображена на рис.1.4,а, живиться від джерела синусоїдної напруги: $u(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 90^\circ)$ В. Параметри кола: $R = 20$ Ом, $L = 200$ мГн, $C = 22$ мкФ, кутова частота $\omega = 314$ рад/с.

Визначити:

- діючі значення струму й напруг на елементах;
- кут зсуву фаз між струмом і напругою на вході кола;
- миттєві значення струму і напруг.

Переконайтеся в тому, що другий закон Кірхгофа не виконується для діючих значень напруг.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвих, амплітудних, діючих напруги і струму;
- вміти визначати напругу і струм нерозгалуженого кола тригонометричним методом.

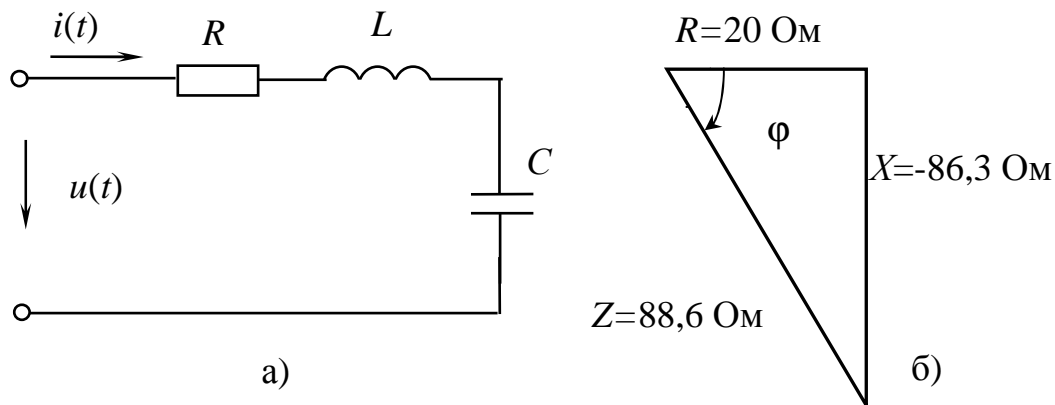


Рис.1.4

Вирішення

1. У колі струм і напруги на елементах змінюються за гармонічним законом з кутовою частотою $\omega = 314$ рад/с: $i(t) = I_m \cdot \sin(314 \cdot t + \phi_i)$,
 $u_R(t) = U_{Rm} \cdot \sin(314 \cdot t + \phi_{u_R})$, $u_L(t) = U_{Lm} \cdot \sin(314 \cdot t + \phi_{u_L})$,
 $u_C(t) = U_{Cm} \cdot \sin(314 \cdot t + \phi_{u_C})$.

Необхідно визначити амплітуди і початкові фази величин.

2. Знайдемо індуктивний і ємнісний опори:

$$X_L = \omega \cdot L = 314 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 61,4 \text{ Ом}, \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314 \cdot 22 \cdot 10^{-6}} = 147,7 \text{ Ом}.$$

3. Реактивний опір кола

$$X = X_L - X_C = 61,4 - 147,7 = -86,3 \text{ Ом}.$$

4. Повний опір кола $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{20^2 + 86,3^2} = 88,6 \text{ Ом}.$

Повний, активний і реактивний опори утворюють трикутник опорів (рис. 1.4,б).

5. Кут зсуву фаз між струмом і напругою $\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{-86,3}{20} = -77^\circ.$

6. За законом Ома амплітуда струму $I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{100 \cdot \sqrt{2}}{88,6} = 1,13 \cdot \sqrt{2} \text{ А}.$

7. Початкова фаза струму $\varphi_i = \varphi_u - \varphi = -90^\circ - (-77^\circ) = -13^\circ.$

8. Миттєвий струм $i(t) = 1,13 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t - 13^\circ) \text{ А}.$

9. Амплітуди напруг на елементах кола:

$$U_{Rm} = R \cdot I_m = 20 \cdot 1,13 \cdot \sqrt{2} = 22,6 \cdot \sqrt{2} \text{ В},$$

$$U_{Lm} = X_L \cdot I_m = 61,4 \cdot 1,13 \cdot \sqrt{2} = 69,38 \cdot \sqrt{2} \text{ В},$$

$$U_{Cm} = X_C \cdot I_m = 147,7 \cdot 1,13 \cdot \sqrt{2} = 166,9 \cdot \sqrt{2} \text{ В}.$$

9. Початкові фази напруг на елементах: $\varphi_{u_R} = \varphi_i = -13^\circ,$

$$\varphi_{u_L} = \varphi_i + \frac{\pi}{2} = -13^\circ + 90^\circ = 77^\circ, \quad \varphi_{u_C} = \varphi_i - \frac{\pi}{2} = -13^\circ - 90^\circ = -103^\circ.$$

10. Миттєві значення напруг на елементах:

$$u_R(t) = 22,6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t - 13^\circ) \text{ В}, \quad u_L(t) = 69,38 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 77^\circ) \text{ В},$$

$$u_C(t) = 166,9 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t - 103^\circ) \text{ В}.$$

11. Діючі значення величин: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 1,13 \text{ А}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В}, \quad U_R = 22,6 \text{ В}$

$$U_L = 69,38 \text{ В}, \quad U_C = 166,9 \text{ В}.$$

12. Для миттєвих значень другий закон Кірхгофа має вигляд $u = u_R + u_L + u_C.$

Для діючих значень другий закон Кірхгофа не виконується: $100 \neq 22,6 + 69,38 + 166,9.$

ЗАДАЧА 3

Розрахунок розгалуженого кола синусоїдного струму тригонометричним методом

У схемі рис.1.5,а дано: $i(t) = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 314 \cdot t$ А., $R = 40$ Ом, $L = 0,064$ Гн, $C = 53$ мкФ.

Визначити:

- діючі значення напруги на вході кола і струмів у паралельних вітках;
- миттєві значення струмів і напруги.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвих, амплітудних, діючих напруги і струму;
- вміти визначати напругу і струм розгалуженого кола тригонометричним методом.

Переконайтеся в тому, що перший закон Кірхгофа не виконується для діючих значень струмів.

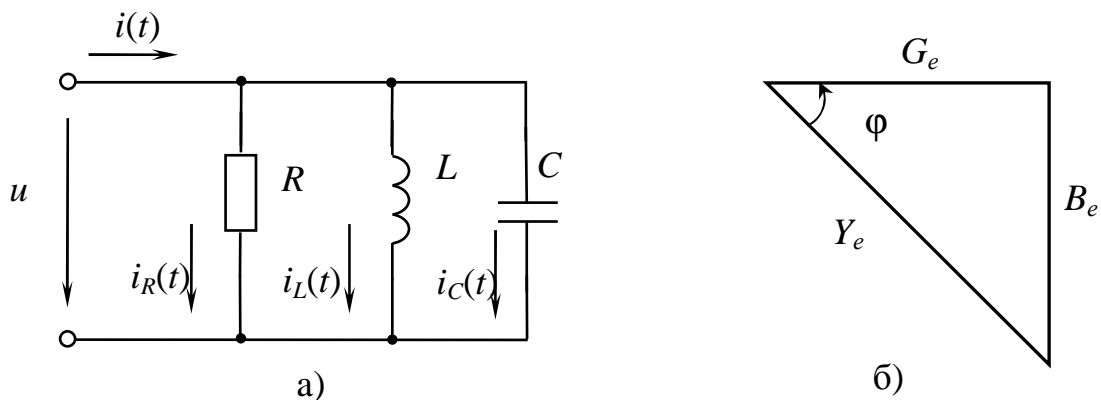


Рис.1.5

Вирішення

1. Визначимо провідності віток кола: $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{40} = 0,025$ См ,

$$B_L = \frac{1}{\omega \cdot L} = \frac{1}{314 \cdot 0,064} = 0,05 \text{ См}, \quad B_C = \omega \cdot C = 314 \cdot 53 \cdot 10^{-6} = 0,0167 \text{ См}.$$

2. Визначимо вхідні провідності кола.

Активна провідність кола $G_e = G = 0,025$ См.

Реактивна провідність кола $B_e = B_L - B_C = 0,05 - 0,0167 = 0,0333$ См.

Повна провідність кола $Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2} = \sqrt{0,025^2 + 0,0333^2} = 0,0416$ См.

Повна, активна і реактивна провідності утворюють трикутник провіднос-

тей (рис.1.5,б).

3. Амплітуду вхідної напруги знайдемо за законом Ома:

$$U_m = \frac{I_m}{Y_e} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{0,0416} = 120 \cdot \sqrt{2} \text{ В.}$$

4. З трикутника провідностей знайдемо кут зсуву фаз між струмом і напругою на вході кола: $\varphi = \arctg \frac{B_e}{G_e} = \arctg \frac{0,0333}{0,025} = 53^\circ$.

5. Початкова фаза вхідної напруги $\varphi_u = \varphi + \varphi_i = 53^\circ$.

6. Визначимо амплітуди струмів у вітках кола:

$$I_{mR} = U_m \cdot G = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,025 = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ А}, \quad I_{mL} = U_m \cdot B_L = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,05 = 6 \cdot \sqrt{2} \text{ А},$$

$$I_{mC} = U_m \cdot B_C = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,0167 = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ А.}$$

7. Початкові фази струмів: $\varphi_{iR} = \varphi_u = 53^\circ$, $\varphi_{iL} = \varphi_u - \frac{\pi}{2} = 53^\circ - 90^\circ = -37^\circ$,

$$\varphi_{iC} = \varphi_u + \frac{\pi}{2} = 53^\circ + 90^\circ = 143^\circ.$$

8. Миттєві значення напруги і струмів: $u(t) = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 53^\circ) \text{ В}$,

$$i_R(t) = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 53^\circ) \text{ А}, \quad i_L(t) = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 37^\circ) \text{ А},$$

$$i_C(t) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 143^\circ) \text{ А.}$$

9. Діючі значення напруги і струмів: $U = 120 \text{ В}$, $I = 5 \text{ А}$, $I_R = 3 \text{ А}$, $I_L = 6 \text{ А}$, $I_C = 2 \text{ А}$.

$I \neq I_R + I_L + I_C$ - перший закон Кірхгофа для діючих значень струмів не виконується.

ТЕМА II. ЗОБРАЖЕННЯ СИНУСОЇДНИХ ВЕЛИЧИН КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ФОРМИ ЗАПИСУ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА, ПЕРЕХІД ВІД МИТТЄВИХ ЗНАЧЕНЬ ДО КОМПЛЕКСНИХ І НАВПАКИ

Загальні відомості

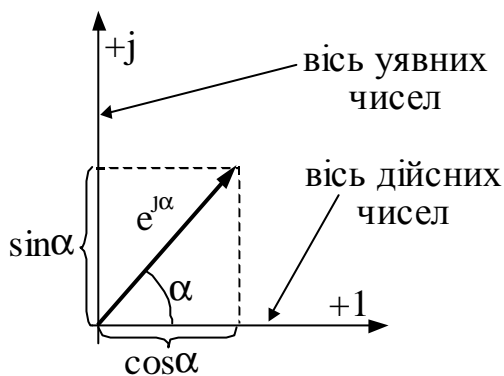


Рис.2.1

Комплексна площина – це система прямокутних координат (вісь дійсних чисел і вісь уявних чисел).

Розрахунок електричних кіл суттєво полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами, або комплексними числами.

Відповідно до формули Ейлера комплексне число $e^{j\alpha}$ дорівнює:

$e^{j\cdot\alpha} = \cos\alpha + j\cdot\sin\alpha$. На комплексній площині комплексне число $e^{j\cdot\alpha}$ зображується вектором, що має одиничну довжину і складає з віссю дійсних чисел кут α (рис. 2.1). Проекція $e^{j\cdot\alpha}$ на вісь дійсних чисел - $\cos\alpha$, а на вісь уявних чисел - $\sin\alpha$; $j = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця.

Якщо замість числа $e^{j\cdot\alpha}$ розглянути число $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha}$, то відповідно до формули Ейлера $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha} = I_m \cdot \cos\alpha + j \cdot I_m \cdot \sin\alpha$, і на комплексній площині воно зображується вектором, що має довжину I_m і також складає з віссю дійсних чисел кут α . Кут α може бути будь-яким. Припустимо, що $\alpha = \omega \cdot t + \varphi$, тоді

$$I_m \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t + \varphi)} = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + j \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \quad (2.1)$$

де $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – дійсна частина,

$I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ – коефіцієнт при уявній одиниці j .

Таким чином, синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ можна уявити як проекцію вектора $I_m \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t + \varphi)}$, що обертається з кутовою швидкістю ω , на вісь уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення вектора $I_m \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t)}$ повністю визначає синусоїдну функцію $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, а комплексне число $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j\cdot\varphi}$ називається комплексною амплітудою струму ($e^{j\cdot\omega\cdot t}$ - оператор обертання). Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити простіші операції.

Примітка: на комплексній площині додатні кути відкладаються проти годинникової стрілки від осі дійсних чисел, від'ємні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Існують три форми запису комплексних чисел:

- показова - $\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j\cdot 30^\circ}$;
- алгебраїчна - $\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$, де 4,33 - дійсна частина, $j \cdot 2,5$ - уявна частина;
- тригонометрична - $\underline{I}_m = 5 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$, як перехід від полярної форми ($\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j\cdot 30^\circ}$) до алгебраїчної ($\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,5$).

Дії над комплексними числами:

- множення роблять у показовій формі, наприклад:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 5 \cdot e^{j\cdot 30^\circ} \cdot 15 \cdot e^{j\cdot(-40^\circ)} = 75 \cdot e^{j\cdot(-10^\circ)}, \text{ В.}$$

- ділення роблять також у показовій формі, наприклад:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{75 \cdot e^{j(-10^\circ)}}{15 \cdot e^{j(-40^\circ)}} = 5 \cdot e^{j30^\circ}, \text{ А.}$$

- складання або вирахування роблять в алгебраїчній формі, наприклад:

$$\underline{I}_{m1} = 5 \cdot e^{j30^\circ} - 10 \cdot e^{j(-60^\circ)} = 10 \cdot \cos(-60^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(-60^\circ) = 5 - j \cdot 8,66,$$

$$\underline{I}_{m2} = 5 \cdot e^{j30^\circ} = 10 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 4,33 + j \cdot 2,5,$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 5 - j \cdot 8,66 + 4,33 + j \cdot 2,5 = 9,33 - j \cdot 6,16.$$

Перехід від алгебраїчної до показової форми має деякі особливості.

Так, якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в першій або четвертій чвертях комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = 4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{j \cdot \left(\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)} = 5 \cdot e^{j30^\circ},$$

$$\underline{I}_m = 4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{j \cdot \left(-\arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)} = 5 \cdot e^{j(-30^\circ)}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у другій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 + j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{j \cdot \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)} = 5 \cdot e^{j150^\circ}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у третій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4,33 - j \cdot 2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} \cdot e^{-j \cdot \left(180^\circ - \arctg \left(\frac{2,55}{4,33} \right) \right)} = 5 \cdot e^{j(-150^\circ)}.$$

ЗАДАЧА 1

Визначення миттєвого значення струму за алгебраїчною формою запису

Комплексне діюче значення струму $\underline{I} = (-2,5 + j \cdot 4,3) \text{ А.}$

Визначити миттєве значення $i(t)$, якщо $\omega = 314 \text{ рад/с.}$

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні форми запису комплексного числа;

- вміти здійснювати перехід від алгебраїчної форми запису комплексного числа до показової.

Вирішення

1. Перейдемо до показової форми запису комплексного струму $\underline{I} = -2,5 + j \cdot 4,3 = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$, де $I = \sqrt{2,5^2 + 4,3^2} = 5$; $\varphi_i = 180^\circ - \arctg \frac{4,3}{2,5} = 120^\circ$.

2. Тоді $\underline{I} = 5 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}$ А.

3. Комплексна амплітуда $\underline{I}_m = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot 120^\circ}$ А.

4. Миттєве значення струму $i(t) = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 120^\circ)$ А.

ЗАДАЧА 2

Визначення амплітудного значення і початкової фази струму за його показовою формою

Задано комплексне діюче значення струму

$$\underline{I} = (2,43 \cdot e^{j \cdot 53^\circ} - 0,88 \cdot e^{-j \cdot 37^\circ} + 1,03 \cdot e^{j \cdot \frac{3}{4} \pi} - 0,52 \cdot e^{-j \cdot 236^\circ}) \text{ А.}$$

Визначити амплітуду і початкову фазу струму.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні форми запису комплексного числа;
- вміти здійснювати перехід від показової форми запису комплексного числа до алгебраїчної і зворотно.

Вирішення

1. Щоб провести додавання комплексних чисел, необхідно перейти до алгебраїчної форми їх запису:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= 2,43 \cdot \cos 53^\circ + j \cdot 2,43 \cdot \sin 53^\circ - 0,88 \cdot \cos(-37^\circ) - j \cdot 0,88 \cdot \sin(-37^\circ) + \\ &+ 1,03 \cdot \cos\left(\frac{3}{4} \cdot 180^\circ\right) + j \cdot 1,03 \cdot \sin\left(\frac{3}{4} \cdot 180^\circ\right) - 0,52 \cdot \cos(-236^\circ) - j \cdot 0,52 \cdot \sin(-236^\circ) = \\ &= 1,46 + j \cdot 1,94 - 0,71 + j \cdot 0,53 - 0,73 + j \cdot 0,73 + 0,29 - j \cdot 0,43 = \\ &= 0,31 + j \cdot 2,77 = 2,79 \cdot e^{j \cdot 83,6^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

$$2. I_m = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \cdot 2,79 = 3,93 \text{ А}; \quad \varphi_i = 83,6^\circ.$$

ЗАДАЧА 3

Визначення провідностей з комплексних опорів

Комплексні опори задані виразами: $\underline{Z}_1 = (3 + j \cdot 5)$ Ом, $\underline{Z}_2 = (5 + j \cdot 3)$ Ом, $\underline{Z}_3 = (2,4 - j \cdot 8,2)$ Ом, $\underline{Z}_4 = 2,8$ кОм, $\underline{Z}_5 = 25e^{j \cdot 90^\circ}$ Ом.

Визначити активну, реактивну і повну провідності для кожного з опорів.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні форми запису комплексного числа;
- вміти здійснювати перехід від алгебраїчної форми запису комплексного числа до полярної і зворотно.

Вирішення

1. Визначимо комплексну провідність $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - j \cdot B = Y \cdot e^{-j \cdot \varphi}$.

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1 \cdot (3 - j \cdot 5)}{(3 + j \cdot 5) \cdot (3 - j \cdot 5)} = \frac{(3 - j \cdot 5)}{34} = 0,0882 - j \cdot 0,147 = 0,172 \cdot e^{-j \cdot 59^\circ} \text{ См.}$$

Звідки $G_1 = 0,0882 \text{ См}$, $B_1 = 0,147 \text{ См}$, $Y_1 = 0,172 \text{ См}$.

$$2. \underline{Y}_2 = \frac{1 \cdot (5 - j \cdot 3)}{(5 + j \cdot 3) \cdot (5 - j \cdot 3)} = \frac{(5 - j \cdot 3)}{34} = 0,147 - j \cdot 0,0882 = 0,172 \cdot e^{-j \cdot 31^\circ} \text{ См.}$$

Звідки $G_2 = 0,147 \text{ См}$, $B_2 = 0,0882 \text{ См}$, $Y_2 = 0,172 \text{ См}$.

$$3. \underline{Y}_3 = \frac{1}{2,4 - j \cdot 8,2} = \frac{1}{8,54 \cdot e^{-j \cdot 74^\circ}} = 0,117 \cdot e^{j \cdot 74^\circ} = (0,0322 + j \cdot 0,112) \text{ См.}$$

Звідки $G_3 = 0,0322 \text{ См}$, $B_3 = -0,112 \text{ См}$, $Y_3 = 0,117 \text{ См}$.

$$4. \underline{Y}_4 = \frac{1}{2,8 \cdot 10^3} = 0,357 \cdot 10^{-3} \text{ См. Звідки } Y_4 = G_4 = 0,357 \cdot 10^{-3} \text{ См, } B_4 = 0.$$

$$5. \underline{Y}_5 = \frac{1}{25 \cdot e^{j \cdot 90^\circ}} = 0,04 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} = -j \cdot 0,04 \text{ См. Звідки } B_5 = Y_5 = 0,04 \text{ См,}$$

$G_5 = 0.$

ТЕМА 3. РОЗРАХУНОК НЕРОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ КОМПЛЕКСНИМ (СИМВОЛІЧНИМ) МЕТОДОМ. БАЛАНС ПОТУЖНОСТЕЙ У КОЛАХ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Загальні відомості

Суть комплексного методу полягає в тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені відносно комплексних струмів, ЕРС і напруг. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщує її, диференціювання замінюється множенням на $j \cdot \omega$, а інтегрування - діленням на $j \cdot \omega$.

Розглянемо просте електричне коло (рис.1.2), до якого прикладена синусоїдна напруга $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ і в якому тече синусоїдний струм $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$. Інтегрально-диференціальне рівняння, що характеризує стан кола (другий закон Кірхгофа):

$$u = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int u_C dt. \quad (3.1)$$

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг, має вигляд

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_m - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} \quad (3.2)$$

- другий закон Кірхгофа в комплексній формі.

Застосуємо позначення:

$$X_L = \omega \cdot L; \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}; \quad X = X_L - X_C; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3.3)$$

- відповідно індуктивний, ємнісний, реактивний опори, модуль повного опора.

Тоді рівняння (3.2) набуває вигляду

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \left(R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right) = \underline{I}_m \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I}_m \cdot Z \cdot e^{j \cdot \varphi}, \quad (3.4)$$

$$\text{де } \underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = Z \cdot e^{j \cdot \varphi} - \text{комплекс повного опора кола}; \quad (3.5)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} \quad (3.6)$$

- кут зсуву фаз між струмом і напругою;

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} \quad (3.7)$$

- закон Ома в комплексній формі.

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на цій ділянці кола:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j \cdot \varphi}} = Y \cdot e^{-j \cdot \varphi} = G - j \cdot B, \quad (3.8)$$

де G - активна провідність; $B = B_L - B_C$ - реактивна провідність.

Розглянемо комплексну форму запису потужності та баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму.

Припустимо, напруга на ділянці кола - $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$, а струм - $\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$, кут зсуву фаз між напругою і струмом $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Тоді комплекс повної потужності визначається:

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = P + j \cdot Q = U \cdot I \cdot \cos\varphi + U \cdot I \cdot \sin\varphi, \quad (3.9)$$

де $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j\varphi_i}$ - спряжене комплексне значення струму $\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$.

Вимір потужності робиться ватметром, наприклад, електродинамічної системи. Ватметр має дві котушки: одна – нерухома, підключена послідовно в ділянку кола, де роблять вимір потужності, виконана товстим проводом і має малий опір; друга - рухома, підключена паралельно ділянці кола, де роблять вимір потужності, виконана тонким проводом і має великий опір. Ватметр, показаний

на рис.3.1, вимірює: $\text{Re}[\tilde{S}] = \text{Re}\left[\underline{U}_{av} \cdot \underline{I}^*\right] = U_{av} \cdot I \cdot \cos\left(\underline{U}_{av} \wedge \underline{I}\right)$.

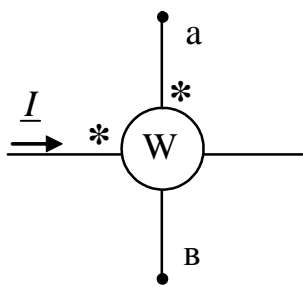


Рис.3.1

У будь-якому колі повинен виконуватися баланс як активних, так і пасивних потужностей, тобто сума всіх потужностей, що віддаються джерелами кола, повинна дорівнювати сумі всіх потужностей, що приймаються

споживачами: $\sum_{k=1}^n P_{k\text{äeäð}} = \sum_{k=1}^m P_{k\text{ñííæ}} ;$

$$\sum_{k=1}^n Q_{k\text{ðæð}} = \sum_{k=1}^m Q_{k\text{cïïæ}} .$$

ЗАДАЧА 1

Розрахунок комплексної провідності нерозгалуженого кола

Ділянка *ab* електричного кола, зображена на рис.3.2, має наступні параметри $R = 10$ Ом, $X_L = 40$ Ом, $X_C = 50$ Ом.

Записати комплексну провідність кола.

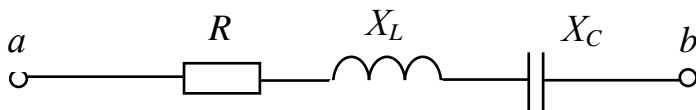


Рис.3.2

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення комплексної провідності електричного кола;

ного кола;

- вміти здійснювати перехід з алгебраїчної форми запису комплексного числа до показової і полярної.

Вирішення

1. Елементи R , L і C з'єднані послідовно, тому комплексний опір можна розрахувати за формулою (3.5):

$$\underline{Z} = R + j \cdot X_L - j \cdot X_C = 10 + j \cdot 40 - j \cdot 50 = 10 - j \cdot 10 = \sqrt{10^2 + 10^2} \cdot e^{j \cdot \arctg\left(\frac{-10}{10}\right)} = 14,1 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} \text{ Ом.}$$

2. Комплексна провідність кола з (3.8)

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{14,1 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}} = 0,045 \cdot e^{j \cdot 45^\circ} = 0,03182 + j \cdot 0,03182 \text{ См.}$$

ЗАДАЧА 2

Розрахунок вхідної напруги нерозгалуженого кола комплексним методом

У колі (рис. 3.3,а) діюче значення напруги $U_1 = 24 \text{ В}$. Параметри елементів: $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $C_1 = 5 \text{ мкФ}$, $C_2 = 1 \text{ мкФ}$, кутова частота $\omega = 5000 \text{ рад/с}$.

Визначити напругу на вході кола \underline{U} .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні співвідношення комплексного методу розрахунку;
- вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа в комплексній формі.

Вирішення

1. Для розрахунку зобразимо комплексну схему заміщення (рис.3.3,б). Припустимо, що початкова фаза напруги $u_1(t)$ дорівнює нулю. Тоді комплексна напруга на опорі \underline{Z}_1 набуває вигляду $\underline{U}_1 = 24e^{j \cdot 0} = 24 \text{ В}$.

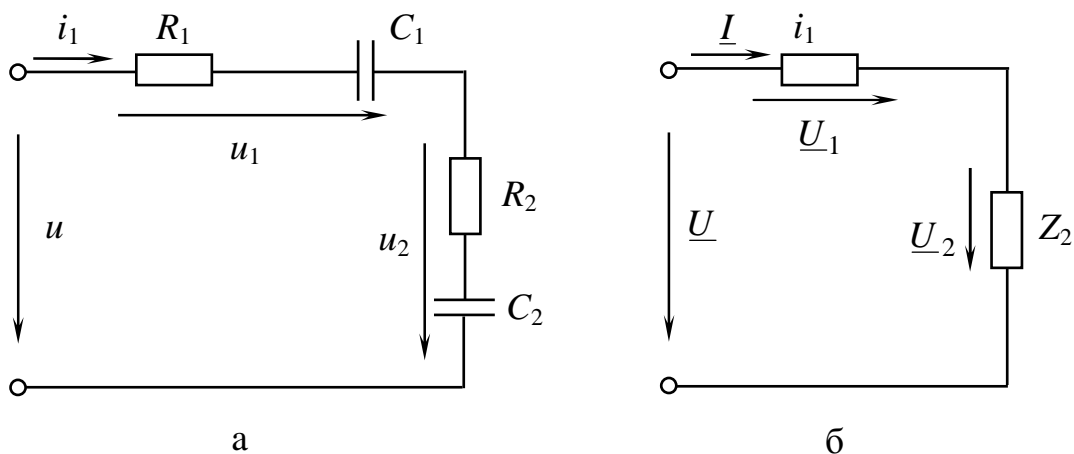


Рис.3.3

2. Знайдемо ємнісні опори: $X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом,}$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{5000 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ Ом.}$$

3. Комплексні опори ділянок: $\underline{Z}_1 = R_1 - j \cdot X_{C1} = 30 - j \cdot 40 = 50 \cdot e^{-j \cdot 53^\circ} \text{ Ом,}$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot X_{C2} = 40 - j \cdot 200 = 204 \cdot e^{-j \cdot 78,7^\circ} \text{ Ом.}$$

4. Комплексний струм у колі визначимо за законом Ома:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{24}{50 \cdot e^{-j \cdot 53^\circ}} = 0,48 \cdot e^{j \cdot 53^\circ} = (0,289 + j \cdot 0,383) \text{ А.}$$

5. Комплексна напруга на опорі \underline{Z}_2 :

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} = 204 \cdot e^{-j \cdot 78,7^\circ} \cdot 0,48 \cdot e^{j \cdot 53^\circ} = 97,9 \cdot e^{-j \cdot 25,7^\circ} = (88,2 - j \cdot 42,5) \text{ В.}$$

6. Комплексну напругу на вході знайдемо за другим законом Кірхгофа:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 24 + 88,2 - j \cdot 42,5 = 112,2 - j \cdot 42,5 = 120 \cdot e^{-j \cdot 20,7^\circ} \text{ В.}$$

ЗАДАЧА 3

Розрахунок нерозгалуженого кола комплексним методом

Миттєве значення струму нерозгалуженого кола (рис.3.4) $i(\omega \cdot t) = 10 \cdot \sin(500 \cdot t - 30^\circ)$. Параметри елементів: $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,02 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

Визначити:

- показання всіх приладів електродинамічної системи (вольтметрів V_1, V_2, V_3, V_4 і амперметра A_1);
- повну (S), активну (P) і реактивну (Q) потужності;
- скласти баланс потужностей кола.

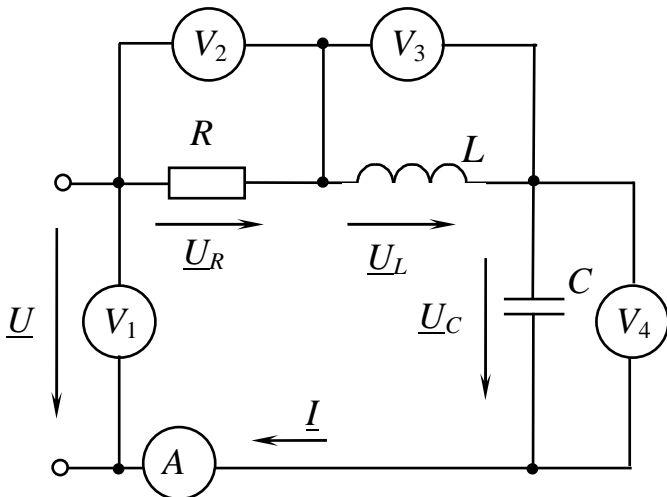


Рис.3.4

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні співвідношення комплексного методу розрахунку;
- вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа у комплексній формі.

Вирішення

1. Знайдемо комплекс повного опору кола: $\underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) =$

$$= R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = 10 + j \cdot \left(500 \cdot 0,02 - \frac{1}{500 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \right) = 10 + j \cdot (10 - 20) =$$

$$= 10 - j \cdot 10 = 14,14 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} \text{ Ом.}$$

2. Комплекс амплітуди вхідної напруги розраховуємо за законом Ома:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 10 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \cdot 14,14 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} = 141,4 \cdot e^{-j \cdot 75^\circ} \text{ В.}$$

3. Комплекси амплітуд напруг на елементах схеми:

$$\underline{U}_{mR} = \underline{I}_m \cdot R = 10 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \cdot 10 = 100 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{mL} = \underline{I}_m \cdot j \cdot X_L = 10 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} = 100 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{mC} = \underline{I}_m \cdot (-j \cdot X_C) = 10 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \cdot 20 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} = 200 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \text{ В.}$$

4. Вимірювальні прилади електродинамічної системи покажуть діючі значення струму і напруг $A \Rightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ А, } V_1 \Rightarrow \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141,4}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В,}$

$$V_2 = V_3 \Rightarrow \frac{U_{mR}}{\sqrt{2}} = \frac{U_{mL}}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70,7 \text{ В, } V_4 \Rightarrow \frac{U_{mC}}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 141,2 \text{ В.}$$

5. Комплекс повної потужності

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 100 \cdot e^{-j \cdot 75^\circ} \cdot 7,07 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 707 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} = (500 - j \cdot 500) \text{ Вт.}$$

$$\Rightarrow S = 707 \text{ Вт, } P = 500 \text{ Вт, } Q = -500 \text{ Вт.}$$

6. Комплекс потужності, що споживається навантаженням, розраховуємо як $\tilde{S}_H = I^2 \cdot \underline{Z} = 7,07^2 \cdot 14,14 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} = 707 \cdot e^{-j \cdot 45^\circ} = (500 - j \cdot 500) \text{ Вт.}$

$$S = S_H, P = P_H, Q = Q_H.$$

Таким чином, баланс потужностей виконується.

ТЕМА 4. РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ КОМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ. ПОБУДОВА ВЕКТОРНО-ТОПОГРАФІЧНОЇ ДІАГРАМИ ДЛЯ КІЛ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

Загальні відомості

Для розрахунку кіл гармонічного струму комплексним методом зручно використовувати комплексні схеми заміщення (рис.4.1). На комплексній схемі

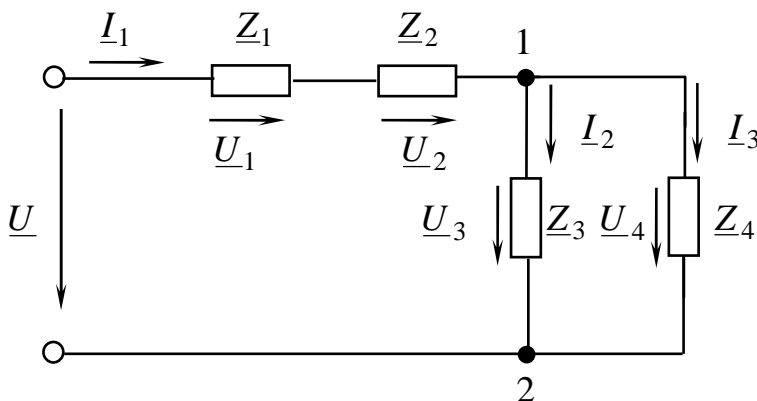


Рис.4.1

вказують комплексні опори (провідності), комплексні струми й напруги. Для розрахунку такої схеми доцільно використовувати закони Ома й Кірхгофа, а також еквівалентні перетворення так, як це робилось в колах постійного струму.

Наприклад, для визначення вхідного опору кола (рис.4.1) спочатку замінюємо паралельне з'єднання опорів \underline{Z}_3 і \underline{Z}_4 еквівалентним $\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$, а потім послідовне з'єднання опорів $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_{e1}$ замінюємо одним еквівалентним $\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$.

Векторні діаграми - діаграми, що зображують сукупність векторів синусоїдних величин, які розглядаються, на комплексній площині з дотриманням їх взаємної орієнтації.

Топографічна діаграма - сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі. Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то отримуємо *векторно-топографічну* діаграму.

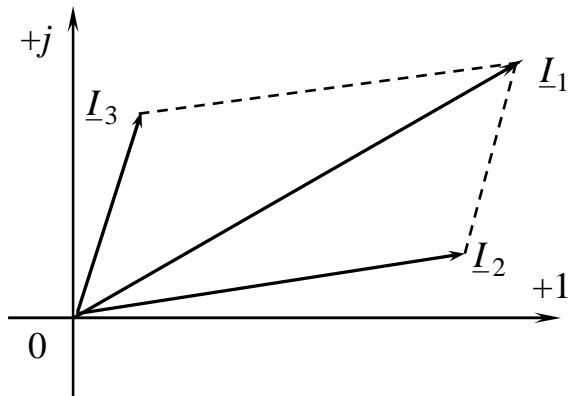


Рис.4.2

Векторні діаграми струмів будують так, щоб показати виконання першого закону Кірхгофа, а векторні діаграми напруг на комплексній площині відображають другий закон Кірхгофа.

Наприклад, для схеми (рис.4.1) перший закон Кірхгофа для вузла 1: $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$, що відповідає векторній діаграмі на рис.4.2.

Для цієї ж схеми на підставі другого закону Кірхгофа $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$ побудована векторна діаграма напруг (рис.4.3).

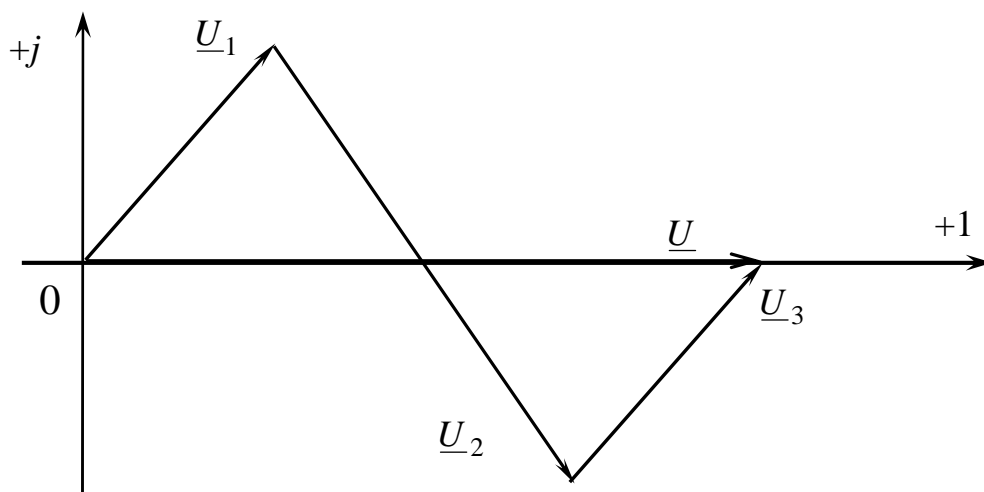


Рис.4.3

ЗАДАЧА 1

Визначення миттєвих струмів розгалуженого кола комплексним методом

До кола (рис.4.4,а) прикладена напруга $\underline{U} = 120\text{В}$, опори віток дорівнюють $R_1 = 10\ \text{Ом}$, $R_2 = 24\ \text{Ом}$, $R_3 = 15\ \text{Ом}$, $X_{L1} = 6\ \text{Ом}$, $X_{C2} = 7\ \text{Ом}$, $X_{L3} = 20\ \text{Ом}$.

Визначити миттєві струми у вітках i_1, i_2, i_3 .

Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвих величин;
- вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа у комплексному вигляді.

Вирішення

1. Зобразимо комплексну схему заміщення (рис.4.4,б). Нехай початкова фаза вхідної напруги дорівнює нулю ($\varphi_u = 0$), тоді $\underline{U} = 120 \cdot e^{j \cdot 0} = 120\text{В}$.

2. Визначимо комплексні опори віток:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j \cdot X_{L1} = 10 + j \cdot 6 = 11,7 e^{j \cdot 31^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot X_{C2} = 24 - j \cdot 7 = 25 \cdot e^{-j \cdot 16,4^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j \cdot X_{L3} = 15 + j \cdot 20 = 25 \cdot e^{j \cdot 53^\circ} \text{ Ом}.$$

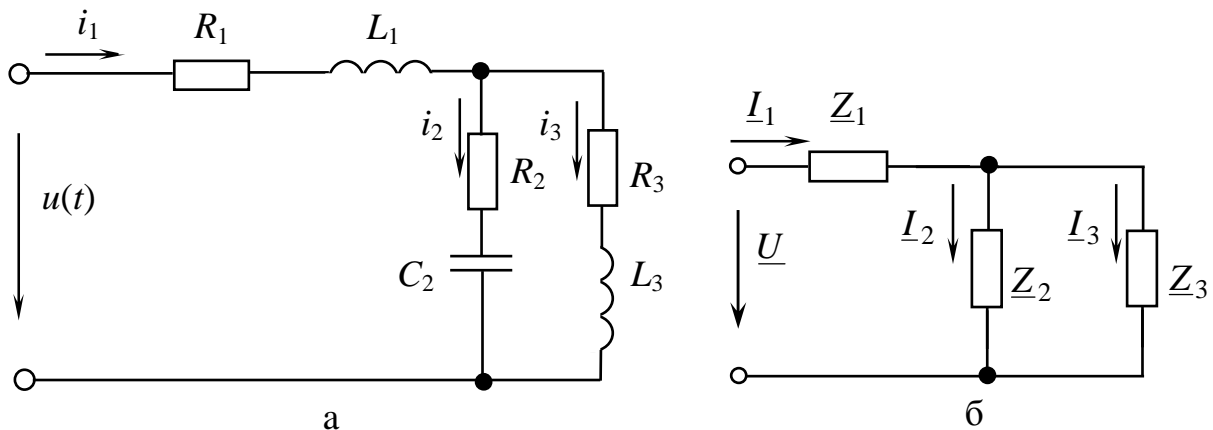


Рис.4.4

3. Електричне коло являє собою змішане з'єднання трьох опорів, тому ек-

$$\text{вівалентний опір } \underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 10 + j \cdot 6 + \frac{(24 - j \cdot 7) \cdot (15 + j \cdot 20)}{24 - j \cdot 7 + 15 + j \cdot 20} =$$

$$= 10 + j \cdot 6 + 14,4 + j \cdot 4,8 = 24,4 + j \cdot 10,8 = 26,7 \cdot e^{j \cdot 23,8^\circ} \text{ Ом}.$$

4. Визначимо за законом Ома комплексний струм на вході кола

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{120}{26,7 \cdot e^{j \cdot 23,8^\circ}} = 4,49 \cdot e^{-j \cdot 23,8^\circ} \text{ А}.$$

5. Комплексні струми в паралельних вітках знаходимо за правилом розкиду:

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,49 \cdot e^{-j \cdot 23,8^\circ} \cdot \frac{25 \cdot e^{j \cdot 53^\circ}}{24 - j \cdot 7 + 15 + j \cdot 20} = \\ &= 4,49 \cdot e^{-j \cdot 23,8^\circ} \cdot \frac{25 \cdot e^{j \cdot 53^\circ}}{39 + j \cdot 13} = \frac{112,25 \cdot e^{j \cdot 29,2^\circ}}{41,1 \cdot e^{j \cdot 18,4^\circ}} = 2,73 \cdot e^{j \cdot 10,8^\circ} \text{ А;} \end{aligned}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4,49 \cdot e^{-j \cdot 23,8^\circ} \cdot \frac{25 \cdot e^{-j \cdot 16,4^\circ}}{39 + j \cdot 13} = 2,73 \cdot e^{-j \cdot 58,6^\circ} \text{ А.}$$

6. Миттєві струми:

$$i_1(t) = 4,49 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 23,8^\circ) \text{ А, } i_3(t) = 2,73 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 58,6^\circ) \text{ А,}$$

$$i_2(t) = 2,73 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 10,8^\circ) \text{ А.}$$

7. Векторну діаграму струмів будуємо на підставі рівняння, записаного за першим законом Кірхгофа, діаграму напруг – за другим законом Кірхгофа (рис.4.5): $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$, $\underline{U} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot X_{L1} \cdot \underline{I}_1 + R_2 \cdot \underline{I}_2 - j \cdot X_{C2} \cdot \underline{I}_2$,

$$\underline{U} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot X_{L1} \cdot \underline{I}_1 + R_3 \cdot \underline{I}_3 + j \cdot X_{L3} \cdot \underline{I}_3.$$

8. Вибираємо масштаби: $m_U = 20 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, $m_I = 1 \frac{\text{А}}{\text{см}}$.

9. Для побудови векторної діаграми визначимо діючі значення напруг на елементах кола

$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_1 &= 10 \cdot 4,49 = 44,9 \text{ В; } X_{L1} \cdot I_1 = 6 \cdot 4,49 = 26,9 \text{ В; } R_2 \cdot I_2 = 24 \cdot 2,73 = 65,5 \text{ В; } \\ X_{C2} \cdot I_2 &= 7 \cdot 2,73 = 19,1 \text{ В; } R_3 \cdot I_3 = 15 \cdot 2,73 = 41 \text{ В; } X_{L3} \cdot I_3 = 20 \cdot 2,73 = 54,6 \text{ В.} \end{aligned}$$

10. Спочатку будуємо вектори струмів \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , а потім вектори напруг.

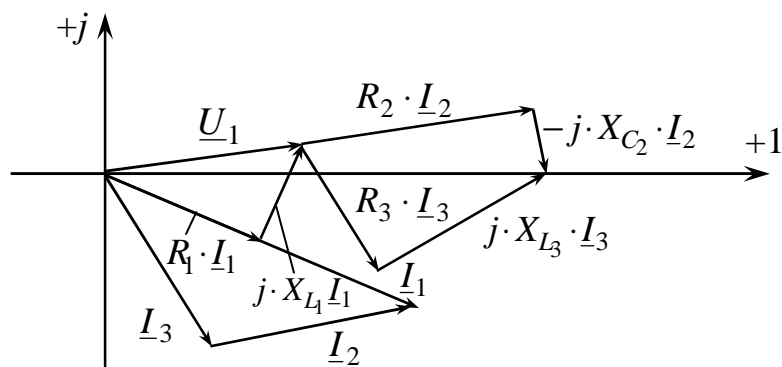


Рис.4.5

Вектор $R_1 \cdot \underline{I}_1$ збігається за напрямком із струмом \underline{I}_1 , вектор $j \cdot X_{L1} \cdot \underline{I}_1$ випереджає струм \underline{I}_1 на кут $\pi/2$. Сума цих векторів дорівнює напрузі \underline{U}_1 на опорі \underline{Z}_1 .

До кінця вектора \underline{U}_1 додаємо вектор $R_2 \cdot \underline{I}_2$, що збігається за напрямком із струмом \underline{I}_2 , і далі вектор $(-j \cdot X_{C2} \cdot \underline{I}_2)$, що відстає від струму \underline{I}_2 на кут $\pi/2$. Сума цих векторів дорівнює вектору вхідної напруги \underline{U} .

З кінця вектора \underline{U}_1 будуємо вектор $R_3 \cdot \underline{I}_3$ (за струмом \underline{I}_3), до нього додаємо вектор $j \cdot X_{L3} \cdot \underline{I}_3$ і знову одержуємо вектор вхідної напруги \underline{U} (рис.4.5).

ЗАДАЧА 2

Розрахунок розгалуженого кола комплексним методом

До кола (рис.4.6) прикладена синусоїдна напруга, діюче значення якої $U = 14,5$ В. Параметри елементів: $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_4 = 160$ Ом, $X_{L4} = 80$ Ом, $X_{C2} = 80$ Ом.

Визначити опір \underline{Z}_3 , при якому показання амперметра буде дорівнювати нулю. При цьому опорі визначити струми у вітках кола і побудувати векторну діаграму.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи комплексного методу розрахунку;
- вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа у комплексному вигляді.

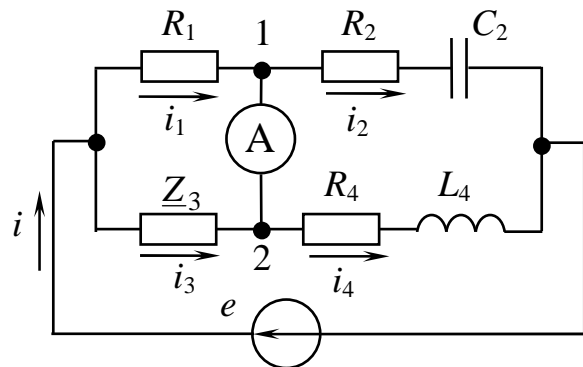


Рис.4.6

Вирішення

1. Коло являє собою так звану мостову схему. Для того щоб струм у вітці з амперметром дорівнював нулю, необхідно, щоб $\underline{U}_{12} = 0$, тоді $\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3$, $\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4$, де $\underline{Z}_1 = R_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot X_{C2}$, $\underline{Z}_4 = R_4 + j \cdot X_{L4}$.

Поділивши ліві і праві частини рівнянь одна на одну і враховуючі те, що при $\underline{U}_{12} = 0$ струми $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$, а $\underline{I}_3 = \underline{I}_4$, отримаємо умову рівноваги мостової схеми:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \text{ чи } \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3, \text{ звідки } \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2} = \frac{50 \cdot (160 + j \cdot 80)}{40 - j \cdot 80} = j \cdot 100$$

Ом.

Тобто у третю вітку потрібно включити індуктивність з опором

$$X_{L_3} = 100 \text{ Ом} (\underline{Z}_3 = j \cdot X_{L_3}).$$

2. Припустимо, що початкова фаза вхідної напруги дорівнює нулю, тоді $\underline{U} = 14,5 \text{ В}$.

3. Комплексні струми у вітках кола визначаємо за законом Ома:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{14,5 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{90 - j \cdot 80} = 0,09 + j \cdot 0,08 = 0,12 \cdot e^{j \cdot 41,8^\circ} \text{ А.}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{14,5 \cdot e^{-j \cdot 0^\circ}}{160 + j \cdot 180} = 0,04 - j \cdot 0,045 = 0,0602 \cdot e^{-j \cdot 48^\circ} \text{ А.}$$

4. Комплексний струм у нерозгалуженій частині кола:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = 0,09 + j \cdot 0,08 + 0,04 - j \cdot 0,045 = 0,13 + j \cdot 0,035 = 0,135 \cdot e^{j \cdot 15^\circ} \text{ А.}$$

5. Векторні діаграми струмів і напруг (рис. 4.7) будуємо за рівняннями:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_3, \underline{U} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + R_2 \cdot \underline{I}_2 - j \cdot X_{C2} \cdot \underline{I}_2, \underline{U} = j \cdot X_{L3} \cdot \underline{I}_3 + R_4 \cdot \underline{I}_4 + j \cdot X_{L4} \cdot \underline{I}_4.$$

Для побудови діаграми обчислимо діючі значення напруг на всіх ділянках схеми: $R_1 \cdot I_1 = 0,12 \cdot 50 = 6 \text{ В}$; $X_{L4} \cdot I_4 = 80 \cdot 0,06 = 4,8 \text{ В}$; $R_2 \cdot I_2 = 0,12 \cdot 40 = 4,8 \text{ В}$; $X_{C2} \cdot I_2 = 0,12 \cdot 80 = 9,6 \text{ В}$; $R_4 \cdot I_4 = 160 \cdot 0,06 = 9,6 \text{ В}$; $X_{L3} \cdot I_3 = 100 \cdot 0,065 = 6 \text{ В}$.

6. Вибираємо масштаби: $m_U = 2 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, $m_I = 0,02 \frac{\text{А}}{\text{см}}$.

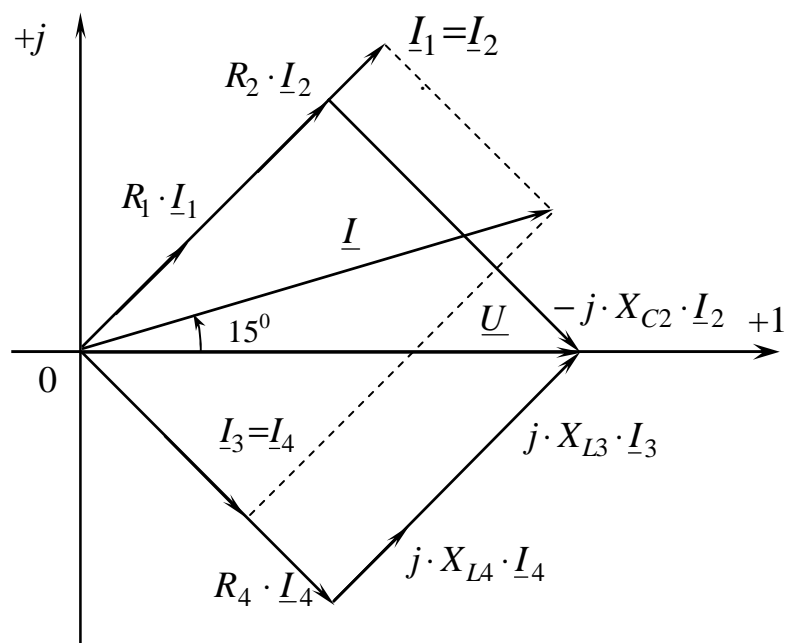


Рис.4.7

ЗАДАЧА 3

Розрахунок розгалуженого кола комплексним методом

Опір на вході електричного кола (рис.4.8) $\underline{Z}_{ex} = R + j \cdot X = (5 + j \cdot 11)$ Ом.

Опір $\underline{Z}_1 = (10 + j \cdot 25)$ Ом.

Визначити, яким активним опором R_2 слід зашунтувати опір \underline{Z}_1 (рис.4.8), щоб струм, який проходить через \underline{Z}_1 , відставав від вхідної напруги \underline{U} на 90° .

Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу згортки і правила розкиду;
- вміти будувати векторно-топографічну діаграму.

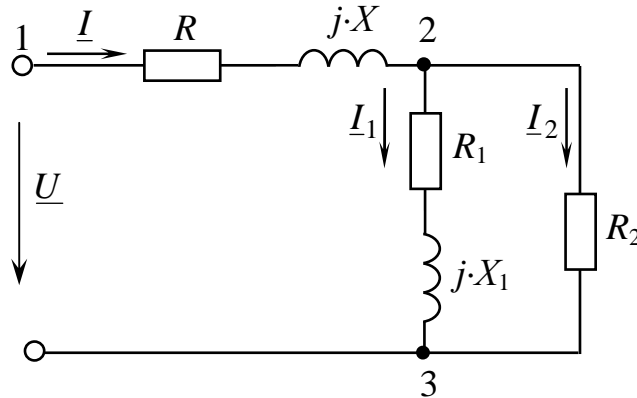


Рис.4.8

Вирішення

1. Вхідний струм будемо визначати за законом Ома в комплексній формі

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{ex}},$$

де \underline{Z}_{ex} - вхідний опір кола.

2. Визначаємо \underline{Z}_{ex} :

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z} + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Z}_1 + \underline{Z} \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

3. Струм \underline{I}_1 визначаємо за правилом розкиду:

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z} \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} + \underline{Z} + \underline{Z}_1}.$$

4. Припустимо, що початкова фаза вхідної напруги \underline{U} дорівнює нулю.

Для того, щоб струм \underline{I}_1 відставав від напруги \underline{U} на 90° , знаменник у виразі для струму повинен бути уявним додатним числом. Отже, дійсна частина цього виразу повинна дорівнювати нулю.

Виділимо дійсну й уявну частини знаменника у виразі для струму \underline{I}_1 :

$$\frac{\underline{Z} \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} + \underline{Z} + \underline{Z}_1 = \frac{(R_1 + j \cdot X_1) \cdot (R + j \cdot X)}{R_2} + R_1 + j \cdot X_1 + R + j \cdot X =$$

$$= R_1 + R + \frac{R_1 \cdot R - X_1 \cdot X}{R_2} + j \cdot (X_1 + X + \frac{R_1 \cdot X + R \cdot X_1}{R_2}).$$

Дорівнюємо дійсну частину нулю $R_1 + R + \frac{R_1 \cdot R - X_1 \cdot X}{R_2} = 0$.

Звідси: $R_2 = \frac{X \cdot X_1 - R \cdot R_1}{R + R_1} = \frac{25 \cdot 11 - 5 \cdot 101}{5 + 10} = 15 \text{ Ом.}$

5. Векторну діаграму (рис.4.9) будуємо в наступному порядку.

Відкладаємо вектор напруги \underline{U} по дійсній осі ($\varphi_u = 0$). Вектор струму \underline{I}_1 відстає від вектора напруги \underline{U} на кут 90° . Будуємо напругу $\underline{U}_{23} = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j \cdot X_1 \cdot \underline{I}_1$. Проводимо вектор струму \underline{I}_2 (збігається за фазою з \underline{U}_{23}). Будуємо струм $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$. З'єднавши кінці векторів напруги \underline{U}_{23} і \underline{U} , дістанемо напругу на опорі \underline{Z} : $\underline{U}_{12} = \underline{U} - \underline{U}_{23}$. З другого боку, напруга $\underline{U}_{12} = R \cdot \underline{I} + j \cdot X \cdot \underline{I}$. Тому, опустивши перпендикуляр із кінця вектора \underline{U}_{12} на струм \underline{I} , розкладемо вектор \underline{U}_{12} на дві складові.

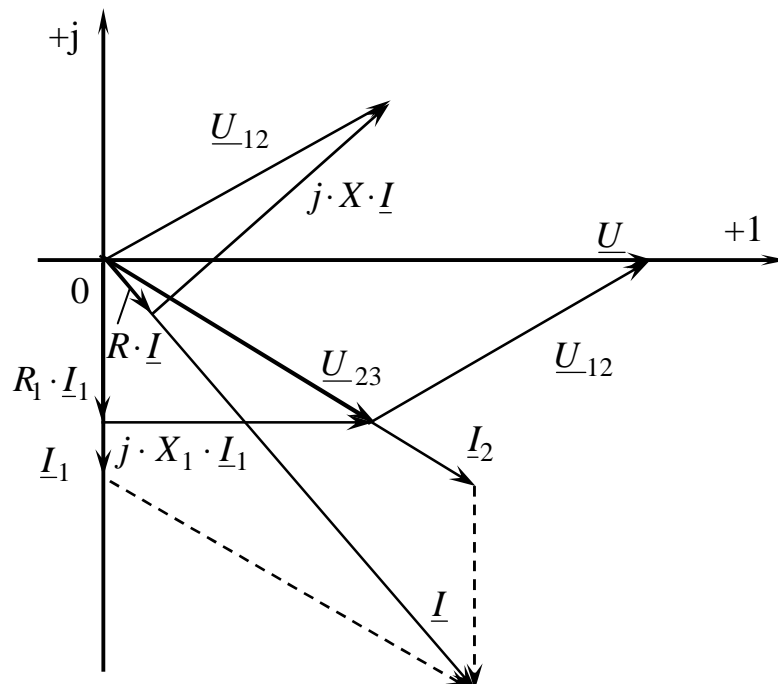


Рис.4.9

ТЕМА 5. РЕЗОНАНС У НЕРОЗГАЛУЖЕНИХ І РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ ЗМІННОГО СТРУМУ (РЕЗОНАНСИ НАПРУГ І СТРУМУ)

Загальні відомості

Резонансний режим – це такий режим роботи кола, що містить хоча б одну індуктивність і хоча б одну ємність, під час якого вхідний опір є чисто активним.

Розрізняють два резонансних режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Резонанс напруг – це такий режим роботи кола, що містить послідовно з'єднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході співпадає за фазою з вхідною напругою. Резонанс напруг відбувається в так званому послідовному коливальному контурі – рис.1.2. У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним: $X = X_L - X_C = 0$, $Z_{\text{вх}} = R$, а сумарна реактивна потужність $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Домогтися резонансу можна, змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Вводимо наступні поняття:

1) *резонансна частота* - частота під час резонансу ω_0 , яка знаходиться з умови

$$X_L = X_C, \quad \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \quad (5.1)$$

2) *хвильовий (характеристичний) опір* - це ємнісний або індуктивний опір під час резонансу, тобто

$$\rho = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (5.2)$$

3) *добротність контуру* - це відношення напруги на ємності чи напруги на індуктивності до вхідної напруги; показує в скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більше напруги на вході під час резонансу:

$$q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 \cdot L \cdot I}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}. \quad (5.3)$$

Резонанс струмів - такий режим роботи кола, що містить паралельне з'єднання ємності й індуктивності, за якого вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм співпадає за фазою з напругою на вході кола. Під час резонансу струмів струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж

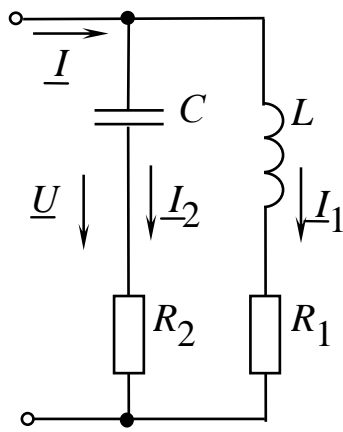


Рис.5.1

в загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною, реактивна потужність дорівнює нулю:
 $B = B_L - B_C = 0$; $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Отримати резонанс струмів також можна, змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Розглянемо реальний паралельний коливальний контур (рис.5.1), до якого прикладається синусоїдна напруга $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t)$. Знайдемо модулі струмів через провідності віток:

$$I = U \cdot Y, \quad I_1 = U \cdot Y_1, \quad I_2 = U \cdot Y_2, \quad (5.4)$$

де $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$; $Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}$; $Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}$.

Активні провідності віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{R_2}{Z_2^2}. \quad (5.5)$$

Повна активна провідність кола - $G = G_1 + G_2$.

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{\omega \cdot L}{Z_1^2}; \quad B_2 = B_C = -\frac{1/\omega \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot Z_2^2}. \quad (5.6)$$

Повна реактивна провідність кола $B = B_1 + B_2$.

Під час резонансу загальна провідність $Y_o = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$ є мінімальною, тому мінімальним є і загальний струм - $I_o = U \cdot Y_o = U \cdot (G_1 + G_2)$.

Знайдемо резонансну частоту ω_o з умови резонансу

$$B = 0 \Rightarrow B = B_L - B_C \Rightarrow \frac{\omega_o \cdot L}{R_1^2 + (\omega_o \cdot L)^2} = \frac{1/\omega_o \cdot C}{R_2^2 + (1/\omega_o \cdot C)^2}. \quad \text{Таким чином:}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (5.7)$$

Явище резонансу застосовують для підвищення коефіцієнта потужності, тому що для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати найбільш високий коефіцієнт потужності $\cos\varphi = \frac{P}{U \cdot I}$, тобто намагатися отримати менший зсув за фазою між струмом і напругою. Це необхідно для зменшення втрат під час передачі енергії по лініях електропередач: якщо підвищувати $\cos\varphi$, то струм, від якого залежить рівень втрат в проводах, можна зменшити $\left(\cos\varphi \uparrow \Rightarrow I = \frac{P}{U \cdot \cos\varphi} \downarrow \right)$.

Паралельні резонансні контури характеризуються:

- добротністю контуру $q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}$; (5.8)

- хвильовою провідністю $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$. (5.9)

ЗАДАЧА 1

Розрахунок параметрів електричного кола при резонансі напруг

Електричне коло, зображене на рис.5.2, має параметри елементів $R = 10 \text{ Ом}$, $X_L = 5 \text{ Ом}$.

Визначити, при якому значенні ємності C у колі відбудеться резонанс напруг.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати умови, при яких у колі відбувається резонанс напруг;
- вміти користуватися комплексним методом.

Вирішення

1. Запишемо рівняння для визначення повного комплексного опору кола

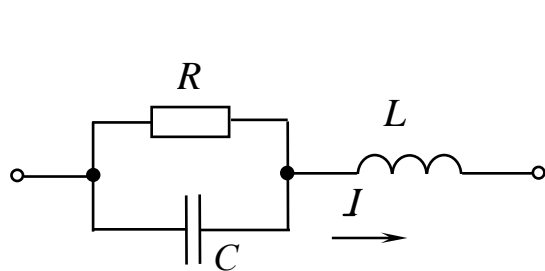


Рис.5.2

(рис.5.2): $\underline{Z} = j \cdot X_L + \frac{R \cdot (-j \cdot X_C)}{R - j \cdot X_C}$, де

$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ - ємнісний опір;

$X_L = \omega \cdot L$ - індуктивний опір.

2. Підставимо відомі параметри в отримане рівняння повного опору і приве-

демо його до загального знаменника:

$$\underline{Z} = j \cdot 5 + \frac{10 \cdot (-j \cdot X_C)}{10 - j \cdot X_C} = \frac{j \cdot 50 - j^2 \cdot 5 \cdot X_C - j \cdot 10 \cdot X_C}{10 - j \cdot X_C} \text{ Ом.}$$

3. Помножимо чисельник та знаменник останнього виразу на $(10 + j \cdot X_C)$:

$$\underline{Z} = \frac{[5 \cdot X_C + j \cdot (50 - 10 \cdot X_C)] \cdot (10 + j \cdot X_C)}{(10 - j \cdot X_C) \cdot (10 + j \cdot X_C)} = \frac{10 \cdot X_C^2 + j \cdot (5 \cdot X_C^2 - 100 \cdot X_C + 500)}{100 + X_C^2} \text{ Ом.}$$

4. Розкладемо комплекс повного опору на дійсну і уявну частини:

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = \frac{10 \cdot X_C^2}{100 + X_C^2} + j \cdot \frac{5 \cdot X_C^2 - 100 \cdot X_C + 500}{100 + X_C^2} \text{ Ом.}$$

5. При резонансі напруг повний реактивний опір дорівнює нулю ($X = 0$), тому дорівнюємо нулю коефіцієнт, що має уявну одиницю, і розв'яжемо квадратне рівняння $5 \cdot X_C^2 - 100 \cdot X_C + 500 = 0$ відносно X_C . Отримуємо $X_C = 10$ Ом.

6. Виходячи з того, що при резонансі $X_L = \omega_P \cdot L$, а $X_C = \frac{1}{\omega_P \cdot C}$, отримаємо співвідношення для визначення ємності конденсатора $C = \frac{L}{X_L \cdot X_C} = \frac{L}{50}$.

Таким чином, ємність конденсатора повинна бути в 50 разів меншою за індуктивність котушки L .

ЗАДАЧА 2

Визначення струмів електричного кола при резонансі струмів

Діюче значення напруги на вході електричного кола (рис.5.3) $U = 120$ В. Параметри кола $R_1 = R_2 = X_L = X_C = 25$ Ом.

Визначити струми в колі при розімкненому й замкненому ключі K .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати умови, при яких у колі відбувається резонанс струмів;
- вміти користуватися комплексним методом.

Вирішення

1. Визначимо комплекс повного опору кола, коли ключ K розімкнений (рис.5.3). З вихідних даних повна реактивна провідність кола дорівнює нулю, тоді комплекс повного опору

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{j \cdot X_L \cdot (-j \cdot X_C)}{j \cdot (X_L - X_C)} = 25 + \frac{1}{0} = \infty. \text{ Тобто струм у навантаженні відсутній -}$$

$$\underline{I} = \frac{U_{13}}{\underline{Z}} = \frac{120}{\infty} = 0.$$

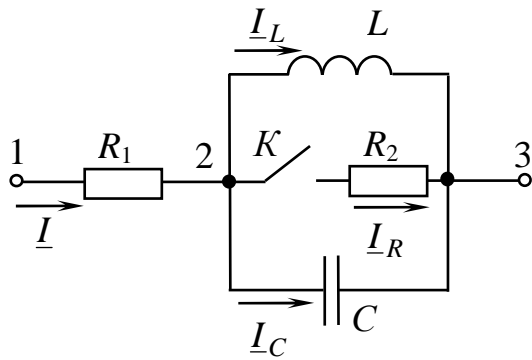


Рис.5.3

2. За другим законом Кірхгофа визначаємо напругу між точками 2 і 3:

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{13} - \underline{U}_{12} = \underline{U}_{13} - \underline{I} \cdot R_1 = \underline{U}_{13} = 120 \text{ В.}$$

3. Визначаємо струми через індуктивний і ємнісний опори:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{23}}{j \cdot X_L} = \frac{120}{25 \angle 90^\circ} = 4,8 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{23}}{-j \cdot X_C} = \frac{120}{25 \angle -90^\circ} = 4,8 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ А.}$$

3. Нехай ключ K замкнений. При цьому маємо резонанс струмів, коли повна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм у колі визначається активними опорами.

Знайдемо комплекс провідності між точками 2 і 3 кола рис.5.3:

$$\underline{Y}_{23} = \frac{1}{j \cdot X_L} + \frac{1}{j \cdot X_C} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{25 \cdot e^{j \cdot 90^\circ}} + \frac{1}{25 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} + \frac{1}{25} = \frac{1}{25} \text{ См.}$$

5. Комплекс повного опору кола при замкненому ключі

$$\underline{Z} = R_1 + \underline{Z}_{23} = 25 + 25 = 50 \text{ Ом.}$$

6. Знайдемо комплекс вхідного струму: $\underline{I} = \frac{\underline{U}_{13}}{\underline{Z}} = \frac{120 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{50 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} = 2,4 \text{ А.}$

7. Визначаємо напругу між точками 2 і 3 за законом Ома:

$$\underline{U}_{23} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}_{23}} = 2,4 \cdot 25 = 60 \text{ В.}$$

8. Розраховуємо струми у паралельних вітках:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{23}}{j \cdot X_L} = \frac{60}{25 \cdot e^{j \cdot 90^\circ}} = 2,4 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \text{ А, } \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{23}}{-j \cdot X_C} = \frac{60}{25 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} = 2,4 \cdot e^{j \cdot 90^\circ},$$

$$\underline{I}_{R_2} = \frac{\underline{U}_{23}}{R_2} = \frac{60}{25} = 2,4 \text{ А.}$$

ЗАДАЧА 3

Визначення параметрів електричного кола при резонансі струмів

Параметри розгалуженого електричного кола, зображеного на рис 5.4.: $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $L_1 = 20 \text{ мГн}$, $C_2 = 20 \text{ мкФ}$. Кутова частота вхідної напруги $\omega = 200 \text{ рад/с}$.

Визначити, при якому значенні L_2 у колі відбудеться резонанс струмів.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати умови, при яких у колі відбувається резонанс струмів;
- вміти користуватися комплексним методом.

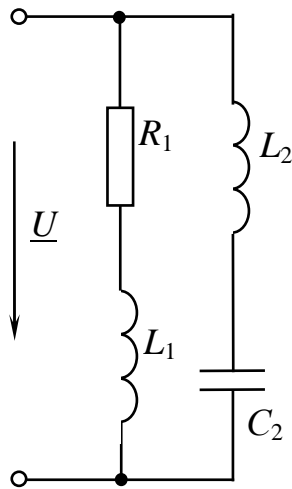


Рис.5.4

Вирішення

1. Комплекс повної провідності першої паралельної вітки кола $\underline{Y}_1 = G_1 - j \cdot B_1$,

де $G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2}$ - активна провідність першої вітки;

$B_1 = \frac{\omega \cdot L_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2}$ - реактивна провідність першої вітки.

Підставимо вирази для активної і реактивної провідностей у рівняння повної провідності першої

вітки, отримаємо $\underline{Y}_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2} - j \cdot \frac{\omega \cdot L_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2}$.

2. Знайдемо комплекс повної провідності другої паралельної вітки кола $\underline{Y}_2 = -j \cdot (B_{L2} - B_{C2})$,

де $B_{L2} = \frac{\omega \cdot L_2}{\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}\right)^2}$ - реактивна індуктивна провідність другої вітки;

$B_{C2} = \frac{1}{\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}\right)^2}$ - реактивна ємнісна провідність другої вітки.

Підставимо вирази для реактивних індуктивної і ємнісної провідностей у співвідношення повної провідності другої вітки кола, отримаємо:

$$\underline{Y}_2 = -j \cdot \left(\frac{\omega \cdot L_2}{\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\omega \cdot C_2}}{\left(\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}\right)^2} \right) = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}}$$

3. Запишемо рівняння повної провідності кола як суму провідностей першої і другої віток (рис.5.4)

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2} - j \cdot \frac{\omega \cdot L_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}} =$$

$$= \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2} - j \cdot \left(\frac{\omega \cdot L_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2} + \frac{1}{\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}} \right) = G - j \cdot B.$$

4. Резонанс струмів відбудеться у колі рис.5.4, якщо повна реактивна провідність кола буде дорівнювати нулю: $\frac{\omega \cdot L_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2} + \frac{1}{\omega \cdot L_2 - \frac{1}{\omega \cdot C_2}} = 0.$

5. Виразимо з отриманого співвідношення індуктивний опір L_2

$$L_2 = \frac{\frac{L_1}{C_2} - (R_1^2 - (\omega \cdot L_1)^2)}{\omega^2 \cdot L_1} = \frac{0,02}{6,25 \cdot 10^{-6}} - \frac{(20^2 - (200 \cdot 0,02)^2)}{200^2 \cdot 0,02} = 3,48 \text{ Гн.}$$

ТЕМА 6. ТРИФАЗНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ. РОЗРАХУНОК СИМЕТРИЧНИХ І НЕСИМЕТРИЧНИХ РЕЖИМІВ ПРИ З'ЄДНАННІ НАВАНТАЖЕННЯ ЗІРКОЮ І ТРИКУТНИКОМ

Загальні відомості

Трифазна симетрична система електрорушійних сил (ЕРС) – сукупність трьох синусоїдних ЕРС одної частоти, що мають однакові амплітуди й зсунуті між собою на 120° . Графік миттєвих значень ЕРС e_A, e_B, e_C зображений на рис.6.1, а векторні діаграми – на рис.6.2.

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює “ -120° ”, а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює “ $+120^\circ$ ”, називається *прямим*; миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega \cdot t; \quad e_B = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 120^\circ); \quad e_C = E_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ) \quad (6.1)$$

Трифазне коло – сукупність трифазної система ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень і з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Основні схеми з'єднання у трифазних колах - це схеми з'єднання *зіркою* і *трикутником*.

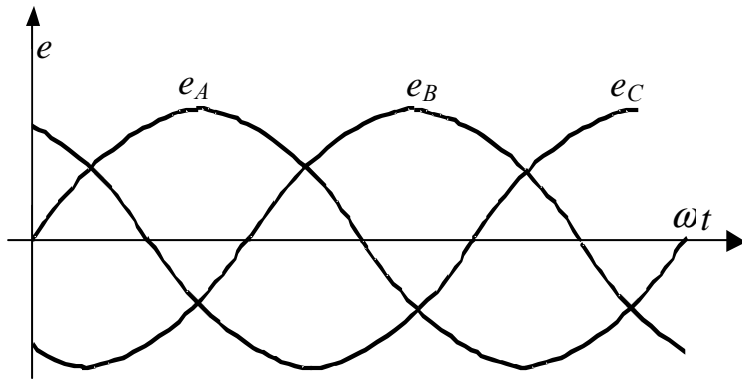


Рис.6.1

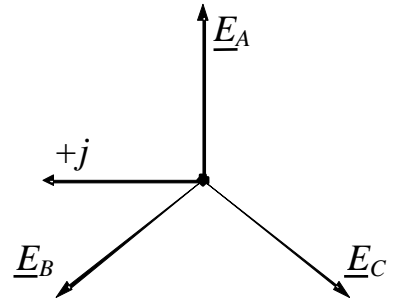


Рис.6.2

Трифазне коло є різновидом кіл синусоїдного струму, тому його розрахунок і дослідження здійснюють за допомогою методів, що розглядалися раніше. Вважаємо, що трифазна ЕРС симетрична.

Розглянемо розрахунок кола “зірка-зірка” за симетричного навантаження ($Z_A = Z_B = Z_C$). При цьому в усіх випадках, що відповідають схемам рис.6.3, рис.6.4, рис.6.5, потенціали точок O і O_1 дорівнюють один одному, тобто $U_{O_1O} = 0$.

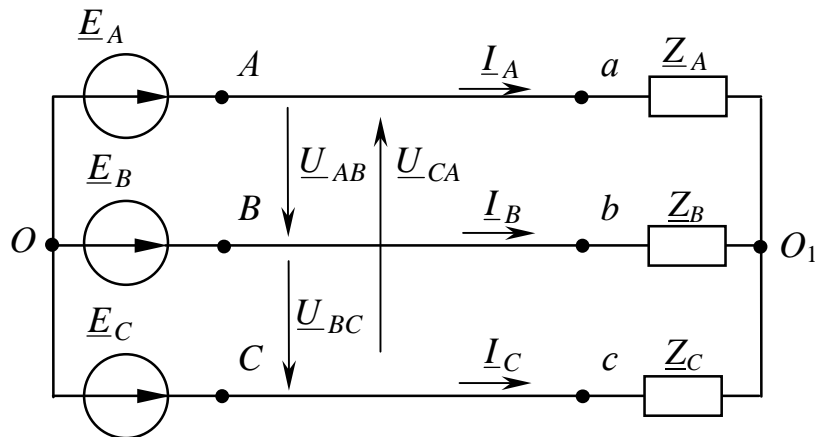


Рис.6.3

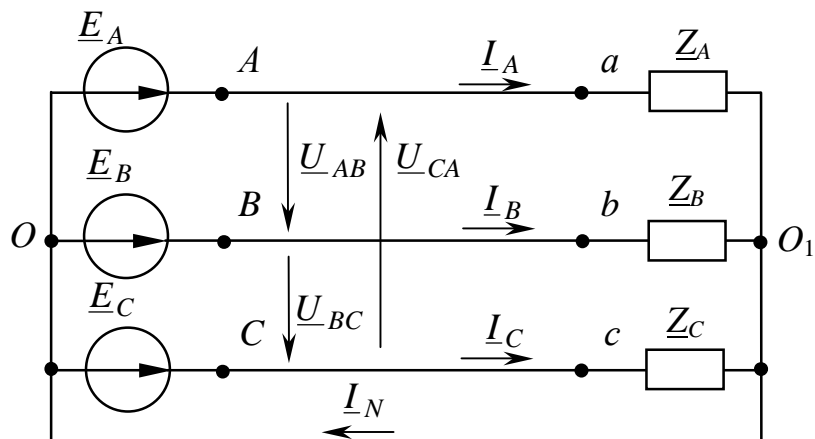


Рис.6.4

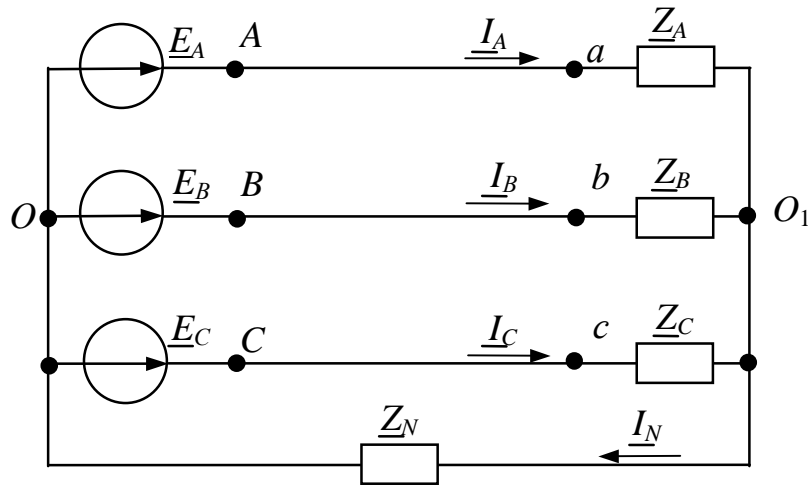


Рис.6.5

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_{bO_1} \cdot \underline{Y}_B; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C \quad (6.2)$$

Тоді фазні струми визначають за виразами (6.2) (з урахуванням того, що $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$), вони однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° . Струм нульового проводу для рис.6.4 і рис.6.5 дорівнює нулю: $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора ($\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$) або на фазних навантаженнях (\underline{U}_{aO_1} , \underline{U}_{bO_1} , \underline{U}_{cO_1} - рис.6.3) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці потенціалів між точками A, B, C або різниці фазних напруг:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO} \quad (6.3)$$

При прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні й випереджають їх на 30° , тобто співвідношення між комплексами лінійних і фазних напруг мають вигляд

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ} \quad (6.4)$$

Розглянемо розрахунок кола “зірка-зірка” з нейтральним проводом за несиметричного навантаження ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$). При цьому, коли в нейтральному проводі є опір \underline{Z}_N (рис.6.5), потенціали точок O і O_1 не дорівнюють один одному. Розрахунок кола здійснюють в наступній послідовності:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} , за виразом, що впливає з методу двох вузлів:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (6.5)$$

де $\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C, \underline{Y}_N$ – комплекси фазних провідностей і провідність нейтрального проводу:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}, \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}; \quad (6.6)$$

- визначають фазні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (6.7)$$

- за співвідношеннями (6.2) визначають фазні струми:

- струм у нейтральному проводі \underline{I}_N знаходять як суму фазних струмів.

Коли в нейтральному проводі опір \underline{Z}_N відсутній і навантаження несиметричне (рис.6.4) – $\underline{U}_{O_1O} = 0$, тому фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_{BO} \cdot \underline{Y}_B; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_{CO} \cdot \underline{Y}_C, \quad (6.8)$$

а струм нейтрального проводу визначають, як і в попередньому випадку.

Розглянемо розрахунок кола “зірка-зірка” без нейтрального проводу за несиметричного навантаження ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$).

При цьому (рис.6.3) фазні струми мають такі значення, що їх сума дорівнює нулю. Внаслідок чого відбувається, як і у випадку несиметричного навантаження за наявності в нейтральному проводі опора \underline{Z}_N , викривлення симетрії фазних напруг так, що навантаження опиняється під різними, не рівними один одному (та фазним ЕРС) напругами. Потенціали точок O та O_1 не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють так:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу \underline{U}_{O_1O} :

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad (6.9)$$

- визначають фазні напруги на навантаженні за виразами (6.5);

- визначають фазні струми за виразами (6.2).

Розглянемо розрахунок кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник”.

Треба зауважити, що розрахунки кіл “трикутник-трикутник” (рис.6.6) і “зірка-трикутник” (рис.6.7) відрізняються тільки величиною напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{ф. навантаження}$): у випадку кола “трикутник-трикутник” - $\underline{U}_{ф. навантаження} = \underline{U}_{ф. генератора}$, а у випадку кола “зірка-трикутник” - $\underline{U}_{ф. навантаження} = \underline{U}_{лінійне генератора} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{ф} \angle 30^\circ$. Далі будемо розглядати коло “зірка-трикутник”.

Розрахунок кола “зірка-трикутник” без урахування опорів проводів, що підводять, проводять в наступній послідовності.

1) Визначають комплекси фазних струмів за виразами:

$$\underline{I}_{av} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{av}} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_{av}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} = \underline{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_{bc}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} = \underline{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_{ca}, \quad (6.10)$$

де $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ – лінійні напруги (4.3);

$\underline{Y}_{av}, \underline{Y}_{bc}, \underline{Y}_{ca}$ – комплекси фазних провідностей:

$$\underline{Y}_{av} = \frac{1}{\underline{Z}_{av}}; \quad \underline{Y}_{bc} = \frac{1}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{Y}_{ca} = \frac{1}{\underline{Z}_{ca}}. \quad (6.11)$$

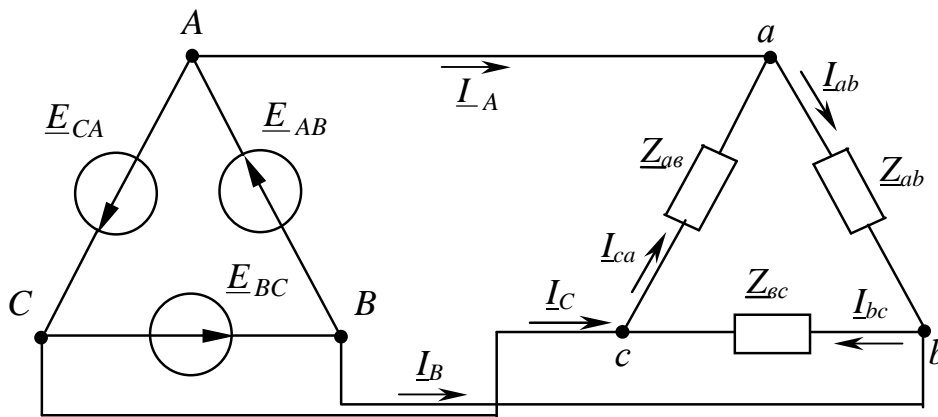


Рис.6.6

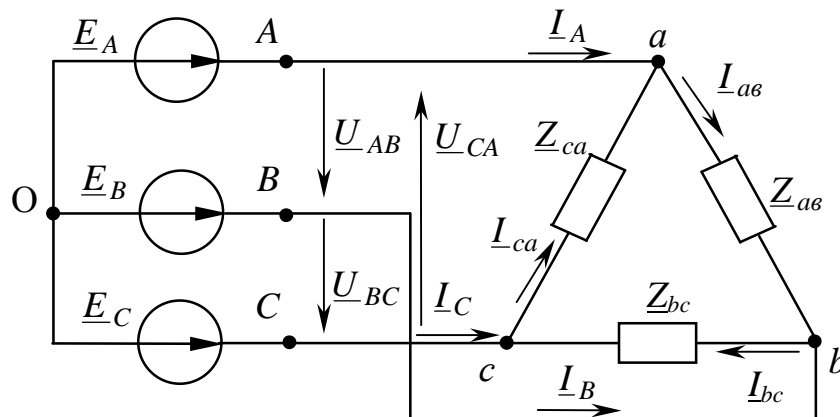


Рис.6.7

2) Визначають лінійні струми за першим законом Кірхгофа для вузлів a, b, c :

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{av} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} . \quad (6.12)$$

При симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_\phi}{R_\phi} , \quad (6.13)$$

де X_ϕ - реактивний опір навантаження;

R_ϕ - активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть рівними між собою, в $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30° при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_A = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{av} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_B = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{bc} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_C = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ca} \angle -30^\circ . \quad (6.14)$$

Таким чином, при симетричному навантаженні фаз розрахунок трифазного кола можна звести до розрахунку однієї фази.

При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми.

Розглянемо розрахунок кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник” з урахуванням опорів проводів, що підводять. Врахуємо, що в загальному випадку опори в лініях не дорівнюють один одному ($\underline{Z}_{la} \neq \underline{Z}_{lb} \neq \underline{Z}_{lc}$) і навантаження фаз несиметричне (рис.6.8).

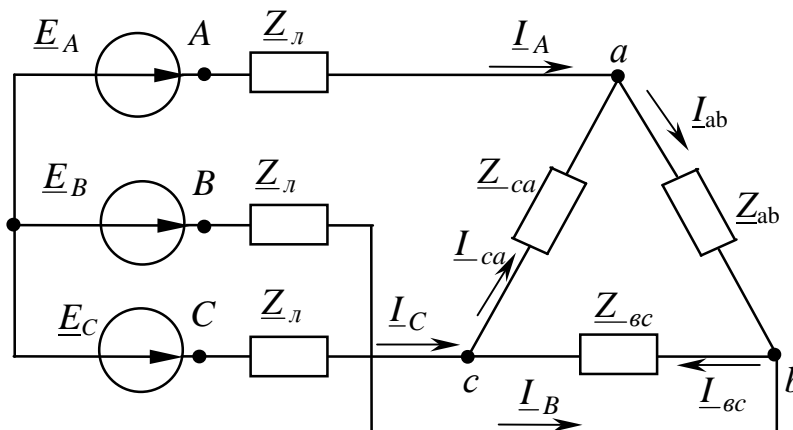


Рис.6.8

Розрахунок такої схеми слід виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою. Опори променів зірки:

$$\underline{Z}'_a = \frac{\underline{Z}_{av} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{av} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \cdot \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \quad \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}. \quad (6.15)$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{av} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi$, то опір променів еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}'_a = \underline{Z}'_b = \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_\phi}{3}. \quad (6.16)$$

В результаті перетворення одержуємо еквівалентну схему, зображену на рис.6.9, лінійні струми якої ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) в загальному випадку розраховують як у схемі "зірка-зірка" при несиметричному навантаженні, а саме:

- визначають повні опори ($\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$) й провідності ($\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$) кожної фази, враховуючи, що опори з'єднувальних проводів ввімкнені послідовно з опорами відповідних променів еквівалентної зірки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_A &= \underline{Z}'_a + \underline{Z}_{la}; & \underline{Y}_A &= \frac{1}{\underline{Z}_A}; & \underline{Z}_B &= \underline{Z}'_b + \underline{Z}_{lb}; & \underline{Y}_B &= \frac{1}{\underline{Z}_B}; \\ \underline{Z}_C &= \underline{Z}'_c + \underline{Z}_{lc}; & \underline{Y}_C &= \frac{1}{\underline{Z}_C}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

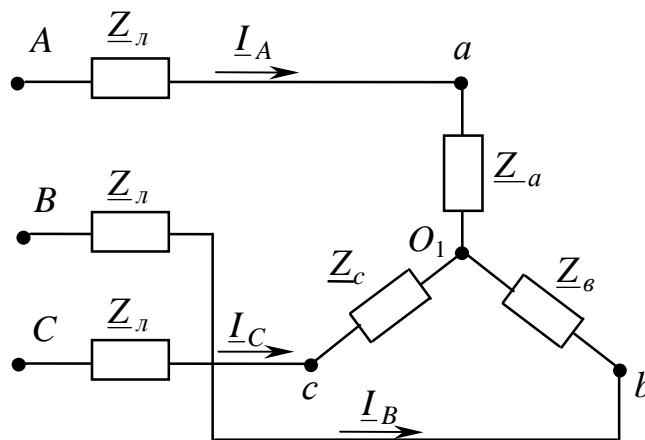


Рис.6.9

- за формулами (6.9) визначають напругу зміщення нейтралі \underline{U}_{O1O} ;
- за формулами (6.7) і (6.2) визначають лінійні струми $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$.

Фазні струми в навантаженнях \underline{Z}_{av} ; \underline{Z}_{bc} ; \underline{Z}_{ca} вихідної схеми (рис.6.8) визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_{av} = \frac{\underline{U}_{av}}{\underline{Z}_{av}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}, \quad (6.18)$$

де \underline{U}_{av} ; \underline{U}_{bc} ; \underline{U}_{ca} – лінійні напруги на навантаженні:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{av} &= \underline{U}_{aO_1} - \underline{U}_{eO_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_e; \\
\underline{U}_{ec} &= \underline{U}_{eO_1} - \underline{U}_{cO_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_e - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c; \\
\underline{U}_{ca} &= \underline{U}_{cO_1} - \underline{U}_{aO_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a.
\end{aligned}
\tag{6.19}$$

ЗАДАЧА 1

Розрахунок несиметричних режимів трифазного електричного кола при з'єднанні навантаження зіркою

Трифазна система, з'єднана за схемою “зірка-зірка” з нульовим проводом, зображена на рис.6.4, працює у несиметричному режимі. Фазні ЕРС $\underline{E}_A = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$ В, $\underline{E}_B = 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}$ В, $\underline{E}_C = 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}$ В. Параметри навантаження: $\underline{Z}_A = 100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_B = 100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_C = 141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}$ Ом.

Визначити:

- лінійні напруги кола;
- фазні струми кола.

Провести баланс потужностей.

Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Повторити розрахунки кола у випадку обриву нульового проводу.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати методи розрахунку трифазних кіл;
- вміти будувати векторно-топографічні діаграми струмів і напруг.

Вирішення

I. “Зірка-зірка” з нульовим проводом

1. Знайдемо лінійні напруги кола $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO} = \underline{E}_A - \underline{E}_B =$
 $= 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} - 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = 155 + 77,5 + j \cdot 134,2 = 232,5 + j \cdot 134,2 = 268,5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$ В,

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} - 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = 268,5 e^{-j \cdot 90^\circ}$$
 В,

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO} = \underline{E}_C - \underline{E}_A = 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} - 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} = 268,5 e^{j \cdot 150^\circ}$$
 В.

2. Розрахуємо фазні струми.

Завдяки нульовому проводу напруга $\underline{U}_{O10} = 0$. Тоді $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{eO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$.

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO_1}}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} = 1,55 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} = j \cdot 1,55 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_B = \frac{U_{bO_1}}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} = 1,55 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = -0,77 - j \cdot 1,34 \text{ A},$$

$$\underline{I}_C = \frac{U_{cO_1}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}} = 1,1 \cdot e^{j \cdot 75^\circ} = 0,28 + j \cdot 1,06 \text{ A}.$$

3. За першим законом Кірхгофа знайдемо струм у нульовому проводі
 $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = j \cdot 1,55 - 0,77 - j \cdot 1,34 + 0,28 + j \cdot 1,06 = -0,49 + j \cdot 1,27 =$
 $= 1,36 \cdot e^{j \cdot 111,1^\circ} \text{ A}.$

4. Складемо баланс потужностей в колі.

Розрахуємо потужність, що віддається джерелами живлення

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{д\textit{ж}}} &= \underline{E}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{E}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{E}_C \cdot \underline{I}_C^* = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \cdot 1,55 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} + 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 1,55 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} + \\ &+ 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 1,1 \cdot e^{-j \cdot 75^\circ} = -j \cdot 240,25 + 240,25 + 120,56 + j \cdot 120,56 = \\ &= 360,81 - j \cdot 119,69 \text{ ВА} \Rightarrow P_{\text{д\textit{ж}}} = 360,81 \text{ Вт}, Q_{\text{д\textit{ж}}} = -119,69 \text{ ВАр}. \end{aligned}$$

Визначимо потужність, що споживає навантаження:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_H &= I_A^2 \cdot \underline{Z}_A + I_B^2 \cdot \underline{Z}_B + I_C^2 \cdot \underline{Z}_C = 1,55^2 \cdot (-j \cdot 100) + 1,55^2 \cdot 100 + \\ &+ 1,1^2 \cdot (99,7 + j \cdot 99,7) = 360,89 - j \cdot 119,61 \text{ Вт} \Rightarrow P_H = 360,89 \text{ Вт}, \end{aligned}$$

$Q_H = -119,61 \text{ ВАр}.$ $\tilde{S}_{\text{д\textit{ж}}} \approx \tilde{S}_H$, тобто баланс потужностей виконується.

5. Побудуємо векторно-топографічну діаграму струмів і напруг. Спочатку задамося масштабами за напругою і струмом $m_U = 50 \text{ В/см}$, $m_I = 0,5 \text{ А/см}$. У вибраному масштабі напруги побудуємо симетричну систему фазних напруг, що відстають одна від одної на кут 120° (див. рис.6.10,а). З'єднаємо кінці векторів фазних напруг, точки A, B, C , і отримаємо трикутник лінійних напруг (див.

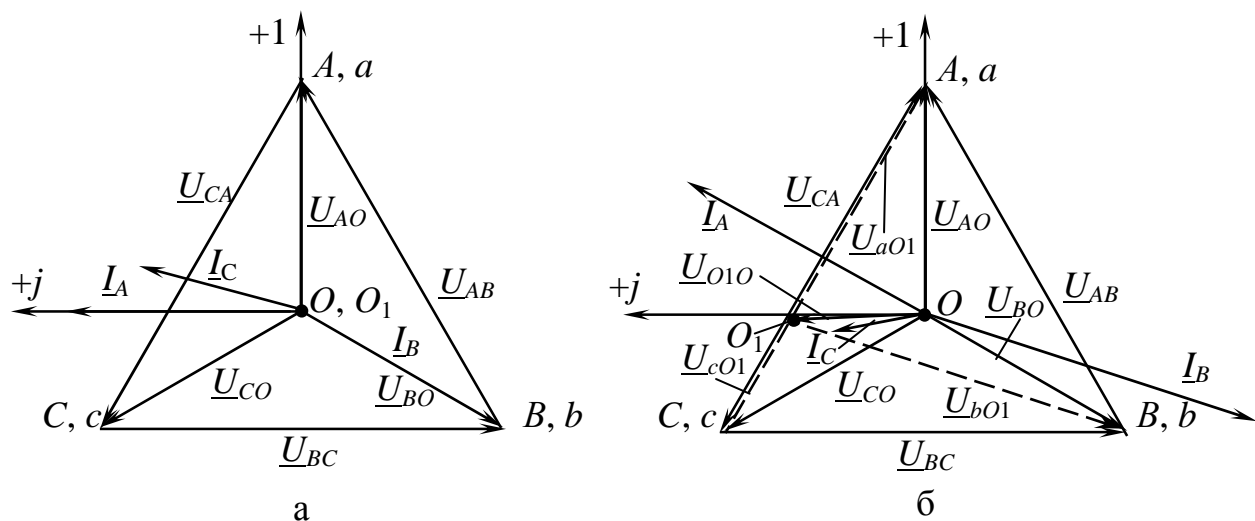


Рис.6.10

рис.6.10,а). У вибраному масштабі струму побудуємо вектори фазних струмів.

II. “Зірка-зірка” без нульового проводу

1. У несиметричному режимі при відсутності нульового проводу (рис.6.3) напруга $\underline{U}_{O_1O} \neq 0$.

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\frac{155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} + \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} + \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}}{\frac{1}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} + \frac{1}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} + \frac{1}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}} =$$

$$= \frac{j \cdot 1,55 - 0,775 - j \cdot 1,342 + 0,284 + j \cdot 1,061}{j \cdot 0,01 + 0,01 + 0,005 - j \cdot 0,005} = 86,12 \cdot e^{j \cdot 92,7^\circ} = -4,06 + j \cdot 86,62 \text{ В.}$$

2. За законом Ома розрахуємо фазні струми:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO_1}}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_A} = \frac{155 + 4,06 - j \cdot 86,62}{-j \cdot 100} = 1,8 \cdot e^{j \cdot 61,6^\circ} = 0,856 + j \cdot 1,583 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO_1}}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_B} = \frac{-77,5 - j \cdot 134,2 + 4,06 - j \cdot 86,62}{100} = 2,32 \cdot e^{-j \cdot 108,4^\circ} =$$

$$= -0,732 - j \cdot 2,2 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO_1}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_C} = \frac{-77,5 + j \cdot 134,2 + 4,06 - j \cdot 86,62}{100 + j \cdot 100} = 0,623 \cdot e^{j \cdot 101,7^\circ} =$$

$$= -0,126 + j \cdot 0,61 \text{ А.}$$

3. Виконаємо перевірку розрахунку за першим законом Кірхгофа:

$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0,856 + j \cdot 1,583 - 0,732 - j \cdot 2,2 - 0,126 + j \cdot 0,61 \approx 0$ - перший закон Кірхгофа виконується.

4. Складемо баланс потужностей в колі.

Розрахуємо потужність, що віддається джерелами живлення:

$$\tilde{S}_{\text{дж}} = \underline{E}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{E}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{E}_C \cdot \underline{I}_C^* = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \cdot 1,8 \cdot e^{-j \cdot 61,6^\circ} +$$

$$+ 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 2,32 \cdot e^{j \cdot 108,4^\circ} + 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 0,623 \cdot e^{-j \cdot 101,7^\circ} = 132,7 - j \cdot 245,42 +$$

$$+ 352,55 - j \cdot 72,37 + 91,67 + j \cdot 30,31 = 576,92 - j \cdot 287,47 \text{ ВА} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\text{дж}} = 576,92 \text{ Вт, } Q_{\text{дж}} = -288,47 \text{ ВАр.}$$

Визначимо потужність, що споживає навантаження:

$$\tilde{S}_H = \underline{I}_A^2 \cdot \underline{Z}_A + \underline{I}_B^2 \cdot \underline{Z}_B + \underline{I}_C^2 \cdot \underline{Z}_C = 1,8^2 \cdot (-j \cdot 100) + 3,32^2 \cdot 100 +$$

$$+ 0,632^2 \cdot (99,7 + j \cdot 99,7) = 577,2 - j \cdot 289,3 \text{ ВА} \Rightarrow P_H = 577,2 \text{ Вт, } Q_H = -289,3 \text{ ВАр.}$$

$\tilde{S}_{\text{дж}} \approx \tilde{S}_H$, тобто баланс потужностей виконується.

5. Векторно-топографічну діаграму струмів і напруг побудуємо, користуючись методикою, наведеною вище (рис.6.10,б). У порівнянні з рис.6.10,а на діаграмі рис.6.10,б додатково з'являються вектори напруг \underline{U}_{O1O} , \underline{U}_{aO1} , \underline{U}_{bO1} , \underline{U}_{cO1} .

ЗАДАЧА 2

Розрахунок несиметричних режимів трифазного електричного кола при з'єднанні навантаження трикутником

Трифазна система, з'єднана за схемою “зірка-трикутник”, зображена на рис.6.7, працює у симетричному режимі. Діюче значення лінійної напруги $U_{л} = 100$ В. Параметри навантаження $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{b\tilde{n}} = \underline{Z}_{\tilde{n}a} = 10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 8,66 + j \cdot 5$ Ом.

Визначити:

- фазні напруги і струми кола \underline{U}_{ab} , \underline{U}_{bc} , \underline{U}_{ca} , \underline{I}_{ab} , \underline{I}_{bc} , \underline{I}_{ca} ;
- лінійні струми кола \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{I}_C .

Провести баланс потужностей. Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Вирішення

1. Визначимо фазні напруги кола:

$$\underline{U}_A = \frac{U_{л}}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,73 \text{ В}, \quad \underline{U}_{\hat{A}} = \frac{U_{\check{e}}}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,73 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{\tilde{N}} = \frac{U_{\check{e}}}{\sqrt{3}} \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,73 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \text{ В}.$$

2. Визначимо лінійні напруги кола: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab} = U_{\check{e}} \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 100 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$,

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc} = U_{\check{e}} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} = 100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \text{ В}, \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca} = U_{\check{e}} \cdot e^{j \cdot 150^\circ} = 100 \cdot e^{j \cdot 150^\circ} \text{ В}.$$

3. Розрахуємо фазні струми:

$$\underline{I}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{\underline{U}_{\hat{a}\hat{a}}}{\underline{Z}_{\hat{a}\hat{a}}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 0 \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{b\tilde{n}}}{\underline{Z}_{b\tilde{n}}} = \frac{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = -5 - j \cdot 8,66 \text{ А},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{\tilde{n}a}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 150^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = -5 + j \cdot 8,66 \text{ А}.$$

4. За першим законом Кірхгофа визначимо лінійні струми кола:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{\hat{a}\hat{b}} - \underline{I}_{\tilde{n}a} = 10 - (-5 + j \cdot 8,66) = 15 - j \cdot 8,66 = 17,32 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{\hat{A}} = \underline{I}_{b\tilde{n}} - \underline{I}_{\hat{a}\hat{b}} = -5 - j \cdot 8,66 - 10 = -15 - j \cdot 8,66 = 17,32 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{\tilde{n}a} - \underline{I}_{b\tilde{n}} = -5 + j \cdot 8,66 + 5 + j \cdot 8,66 = j \cdot 17,32 = 17,32 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ А}.$$

5. Розрахуємо середню повну потужність, що віддається джерелами живлення: $S_{дж} = 3 \cdot U_{\phi} \cdot I_{л} = \sqrt{3} \cdot U_{л} \cdot I_{л} = \sqrt{3} \cdot 100 \cdot 17,32 = 3000 \text{ ВА}$.

Активна потужність $P_{дж} = S_{дж} \cdot \cos \varphi = 3000 \cdot \cos 30^{\circ} = 2598,07 \text{ Вт}$.

Реактивна потужність $Q_{дж} = S_{дж} \cdot \sin \varphi = 3000 \cdot \sin 30^{\circ} = 1500 \text{ ВАр}$.

6. Визначимо потужність, що споживає навантаження $\tilde{S}_H = 3 \cdot I_{ab}^2 \cdot Z_{ab} = 3 \cdot 10^2 \cdot (8,66 + j \cdot 5) = 2598 + j \cdot 1500 \text{ ВА} \Rightarrow P_H = 2598 \text{ Вт}$, $Q_H = 1500 \text{ ВАр}$. $\tilde{S}_{дж} \approx \tilde{S}_H$, тобто баланс потужностей виконується.

7. Побудуємо векторно-топографічну діаграму струмів і напруг. У вибраному масштабі напруги $m_U = 20 \text{ В/см}$ побудуємо симетричну систему фазних напруг, що відстають одна від одної на кут 120° (рис.6.11). З'єднаємо кінці векторів фазних напруг, точки A, B, C , і отримаємо трикутник лінійних напруг (рис.6.11). У вибраному масштабі струму $m_I = 3 \text{ А/см}$ відносно точки A побудуємо вектор лінійного струму фази A \underline{I}_A як векторну суму векторів \underline{I}_{ab} та $-\underline{I}_{ca}$. (рис.6.11). Так само побудуємо вектори струмів \underline{I}_B і \underline{I}_C відносно точок B і C відповідно.

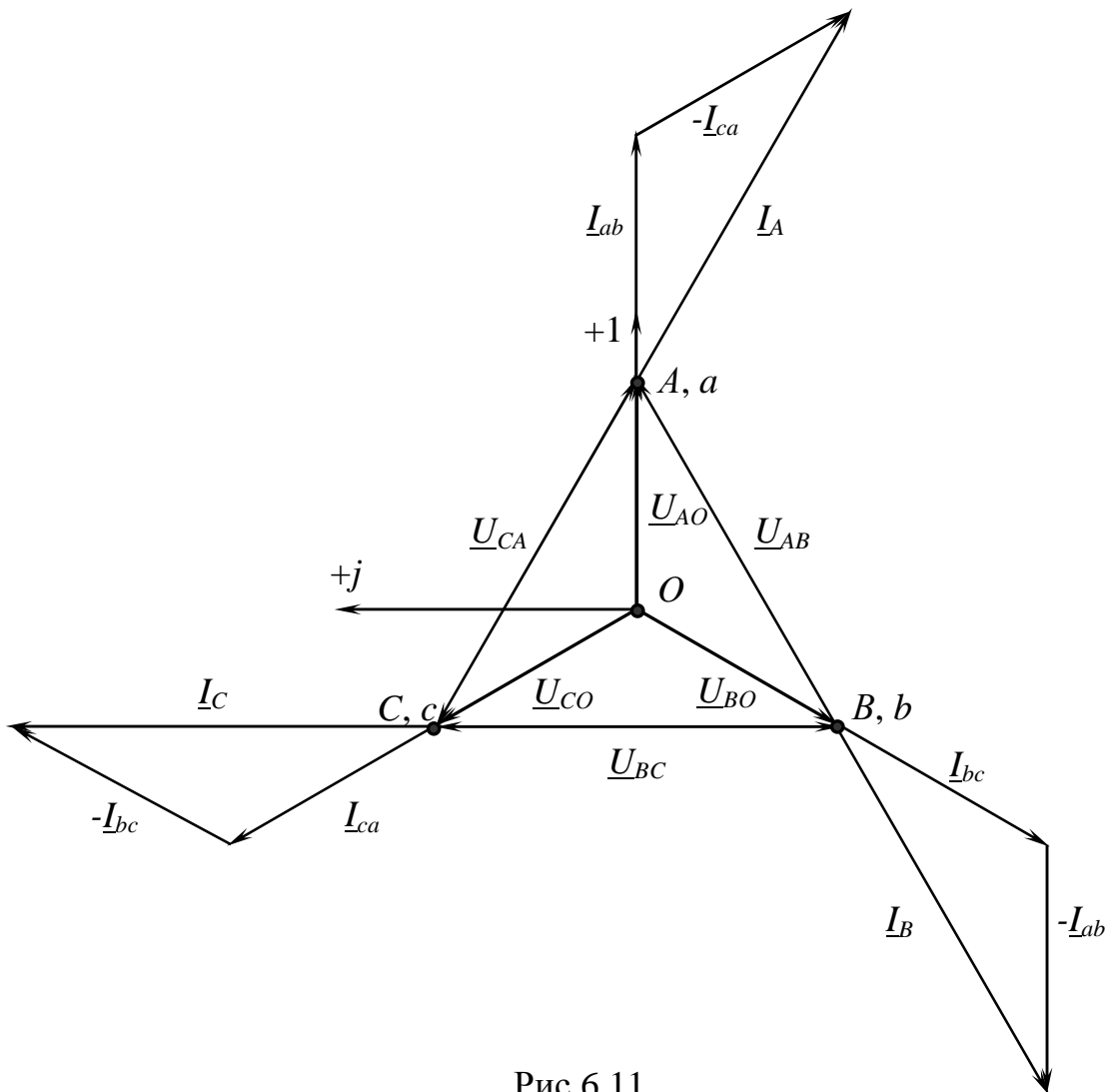


Рис.6.11

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник.- М.: Гардарики, 2002. – 640 с.
3. Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка: теорія і практикум: Підручник. – К.: Каравела, 2004. - 440 с.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник. - М.: Гардарики, 2001. – 317 с.
5. Перхач В.С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола. - К: Вища школа, 1992. – 439 с.
6. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса, в 3-х томах. – Л.: «Питер», 2004.
7. М.П. Рибалко, В.О.Есауленко, В.І. Костенко. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола: Підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003. -513 с.
8. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки. Ч. 1: Навч. посібник. – К.: «Магнолія плюс», 2004. - 224 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до практичних занять за темою «Розрахунок лінійних електричних кіл з джерелами синусоїдної напруги і струму» з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 - "Електротехніка та електротехнології", 6.050702 - "Електромеханіка", 6.030601 - "Менеджмент").

Укладачі: Яна Борисівна Форкун,
Дмитро Васильович Тугай

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009, поз.316М

Підп. до друку 16 .06 .2009 р.	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк.арк. 1,8	Обл.-вид. арк. 2,0
Замовл. № .	Тираж 100 прим.	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ

61002, Харків, вул. Революції, 12
