ною, слід ввести поняття "будівля (чи споруда) обмежено придатна до нормальної експлуатації" з встановленням строку її переведення в стан II чи навіть I. Такий підхід повинен бути використаний для конструкцій, які мають або виконують роль "гарячого" чи "холодного" резерву конструкцій. При цьому, звичайно, імовірність настання одного з граничних станів у наперед заданому відрізку часу не повинна перевищувати прийняту (для будівельних конструкцій 0,95) величину.

Запропонований підхід до визначення технічного стану будівельних конструкцій дозволяє більш точно описати їх подальшу роботу і більш надійно експлуатувати будівлі та споруди.

1.Нормативні документи з питань обстежень, паспортизації, безпечної та надійної експлуатації виробничих будівель і споруд / Державний комітет будівництва, архітектури та житлової політики України, Держнаглядохоронпраці України. – К., 1997. – 145 с.

2.Ройтман А.Г. Надежность конструкций эксплуатируемых зданий. – М.: Стройиздат, 1985. – 175 с.

3.Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1971. – 256 с.

Отримано 24.01.2000

УДК 624.072.33

М.Г.ЧЕРНЕНКО, канд. техн. наук
Харківська державна академія залізничного транспорту

БАГАТОВИМІРНА БІФУРКАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ У ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ СИМЕТРІЄЮ

Узагальнюється підхід до аналізу числа оптимальних розв'язків у задачах оптимізації конструкцій із симетрією, запропонований в [2], на випадок багатовимірної біфуркації.

Розглядається задача мінімізації теоретичної маси плоских статично невизначних балок і рам, що задовольняють умовам міцності за нормальними напруженнями:

$$f_j(I_1,\dots,I_n,W_1,\dots,W_n,A_1,\dots,A_n)\le 0\,,\ j=1,2,\dots,s\,. \qquad (1)$$

Шляхом введення функціональних залежностей між геометричними характеристиками перерізу для кожного стержня, наприклад, у вигляді $I_i = I_{i0}w_i^{\psi_i}$ і $A_i = A_{i0}w_i^{\eta_i}$, обмеження (1) можна записати в просторі моментів опору перерізів стержнів:

$$f_j(W_1,\dots,W_n)\le 0\,,\ j=1,2,\dots,s\,, \qquad (2)$$

де w_i – відносний момент опору перерізу i-го стержня: $w_i = W_i/W_{i0}$; I_{i0}, W_{i0} і A_{i0} – одиниці довжини відповідно на осях

OI_i, OW_i та OA_i; ψ_i і η_i – параметри функціонального зв'язку. В подальшому припускається, що функціональний зв'язок між геометричними характеристиками перерізів є однаковим для всіх стержнів системи.

Якщо число обмежень міцності, що виконуються як строгі рівності, дорівнює числу змінних проектування n, то статично невизначна система вважається рівноміцною, інакше вона нерівноміцна.

Для симетричних систем застосування деякої операції симетрії викликає перестановку змінних проектування у функціях обмежень, що еквівалентно переходу до іншої функції обмежень. У подальшому розглядається випадок, коли вказана властивість виконується для всіх функцій обмежень.

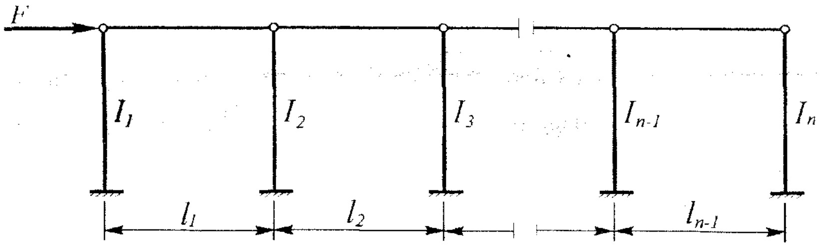
Будь-який оптимальний розв'язок повинен задовольняти необхідним ознакам екстремуму. У випадку, коли цей розв'язок є рівноміцна система, він за відсутності конструктивних обмежень на розміри перерізів стержнів задовольняє обмеженням міцності (2) як строгим рівностям і системі

$$B^{\mathrm{T}}u + \eta g = 0\,, \tag{3}$$

де B – матриця чутливості обмежень міцності до змінних проектування $W_1, \ldots, W_n$: $B = (P\psi - E)$; P – матриця чутливості внутрішніх сил, обчислена в просторі моментів інерції перерізів стержнів; E – одинична матриця; ψ – параметр функціонального зв'язку; u – стовпець множників Лагранжа; g – стовпець з елементами g_i, де g_i – теоретична маса стержня з i-ю змінною проектування.

У подальшому досліджується залежність оптимальних розв'язків від параметра ψ. При значенні параметра $\psi^* = 1$ в симетричних системах матриця B стає виродженою, тобто можливе явище біфуркації оптимального розв'язку. Особливість структури допустимої області для симетричних систем, зокрема, при відсутності поздовжніх сил полягає в тому, що при біфуркаційному значенні параметра ψ^* обмеження міцності стержнів є лінійними функціями змінних проектування $W_1, \ldots, W_n$, а їх границі співпадають для всіх обмежень. Лінії рівних значень функції теоретичної маси системи паралельні границі допустимої області. Тому при біфуркації в системах з симетрією задача оптимізації має нескінченне число оптимальних розв'язків.

Коранг матриці B визначає розмірність біфуркаційної задачі і в деяких задачах з симетрією може бути значним. На рисунку зображена схема одноповерхової багатопрольотної рами, де при нескінченній поздовжній жорсткості ригелів ця розмірність співпадає з числом прольотів.



Оскільки матриця чутливості B обмежень міцності в таких системах симетрична, то власні вектори y_i і z_k, що належать її нульовим власним значенням, при $i = k$ співпадають, а при $i \neq k$ ортогональні. Вкажемо на важливу властивість власних векторів матриці B: власні вектори y_1 і z_1 відповідають системі із заданим числом стержнів, а власні вектори y_2 і z_2 – системі з числом стержнів на один менше, ніж задана.

Надалі обмежимося розглядом систем, в яких виникає двовимірна біфуркація оптимального розв'язку. При обчисленні приростів змінних проектування будемо враховувати частинні похідні за змінними проектування і параметром ψ лише до другого порядку включно, тобто

$$\overline{w} = \overline{w}_{001}\lambda + \overline{w}_{002}\lambda^2 + \overline{w}_{100}\xi_1 + \overline{w}_{010}\xi_2 + \overline{w}_{101}\xi_1\lambda + \overline{w}_{011}\xi_2\lambda +$$
$$+ \overline{w}_{110}\xi_1\xi_2 + \overline{w}_{200}\xi_1^2 + \overline{w}_{020}\xi_2^2 + \ldots, \qquad (4)$$

де $\overline{w}$ – стовпець приростів відносних моментів опору з елементами $\overline{w}_i = (W_i - W_i^*)/W_i^*$; W_i^* – біфуркаційне значення моменту опору стержня з i-ю змінною проектування; λ – прирощення параметра функціонального зв'язку: $\lambda = \psi - \psi^*$; ξ_1 і ξ_2 – допоміжні величини.

У загальному випадку допоміжні величини ξ_1 і ξ_2 визначаються з рівняння розгалуження [1]

$$L^{(i)}_{200}\xi_1^2 + L^{(i)}_{020}\xi_2^2 + L^{(i)}_{110}\xi_1\xi_2 + L^{(i)}_{101}\xi_1\lambda + L^{(i)}_{011}\xi_2\lambda + L^{(i)}_{001}\lambda + L^{(i)}_{002}\lambda^2 = 0, \qquad (5)$$

$i = 1, 2.$

Для симетричних конструкцій система (5) набуває вигляду

$$L_{101}^{(1)}\xi_1\lambda = 0; \tag{6}$$

$$L_{011}^{(2)}\xi_2\lambda = 0. \tag{7}$$

Коефіцієнти $L_{200}^{(i)}$, $L_{020}^{(i)}$ та $L_{110}^{(i)}$, $i = 1, 2$ рівняння розгалуження (5) дорівнюють нулю внаслідок лінійності обмежень міцності при біфуркаційному значенні параметра ψ^*. Коефіцієнти $L_{001}^{(i)}$ та $L_{002}^{(i)}$ дорівнюють нулю внаслідок симетрії системи, а коефіцієнти $L_{101}^{(2)}$ і $L_{011}^{(1)}$ – внаслідок ортогональності власних векторів y_i і z_k при $i \neq k$. З коефіцієнтів ряду (4) ненульовими є $\overline{w}_{100} = y_1$, $\overline{w}_{010} = y_2$, $\overline{w}_{101}$ і $\overline{w}_{011}$, тобто вираз для прирощення змінних проектування у випадку симетричних систем має вигляд

$$\overline{w} = \overline{w}_{100}\xi_1 + \overline{w}_{010}\xi_2 + \overline{w}_{101}\xi_1\lambda + \overline{w}_{011}\xi_2\lambda. \tag{8}$$

Відносно розв'язків системи (6)...(7) існує та сама альтернатива, як і в одновимірному випадку [2]: або $\lambda \neq 0$, тоді $\xi_1 = 0$ і $\xi_2 = 0$; або $\lambda = 0$, тоді $\xi_1 \neq 0$ і $\xi_2 \neq 0$.

У першому випадку згідно з формулою (8) $\overline{w} = 0$, тобто при продовженні за параметром λ розв'язок у вигляді симетричної системи є нерухомою точкою. У другому випадку прирощення змінних проектування мають вигляд

$$\overline{w} = \overline{w}_{100}\xi_1 + \overline{w}_{010}\xi_2, \tag{9}$$

тобто рух робочої точки в просторі змінних проектування відбувається в біфуркаційній площині. Будь-яке відхилення розв'язку від симетричної системи приводить до того, що деякі інші коефіцієнти системи (5) стають ненульовими. Маємо

$$L_{101}^{(1)}\xi_1\lambda + L_{001}^{(1)}\lambda + L_{002}^{(1)}\lambda^2 = 0;$$

$$L_{011}^{(2)}\xi_2\lambda + L_{001}^{(2)}\lambda + L_{002}^{(2)}\lambda^2 = 0,$$

звідки випливає, що при $\lambda = 0$ допоміжні величини ξ_1 і ξ_2 приймають довільні значення.

Розглянемо напрямки, що приводять до систем з числом змінних проектування на одиницю меншим, ніж у заданій системі. У двовимірному випадку біфуркації оптимального розв'язку з точки, що відповідає симетричній системі, існують три таких напрямки. Для цих напрямків рівняння розгалуження (5) набуває вигляду

$$L_{101}^{(1)}\xi_1\lambda + L_{001}^{(1)}\lambda + L_{002}^{(1)}\lambda^2 = 0,$$

$$L_{011}^{(2)}\xi_2\lambda = 0.$$

Можна показати, що при $\lambda = 0$ напрямок руху робочої точки до виродженої системи визначається тільки власним вектором y_1, тобто у формулі (9) треба взяти $\xi_2 = 0$. Оскільки за власний вектор y_1 можна прийняти будь-який стовпець матриці P, мають місце три таких напрямки.

Кожна вироджена система знаходиться у біфуркаційній площині і для визначення подальших розв'язків треба розглядати задачу оптимізації з корангом, на одиницю меншим, ніж попередня. У результаті розгляду ланцюга біфуркацій можна знайти усі локальні оптимальні розв'язки. Їх загальне число складає

$$N = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Подальший аналіз розв'язків у двовимірному випадку біфуркації показує, що при $\psi > \psi^*$ існує один розв'язок у вигляді симетричної рівноміцної статично невизначної системи, а при наявності конструктивних обмежень на мінімальну величину моменту опору перерізів стержнів – шість розв'язків у вигляді нерівноміцних статично невизначних систем.

1.Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. –М.: Наука, 1969. –528 с.

2.Черненко М. Г. Біфуркація розв'язків у задачах оптимізації конструкцій з симетрією // Коммунальное хозяйство городов: Науч.-техн. сб. Вып. 21. – К.: Техніка, 2000. – С.141-144.

Отримано 27.01.2000