МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Ю.Є. Печеніжський,
С.О. Станішевський,
В.С.Рухляда

Методичні вказівки

для практичних, самостійних та контрольних робіт

З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

(для студентів 2 курсу заочної форми навчання за напрямком підготовки 6.030504 "Економіка підприємства")

Харків - ХНАМГ - 2009

УДК 519.2

Методичні вказівки для практичних, самостійних та контрольних робіт з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Укл.: Ю.Є. Печеніжський, С.О. Станішевський, В.С.Рухляда. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 64 с.

Укладачі: Ю.Є. Печеніжський,
С.О. Станішевський,
В.С.Рухляда

Рецензент: М. П. Данилевський

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 7 від 11 лютого 2009 р.

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки написані відповідно до програми по теорії ймовірностей, затвердженої Міністерством освіти і науки України, що орієнтована на студентів факультетів післядипломної освіти та заочного навчання.

Методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості, список літератури й рекомендації, якими студентам радять скористатися при вивченні курсу.

Щоб допомогти студентові опанувати практичну частину курсу, у кожному розділі дається рішення відповідних задач з теорії імовірності та математичної статистики.

Наведені приклади не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання програми, але і є зразками для рішення задач *контрольної роботи*. При її виконанні й оформленні необхідно дотримуватися наступних правил:

у заголовку контрольної роботи повинно бути чітко написане прізвище студента і його ініціали;

номер залікової книжки й відповідного варіанта; дата відсилання роботи в академію;

роботу виконують в окремому зошиті, залишаючи на кожній сторінці поле для позначок рецензента;

задачі, їхні умови й рішення варто розташовувати у тому порядку, у якому вони дані в завданні;

рішення задачі повинне супроводжуватися необхідними поясненнями й посиланнями на теоретичні положення.

Одержавши прорецензовану контрольну роботу, студент повинен у найкоротший строк виправити позначені рецензентом помилки, якщо такі є, виконати всі його пропозиції й повернути її викладачеві за відповідною адресою.

1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

У розділі елементарної математики, що називається *комбінаторикою,* вирішуються деякі задачі, пов'язані з розглядом *цілочислених множин, що* складаються з *обмеженої кількості додатних* елементів, і утворенням різних *комбінацій* з елементів цих множин. Наприклад, якщо взяти 10 різних цифр 0, 1, 2, 3, ... , 9 і утворювати з них комбінації, то будемо одержувати різні, числа, наприклад, 345, 534, 1036, 5671, 45 і т.п.

Видно, що деякі з таких комбінацій відрізняються тільки порядком розташування цифр (наприклад, 345 й 534), інші – порядком розташування і самими цифрами (наприклад, 1036 й 5671), треті - розрізняються кількістю цифр (наприклад, 345 й 45).

Таким чином, отримані комбінації цифр задовольняють різним умовам. Залежно від правил складання можна виділити три типи комбінацій: *перестановки, розміщення, сполучення.* Розглянемо їх окремо.

1.1. Перестановки

Комбінації з n елементів, які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів, називаються перестановками.

Перестановки позначаються символом P_n, де n — число елементів, що входять у кожну перестановку.

Приклад. Нехай дані три букви *A, B, C.* Складемо всі можливі комбінації із цих букв*: ABC; ACB*; *BCA; CAB; CBA; BAC*. Видно, що їх шість і вони відрізняються друг від друга тільки порядком розташування букв.

Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три букви. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна із тих що залишилися. Виходить, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = P_3$, *але* $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$. Прийшли к відомому у математиці поняттю факторіала.

Добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно називають n-факторіалом і пишуть:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot ... \cdot (n - 1) \cdot n$, при цьому вважають $0! = 1$ і $n \in N$.

Основна властивість факторіала: $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

Число перестановок обчислюємо по формулі

$$P_n = n! \qquad (1.1)$$

Так, число перестановок із трьох елементів становить $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, що співпадає з результатом розглянутого вище приклада.

1.2. Розміщення

Комбінації з n елементів по m елементів, які відрізняються одна від одної або самими елементами або їх порядком, називаються розміщеннями.

Розміщення позначаються символом A_n^m, де *n* - число всіх наявних елементів, *m* - число елементів у кожній комбінації. При цьому вважають, що $m \le n$. Число розміщень можна обчислити за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1), \qquad \text{де } 0 \le m \le n; \qquad m, n \in N, \tag{1.2}$$

тобто *число всіх можливих розміщень із n елементів по m дорівнює добутку m послідовних цілих чисел, з яких більше є n.* Умовилися вважати $A_n^0 = 1$.

<u>Приклад</u>. Нехай є чотири букви *A, B, C, D*. Склавши всі комбінації тільки із двох букв, одержимо: *AB, AC, AD; BA, BP, BD; CA, CB, CD; DA, DB, DC.*

Видно, що всі отримані комбінації (їх 12) відрізняються або буквами, або їхнім порядком (комбінації *BA* й *AB* вважаються різними).

По формулі (1.2) $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, що збігається з результатом наведеного приклада. Тут на першому місці одна із всіх наявних букв ($n=4$), а на другому – інші букви, ($n-1=3$) , усього є $4 \cdot 3=12$ різних комбінацій.

Формулу (1.2) можна записати у факторіальній формі:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.3}$$

Основні властивості розміщень: 1) $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$; 2) $A_n^n = P_n = n!$

1.3. Сполучення

Сполученнями називаються всі можливі комбінації з n елементів по m, які відрізняються одна від одної принаймні хоча б одним елементом ($m, n \in N$ *і* $n \ge m$*).*

В загальному випадку *число сполучень із n елементів по m дорівнює числу розміщень з n елементів по m, діленому на число перестановок з m елементів:* $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$. Використовуючи формули (1.1) і (1.3), одержимо формулу числа сполучень у вигляді:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}. \tag{1.4}$$

Основні властивості сполучень:

$$C_n^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}; \qquad\qquad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

<u>Приклад</u>. Із чотирьох різних букв *A, B, C, D* можна скласти наступні комбінації, що відрізняються друг від друга хоча б одним елементом: *AB, AC,AD, BP, BD, CD.* Виходить, що число сполучень із чотирьох елементів по

два дорівнює 6. Це коротко записується так: $C_4^2 = 6$. Тепер застосуємо формулу (1.4). У кожній (із шести) комбінацій зробимо перестановку елементів:

AB, AC, AD, BP, BD, CD;

BA, CA, DA, PB, DB, DC.

У результаті ми одержали 12 комбінацій, а це розміщення із чотирьох елементів по два. Отже, $C_4^2 \cdot P_2 = A_4^2$, звідки $C_4^2 = \dfrac{A_4^2}{P_2}$.

У даному прикладі $C_4^2 = \dfrac{12}{2} = 6$.

1.4. Вправи

1. *Спростити:* а) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$; б) $\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{n!}$.

Рішення. З визначення факторіала маємо: (n+1)!= (n+1)·n!, тоді:

а) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+1)\cdot n!}{n!} = n+1$; б) $\dfrac{1}{n!\cdot(n+1)} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1+(n+1)}{n!\,(n+1)} = \dfrac{n+2}{n!\,(n+1)} = \dfrac{n+2}{(n+1)!}$.

2. Обчислити: а) $7! - 5!$; б) $\dfrac{7!+5!}{6!}$.

Рішення. Оскільки $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ и $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, то можна винести 5! за душки, тоді отримаємо:

а) $5! \cdot (6\cdot 7 - 1) = 5! \cdot 41 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 41 = 120 \cdot 41 = 4920;$

б) $\dfrac{5!\,(6\cdot 7+1)}{6!} = \dfrac{5!\cdot 43}{5!\cdot 6} = \dfrac{43}{6}$.

3. Приклад. Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з 9 нападаючих, 5 захисників і 3 воротарів, якщо до складу команди повинно ввійти 3 нападаючих, 2 захисника і 1 воротар?

Рішення. З 9 нападаючих можна вибрати трьох C_9^3 різними способами. З 5 захисників можна вибрати двох C_5^2 різними способами. З 3 воротарів можна вибрати одного C_3^1 способами. Комбінуючи кожну трійку нападаючих з парою захисників, одержуємо $C_9^3 \cdot C_5^2$ різних команд *без воротарів*. Комбінуючи ці команди з кожним з воротарів, маємо

$$C_9^3 \cdot C_5^2 \cdot 3 = \frac{9!\cdot 5!\cdot 3}{6!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 3!\cdot 4\cdot 5\cdot 3}{6!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 1\cdot 2} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 2\cdot 5\cdot 3}{3!} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 5 = 2520$$

різних команд.

4. Приклад. Розв’язати рівняння $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 72$.

Рішення. $(n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)! = (n+2)\cdot(n+1)\cdot n!$

Тоді: $\dfrac{(n+2)!}{n!} = (n+2)\cdot(n+1)$, або

$(n+2)\cdot(n+1)=72$. Звідси $n^2 + 3n - 70 = 0$, $n_1 = -10$, $n_2 = 7$.

Тому що $n\in N$, то n_1 не задовольняє вихідному рівнянню.

Відповідь: $n=7$.

5. Приклад. Розв'язати рівняння: $\dfrac{A_{x+1}^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-1}} = 15$.

Рішення. За умовою: $\{x+1\ge 0, x-1\ge 0, x-4\ge 0\} \Rightarrow x\ge 4, x\in N$.

Використовуючи формули (1.1) і (1.3) для числа розміщень і перестановок, маємо:

$\dfrac{(x+1)!\,(x-4)!}{(x-3)!\cdot(x-1)!} = 15$; $\quad \dfrac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)!\cdot(x-4)!}{(x-3)\cdot(x-4)!\cdot(x-1)!} = 15$; $\quad \dfrac{(x+1)\cdot x}{(x-3)} = 15$;

$x\cdot(x+1) = 15x-15$; $\quad x^2 - 14x + 15 = 0$; $\quad x_1 = 5$; $x_2 = 9$.

Відповідь: $x_1 = 5$ або $x_2 = 9$.

6. Приклад. З 10 студентів призначають двох чергових. Скількома способами можна це зробити, якщо:

1) один із призначених стає старшим;

2) старших немає?

Рішення.

Зрозуміло, що якщо один зі студентів - старший, то істотний порядок (у відомості чергових старший, наприклад, ставиться на перше місце) і шукана кількість способів дорівнює числу *розміщень* із *10* елементів по *2*, тобто $A_{10}^2 = 10\cdot 9 = 90$. Отже, чергових можна призначити *90* способами. Якщо ж старших немає, то порядок запису не має сенсу і шукана кількість способів дорівнює числу *сполучень* із *10* елементів по *2*, тобто $C_{10}^2 = \dfrac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$.

Відповідь: 1) *90*; 2) *45*.

7. Приклад. Вирішити рівняння $C_{x+1}^{x-1} = 21$, $x\in N$.

Рішення. На підставі властивості сполучення $C_n^m = C_n^{n-m}$ одержуємо:

$C_{x+1}^{x-1} = C_{x+1}^{x+1-x+1} = C_{x+1}^2 = \dfrac{(x+1)\cdot x}{1\cdot 2} = 21$, звідки $x^2+x-42=0$, $x_1=6$; $x_2=-7$. За умовою $x\in N$.

Відповідь: $x = 6$.

8. Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 5:5:3$, $\quad (x\ge y)$.

Рішення: Умова задачі рівносильна запису:

$$\begin{cases} C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^{y} = 5:5, \\ C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y-1} = 5:3. \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^{y}, \\ 3 \cdot C_{x+1}^{y} = 5 \cdot C_{x+1}^{y-1}. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (1.4), запишемо:

$$C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^{x-y} = \frac{(x+1)!}{(x-y)! \cdot (1+y)!}; \qquad C_{x+1}^{y} = C_{x+1}^{x-y+1} = \frac{(x+1)!}{(x-y+1)! \cdot y!};$$

$$C_{x+1}^{y-1} = C_{x+1}^{x-y+2} = \frac{(x+1)!}{(x-y+2)! \cdot (y-1)!}.$$

Підставляючи ці вирази у систему, маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)!}{(x-y)! \cdot (y+1)!} = \dfrac{(x+1)!}{(x-y+1)! \cdot y!}; \\ 3 \cdot \dfrac{(x+1)!}{(x-y+1)! \cdot y!} = 5 \cdot \dfrac{(x+1)!}{(x-y+2)! \cdot (y-1)!}. \end{cases}$$

Звідки:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x-y+1}; \\ \dfrac{3}{y} = \dfrac{5}{x-y+2}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+1 = y+1; \\ 3x-3y+6 = 5y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y; \\ 3x-8y. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6; \\ y = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 6, y = 3$.

2. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей — це наука, що вивчає масові явища.

Масовим називають таке явище, що властиво великій кількості рівноправних об'єктів. Під рівноправними об'єктами розуміють результати досліджень у різних галузях природознавства й техніки, які повторюються при однакових умовах (одиничні постріли, окремі виміри і інше).

2.1. Основні визначення

Випробуванням (або дослідженням, спостереженням) називається здійснення якого-небудь певного комплексу умов, що може бути повторений скільки завгодно разів.

Явище, про яке можна говорити, що воно здійснюється або не здійснюється під час проведення випробування, називається *подією*.

Звичайно *події позначають* великими літерами латинського алфавіту *A*, *B*, *C* і інше.

Якщо подія *A* відбувається при випробуванні обов'язково, то її називають *достовірною*.

Наприклад, в урні є тільки білі кулі. Тоді наявність білої кулі при однократному її вийманні з урни відбувається обов’язково і тому ця подія достовірна.

Якщо подія *A* свідомо не може відбутися при випробуванні, то її називають *неможливою*. Наприклад, добування чорної кулі з урни, у якій перебувають тільки білі, є неможливою подією.

Поява грані з номером 8 при киданні гральної кістки також буде неможливою подією. Відомо, що гральна кістка має шість граней з відповідними номерами.

Подія називається *випадковою*, якщо в результаті випробування вона може відбутися або не відбутися.

При киданні гральної кістки поява грані з номером 6 буде випадковою подією, тому що при киданні можуть з'являтися грані і з іншими номерами.

Якщо в урні є білі і чорні кулі, то добування чорної кулі також буде випадковою подією (тому що можна витягти й білу кулю). До випадкової треба віднести також подію, яка полягає в тому, що навмання взяте число із сукупності цілих чисел ділиться на 2, і інше.

Дві події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає можливість появи іншої при тому ж випробуванні. Наприклад, кинемо один раз монету. Поява герба виключає появу цифри. Тому події «з'явився герб» і «з'явилася цифра» - несумісні.

Події називаються *єдино можливими*, якщо при випробуванні одна з них і тільки одна відбудеться обов'язково. Наприклад, з урни, де є білі й чорні кулі, будемо витягати одночасно дві кулі. Обов'язково відбудеться одна і лише одна з таких подій: «обидві кулі будуть білими», «обидві кулі будуть чорними», «одна з куль буде білою, а інша - чорною». Ці події будуть єдино можливими.

Якщо стрілок робить постріл по мішені, обов'язково відбудеться, одна і тільки одна з наступних подій: «стрілок влучив у мішень» і «стрілок не влучив у мішень». Тут маємо дві єдино можливі події.

Якщо при випробуванні може відбутися кілька подій і немає підстави вважати, що поява кожної з них більше можлива, чим поява іншої, то такі події називають *рівноможливими*. Наприклад, поява того або іншого номера при киданні гральної кістки буде рівноможливою подією, тому що ми вважаємо, що кістка виготовлена з однорідного матеріалу, має форму правильного багатогранника, а номера на гранях не впливають на появу тієї або іншої грані.

Якщо в урні є 5 куль, які відрізняються друг від друга лише кольорами (нехай це будуть червона, жовта, блакитна, зелена та біла кулі), то при вийманні з урни однієї з них у нас немає підстав вважати, що, наприклад, поява жовтої кулі більш можлива, ніж поява кулі іншого кольору. Поява кожної з куль у цьому випадку - подія рівноможлива.

Дві несумісних і єдино можливих події називаються *протилежними*.

Подію, *протилежну* події A, позначають через $\overline{A}$. Прикладами протилежних подій можуть бути влучення і промах при пострілі; поява парного і непарного номера грані при киданні гральної кістки.

Поняття ймовірності можна ввести, розглянувши, наприклад, так звану «задачу про урну».

В урні знаходяться 9 куль однакового розміру, з них 4-червоних, 3-жовтих і 2-білих. Очевидно, при вийманні з урни однієї кулі, поява червоної кулі більш можлива, ніж жовтої, і тим більш можлива, чим білої.

Виявляється, що кожній з подій: «вийняли червону кулю», «вийняли жовту кулю», «вийняли білу кулю» можна дати числову характеристику. Для цього пронумеруємо кулі в такий спосіб: червоні позначимо номерами 1, 2, 3, 4, а жовті - 5, 6, 7 і білі - 8, 9 відповідно.

Позначимо подію «вийняли кулю з номером i»через E_i (i=1, 2, ... , 9). Внаслідок випробування (виймання кулі з урни) одна з дев'яти подій наступить із необхідністю, тобто маємо сукупність *єдино можливих* подій. Крім цього, події будуть *попарно несумісними*, тому що коли, наприклад, наступає подія E_3, то інша подія при тому же випробуванні наступити не може. Події ці будуть також *рівноможливими*, тому що немає підстав стверджувати, що, наприклад, подія E_2 більш можлива, ніж подія E_9.

Випробування, при якому наступає подія A, називається *йому сприятлива*.

Тому E_1, E_2, E_3, E_4 сприятливі події «вийнята червона куля», а E_5, E_6, E_7, E_8, E_9, ставляться до результатів їй несприятливих.

Ймовірністю події А називають відношення числа сприятливих цій події випробувань до загального числа всіх можливих випробувань.

Таким чином, якщо n є число всіх можливих випробувань, а m-число випробувань, сприятливих події A, то, позначивши ймовірність події A через $P(A)$, будемо мати:

$$P(A)=m/n. \tag{2.1}$$

Цю величину називають класичною ймовірністю.

Легко обчислити ймовірності добування червоної, жовтої й білої куль. Позначивши ці події відповідно через A, B, C, знаходимо:

$$P(A)=4/9;\ P(B)=3/9;\ P(C)=2/9.$$

Справді, із всіх дев'яти випробувань події A сприяють 4, події B—3, події C—2 випробування.

Легко також обчислюється, наприклад, імовірність появи грані з парним номером при киданні гральної кістки. Цій події (позначимо її через A) сприяє поява грані з номером 2, поява грані з номером 4 і - з номером 6. Тому по формулі (2.1) $P(A)=3/6=1/2$.

Імовірність *достовірної* події дорівнює одиниці, оскільки такій події сприяють *всі* можливі випробування.

Наприклад, в урні лежать лише 9 білих куль, то ймовірність витягти білу кулю дорівнює: $P(A)=9/9=1$. Дійсно, цій події сприяють всі 9 можливих випробувань.

Імовірність неможливої події дорівнює нулю, тому що неможливій події не сприяє *жодне* з можливих випробувань.

Справді, випадковій події A із всіх n можливих випробувань сприяє лише m випробувань. Причому $0<m<n$, тоді $0<m/n<1$, але це $0<P(A)<1$.

Таким чином, імовірність $P(A)$ будь-якої події A задовольняє співвідношенню:

$$0\le P(A)\le 1. \tag{2.2}$$

Нехай подія A має ймовірність $P(A)$. Тоді *протилежна* подія $\overline{A}$ буде мати ймовірність 1 - $P(A)$. Дійсно, якщо події A із всіх n випробувань сприяє m, то йому не сприяє $n-m$ випробувань (вони сприяють події $\overline{A}$). Тому

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A). \tag{2.3}$$

Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

Відносною частотою події А називають відношення числа випробувань, при яких наступає подія А, до загального числа випробувань.

Так, якщо n — число всіх зроблених випробувань, а подія A відбувається при m з них, то, позначивши відносну частоту події A через $W(A)$, будемо мати:

$$W(A) = m/n. \tag{2.4}$$

Відзначимо, що частота події задовольняє такому співвідношенню:

$$0 \le W(A) \le m/n.$$

Наприклад, якщо з 100 деталей відділом технічного контролю забраковано 5, то відносна частота появи бракованих деталей буде 0,05.

Тут $m = 5;\ n = 100$. Тому $W(A)=5/100=0{,}05$.

При невеликій кількості випробувань відносна частота події носить, загалом кажучи, випадковий характер. Спостереження показали, що зі збільшенням числа випробувань відносна частота події виявляє *властивість сталості:* вона усе менше відхиляється від деякого сталого числа.

Наприклад. При багаторазовому киданні монети частота появи герба незначно відхиляється від числа $0{,}5$ — імовірності цієї події.

Цю *сталу називають статистичною ймовірністю події*, а за її наближене значення беруть *відносну частоту події при досить великій кількості випробувань*..

Помітимо, що класичне визначення ймовірності не вимагає фактичного проведення випробувань, тоді як статистичне визначення передбачає їхнє виконання.

Подія *(А* або *В)* відбувається, якщо відбувається хоча б одна з сумісних подій *А, В*, називається *сумою* подій і позначається через $A+B$.

Подія *(А* і *В)* відбувається, якщо одночасно відбуваються обидві події А, В, називається *добутком* цих подій і позначається через АВ.

Імовірність події А, обчислена в припущенні, що подія В вже відбулася, називається *умовною* ймовірністю й позначається через $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Дві події називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них не залежить від появи або непояви іншої.

Теорема додавання. Імовірність появи хоча б однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі їхніх ймовірностей без імовірності їхньої спільної появи.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2.5)$$

Теорема множення. Імовірність спільної появи двох подій *А* і *В* дорівнює добутку ймовірності А на умовну ймовірність *В*, у припущенні, що подія А вже відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (2.6)$$

Якщо події незалежні і $P(B/A) = P(B)$, то

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.7)$$

Теорему множення можна узагальнити й на випадок більшого числа подій. Для трьох подій, наприклад, будемо мати:

$$P(ABC) = P(AB) \cdot P(C/AB) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB).$$

Наслідок з теорема додавання. Імовірність появи однієї із двох незалежних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (2.8)$$

Імовірність події *В*, що може відбутися лише тоді, коли відбудеться одна з *n* незалежних подій $A_1, A_2, ... A_n,$ які утворять повну групу, називається *повною ймовірністю* і обчислюється за формулою:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B/A_k). \qquad (2.9)$$

Імовірність появи події $A_i \ (i=\overline{1,n})$, при якому відбулась подія B, обчислюється за *формулою Бейеса:*

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P(B/A_k)}. \qquad (2.10)$$

Кілька подій утворюють *повну групу*, якщо поява хоча б однієї з них є достовірною подією.

2.2. Вправи

1. У шухляді письмового столу лежать 12 олівців однакової форми і розмірів, з яких 4 олівці - кольорові, а інші - прості. Яка ймовірність того, що, відкривши шухляду, навмання взятий олівець буде простий?

Рішення. Подію «взятий олівець простий» позначимо через *А*. Усього олівців - 12. Простих олівців - 8. Тому $m = 8$; $n = 12$.

За формулою маємо Р(А) = 8/12 = 2/3.

2. З 40 стандартних і 4 нестандартних деталей для контролю взято навмання вісім, які виявилися стандартними. Знайти ймовірність того, що наступна взята навмання деталь буде стандартною.

Рішення. Стандартних деталей залишилося в партії $40 - 8 = 32$; нестандартних — *4*. Усього залишилося $40 + 4 - 8 = 36$ деталей. Позначимо через *А* подію «деталь виявилася стандартною». Тоді $P(A) = 32/36 = 8/9$.

3. Яка ймовірність того, що при киданні двох гральних костей сума номерів граней, які припали, дорівнює семи?

Рішення. При киданні двох гральних костей з кожною гранню першої кістки може припасти будь-яка грань другої кістки. Тому число всіх можливих результатів випробування дорівнює: $n = 6 \cdot 6 = 36$.

Результати випробувань, які сприяють події «сума номерів, які припали, дорівнює семи» подані у таблиці. Очевидно, що їх шість. Отже тут $m = 6$:

1-я кістка	1	2	3	4	5	6
2-я кістка	6	5	4	3	2	1

За формулою (2.1) ймовірність дорівнює $P = m/n = 6/36 = 1/6$.

4. Маємо п'ять квитків вартістю по 30 коп., три квитка - по 65 коп. і два квитка - по 1 грн. Візьмемо навмання три квитки. Знайти ймовірність того, що: а) хоча б два із цих квитків мають однакову вартість, б) вартість трьох квитків дорівнює 1 грн. 60 коп.

Рішення. а) Подію «хоча б два із трьох узятих квитка мають однакову вартість» позначимо через *А*. Знайдемо ймовірність протилежної події $\overline{A}$. Число можливих випадків узяття трьох квитків з 10 дорівнює $C_{10}^{3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$. *Несприятливим* для події *А* будуть випадки, коли виявиться один квиток вартістю 30 коп. (їхнє число дорівнює $C_5^1 = 5$), один квиток вартістю 65 коп. (їхнє число дорівнює $C_3^1 = 3$) і один квиток вартістю 1 грн. (їхнє число дорівнює $C_2^1 = 2$). Тому число *несприятливих* події *А* випадків буде $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$. За формулою (2.1) маємо:

$$P(\overline{A}) = 30/120 = 1/4.$$

Імовірність же того, що хоча б два із трьох узятих квитків мають однакову вартість, дорівнює

$$P(A) = 1 - 1/4 = 3/4.$$

Рішення. б) Подію «вартість всіх трьох квитків дорівнює 1 грн. 60 коп.» позначимо через A. Ця подія може відбутися лише в тому випадку, коли два з узятих квитків будуть по 65 коп., а один квиток коштує 30 коп. (при цьому число сприятливих випадків буде дорівнювати: $C_3^2 \cdot C_5^1 = 3 \cdot 5 = 15$), або коли два з узятих квитків будуть коштувати по 30 коп., а один квиток коштує 1 грн. (при цьому число сприятливих випадків буде дорівнювати: $C_5^2 \cdot C_2^1 = 10 \cdot 2 = 20$). Тут треба додати сприятливі випадки і віднести їх до можливого числа випадків. Маємо:

$$P(A) = \frac{C_3^2 \cdot C_5^1 + C_5^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{15+20}{120} = \frac{7}{24}.$$

5. В урні лежать 6 білих і 4 чорних кулі. З урни беруть навмання 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони виявляться одного кольору?

Рішення. Позначимо через A подію «обидві кулі виявилися білими», а через B — «обидві кулі виявилися чорними». Ці події незалежні.

Число всіх можливих випробувань дорівнює числу пар, які можна утворити з 10 різних куль, тобто $C_6^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Число випробувань, сприятливих появі двох білих куль, дорівнює $C_6^2 = 15$, двох чорних — $C_4^2 = 6$. Отже, за формулою (2.8), маємо:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 15/45 + 6/45 = 7/15.$$

6. Виконується випробування агрегату, що складається із трьох паралельних частин, що дублюють одна іншу. За час t імовірність безвідмовної роботи І частині — *0,23*, ІІ— *0,27*, ІІІ — *0,32*. Знайти ймовірність виходу з ладу всього агрегату за час t.

Рішення. Позначимо через A подію «безвідмовна робота за час t І частини», через *B подію* «безвідмовна робота за час t ІІ частини», через C — подію «безвідмовна робота за час t ІІІ частини» і через D подію «безвідмовна робота всього агрегату за цей же час t». Тоді $D = A + B + C$. Тому що події A, B і C попарно незалежні. Отже $P(D) = P(A) + P(B) + P(C)$.

Імовірність виходу з ладу агрегату за час t дорівнює:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - (0{,}23 + 0{,}27 + 0{,}32) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18.$$

7. Імовірність складання іспиту студентом на п'ятірку дорівнює 0,3, четвірку — *0,45*, двійку — *0,1;* імовірність того, що він не з'явитися на іспит — *0,05*. Яка ймовірність того, що студент отримає позитивну оцінку?

Рішення. Очевидно, щоб одержати позитивну оцінку, студент повинен скласти іспит або на «5» або на «4» або на «3». Подію «одержати «5» позначимо через A, «одержати «4» — через B, «одержати «3» — через C, «одержати «2» — через D і «не з'явився на іспит» — через E. Уданому випадку розглянуті події несумісні і тому утворюють повну групу подій. Отже,

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 1.$$

Імовірність одержання трійки

$$P(C)= 1-0,3-0,45-0,1-0,05=0,1.$$

Імовірність одержати позитивну оцінку:

$$P(A+B+C)=P(A) +P(B)+P(C) =0,3+0,45+0,1 =0,85.$$

8. У відділ технічного контролю швейної фабрики представлені на огляд 80 костюмів, з яких 50 костюмів одного фасону, а 30 - іншого. Знайти ймовірність того, що взяті навмання для огляду два костюми виявляться різних фасонів.

Рішення. Позначимо через A подію «надійшов на огляд костюм першого фасону», через B — «надійшов на огляд костюм другого фасону», через С — «два костюми, що надійшли на огляд, є костюмами різних фасонів».

Подія C може відбутися тільки тоді, коли першою відбудеться подія A, а другою — подія B, або першою — подія B**,** а другою — подія A.

Імовірність появи події C визначимо за формулою: $P(C) =P[(AB)$ або $(BA)]$.

Події *A і B залежні*. Тому ймовірності $P (AB)$ і $P (BA)$ знаходимо за формулою (2.6): $P(AB) = P(A)\cdot P(B/A)$, $P(BA) = P(B)\cdot P(A/B)$.

У даному випадку:

$P(A) = 50/80$; $P(B) = 30/80$; $P(B/A) = 30/79$ і $P(A/B) = 50/79$.

Отже, $P(AB)= 50/80 \cdot 30/79 = 75/316$, $P(BA) = 30/80 \cdot 50/79 = 75/316$.

Події (AB) і (BA) незалежні.

За формулою (2.8) знаходимо $P(C)$:

$P(C)=P(AB)+P(BA) = 75/316 + 75/316 = 75/158.$

9. Продавець обслуговує у магазині два відділи. Імовірність того, що певний час йому доведеться відпускати товар з I відділу, дорівнює 0,8, з II - 0,7. Яка ймовірність того, що протягом певного часу продавець не буде відпускати товар?

Рішення. Позначимо події «продавець відпускає товар» з I відділу через A, а з II – через B. Тоді події «продавець не відпускає товар» з I і з II відділів будуть відповідно $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

$P(\overline{A}) = 1 – P(A) = 1 – 0,8 = 0,2$, $P(\overline{B}) = 1 – P(B) = 1 – 0,7 = 0,3$.

Події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ незалежні. Тому за формулою (2.7) маємо:

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,2 \cdot 0,3=0,06.$$

10. Три студенти складають іспит. Імовірність складання іспиту на «5» першим студентом дорівнює 0,2, другим - 0,5, третім - 0,3. Знайти ймовірність того, що всі три студенти складуть іспит на «5».

Позначимо через A подію «складання іспиту на «5» всіма студентами», через A_1 — «складання іспиту на «5» першим студентом», через A_2 —

«складання іспиту на «5» другим студентом», через A_3 — «складання іспиту на «5» третім студентом». Події A_1, A_2, A_3 незалежні, тоді $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Отже, за формулою (2.7) маємо:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,03.$$

11. Прилад складається із трьох вузлів, кожний з яких незалежно від інших може відмовити в роботі. Вихід з ладу хоча б одного вузла приводить до зупинки приладу в цілому. Імовірність безвідмовної роботи протягом 8 годин першого вузла дорівнює 0,8, другого - 0,9, третього - 0,7. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу протягом 8 годин.

Рішення. Нехай подія A — «безвідмовна робота приладу протягом 8 годин», A_1—«безвідмовна робота першого вузла», A_2—«безвідмовна робота другого вузла», A_3 — «безвідмовна робота третього вузла».

Очевидно, що $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, тому за формулою (2.7) маємо:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504.$$

12. Серед 50 електроламп є 3 нестандартні. Знайти ймовірність того, що дві одночасно навмання узяті електролампи виявляться нестандартними.

Рішення. Позначимо через A подію «перша узята навмання електролампа виявилася нестандартної», а через B — «друга електролампа нестандартна за умови, що перша електролампа виявилася нестандартною». Подія «дві взяті навмання лампи нестандартні» позначимо через C, тоді $C = AB$.

Отже, імовірність події С визначається за формулою (2.6):

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B/A),$$

де $P(A) = 3/50$, $P(B/A) = 2/49$. Отже,

$$P(C) = 3/50 \cdot 2/49 = 0,0024.$$

13. Імовірність того, що узята деталь виявиться нестандартною, дорівнює 0,1. Визначити, яку кількість деталей необхідно буде узяти, щоб з імовірністю 0,998 можна було стверджувати, що хоча б одна з них буде стандартною.

Рішення. Позначимо шукане число деталей через n, тоді ймовірність того, що n деталей будуть нестандартними, дорівнює $(0,1)^n$.

Наявність хоча б однієї стандартної деталі серед n узятих є протилежна подія з імовірністю: $1 - (0,1)^n$ і за умовою вона дорівнює, $0,998$. Приходимо до рівняння $1—(0,1)^n = 0,998$, звідки $(0,1)^n = 0,002$ и

$$n = \frac{lg\,0,002}{lg\,0,1} = \frac{0,3010 - 3}{-1} \approx 2,7\,.$$

Тому що сукупність деталей це ціле число, то потрібно взяти три деталі.

14. У цех збирання машин надходять деталі, які виробляють три автомати. Перший автомат дає 20%, другий - 30%, третій - 50% всіх деталей. Перший автомат має 0,2% нестандартних деталей, другий - 0,3%, третій - 0,1%. Знайти ймовірність того, що на зборку надійшла нестандартна деталь.

Рішення. Через A_1, A_2, A_3 позначимо події «деталь виготовлена відповідно на першому, другому і третьому автоматах».

$$P(A_1)=\frac{20\%}{100\%}=0,2;\ P(A_2)=\frac{30\%}{100\%}=0,3;\ P(A_3)=\frac{50\%}{100\%}=0,5.$$

Подію «деталь нестандартна» позначимо через B. Тоді за умовою задачі:

$$P(B/A_1)=\frac{0,2\%}{100\%}=0,002;\ P(B/A_2)=\frac{0,3\%}{100\%}=0,003;\ P(B/A_3)=\frac{0,1\%}{100\%}=0,001.$$

За формулою повної ймовірності (2.9) маємо:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B/A_i)=0,2\cdot 0,002+0,3\cdot 0,003+0,5\cdot 0,001=0,0018.$$

15. Десять студентів розв'язують задачу. З них 2 студента вчаться на «відмінно» (перша група), п'ять на «добре» (друга група) і три на «задовільно» (третя група). Імовірність того, що задача буде розв'язана студентом з першої групи, дорівнює 0,9; другої групи - 0,8; третьої групи - 0,5. Яка ймовірність розв'язання задачі одним зі студентів?

Рішення. Позначимо через A_1, A_2, A_3 події «задачу буде розв'язано відповідно студентом першої, другої, третьої групи». Подію «задача буде вирішена» позначимо через B. Тоді маємо умовну подію. Отже,

$$P(A_1)=0,2;\ P(A_2)=0,5;\ P(A_3)=0,3;\ P(B/A_1)=0,9;$$
$$P(B/A_2)=0,8;\ P(B/A_3)=0,5.$$

По формулі повної ймовірності (2.9) маємо:

$$P(B)=0,2\cdot 0,9+0,5\cdot 0,8+0,3\cdot 0,5=0,73.$$

16. На склад надходять електричні лампи. Перший завод поставляє 70%, а другий-30% усієї кількості ламп. Відомо, що перший завод випускає 95%, а другий-92% стандартної продукції. Узята навмання електролампа виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що ця лампа надійшла з першого заводу, із другого заводу.

Рішення. Нехай A_1 — подія «лампа надійшла з першого заводу», A_2— «лампа надійшла із другого заводу», B - *подія* «лампа стандартна». Отже,

$$P(A_1)=0,7;\ P(A_2)=0,3;\ P(B/A_1)=0,95;\ P(B/A_2)=0,92.$$

За формулою Бейеса (2.10) маємо:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)}=\frac{0,7\cdot 0,95}{0,7\cdot 0,95+0,3\cdot 0,92}\approx 0,71,$$

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)}=\frac{0,3\cdot 0,92}{0,7\cdot 0,95+0,3\cdot 0,92}\approx 0,29.$$

17. Вісімдесят відсотків всіх приладів складається з високоякісних деталей, а двадцять відсотків - з деталей звичайної якості. Якщо прилад зібрано з високоякісних деталей, то ймовірність його безвідмовної роботи протягом певного часу t дорівнює *0,9*. Якщо прилад зібрано з деталей звичайної якості, то ймовірність - *0,5*. При випробуванні протягом часу t прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність того, що прилад зібрано з високоякісних деталей.

Рішення. Позначимо через B подію «безвідмовна робота приладу», через A_1 —«прилад зібраний з високоякісних деталей», через A_2 — «прилад зібраний з деталей звичайної якості». За умовою задачі:

$$P(A_1)=0,8;\ P(A_2)=0,2;\ P(B/A_1)=0,9;\ P(B/A_2)=0,5.$$

За формулою (2.10) маємо:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)}=\frac{0,8\cdot 0,9}{0,8\cdot 0,9+0,2\cdot 0,5}=0,878\,.$$

2.3. Послідовності незалежних випробувань

Припустимо, що послідовно здійснюються випробування, внаслідок кожного з яких відбувається або не відбувається подія A. Будемо вважати, що подія A відбувається з однаковою *ймовірністю здійснення при кожному з випробувань* і вона не залежить від того чи відбувається або не відбувається ця подія при інших випробуваннях. Позначимо $P(A)$ через p й обчислимо ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться рівно m разів й, отже, не відбудеться n-m разів. При цьому зовсім не обов'язково, щоб подія A відбулась m разів у певній послідовності. Якщо, наприклад, мова буде йти про дворазове здійснення події A при трьох випробуваннях, то можлива наступна їх послідовність:

$$A,\ A,\ \overline{A};\quad A,\ \overline{A},\ A;\quad A,\ A,\ \overline{A}\,.$$

Тут, наприклад, запис $A,\ \overline{A},\ A$ означає, що подія A відбулась при першому й третьому випробуваннях і не відбулась при другому випробуванні.

Нехай зроблено n випробувань. Розглянемо таку подію S: «у перших m випробуваннях відбулась подія A, а в інших n-m випробуваннях відбулась подія $\overline{A}$».

Тому що здійснення або нездійснення події A при різних випробуваннях є незалежними подіями, то для визначення ймовірності події S можна скористатися теоремою множення ймовірностей. Одержимо:

$$P(S)=\underbrace{p\cdot p\cdot p\ldots p}_{m}\cdot\underbrace{q\cdot q\ldots q}_{n-m}=p^m\cdot q^{n-m}\,, \tag{2.11}$$

де q — імовірність здійснення події A при кожному з випробувань. Очевидно, $q=1-p$, тому що сума ймовірностей подій A і $\overline{A}$ при кожному з випробувань дорівнює одиниці.

Якщо не звертати уваги на послідовність появи події A при n випробуваннях, то число різних випадків появи події A рівно m разів буде дорівнює числу C_n^m сполучень із n елементів по m. Формула (1.4).

Позначивши шукану ймовірність здійснення рівно m раз події A через $P_n(m)$ і використавши теорему додавання ймовірностей, одержимо:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}\,. \tag{2.12}$$

Цю формулу вперше встановив швейцарський математик Я. Бернуллі, тому її називають формулою Бернуллі.

Вираз (2.12) для $P_n(m)$ є загальним *членом бінома Ньютона*. Написавши всі значення m і відповідні їм імовірності, одержимо так званий *біноміальний закон розподілу ймовірностей*, який можна представити таблицею:

m	0	1	2	...	s	...	n
$P_n(m)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^s p^s q^{n-s}$	...	p^n

Відзначимо, що $\sum\limits_{m=0}^{n} P_n(m) = 1$.

Сукупність точок площини з абсцисами m і ординатами $P_n(m)$, де $(m = \overline{0,n})$ становить *графік біноміального закону розподілу*. Відзначимо, що для наочності ці крапки іноді з'єднують відрізками прямих.

Значення m_0, при якому $P_n(m)$ досягає свого найбільшого значення, називається *найімовірнішим* числом здійснення події A.

Це число знаходять із умови: $p(n+1)-1 \le m_0 \le p(n+1)$.

При досить великих значеннях n і m користуватися формулою Бернуллі для знаходження $P_n(m)$ *незручно*. На практиці тоді застосовують *локальну* теорему Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{2.13}$$

де $x = \frac{m-n}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Значення $\varphi(x)$ наведені в додатку 1.

Якщо значення p досить малі (*подія A малоймовірне явище*), то застосовується наближена формула Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \text{ де } a = np. \tag{2.14}$$

Імовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що подія A здійсниться при n випробуваннях від m_1 до m_2 разів, обчислюється за допомогою інтегралу Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) = \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2.15}$$

де $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тут p - імовірність здійснення події A в кожному з випробувань $(0 < p < 1,\ \ q = 1 - p)$. Інтеграл Лапласа табульовано через функцію $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Значення $\Phi(z)$ наведені в додатку 2.

Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях приблизно дорівнює:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (2.16)$$

2.4. Вправи

1. Імовірність замовлення в технічній бібліотеці книг з відділу техніка дорівнює 0,7 і з відділу математика — 0,3. Яка ймовірність того, що з п'яти читачів, які зайшли в бібліотеку, усі замовлять книги з одного відділу?

Рішення. У задачі розглядається послідовність незалежних випробувань. Тут кількість незалежних випробувань n=5 і кількість замовлених одночасно книг m=5. Одночасно всі п'ять читачів можуть замовити книги з відділу математика або з відділу техніка. Імовірність того, що всі п'ять читачів замовлять книги з математики, дорівнює

$P_1= C_5^5\,(0,3)^5\,(1 - 0,3)^0 = 0,00243.$

Імовірність того, що всі п'ять читачів замовлять книги з техніки, дорівнює: $P_2 = C_5^5\,(0,7)^6\,(1 - 0,7)^0 = 0,16807.$ Події замовлення книг незалежні.

Тоді шукана ймовірність $P = 0,00243 + 0,16807 = 0,1705.$

2. Автопарк нараховує 12 автомашин. Імовірність виходу на маршрут кожної з них дорівнює p = 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку, якщо для цього на маршруті необхідно мати не менш 8 автомашин.

Рішення. Роботу парку можна вважати нормальної, якщо на маршруті буде *8, 9, 10, 11* або *12* автомашин. Ці події попарно незалежні і несумісні.

Знайдемо ймовірність нормальної роботи для кожного окремого випадку за формулою (2.12):

$$P_{12}(8) = C_{12}^8(0,8)^8\cdot(0,2)^4\approx 0.1331;$$
$$P_{12}(9) = C_{12}^9(0,8)^9\cdot(0,2)^3\approx 0,2358;$$
$$P_{12}(10) = C_{12}^{10}(0,8)^{10}\,(0,2)^2\approx 0,2825;$$
$$P_{12}(11) = C_{12}^{11}(0,8)^{11}\,0,2\approx 0,2062;$$
$$P_{12}(12) = C_{12}^{12}\,(0,8)^{12}\approx 0,0687.$$

Імовірність нормальної роботи автопарку за умови, що на маршруті не менш 8 автомашин, дорівнює сумі цих ймовірностей, тобто:

$$P(m\ge 8) = P_{12}(8) + P_{12}(9) + P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) =$$
$$=0,1331 + 0,2358 + 0,2825 + 0,2062 + 0,0687 = 0,9263.$$

3. Стрілок зробив 4 постріли по мішені. Імовірність влучення при кожному пострілі постійна і дорівнює p = 0,6. Знайти ймовірність того, що буде хоча б одне влучення у мішень.

Рішення.

1 спосіб. Уведемо позначення подій: подія A — «у мішень буде рівно одне влучення»; подія B — «у мішень буде рівно два влучення»; подія С — «у мішень буде рівно три влучення»; подія D — «у мішень буде рівно чотири влучення». Події A, B, C і D незалежні і несумісні. Імовірність здійснення кожної з них визначимо за формулою (2.12):

$P(A) = C_4^1 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4)^3 = 0{,}1536;$

$P(B) = C_4^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^2 = 0{,}3456;$

$P(C) = C_4^3 \cdot (0{,}6)^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}3456;$

$P(D) = C_4^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot 1 = 0{,}1296.$

Тут $n = 4; p = 0{,}6; q = 0{,}4; m = 1, 2, 3, 4.$

Звідси по формулі повної ймовірності (13) маємо:

$P_4(m \geq 1) = 0{,}1536 + 0{,}3456 + 0{,}3456 + 0{,}1296 = 0{,}9744.$

2 спосіб: Знаходимо ймовірність здійснення протилежної події «*жодного влучення у мішень*». Тому що сума ймовірностей протилежних подій повинна дорівнювати одиниці, то $P_4(m \geq 1) = 1 - P_4(0)$, тут $P_4(0)$ імовірність того, що при чотирьох пострілах буде 0 влучень.

$P_4(0) = C_4^0 (0{,}6)^0 (0{,}4)^4 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}4)^4 = 0{,}0256.$

Отже, $P_4(m \geq 1) = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744.$

4. Перевіряють партію електроламп, імовірність непридатності лампи дорівнює $0{,}05$. Скільки ламп необхідно перевірити, щоб можна було зафіксувати хоча б одну непридатну лампу з імовірністю $0{,}9$?

Рішення. За умовою задачі маємо: $p=0{,}05$, $P_n(1) = 0{,}9$.

Імовірність того, що лампа виявиться придатної, дорівнює $1-p=0{,}95$, а ймовірність придатності всіх ламп буде $(1-p)^n$. Тоді ймовірність протилежної події, тобто ймовірність того, що хоча б одна лампа серед n ламп виявиться непридатною, дорівнює

$$1-(1-p)^n.$$

Ця ймовірність повинна бути не менше 0,9. Тому

$$1-(1-p)^n \geq P_n(1); \quad 1-(1-p)^n \geq 0{,}9;$$

$(0{,}95)^n \leq 0{,}1;$ $\quad n\log_a(0{,}95) \leq \log_a(0{,}1)$, (*тут* $a > 1$). Відкіля

$$n \geq \frac{\log_a(0{,}1)}{\log_a(0{,}95)} = 44.8\,.$$

Тому що $n \in N$, то шукане число дорівнює 45.

5. Знайти найімовірніше число нестандартних деталей, якщо випробовується 100 деталей, а ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює $0{,}1$.

Рішення. Маємо: $n=100; p=0{,}1; q=0{,}9$. Тому найімовірніше число m_0 буде задовольняти нерівності:

$$100 \cdot 0{,}1 - 0{,}9 \leq m_0 \leq 100 \cdot 0{,}1 + 0{,}1\,,$$

$$10 - 0{,}9 \le m_0 \le 10 + 0{,}1.$$

Отже, найімовірніше число нестандартних деталей у партії з 100 деталей дорівнює m_0 = 10.

6. Стріляють по групі з 24 танків. Імовірність того, що танк буде підбитий, дорівнює 0,6. Визначити m_0 - найімовірніше число підбитих танків.

Рішення. У даній задачі n = 24; р = 0,6; q = 0,4. Тому найімовірніше число підбитих танків буде задовольняти нерівності:

$p(n+1)-1 \le m_0 \le p(n+1)$. Отже, $0{,}6(24+1)-1 \le m_0 \le 0{,}6(24+1)$ відкіля $14 \le m_0 \le 15$.

У цьому випадку m_0 приймає два значення, тобто найімовірнішими числами підбитих танків будуть 14 або 15.

7. При якому числі лотерейних квитків найімовірніше число виграшів дорівнює 16, якщо ймовірність виграшу для кожного квитка дорівнює 0,01.

Рішення. За умовою m_0=16, p=0,01, q=0,99. Необхідно знайти число лотерейних квитків, для якого 16 є найімовірнішим числом виграшів. Маємо: $0{,}01n - 0{,}99 \le 16 < 0{,}01n + 0{,}01$. Звідси

$$\begin{cases} 0{,}01n \le 16{,}99 & \text{или} \quad n \le 1699, \\ 15{,}99 \le 0{,}01n & \text{или} \quad n \ge 1599. \end{cases}$$

Отже, $n_1 = 1599$; $n_2 = 1699$. Тобто *16* є найімовірнішим числом виграшів, якщо кількість лотерейних квитків перебуває в межах між *1599* й *1699*.

8. Імовірність виявлення нестандартного виробу дорівнює 0,005. Чому дорівнює ймовірність того, що з 10000 навмання відібраних виробів нестандартних виявиться 40?

Рішення. У даній задачі: m = 40; p = 0,005; n = 10000; q = 0,995. Тому відповідно до локальної теореми Лапласа шукана ймовірність обчислюється за формулою (2.13): $P_n(m) \approx \dfrac{1}{7{,}05 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1{,}42^2}{2}}$, де $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx 1{,}42$. По таблиці *(Додаток 1)* знаходимо: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1{,}42^2}{2}} \approx 0{,}1456.$

Отже, $P_{10000}(40) \approx \dfrac{0{,}1456}{7{,}05} \approx 0{,}0206.$

9. Прядильниця обслуговує *1000* веретен. Імовірність розриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини нитка обірветься на п'ятьох веретенах.

Рішення. За умовою задачі n = 1000; p = 0,004; m = 5; q = 0,996. Як бачимо, n — число дуже велике, а p — мале. Застосувавши формулу Пуассона (2.14), одержимо

$$P_{1000}(5)=\frac{(1000\cdot 0{,}004)^5}{5!}e^{-0{,}004\cdot 1000}=\frac{4^5\cdot e^{-4}}{5!}\approx 0{,}1564\,.$$

10. Схожість насіння пшениці дорівнює 95%. Знайти ймовірність того, що з 2000 посіяних зерен пшениці не проростуть від 80 до 120 зерен.

Рішення. Імовірність того, що зерно не зійде, дорівнює *0,05*. Отже, тут $p = 0{,}05;\ \ n = 2000;\ m_1 = 80;\ m_2 = 120;\ q = 0{,}95$. Тоді використовуємо інтеграл Лапласа (2.15). Для нього обчислюємо межі:

$$a=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-100}{\sqrt{2000\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}}\approx -2{,}05\,;b=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{120-100}{\sqrt{2000\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}}\approx 2{,}05\,.$$

З огляду на те, що Ф(-α) = - Ф(α), по таблиці значень інтеграла Лапласа (*Додаток 2)*знаходимо:
$\Phi(-2{,}05) = -\,0{,}4798$. Шукана ймовірність дорівнює:

$$P_{2000}\,(80{,}120) \approx 0{,}4798 + 0{,}4798 = 0{,}9596.$$

11. Імовірність випуску ламп із дефектом дорівнює 0,08. Знайти ймовірність того, що серед *1000* ламп відхилення від зазначеного відсотка браку не перевищить 0,01.

Рішення. У даній задачі n = 1000; p = 0,08; q = 0,92; $\varepsilon = 0{,}01$. Обчислимо шукану ймовірність за формулою (2.16):

$$P(\varepsilon)=P\left(\left|\frac{m}{1000}-0{,}08\right|<0{,}01\right)=2\Phi\left(0{,}01\cdot\sqrt{\frac{1000}{0{,}08\cdot 0{,}92}}\right)=2\Phi(1{,}17)\approx 2\cdot 0{,}38=0{,}76$$

2.5. Випадкові величини

Випадковою величиною називається така величина, що внаслідок випробування вона може приймати те або інше значення (яке саме — наперед невідомо).

Прикладами випадкової величини можуть бути:

1. Число, яке відповідає номеру грані гральної кістки. Ця випадкова величина може приймати значення: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Число влучень у мішень при трьох пострілах. Така величина може приймати значення: 0, 1, 2, 3.

3. Число появи події A при n незалежних випробуваннях. Така випадкова величина може приймати $n + 1$ значення: 0, 1, 2, ..., n.

З кожною випадковою подією може бути зв'язана випадкова величина. Припустимо, що в результаті експерименту може відбутися або не відбутися подія A. Тоді можна розглядати випадкову величину X, що дорівнює 1, якщо відбувається подія A, і дорівнює нулю, якщо A не відбувається. Тут випадкова величина X приймає два значення: 0 і 1. Її називають характеристичною випадковою величиною події A. На практиці часто замість подій розглядають їх *характеристичні випадкові величини.*

Розрізняють *дискретні і безперервні випадкові величини*.

Якщо значення, які приймає випадкова величина, можна пронумерувати, тоді цю випадкову величину називають *дискретною*.

Можливі значення *безперервної* випадкової величини заповнюють деякий числовий проміжок.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називається перелік всіх можливих її значень із відповідною ймовірністю, з якими вона приймає кожне із цих значень. Він звичайно задається таблицею:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Її часто називають *ряд розподілу*. Очевидно, що $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1$.

Закон розподілу можна ілюструвати графічно. Для цього на вісі абсцис відкладемо можливі значення випадкової величини, а на вісі ординат — відповідні їм імовірності і з'єднуємо точки (x_i; p_i) відрізками прямих.

Отриману ламану також називають багатокутником розподілу (рис. 1).

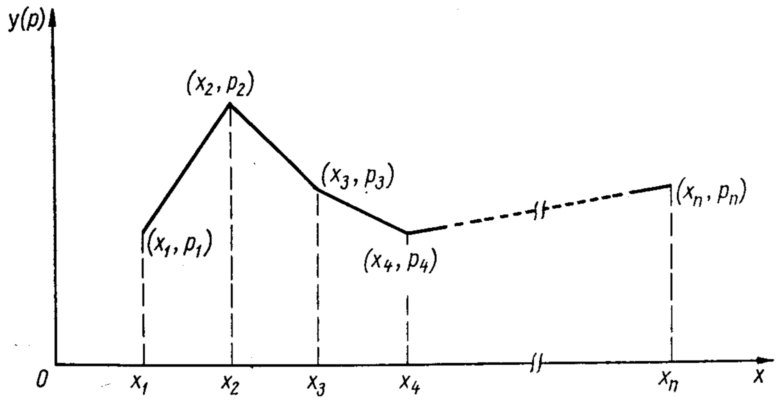

Рис. 1

Закон розподілу випадкової величини можна задати аналітично. Наприклад, *біноміальний законом розподілу* визначається *формулою Бернуллі* (2.12).

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що X приймає значення, менші, чим зазначене фіксоване значення x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Відзначимо такі властивості функції $F(x)$:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ — неспадна функція, тобто якщо $x_2 > x_1$, то і $F(x_2) \ge F(x_1)$;

3) $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$;

4) $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Графіком інтегральної функції розподілу *дискретної випадкової* величини є розривна східчаста лінія. Точки розриву мають абсциси, рівні числовим значенням, які приймає ця випадкова величина.

Графіком інтегральної функції розподілу *безперервної випадкової* величини служить безперервна лінія.

Функцію *f(x)* називають ще *щільністю розподілу* ймовірностей або диференціальним законом розподілу випадкової величини. Вона знаходиться за правилом: $f(x)=F'(x)$.

З визначення функції *f(x)* можна одержати такі її властивості:

1) $f(x) \geq 0$; 2) $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$; 3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Якщо всі значення *безперервної випадкової величини X* належать деякому інтервалу (α, β) і відомо, що диференціальна функція розподілу на цьому інтервалі *стала*, то кажуть, що *X* відповідає *закону рівномірної щільності*, який має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha \geq x \text{ і } x \geq \beta; \\ \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{якщо} \quad \alpha < x < \beta. \end{cases}$$

2.6. Числові характеристики

Якщо *X* — дискретна випадкова величина, то її *математичне очікування M(X)* визначають за формулою:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{2.17}$$

Якщо ж випадкова величина *безперервна*, то її *математичне очікування M(X)* визначається за формулою:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{2.18}$$

де *f(x)* — щільність розподілу випадкової величини *X*.

Дисперсією випадкової величини *X* називається математичне очікування квадрата її відхилення від математичного очікування .

Якщо через *a* позначимо числове значення математичного очікування *випадкової величини*, то для обчислення її дисперсії можна скористатися відповідно формулами:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i \,, \tag{2.19}$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)dx. \tag{2.20}$$

Якщо обчислити корінь квадратний з дисперсії, то одержуємо *середнє квадратичне відхилення* випадкової величини *X* від її математичного очікування. Вона позначається через σ (*X*):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{2.21}$$

Властивості математичного очікування і дисперсії:

1) математичне очікування сталої величини є сама ця стала:

$$M(C)=C;$$

2) математичне очікування добутку сталої величини на випадкову величину дорівнює добутку сталої на математичне очікування випадкової величини:

$$M(CX) = CM(X);$$

3) математичне очікування суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних очікувань доданків:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y);$$

4) математичне очікування добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних очікувань:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y);$$

5) дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C) = 0;$$

6) сталий множник можна виносити за знак дисперсії, зводячи його до другого степеня:

$$D(CX) = C^2 D(X);$$

7) дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Нормальний закон розподілу випадкової величини X має функцію *щільності* розподілу ймовірностей виду:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (2.22)$$

де a й σ відповідно математичне очікування й середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Графік функції для нормального закону називається нормальною кривою.

Побудова кривої виконана за результатами дослідження функції (2.22) і на рис. 2 зображені нормальні криві при $a = 0$ для різних значень σ : $\sigma_1 = 1/4$, $\sigma_2 = 1$; $\sigma_3 = 4$.

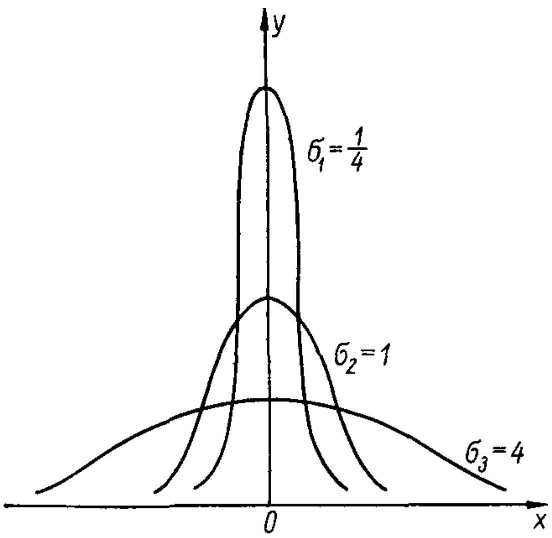

Рис. 2

Якщо випадкова величина *X* розподілена за нормальним законом, то ймовірність того, що вона приймає якесь значення з інтервалу *(α, β)*, обчислюється за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx, \tag{2.23}$$

або

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{2.24}$$

де $\Phi(z)$ — функція Лапласа (*Додаток 2*).

Зокрема, відхилення випадкової величини *X* від її математичного очікування *a* менше, ніж на ε обчислюється за формулою:

$$P\{|X - a| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{2.25}$$

Під законом великих чисел розуміють сукупність тверджень, у яких визначено з імовірністю, як завгодно близької до одиниці, що наступить певна подія A_n, яка залежить від необмежено зростаючого числа n випадкових подій, кожне з яких має на A_n незначний вплив.

Головне значення для доказу теорем (які ми не приводимо) сформульованих у законі великих чисел, має *нерівність Чебишева:*

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \tag{2.26}$$

де $M(X)$ і $D(X)$ - *відповідно* математичне очікування і дисперсія випадкової величини *X*, а ε - довільне позитивне число.

З *нерівності* (2.26) як наслідок випливає *теорема Бернуллі*. Нехай *m* — число появ події *A* при *n* незалежних випробуваннях і нехай *p*-ймовірність здійснення події *A* у кожному з випробувань. Тоді, яке б не було $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

За цією теоремою прямує, що досить великій кількості випробувань стає практично достовірною подія, що складається в тім, що відносна частота здійснення події *A* як завгодно мало відрізняється від її ймовірності. Така обставина дозволяє знаходити невідомі ймовірності подій шляхом проведення відповідного числа випробувань.

Теорема Ляпунова з'ясовує умови, при яких із практичною впевненістю можна встановити закони розподілу деяких випадкових величин. Не приводячи повного формулювання і доказу цієї теореми, укажемо тільки на наслідок, що випливає з неї: *якщо випадкова величина X є сума достатньо великого числа взаємно незалежних випадкових величин* $X_1, X_2, ..., X_n$, *кожна з яких на X має незначний вплив, то величина X має розподіл імовірностей, близький до нормального*.

2.7. Вправи

1. Із двох гравців, що кидають по черзі монету, виграє той, у якого раніше з'явиться герб. Обчислити ймовірність виграшу для кожного із гравців.

Рішення. Позначимо через A подію «виграв той, котрий кидає монету першим», через B — «виграв той, котрий кидає монету другим». Тоді

$$A = g + \overline{gg}g + \overline{gggg}g + \overline{gggggg}g + ...,$$

$$B = \overline{g}g + \overline{ggg}g + \overline{ggggg}g + ...,$$

де g-*поява* герба, $\overline{g}$ — *непоява* герба при киданні монети.

Імовірності $p(g) = 1/2$ і $p(\overline{g}) = 1/2$.

Обчислимо ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + ... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + ... = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3}.$$

Маємо нескінченну спадаючу геометричну прогресію із знаменником $1/4$.

Події A и B незалежні, тому: $P(A) + P(B) = 1$.

Звідки $P(B) = 1 – P(A) = 1 – 2/3 = 1/3$.

2. Винищувач і бомбардувальник починають повітряний бій. Першим стріляє винищувач і попадає у бомбардувальник з імовірністю 0,2. Якщо бомбардувальник не збитий, то, стріляючи по винищувачу, він попадає в нього з імовірністю 0,3. Якщо винищувач не збитий, то він продовжує атаку і попадає у бомбардувальник з імовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що бомбардувальник буде збитий із другого заходу.

Рішення. Позначимо через A подію «бомбардувальник збитий за два пострiла». $A = A_1 + B_1$, де A_1— подія «бомбардувальник збитий з першого пострiла», B_1 - *подія* «бомбардувальник збитий з другого пострiла». Подія «збитий винищувач» позначимо через A_2 . Подію «винищувач має можливість виконати другий постріл» позначимо через A_3. Подія B_1 — складна. Щоб подія B_1 наступила, потрібно, щоб подія A_1 не наступила і не наступила подія A_2.

Винищувач повинен збити бомбардувальник першим або другим пострілом:

$P(A_1) = 0,2$; $\qquad P(B_1) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,224$.

Отже,

$$P(A) = P(A_1) + P(B_1) = 0,2 + 0,224 = 0,424.$$

3. Імовірність здачі іспиту на «5» для кожного із шести студентів дорівнює 0,4. Скласти таблицю закону розподілу кількості п'ятірок, отриманих студентами на іспиті і побудувати багатокутник цього розподілу.

Рішення. Позначимо випадкову величину кількості п'ятірок, отриманих студентами на іспиті, через X. За умовою задачі p=0,4; q=0,6. Визначимо ймовірності, з якими X приймає відповідно значення: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$X = 0, P(0) = C_6^0 \cdot (0{,}4)^0\,(0{,}6)^6 \approx 0{,}047;$

$X = 1, P(1) = C_6^1 \cdot (0{,}4)^1\,(0{,}6)^5 \approx 0{,}187;$

$X = 2, P(2) = C_6^2 \cdot (0{,}4)^2\,(0{,}6)^4 \approx 0{,}311;$

$X = 3, P(3) = C_6^3 \cdot (0{,}4)^3\,(0{,}6)^3 \approx 0{,}276;$

$X = 4, P(4) = C_6^4 \cdot (0{,}4)^4\,(0{,}6)^2 \approx 0{,}138;$

$X = 5, P(5) = C_6^5 \cdot (0{,}4)^5\,(0{,}6)^1 \approx 0{,}037;$

$X = 6, P(6) = C_6^6 \cdot (0{,}4)^6\,(0{,}6)^0 \approx 0{,}004;$

Закон розподілу цієї випадкової величини даємо наступною таблицею:

X_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

Багатокутник розподілу цієї випадкової величини подано на рис.3.

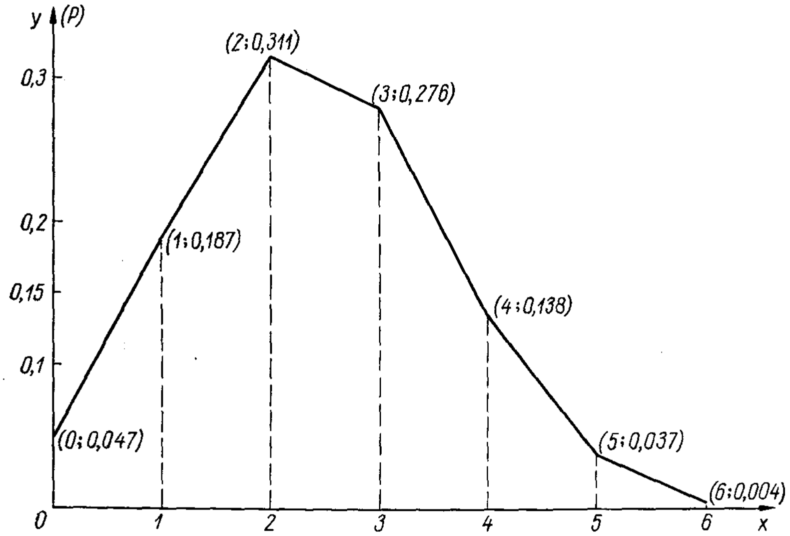

Рис. 3

4. Один з п'яти ключів відмикає замок. Скласти закон розподілу числа випробувань при відімкненні замка, якщо використаний ключ повертається до подальших випробувань.

Рішення. Імовірність відімкнення замка кожним із ключів дорівнює p = 1/5 = 0,2. Тоді q = 4/5 = 0,8. Тому що використаний ключ знову повертається, то випадкова величина X може приймати значення: *1, 2, ..., n, ...* Імовірність відімкнути замок при першій спробі p_1= 0/2. Якщо ж у цьому випадку замок не відімкнули, то ймовірність відімкнути замок при другому випробуванні $p_2 = qp = 0{,}8 \cdot 0{,}2$; імовірність відімкнути замок при третім випробуванні

$p_3 = q^2 p = (0{,}8)^2 \cdot 0{,}2, \ldots,\ p_n = q^{n-1} p = (0{,}8)^{n-1} \cdot 0{,}2$

Закон розподілу цієї випадкової величини X подано таблицею:

X_i	1	2	3	4	5	…
p_i	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,08192	…

5. Імовірність можливості будь-якого абонента подзвонити на комутатор протягом години дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 300 абонентів. Яка ймовірність того, що протягом години подзвонять 4 абоненти?

Рішення. У цій задачі n = 300, p = 0,01; q = 0,99; m = 4.

За біноміальним законом розподілу:

$P_{300}(4) = C_{300}^{4} \cdot (0{,}01)^{4} \cdot (0{,}99)^{296} \approx 0{,}1649.$

За законом Пуассона $P_{300}(4) \approx \dfrac{(0{,}01 \cdot 300)^4}{4!} e^{-300 \cdot 0{,}01} = \dfrac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!} \approx 0{,}17$.

6. Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

x_i	1	2	3	4
P_i	0,7	0,21	0,063	0,027

Знайти $F(x)$ - *інтегральну* функцію розподілу випадкової величини X.

Рішення. Випадкова величина не приймає значень, менших одиниці. Отже, для всіх $X \le 1$ події $X < x$ неможливі і $F(x) = 0$. Якщо X таке, що $1 < x \le 2$, то $F(x) = 0{,}7$. Дійсно, нехай, наприклад, x = 1,4; тоді F(1,4) визначає ймовірність події $X < 1{,}4$. Але випадкова величина X лише в одному випадку приймає значення менше 1,4, а саме з імовірністю 0,7.

Якщо $2 < x \le 3$, то F(x) = 0,7+0,21 = 0,91, тому що якщо X = 3, то F(3) виражає ймовірність події X < 3 і величина X приймає значення менше 3, тобто 2 або 1. Застосовуючи теорему про додавання ймовірностей, одержимо $F(x) = 0{,}91$. Аналогічно знаходимо значення функції розподілу на інших інтервалах. Приходимо до такої інтегральної функції розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0; & -\infty < x \le 1; \\ 0{,}7; & 1 < x \le 2; \\ 0{,}91; & 2 < x \le 3; \\ 0.973; & 3 < x \le 4; \\ 1; & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

7. Функція *щільності ймовірності* випадкової величини X має вигляд: $f(x) = \dfrac{2A}{e^x + e^{-x}}$, де $(-\infty < x < \infty)$.

Знайти коефіцієнт A. Обчислити: а) $p(0 \le x \le 2)$; б) $p(x \le 1)$.

Рішення: Тому що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2A}{e^x + e^{-x}} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2Ae^x dx}{1 + (e^x)^2} = 2A \lim_{a \to \infty} arctg(e^x)\Big|_{-a}^{a} = 2A\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = A\pi = 1,$$

звідки

$A=\frac{1}{\pi}$; $f(x)=\frac{2}{\pi\left(e^{x}+e^{-x}\right)}$; $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{2dx}{\pi\left(e^{x}+e^{-x}\right)}$. Отже:

а) $P(0\le X\le 2)=\int\limits_{0}^{2}\frac{2dx}{\pi\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\frac{2}{\pi}arctg\left(e^{x}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{2}{\pi}\left(arctg\left(e^{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $P(X\le 1)=F(1)=\frac{2}{\pi}arctg(e)\approx 0{,}776$.

8. Обчислити ймовірності появи деяких значень випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона, при $p = 0{,}01$ і $n = 100$. Побудувати багатокутник розподілу.

Рішення. Імовірності появи окремих значень випадкової величини обчислюються по формулі $P(m)=\frac{a^{m}}{m!}e^{-a}$, де за умовою задачі $a = np = 1$. При $X = 0$, $P(0)\approx 0{,}368$; при $X = 1$, $P(1)\approx 0{,}368$; при $X = 2$, $P(2)\approx 0{,}184$; при $X = 3$, $P(3)\approx 0{,}061$; при $X = 4$: $P(4)\approx 0{,}015$; при $X = 5$; $P(5)\approx 0{,}003$ і т.д.

Складемо таблицю:

X	0	1	2	3	4	5	…
P(X)	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003	…

Багатокутник розподілу цієї випадкової величини подано на (рис. 4).

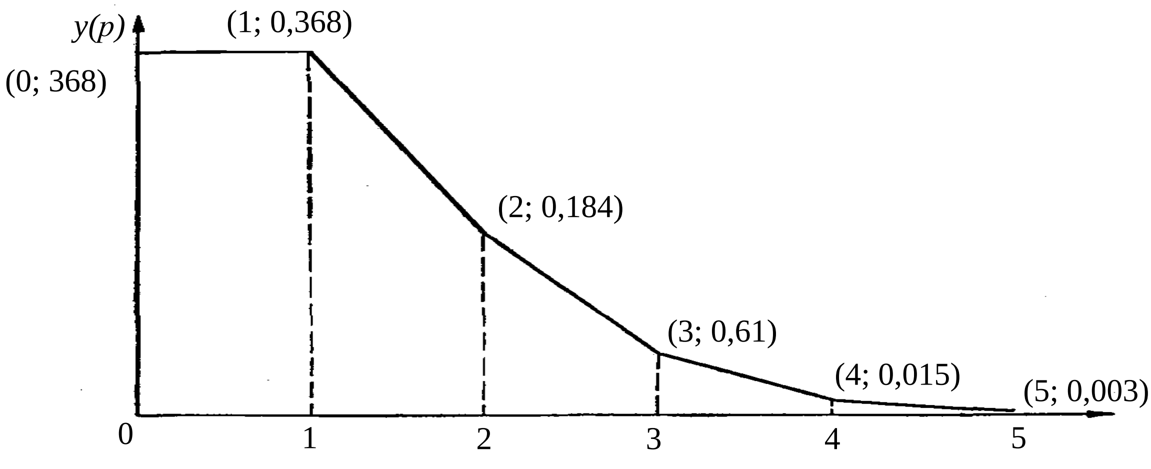

Рис. 4

9. На дослідному полі площею 1000 *га* врожайність певного сорту пшениці має такий розподіл:

Урожайність *(ц/га)*	17	18	19	20	21	22	23
Площа *(га)*	40	100	150	360	210	80	60

Розглядаючи врожайність, як випадкову величину, обчислити її математичне очікування, дисперсію й середнє квадратичне відхилення.

Рішення: Складемо таблицю, що відображає закон розподілу даної випадкової величини:

Урожайність *(ц/га)*	17	18	19	20	21	22	23
Ймовірність	0,04	0,1	0,15	0,36	0,21	0,08	0,06

Обчислюємо *математичне очікування* величини за формулою (2.17):

$$M(X)= 17\cdot 0,04 + 18\cdot 0,1 + 19\cdot 0,15 + 20\cdot 0,36 + 21\cdot 0,21 + 22\cdot 0,08 + 23\cdot 0,06 =$$
$$=0,68 + 1,8 + 2,85 + 7,2 + 4,41 + 1,76 + 1,38 = 20,08.$$

Дисперсію цієї випадкової величини обчислимо за формулою (2.19), де a = 20,08 обчислено вище. Маємо:

$$D(X) = (-3,08)^2 \cdot 0,04 + (-2,08)^2 \cdot 0,1 + (-1,08)^2 \cdot 0,15 + (-0,08)^2 \cdot 0,36 +$$
$$+ (0,92)^2 \cdot 0,21 + (1,92)^2 \cdot 0,08 + (2,92)^2 \cdot 0,06 = 1,9736.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{1,9736} \approx 1,4$.

10. Серед *100* деталей є *75* деталей першого сорту. Скласти таблицю розподілу випадкової величини числа деталей першого сорту з 5 навмання узятих деталей, обчислити її математичне очікування і дисперсію.

Рішення. Імовірність узяття навмання деталі першого сорту із всієї партії дорівнює $p = 0,75$. Тому $q = 0,25$. Імовірність того, що серед 5 деталей буде нуль, одна, дві, три, чотири і п’ять деталей першого сорту дорівнює:

$P_5(0) = C_5^0 (0,75)^0 \cdot (0,25)^5 \approx 0,0010$; $P_5(3) = C_5^3 (0,75)^3 \cdot (0,25)^2 \approx 0,2636$;

$P_5(1) = C_5^1 (0,75)^1 \cdot (0,25)^4 \approx 0,0146$; $P_5(4) = C_5^4 (0,75)^4 \cdot (0,25)^1 \approx 0,3955$;

$P_5(2) = C_5^2 (0,75)^2 \cdot (0,25)^3 \approx 0,0880$; $P_5(5) = C_5^5 (0,75)^5 \cdot (0,25)^0 \approx 0,2373$.

Складемо таблицю розподілу даної випадкової величини *X:*

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0,0010	0,0146	0,0880	0,2636	0,3955	0,2373

Математичне очікування даної випадкової величини *X:*

$$M(X) = 0 \cdot 0,001 + 1 \cdot 0,0146 + 2 \cdot 0,088 + 3 \cdot 0,3636 + 4 \cdot 0,3955 + 5 \cdot 0,2373 \approx 3,75.$$

Дисперсія даної випадкової величини *X*:

$$D(X) = (-3{,}75)^2 \cdot 0{,}001 + (-2{,}75)^2 \cdot 0{,}0146 + (-1{,}75)^2 \cdot 0{,}088 + (-0{,}75)^2 \cdot 0{,}2636 +$$
$$+(0{,}25)^2 \cdot 0{,}3955 + (1{,}25)^2 \cdot 0{,}2373 \approx 0{,}94.$$

11. Незалежні випадкові величини *X* і *Y* мають такі таблиці розподілу:

X	0	2	4	6	*Y*	1	3	5
P(*X*)	0,1	0,2	0,3	0,4	*P*(*Y*)	0,5	0,3	0,2

Скласти таблицю розподілу добутку випадкових величин *X* і *Y*. На цьому прикладі перевірити, чому дорівнює математичне очікування добутку незалежних випадкових величин.

Розв'язання. Складемо таблицю добутків даних випадкових величин:

№ п/п	*X*	*Y*	*XY*	Імовірність відповідного результату
1	0	1	0	0,1 · 0,5 = 0,05
2	0	3	0	0,1 · 0,3 = 0,03
3	0	5	0	0,1 · 0,2 = 0,02
4	2	1	2	0,2 · 0,5 = 0,10
5	2	3	6	0,2 · 0,3 = 0,06
6	2	5	10	0,2 · 0,2 = 0,04
7	4	1	4	0,3 · 0,5 = 0,15
8	4	3	12	0,3 · 0,3 = 0,09
9	4	5	20	0,3 · 0,2 = 0,06
10	6	1	6	0,4 · 0,5 = 0,20
11	6	3	18	0,4 · 0,3 = 0,12
12	6	5	30	0,4 · 0,2 = 0,08

За отриманими величинами складемо таблицю розподілу добутку випадкових величин *X* і *Y*:

XY	0	2	4	6	10	12	18	20	30
P(XY)	0,1	0,1	0,15	0,26	0,04	0,09	0,12	0,06	0,08

Математичне очікування випадкової величини *X:*

M(X) = 0 · 0,1 + 0,2 · 2 + 0,3 · 4 + 0,4 · 6 = 0,4 + 1,2 + 2,4 = 4.

Математичне очікування випадкової величини *Y:*

M(Y) = 1 · 0,5 + 3 · 0,3 + 5 · 0,2 = 0,5 + 0,9 + 1 = 2,4;

M(X) · M(Y) = 4 · 2,4=9,6.

Математичне очікування випадкової величини *XY:*

$$M(XY) = 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}26 + 10 \cdot 0{,}04 + 12 \cdot 0{,}09 + 18 \cdot 0{,}12 + + 20 \cdot 0{,}06 + 30 \cdot 0{,}08 = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}56 + 0{,}4 + 1{,}08 + 2{,}16 + 1{,}2 + 2{,}4 = 9{,}6.$$

Отже, $M(X) \cdot M(Y) = M(XY)$.

12. Числа очок, набраних двома стрілками, характеризуються такими законами розподілу:

а) перший стрілок — X; б) другий стрілок — Y.

X	3	4	5	Y	2	3	4	5
$P(X)$	0,1	0,4	0,5	$P(Y)$	0,1	0,1	0,5	0,3

Стрілки роблять по черзі постріли. Підраховується сума вибитих ними очок. Скласти закон розподілу цієї випадкової величини.

Розв’язання. Складемо таблицю сум даних випадкових величин

№ п/п	X	Y	$X+Y$	Імовірність відповідного результату
1	3	2	5	$0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
2	3	3	6	$0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
3	3	4	7	$0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$
4	3	5	8	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$
5	4	2	6	$0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$
6	4	3	7	$0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$
7	4	4	8	$0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}20$
8	4	5	9	$0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$
9	5	2	7	$0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$
10	5	3	8	$0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$
11	5	4	9	$0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$
12	5	5	10	$0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

За отриманими величинами складемо таблицю розподілу суми очок, вибитих обома стрілками, як випадкова величина, вона буде мати вигляд:

$X+Y$	5	6	7	8	9	10
$P(X+Y)$	0,01	0,05	0,14	0,28	0,37	0,15

Математичне очікування випадкової величини X:

$$M(X)= 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 + 1{,}6 + 2{,}5 = 4{,}4.$$

Математичне очікування випадкової величини Y:

$$M(Y)= 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 0{,}3 + 2 + 1{,}5 = 4.$$

Математичне очікування випадкової величини $X + У$:

$$M(X+ Y) = 5 \cdot 0{,}01 +6 \cdot 0{,}05 + 7 \cdot 0{,}14 + 8 \cdot 0{,}28 + 9 \cdot 0{,}37 + 10 \cdot 0{,}15 = =0{,}05 + 0{,}3 + 0{,}98 + 2{,}24 + 3{,}33 +1{,}5= 8{,}4.$$

Отже, $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.
$M(X) + M(Y) = 4{,}4 + 4 = 8{,}4$

13. Знайти математичне очікування і дисперсію випадкової величини *X*, якщо на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ її щільність імовірності $f(x)=\frac{2}{\pi}cos^2 x$ і $f(x)=0$ при $|x|>\frac{\pi}{2}$.

Рішення. Математичне очікування для безперервної величини *X:*

$$M(X)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x\cos^2 x dx=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\cdot xdx+\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}0xdx=0,$$

як інтеграл від непарної функції. Дисперсія безперервної випадкової величини *X:*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x-a)^2\frac{2}{\pi}\cos^2 x dx.$$

Тому що $a=M(X)$, у цьому випадку a = 0, і $2\cos^2 x=1+2\cos x$, то

$$D(X)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2(1+\cos 2x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2\sin 2x}{2}+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2-6}{12}.$$

14. Зріст дорослих чоловіків є випадковою величиною, розподіленої за нормальним законом. Нехай її математичне очікування дорівнює 170 см, а дисперсія — 36. Знайти щільність розподілу ймовірностей і функцію розподілу цієї випадкової величини. Обчислити ймовірність того, що хоча б один з навмання обраних чоловіків буде мати зріст 168—172 см і хоча б один із чотирьох навмання обраних чоловіків буде мати зріст 168—172 см.

Рішення. За умовою задачі a = 170; $\sigma=\sqrt{36}=6$.

Тому щільність розподілу ймовірностей даної випадкової величини за формулою (2.22) буде $f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-170)^2}{72}}$, а інтегральна функція розподілу цієї випадкової величини буде дорівнювати:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-170)^2}{72}}dx=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(x-170)^2}{72}}dx+\int_{0}^{x}e^{-\frac{(x-170)^2}{72}}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-170}{6}\right).$$

Обчислимо за формулою (2.27) ймовірність того, що зріст навмання обраного чоловіка буде перебувати в межах від 168 до 172 см.

$$P(168 < X < 172) = F\left(\frac{172-170}{6}\right) - F\left(\frac{168-170}{6}\right) =$$

$$= F\left(\frac{1}{3}\right) - F\left(-\frac{1}{3}\right) == 2F\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,2611.$$

Щоб обчислити ймовірність того, що хоча б один (тобто 1, 2, 3 або 4) з 4 навмання обраних чоловіків має зріст 168—172 см, знайдемо ймовірність того, що із чотирьох навмання обраних чоловіків рівно нуль чоловіків має зріст 168—172 см.

$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (1-0,2611)^4 \approx 0,2981$. Це ймовірність протилежної події.

Шукана ймовірність дорівнює 1 – 0,2981 = 0,7019.

15. Дисперсія кожної з 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середньої арифметичної цих випадкових величин від середніх арифметичних їхніх математичних очікувань не перевищить 0,4.

Рішення. За допомогою нерівності Чебишева (2.26) одержують таку оцінку ймовірності:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D}{n\varepsilon^2}.$$

За умовою задачі n=2500; D=5; ε=0,4. Тому шукана ймовірність

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{2500} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{2500}\right| \le 0,4\right) \ge 1 - \frac{5}{2500 \cdot 0,16};$$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{2500} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{2500}\right| \le 0,4\right) \ge 0,9875.$$

3. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Математична статистика - розділ вищої математики, що вивчає масові випадкові явища з метою встановлення їхніх закономірностей. Сучасну математичну статистику визначають як науку про прийняття рішень в умовах невизначеності.

3.1. Основні визначення

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів, з яких робиться вибірка.

Обсягом обраної або генеральної сукупності називають число об'єктів її утворюючих.

Вибіркою називають сукупність випадково обраних з генеральної сукупності однорідних об'єктів при досліджуванні деякої *якісної* або *кількісної* ознаки.

Повторною називають вибірку, при якій відібраний об'єкт (перед відбором наступного) повертається у генеральну сукупність.

Безповторной називають вибірку, при якій відібраний об'єкт у генеральну сукупність не повертається.

Репрезентативною (*представницькою*) називається вибірка яка правильно представляє пропорції генеральної сукупності.

Відбір об'єктів, що формують вибірку, може бути: *простим випадковим*; *типовим*; *механічним* і *серійним*.

Вид відбору визначає дослідник при рішенні певного завдання.

Варіантой називають спостережуване значення елемента вибірки.

Варіаційним рядом називають послідовність *варіант*, записаних у зростаючому порядку.

Частотами називають число спостереження варіанти.

Відносними частотами називають відносини частот до обсягу вибірки.

Приклад. Нехай: n − обсяг вибірки; x_1, x_2, …, x_k − k варіант; n_1, n_2, …, n_k − частоти варіант. Тоді $W_i = n_i / n$, де $i = \overline{1,k}$, є відносними частотами.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот, представлених у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	…	x_k	Σ
n_i	n_1	n_2	…	n_k	n
W_i	W_1	W_2	…	W_k	1

Контроль правильності знаходження відносних частот вибірки обсягу n: $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$; $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Статистичний розподіл можна задати також у вигляді послідовності інтервалів і відповідних частот.

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x *відносну частоту* події $X < x$.

Теоретичною функцією розподілу називають функцію $F(x)$, що визначає для кожного значення x *ймовірність* події $X < x$.

На підставі теореми Бернуллі при великих значеннях числа n $F^*(x)$ і $F(x)$ мало відрізняються, тобто доцільно використання емпіричної функції розподілу вибірки для наближеного подання теоретичної функції розподілу генеральної сукупності.

Приклад. Побудувати емпіричну функцію розподілу по даній вибірці: $x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $x_3 = 10$; $n_1 = 12$; $n_2 = 18$; $n_3 = 30$.

Рішення. $n = 12 + 18 + 30 = 60$. Найменша варіанта $x_1 = 2$, отже, $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$. Значення $x < 6$, а саме $x_1 = 2$ спостерігалося 12 разів, отже, $F^*(x) = 12/60 = 0{,}2$ при $2 < x \le 6$. Значення $x < 10$, а саме $x_1 = 2$ і $x_2 = 6$, спостерігалися $12 + 18 = 30$ разів, отже $F^*(x) = 30/60 = 0{,}5$ при $6 < x \le 10$. Тому що $x = 10$ − найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 10$. Шукана емпірична функція $F^*(x)$ представлена на (рис. 5) і записується у вигляді:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0{,}2 & -''-\ 2 < x \le 6, \\ 0{,}5 & -''-\ 6 < x \le 10, \\ 1 & -''-\ x > 10. \end{cases}$$

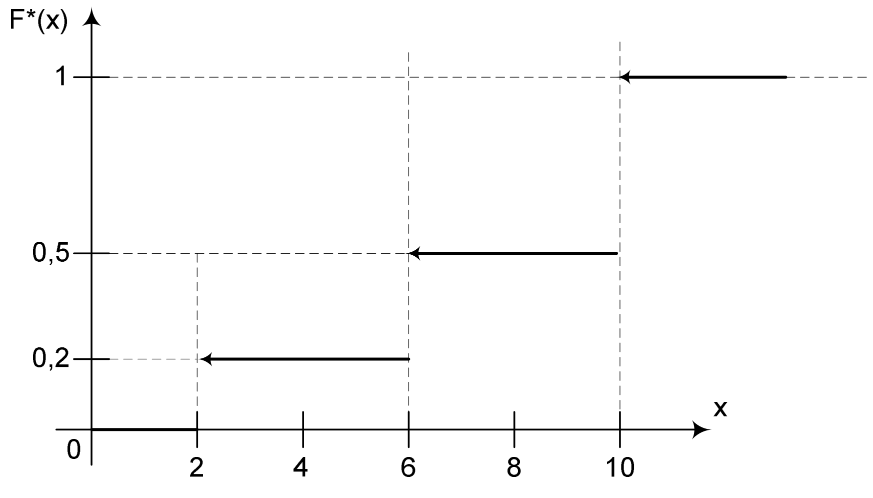

Рис. 5

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки: $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$.

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки: $(x_1;W_1)$, $(x_2;W_2)$, …, $(x_k;W_k)$.

Приклад. Для даного розподілу

X	2	4	6	8	10	30
W	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	1

побудувати полігон відносних частот.

Рішення. На вісі абсцис відкладаємо варіанти, а на вісі ординат відносні частоти. Одержувані точки з'єднаємо ламаною (рис. 6).

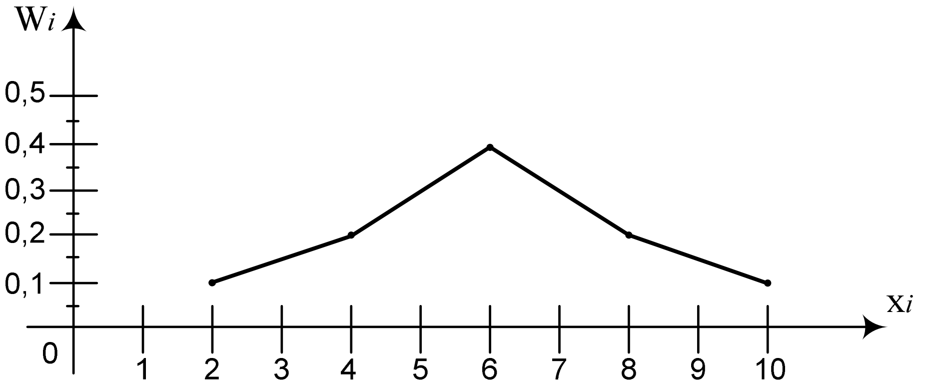

Рис. 6

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, що складається із прямокутників з підставами на вісі абсцис (часткові інтервали) і висотами, які дорівнюють щільності частот. Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки.

Приклад. Побудувати гістограму частот по даній вибірці:

Частковий інтервал	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	$h=5$
n_i	4	6	16	36	24	10	4	$\Sigma=100$

Рішення. Обчислюємо щільності частот:

n_i / h	0,8	1,2	3,2	7,2	4,8	2,0	0,8

На вісі абсцис (рис. 7) відкладаємо часткові інтервали, а на вісі ординат відкладаємо обчислені щільності частот n_i / h. Вони розташовані праворуч від вісі ординат.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, що складається із прямокутників, підставами яких служать часткові інтервали довжини h, а висоти дорівнюють відношенню W_i / h. Площа цієї гістограми дорівнює одиниці. На рис. 7. щільність відносної частоти W_i / h розташована ліворуч від вісі ординат. Побудовані гістограми відрізняються масштабом відрізків на вісі ординат.

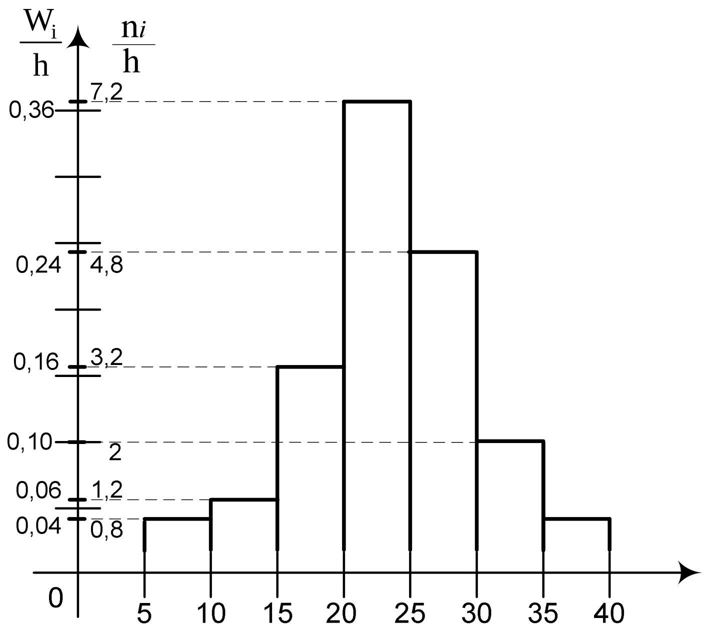

Рис. 7.

3.2. Статистичні оцінки параметрів розподілу

Статистичною оцінкою невідомого параметра теоретичного розподілу називають функцію від спостережуваних випадкових величин.

Зміщеною (зсунутою) називають статистичну оцінку, математичне очікування якої не дорівнює оцінюваному параметру.

Незміщеною (незсунутою) називають статистичну оцінку параметра, математичне очікування якої дорівнює оцінюваному параметру при будь-якому обсязі вибірки.

Ефективною називають статистичну оцінку, що має найменшу можливу дисперсію.

Переконливою називають статистичну оцінку, що при необмеженому зростанні об'єму вибірки прагне до оцінюваного параметра з ймовірністю, яка прямує до одиниці.

Генеральною середньою $\overline{x}_Г$ називають середнє арифметичне значень ознаки генеральної сукупності.

Вибірковою середньою $\overline{x}_В$ називають середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності.

Якщо всі $x_i \left(i=\overline{1,n}\right)$ різні, то $\overline{x}_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (3.1)

Якщо ж x_i мають частоти n_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$, то

$$\overline{x}_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i . \qquad \text{Тут } n = \sum_{i=1}^{k} n_i . \qquad (3.2)$$

Близькість $\overline{x}_В$ до $\overline{x}_Г$ залежить від обсягу вибірки: чим обсяг вибірки більше, тим менше вибіркова середня відрізняється від генеральної.

Генеральною дисперсією $D_Г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їхнього середнього значення $\overline{x}_Г$.

Вибірковою дисперсією D_B називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки вибіркової сукупності від їхнього середнього значення $\overline{x}_B$.

Якщо всі $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ різні, то

$$D_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_B\right)^2. \tag{3.3}$$

Якщо ж x_i мають частоти $n_i\left(i=\overline{1,k}\right)$, то

$$D_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i\left(x_i-\overline{x}_B\right)^2; \quad \text{тут } n=\sum_{i=1}^{k}n_i. \tag{3.4}$$

Формулу (3.4) можна спростити:

$$D_B=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2, \tag{3.5}$$

тобто дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки мінус квадрат його загальної середньої.

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії:

$$\sigma_B=\sqrt{D_B}. \tag{3.6}$$

Крім розглянутих вище вибіркових характеристик розподілу ще додають відносно до варіаційного ряду поняття розмаху варіації, моди і медіани.

Розмахом варіації називають різницю між найбільшою і найменшою варіантами: $R=x_{наиб}-x_{наим}$.

Варіанта, яка має найбільшу відносну частоту, називається модою, і позначається M_0.

Варіанта, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні між собою по числу варіант, називається медіаною, і позначається m_ℓ. Якщо об'єм вибірки $n=2k+1$, то $m_\ell=x_{k+1}$, якщо $-n=2k$, то $m_\ell=(x_k+x_{k+1})/2$. Ці характеристики називають генеральними, якщо вони визначені для генеральної сукупності.

Приклад. Вибіркова сукупність задана таблицею розподілу:

x_1	1	2	3	4	Σn_i
n_i	20	15	10	5	50

Знайти вибіркові: середнє $\overline{x_B}$, дисперсію D_B і квадратичне відхилення σ_B.

Рішення. $\overline{x_B}=\dfrac{20\cdot1+15\cdot2+10\cdot3+5\cdot4}{50}=\dfrac{100}{50}=2$;

$$D_B = \frac{20(1-2)^2 + 15(2-2)^2 + 10(3-2)^2 + 5(4-2)^2}{50} = \frac{50}{50} = 1;$$

$$\sigma_B = \sqrt{1} = 1.$$

При використанні формули (3.5) маємо:

$$\overline{x^2} = \frac{20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2}{50} = \frac{250}{50} = 5;$$

$$D_B = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1.$$

Виправлена дисперсія – це вибіркова дисперсія, помножена на виправляючий коефіцієнт:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B. \tag{3.7}$$

При досить великих n вибіркова і виправлена дисперсії практично не розрізняються.

Точечною називають оцінку, що визначається одним числом.

Інтервальною називають оцінку, що визначається двома числами – кінцями інтервалу.

Надійністю (*довірчою ймовірністю*) оцінки параметра розподілу називають імовірність: 0,95; 0,99 або 0,999, з якою статистичний параметр розподілу відповідає теоретичному.

Довірчим називають інтервал, що покриває невідомий параметр розподілу із заданою надійністю.

Приклад. Випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим $\sigma = 3$. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного очікування a по вибірковому середньому $\overline{x} = 4{,}1$, якщо обсяг вибірки $n = 36$ і задана надійність $\gamma = 0{,}95$.

Рішення. Довірчий інтервал: $\left(\overline{x} - \delta; \overline{x} + \delta\right)$, де $\delta = t\sigma / \sqrt{n}$. Величину t знаходимо по таблиці (*Додаток 2*) функції Лапласа: $\Phi(t) = \gamma / 2$; $\Phi(t) = 0{,}475$; $t = 1{,}96$. Отже, $\delta = 1{,}96 \cdot 3 / \sqrt{36} = 0{,}98$.

Таким чином, значення невідомого параметра a, що відповідають узятій надійності за даними вибірки, задовольняють нерівності:

$$3{,}12 < a < 5{,}08.$$

Зауваження. На практиці δ часто невідомо. Тоді, знаючи, що $\dfrac{\overline{x} - a}{S\sqrt{n}}$ має розподіл Стьюдента, довірчий інтервал записується у вигляді:

$$\overline{x} - t_\gamma S / \sqrt{n} < a < \overline{x} + t_\gamma S / \sqrt{n}. \tag{3.8}$$

При даних γ і n величину t_γ знаходять по таблиці (*Додаток 3*).

Приклад. За результатами 23 незалежних спостережень:

X	7,9	8,3	8,6	9,2	9,5
n_i	3	4	9	5	2

нормальної випадкової величини обчислити середнє емпіричне $\bar{x}$, «виправлене» середнє квадратичне відхилення S і знайти довірчий інтервал для математичного очікування, з надійністю 0,95.

Рішення. $\bar{x} = (7{,}9\cdot 3 + 8{,}3\cdot 4 + 8{,}6\cdot 9 + 9{,}2\cdot 5 + 9{,}5\cdot 2) : 23 = 8{,}67$;

$$D = (7{,}9^2\cdot 3 + 8{,}3^2\cdot 4 + 8{,}6^2\cdot 9 + 9{,}2^2\cdot 5 + 9{,}5^2\cdot 2) : 23 - 8{,}67^2 = 0{,}224;$$

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}D} = \sqrt{\frac{23\cdot 0{,}224}{22}} = 0{,}483.$$

По таблиці розподілу Стьюдента (*Додаток 3*) для $\gamma = 0{,}95$ і $n = 23$ знайдемо $t_\gamma = 2{,}093$. За формулою (3.8) маємо:

$$8{,}67 - 2{,}093\cdot 0{,}483/\sqrt{23} < a < 8{,}67 + 2{,}093\cdot 0{,}483/\sqrt{23}.$$

Остаточно: $8{,}46 < a < 8{,}88$.

3.3. Статистичне дослідження залежностей

При дослідженні систем випадкових величин варто розглянути питання про їх взаємозалежність або незалежність. Зокрема, залежність однієї випадкової величини від значень іншої називають кореляційною.

Якщо випадкові величини X і Y лише стохастично залежні, то виникає завдання наближеного подання $Y \approx f(X)$ однієї величини через іншу. Самим зручним і загальноприйнятним є наближення по методу найменших квадратів. Величина $f(X)$ називається найкращим (у змісті методу найменших квадратів) наближенням для Y, якщо $M\left(f(X) - Y\right)^2$ приймає найменше можливе значення. У цьому випадку величина $f(X)$ − середня квадратична регресія Y на X.

Якщо параметри регресії визначають за результатами спостережень, регресію називають емпіричною, або вибіркової. Дані спостережень у випадку системи двох випадкових величин X і Y записують звичайно у вигляді кореляційної таблиці:

		X				
	Y \ X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	n_j
Y	y_1	q_{11}	q_{21}	$\dots$	q_{k1}	n_1
	y_2	q_{12}	q_{22}	$\dots$	q_{k2}	n_2
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	y_l	q_{1l}	q_{2l}	$\dots$	q_{kl}	n_l
	m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_k	n

де m_i − число спостережень $X = x_i$, n_j − число спостережень $Y = y_j$, q_{ij} − число спостережень пари $\left(x_i, y_j\right)$; $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = \sum\limits_{j=1}^{l} n_j = n$. Доведено, що рівняння лінійної регресії можна записати у вигляді:

$$y = Ax + B, \tag{3.9}$$

де $A = r\sigma(Y)/\sigma(X)$; $B = \overline{y} - A\overline{x}$. Найбільш популярною оцінкою наближення Y лінійною регресією є емпіричний коефіцієнт кореляції, який обчислюється за формулою:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}, \tag{3.10}$$

де, величина $\overline{xy}$ має назву змішаного середнього і обчислюється за формулою:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} x_i y_j q_{ij}. \tag{3.11}$$

Приклад. Результати дослідження залежності обсягу продукції Y /тис. т. / від вартості X основних фондів /млн. грн. / для 100 однотипних підприємств наведені в наступній кореляційній таблиці:

		X						
	(X,Y)	10	15	20	25	30	35	n_j
Y	3	5						5
	4	3	10	11				24
	5		7	19	15			41
	6			6	4	9		19
	7					7	4	11
	m_i	8	17	36	19	16	4	

Потрібно:
1) побудувати емпіричну ламану регресії Y на X ;
2) вибрати вид рівняння регресії;
3) оцінити залежність між Y і X емпіричним коефіцієнтом кореляції;
4) скласти емпіричне рівнянні регресії;
5) накреслити графік лінії регресії (у системі координат, використовуваної для побудови емпіричної ламаної).

Рішення. 1) Для побудови емпіричної ламаної регресії Y на X обчислимо середнє значення продукції при кожнім значенні вартості основних фондів:

$\overline{y}_1(X = x_1) = (3 \cdot 5 + 4 \cdot 3)/(8) = 3{,}37$;

$\overline{y}_2(X = x_2) = (4 \cdot 10 + 5 \cdot 7)/(17) = 4{,}41$;

$\overline{y}_3(X = x_3) = (4 \cdot 11 + 5 \cdot 19 + 6 \cdot 6)/(36) = 4{,}89$;

$\overline{y}_4(X = x_4) = (5 \cdot 15 + 6 \cdot 4)/(19) = 5{,}20$;

$\overline{y}_5\left(X=x_5\right)=\left(6\cdot 9+7\cdot 7\right)/\left(16\right)=6{,}43;$

$\overline{y}_6\left(X=x_6\right)=\left(7\cdot 4\right)/4=7{,}0.$

Потім наносимо точки $\left(x_i,\overline{y}_i\left(X=x_i\right)\right)$ на площину в системі координат XOY і з'єднуємо їх відрізками прямих (рис. 8).

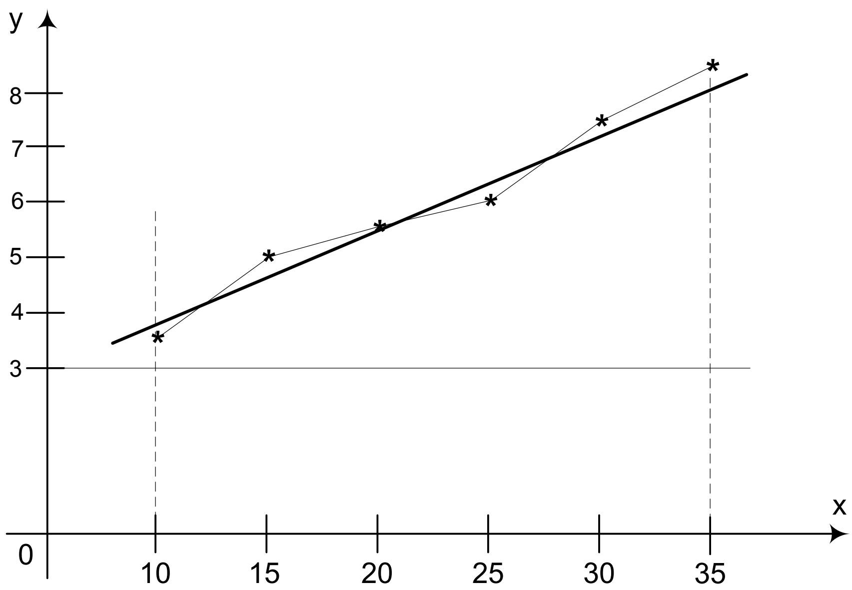

Рис. 8.

2) Розташування точок на площині XOY дозволяє припустити наявність прямолінійної кореляційної залежності між Y і X.

3) Коефіцієнт кореляції і параметри рівняння регресії (3.9) обчислюємо за формулами: (3.2), (3.4), (3.10) і (3.11).

$$\overline{x}=\frac{1}{100}\left(10\cdot 8+15\cdot 17+20\cdot 36+25\cdot 19+30\cdot 16+35\cdot 4\right)=21{,}5;$$

$$D\left(X\right)=\frac{1}{100}\left(10^2\cdot 8+15^2\cdot 17+20^2\cdot 36+25^2\cdot 19+30^2\cdot 16+35^2\cdot 4\right)-$$

$$-\left(21{,}5\right)^2=39{,}75;$$

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\sqrt{39{,}75}\approx 6{,}30;$$

$$\overline{y}=\frac{1}{100}\left(3\cdot 5+4\cdot 24+5\cdot 41+6\cdot 19+7\cdot 11\right)=5{,}07;$$

$$D\left(Y\right)=\frac{1}{100}\left(3^2\cdot 5+4^2\cdot 24+5^2\cdot 41+6^2\cdot 19+7^2\cdot 11\right)-\left(5{,}1\right)^2=1{,}06;$$

$$\sigma\left(Y\right)=\sqrt{D\left(Y\right)}=\sqrt{1{,}06}\approx 1{,}03;$$

$$\overline{xy}=\frac{1}{100}\left(10\cdot 3\cdot 5+10\cdot 4\cdot 3+15\cdot 4\cdot 10+20\cdot 4\cdot 11+20\cdot 5\cdot 19+20\cdot 6\cdot 6+\right.$$

$$\left.+25\cdot 5\cdot 15+25\cdot 6\cdot 4+30\cdot 6\cdot 9+30\cdot 7\cdot 7\ldots+35\cdot 7\cdot 4\right)=114{,}4;$$

$$r = \frac{114,4 - 21,5 \cdot 5,07}{6,30 \cdot 1,03} \approx 0,83;$$

$$A = \frac{0,83 \cdot 1,03}{6,3} \approx 0,136;$$

$$B = 5,07 - 0,1357 \cdot 21,5 = 5,07 - 2,92 = 2,15.$$

Порівняно велике значення r, яке за позначенням $r \in [0;1]$, підтверджує припущення про лінійну кореляційну залежність між Y і X.

4) Емпіричне рівняння регресії має вигляд: $y = 0,136x + 2,15$.

5) Накреслимо графік лінії регресії (рис. 8).

Взаємне розташування на рисунку емпіричної ламаної і емпіричної прямої регресії свідчить про те, що припущення про лінійну регресію згідно з результатами спостережень.

Аналітично це питання вирішується за допомогою перевірки гіпотези про значимість коефіцієнта кореляції (див. приклад у розділі 3.4).

3.4. Методи статистичної перевірки гіпотез

Статистичними гіпотезами називають гіпотези про вид невідомого закону розподілу або про параметри відомого розподілу, що перевіряють за результатами спостережень. Часто поряд з основною гіпотезою H розглядається конкуруюча (альтернативна) гіпотеза H_1.

Помилкою першого роду називається помилка, що складається в тім, що відхиляється основна гіпотеза H, якщо насправді ця гіпотеза вірна.

Помилкою другого роду називається помилка, що складається в тім, що основна гіпотеза H приймається, хоча в дійсності вірна конкуруюча гіпотеза H_1.

Для перевірки гіпотез будують статистичні критерії, які складаються в тім, що за допомогою спеціально підібраної випадкової величини з відомим розподілом, визначають критичну область, при влученні в яку вибірки $x_1, x_2, ...x_n$ основна гіпотеза H відхиляється.

Критеріями згоди називають критерії перевірки про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Рівнем значимості критерію називають імовірність α помилки першого роду.

Потужністю критерію називають величину $1 - \beta$, де β − імовірність помилки другого роду.

У додатках до досліджень часто виникає необхідність по емпіричним середнім $\overline{x}$ і $\overline{y}$ при заданому рівні значимості α перевірити гіпотезу H про $M(X) = M(Y)$ − рівності математичних очікувань двох нормальних розподілів з відомими дисперсіями.

Якщо $\overline{x}$ і $\overline{y}$ обчислені за незалежними вибірками, обсяги яких відповідно рівні m і n, можна довести, що випадкова величина

$$Z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{D(X)/m + D(Y)/n}} \tag{3.12}$$

розподілена нормально з параметрами 0 і 1. Якщо конкуруюча гіпотеза H_1 полягає в тому, що $M(X) \neq M(Y)$, то найбільш потужним критерій буде у разі симетричної критичної області: $(Z < -Z_{kp})$ і $(Z > Z_{kp})$. Границі області визначаються зі співвідношення:

$$2\Phi(Z_{kp}) = 1 - \alpha. \tag{3.13}$$

Завдання такого типу виникають на виробництві при вибірковому контролі якості однакових типів виробів, виготовлених на різних верстатах або при різних технологічних режимах.

Приклад. Маємо дві незалежні вибірки деякого вироба обсягів $m = 60$ і $n = 70$ із двох нормальних розподілів. Обчислені емпіричні середні $\overline{x} = 825$ і $\overline{y} = 830$ розглядуваного вироба.

При рівні значимості $\alpha = 0{,}05$ потрібно перевірити гіпотезу H про рівність $M(X) = M(Y)$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : M(X) \neq M(Y)$, якщо відомо, що $D(X) = 35$ і $D(Y) = 50$.

Рішення. Обчислимо за формулою (3.12) значення критерію:

$$Z = \frac{825 - 830}{\sqrt{35/60 + 50/70}} = -4{,}39.$$

Використовуючи таблицю значень функції Лапласа (*Додаток 2*), визначаємо Z_{kp} зі співвідношення (3.13):

$$2\Phi(Z_{kp}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95;\ Z_{kp} = 1{,}96.$$

Тому що $|-4{,}39| > 1{,}96$, гіпотеза H відкидається.

При порівнянні точності приладів, інструментів, технологічних процесів і при рішенні багатьох інших завдань виникає необхідність порівняння дисперсій.

Так, нехай випадкові величини X і Y розподілені нормально. За даними двох відповідних незалежних вибірок обсягів m і n обчислено виправлені дисперсії $S^2(X)$ й $S^2(Y)$. Будемо перевіряти гіпотезу $H:\ D(X) = D(Y)$ щодо альтернативної гіпотези $H_1:\ D(X) > D(Y)$.

Можна довести, що відношення:

$$S^2(X)/S^2(Y) = F \tag{3.14}$$

більшої дисперсії до меншої при справедливості основної гіпотези не залежить від невідомих параметрів і має розподіл Фишера-Снедекора зі ступенями волі $K_1 = m - 1$ і $K_2 = n - 1$.

Тоді при заданому рівні значимості α по таблиці F − розподілу Фишера-Снедекора (*Додаток 4*) визначимо відповідне значення $F_{kp}(\alpha, K_1, K_2)$.

Якщо виявиться, що спостережуване значення F відношення (3.14) дисперсій більше критичного, гіпотеза H відкидається; якщо ж спостережуване значення менше, або дорівнює критичному, то гіпотеза H приймається.

Приклад. За даними двох незалежних вибірок обсягів $m=12$ і $n=17$ з нормальних генеральних сукупностей X і Y обчислені емпіричні дисперсії $S^2(X)=9{,}83$ й $S^2(Y)=7{,}54$. Потрібно при рівні значимості $\alpha=0{,}05$ перевірити гіпотезу $H:\ D(X)=D(Y)$ при альтернативній гіпотезі H_1: $D(X)>D(Y)$.

Рішення. Обчислимо по формулі (3.14) відношення більшої емпіричної дисперсії до меншого: $F=9{,}83/7{,}54=1{,}30$.

По таблиці критичних значок розподілу Фишера-Снедекора (Додаток 4) при $\alpha=0{,}05$, $K_1=m-1=11$, $K_2=n-1=16$ визначаємо $F_{кр}(0{,}05;11;16)=2{,}45$. Отже, тут $F<F_{кр.}$ Тому що спостережуване значення відносини дисперсій менше критичного, те немає підстав відкинути гіпотезу про рівність дисперсій.

Коефіцієнт кореляції r − міра лінійної кореляційної залежності між випадковими величинами. Однак оцінка r, яку обчислюємо за емпіричними даними, є величина випадкова. З того, що $r\neq 0$, ще не випливає наявність функціональної залежності. Тому виникає необхідність при заданому рівні значимості α перевіряти гіпотезу $H:\ r=0$ при конкуруючій альтернативній гіпотезі H_1: $r\neq 0$.

Якщо досліджувана система випадкових величин (X,Y) розподілена нормально, як критерій можна використати статистику

$$t=r\sqrt{(n-2)/(1-r^2)}, \qquad (3.15)$$

яка має розподіл Стьюдента із $k=n-2$ ступенями волі. Тоді на заданому рівні значимості α і числу ступенів волі k визначають за таблицею критичних значень розподілу Стьюдента (*Додаток 3*) відповідне значення $t_{kp}=(\alpha,k)$. Якщо величина $|t_{набл}|$ обчислена за формулою (3.15), не менша $t_{kp}(\alpha,k)$, то гіпотезу про відсутність кореляційної залежності між X і Y варто відкинути.

Приклад. За даними вибірки обсягу $n=87$ із двомірного нормального розподілу обчислено емпіричний коефіцієнт кореляції $r=0{,}64$. Потрібно при рівні значимості $\alpha=0{,}05$ перевірити гіпотезу $H:r=0$ при конкуруючій гіпотезі $H_1:r\neq 0$.

Рішення. Обчислимо за формулою (3.15) спостережуване значення критерію:

$$t=0{,}64\sqrt{\frac{87-2}{1-0{,}64^2}}\approx 7{,}68.$$

За рівнем значимості $\alpha=0{,}05$ і числу ступенів волі $k=87-2=85$ по таблиці критичних значень розподілу Стьюдента (*Додаток 3*) визначаємо $t_{kp}(0{,}05;85)=2{,}00$.. Якщо в таблиці відсутнє необхідне значення k, потрібно брати найближче значення t_{kp}. Оскільки $7{,}68 > 2{,}00$, гіпотезу H про відсутність кореляційної залежності відкидаємо. Інакше кажучи, емпіричний коефіцієнт кореляції значимо відрізняється від нуля.

Варто мати на увазі, що статистична перевірка гіпотези у жодному разі не дає підстав до логічного спростування або доказу її справедливості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. В.Е.Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: «Висшая школа», 1977. – 480 с.
2. В.Е. Гмурман. Руководство к решению заданий по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975. – 240 с.
3. Довідник по теорії ймовірностей і математичній статистиці. Під ред. акад. АН УРСР В.С. Королюка. К.: «Наукова думка», 1978. – 582 с.
4. В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. Вища математика. К.: «Либідь», 1996. - 440 с.
5. Я.К. Колде. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1991. - 158 с.
6. С.А.Айвазян и др. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. - М.: Финансы и статистика, 1985. - 487 с.
7. А.І.Колосов, Ю.Є.Печеніжський, С.О.Станішевський. Теорія ймовірностей і математична статистика. Харків: ХНАМГ, 2008. – 52 с.

4. ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ, САМОСТІЙНИХ ТА КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Завдання 1. У задачах **1 – 10** вирішити: а) рівняння; б) систему рівнянь.

1. а) $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-m}}{P_x} = 110$; б) $\begin{cases} A_{5x}^{y-3} : A_{5x}^{y-2} = 1:7; \\ C_{5x}^{y-3} : C_{5x}^{y-2} = 7:4. \end{cases}$

2. а) $P_x \cdot C_{x+1}^{x+2} = \dfrac{2}{15} P_{x+3}$; б) $C_x^{y-1} : C_x^y : C_x^{y+1} = 5:30:138$.

3. а) $\dfrac{P_{x+1}}{A_{x-1}^{n-1} \cdot P_{x-n}} = 56$; б) $\begin{cases} A_{m-2}^{n} : A_{m-2}^{n-1} = 8; \\ C_{m-2}^{n} : C_{m-2}^{n-1} = 1{,}6. \end{cases}$

4. а) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; б) $C_m^{n-1} : C_m^n : C_m^{n+1} = 2:3:4$.

5. а) $\dfrac{P_{x+2}}{33 \cdot P_{x-n}} = 4A_x^4$; б) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} : A_{2y}^{3x-1} = 8; \\ C_{2y}^{3x} : C_{2y}^{3x-1} = 8:9. \end{cases}$

6. а) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$; б) $C_{x+1}^{y-1} : C_{x+1}^{y} : C_{x+1}^{y+1} = 3:5:5$.

7. а) $\dfrac{P_{x+5}}{A_{x+3}^{n+3} \cdot P_{x-n}} = 240$; б) $\begin{cases} A_x^{y-3} : A_x^{y-2} = 1:8; \\ C_x^{y-3} : C_x^{y-2} = 5:8. \end{cases}$

8. а) $P_{x+3} = 720 \cdot A_x^5 \cdot P_{x-5}$; б) $\begin{cases} A_{2x}^{n-2} : A_{2x}^{n-3} = 8; \\ C_{2x}^{n-2} : C_{2x}^{n-3} = 8:3. \end{cases}$

9. а) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132$; б) $\begin{cases} A_m^n : A_m^{n-1} = 9; \\ C_m^n : C_m^{n-1} = 3:2. \end{cases}$

10. а) $\dfrac{A_{n+1}^{n} \cdot P_{n-4}}{P_{n-1}} = 15$; б) $\begin{cases} A_{5x}^{n-3} : A_{5x}^{n-21} = 1:7; \\ C_{5x}^{n-2} : C_{5x}^{n-3} = 7:4. \end{cases}$

Завдання 2. Знайти відповідні ймовірності.

11. Три студенти складають іспит. Імовірність того, що перший студент складе іспит на «5», дорівнює 0,8, для другого студента така ймовірність дорівнює 0,65, для третього-0,7. Визначити ймовірність події, яка полягає у тому, що хоча б один зі студентів складе іспит на «5», а також події, що два студенти складуть іспит на «5».

12. У гаманці 7 монет по 3 коп. і 5 монет по 20 коп. Визначити ймовірність того, що дві взяті навмання монети виявляться однієї вартості.

13. Стріляють по п'ятьох мішенях типу *A*, по трьох — типу *B* и по двох — типу *C*. Імовірність влучення у мішень типу *A* дорівнює 0,4, типу *B*—0,2 і типи *C*—0,3. Знайти ймовірність влучення у мішень при одному пострілі, якщо невідомо, у мішень якого типу він буде зроблений.

14. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом години він буде біля першого верстата, дорівнює 0,7, біля другого-0,5, третього - 0,75. Визначити ймовірність того, що протягом години уваги робітника зажадають: а) всі верстати; б) який-небудь один верстат; в) хоча б один верстат.

15. Імовірність того, що студент відповість на перше із трьох питань екзаменаційного квитка, дорівнює 0,95, на друге - 0,9 і на третє - 0,85. Визначити ймовірність того, що студент здасть іспит, якщо для цього йому необхідно відповісти: а) на всі питання; б) хоча б на два питання.

16. На столі в довільному порядку лежать 32 екзаменаційних квитка. Чому дорівнює ймовірність того, що номер узятого навмання квитка буде числом, кратним 3 або 7?

17. З першого автомата надходить на зборку 80%, *а* із другого 20% тих самих деталей. На першому автоматі брак становить 1%, а на другому 4%. Дві перевірені деталі, виготовлені на одному автоматі, виявилися бракованими. Визначити ймовірність того, що ці деталі виготовлені:
а) на першому автоматі; б) на другому автоматі.

18. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом години його уваги зажадає перший верстат, дорівнює 0,8, другий - 0,6, третій -0,5. Визначити ймовірність того, що протягом деякої години уваги робітника
а) не зажадає жоден верстат; б) зажадають яких-небудь два верстати.

19. Три студенти складають іспит. Імовірність того, що перший студент складе іспит, дорівнює 0,95, другий-0,9, третій-0,85. Визначити ймовірність того, що а) два студенти складуть іспит; б) всі три студенти складуть іспит.

20. Десять мисливців стріляють по черзі в одну і ту ж мішень, роблячи по одному пострілу. Після першого влучення мішень руйнується і стрілянина припиняється. Імовірність влучення в мішень для перших п'яти мисливців дорівнює 0,4, а для інших п'яти мисливців - 0,7. Яка ймовірність того, що влучить в мішень; а) п'ятий мисливець; б) сьомий мисливець?

Завдання 3. Знайти відповідні ймовірності.

21. У цеху є 10 верстатів. Імовірність доручення до роботи для кожного верстата дорівнює 0,9. Яка ймовірність одночасного доручення до роботи 5 верстатів?

22. Імовірність виграшу по квитку грошово-речової лотереї дорівнює 0,1. Яка ймовірність, маючи 8 квитків, виграти на 3 квитки або виграти хоча б на 2 квитки?

23. Визначити найімовірніше число стандартних деталей серед 40 деталей, якщо ймовірність виготовлення нестандартної деталі $p = 0{,}06$.

24. Скільки необхідно зробити незалежних випробувань, щоб найімовірніше число появи певної події виявилося рівним 50, якщо ймовірність появи цієї події в окремому випробуванні $p = 0{,}9$?

25. Імовірність виготовлення бракованої деталі дорівнює 0,01. Визначити найімовірніше число бракованих деталей серед 500 деталей і імовірність такої кількості їх у партії.

26. Скільки необхідно взяти деталей, щоб найімовірнішим числом стандартних деталей було число 50, якщо ймовірність того, що взята навмання деталь буде стандартної, дорівнює 0,81.

27. Імовірність того, що взята навмання деталь є нестандартної, дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що серед 6 узятих навмання деталей а) немає ні єдиної нестандартної; б) не більш ніж дві нестандартні деталі.

28. Стрілок робить п'ять одиничних пострілів по мішені з імовірністю влучення при кожному з пострілів $p = 0{,}6$. Для виконання вправи потрібно не менш трьох влучень у мішень. Визначити ймовірність того, що стрілок виконає вправу.

29. Визначити ймовірність того, що при 500 випробуваннях подія наступить рівно 98 разів, якщо ймовірність її появи в кожному з випробувань дорівнює 0,2.

30. Знайти ймовірність того, що при 8 незалежних випробуваннях подія *A* відбудеться не менш чим три рази, якщо ймовірність появи події *A* при кожнім випробуванні дорівнює 0,6.

Завдання 4. Дискретна випадкова величина *X* має табличний закон розподілу.

Визначити: **а)** математичне очікування; **б)** дисперсію; **в)** середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X* за даним законом її розподілу:

31.

X	1	2	3	4	5
P	0,05	0,18	0,23	0,41	0,13

32.

X	2	3	4	5	8
P	0,25	0,15	0,27	0,08	0,25

33.

X	2	4	5	6	7
P	0,18	0,29	0,23	0,16	0,14

34.

X	4	5	6	8	10
P	0,21	0,17	0,18	0,23	0,21

35.

X	3	6	7	8	9
P	0,15	0,18	0,36	0,21	0,10

36.

X	6	8	9	10	12
P	0,17	0,14	0,27	0,23	0,19

37.

X	2	3	5	6	9
P	0,31	0,08	0,15	0,21	0,25

38.

X	1	3	6	8	11
P	0,07	0,16	0,05	0,23	0,49

39.

X	3	5	8	10	12
P	0,41	0,18	0,06	0,21	0,14

40.

X	2	6	9	12	15
P	0,27	0,33	0,13	0,11	0,16

Завдання 5. Випадкова величина *X* задана інтегральною функцією розподілу *F (x)*. Визначити:

а) диференціальну функцію *f (x);*

б) математичне очікування і дисперсію *X;*

в) імовірність того, що *X* приймає значення з інтервалу (0,5; 1).

г) побудувати графіки функцій *F (x)* і *f(x)*.

41. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$

42. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ \frac{1}{2}(x+1), & -1\le x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$

43. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ \frac{1}{3}(x+1), & -1\le x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$

44. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{3}x, & 0\le x\le 3; \\ 1, & x>3. \end{cases}$

45. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2; \\ \frac{1}{4}(x+2), & -2\le x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$

46. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<\frac{1}{2}; \\ x-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2}; \\ 1, & x>\frac{3}{2}. \end{cases}$

47. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sin x, & 0\le x\le \frac{p}{2}; \\ 1, & x>\frac{p}{2}. \end{cases}$

48. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le p; \\ 1, & x>p. \end{cases}$

49. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ tgx, & 0\le x\le \frac{p}{4}; \\ 1, & x>\frac{p}{4}. \end{cases}$

50.

$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\frac{p}{2}; \\ \frac{1}{2}(1+\sin x), & -\frac{p}{2}\le x\le \frac{p}{2}; \\ 1, & x>\frac{p}{2}. \end{cases}$

Завдання 6. Визначити ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина *X* приймає значення, що перебувають в інтервалі (α, β), якщо математичне очікування величини *X* дорівнює *a*, а середнє квадратичне відхилення—σ.

№	a	σ	α	β	№	a	σ	α	β
51.	*4*	*2*	*8*	*10*	**56.**	*4*	*5*	*10*	*16*
52.	*5*	*4*	*10*	*12*	**57.**	*5*	*8*	*18*	*21*
53.	*3*	*2*	*5*	*8*	**58.**	*8*	*3*	*14*	*17*
54.	*2*	*3*	*3*	*6*	**59.**	*2*	*8*	*12*	*18*
55.	*3*	*4*	*8*	*9*	**60.**	*3*	*4*	*7*	*15*

Завдання 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного очікування α нормального розподілу з надійністю γ, знаючи вибіркове середнє $\overline{x}$, «виправлене» середнє квадратичне відхилення S і обсяг вибірки n.

№ п/п	Параметри			
	$\overline{x}$	S	n	γ
61	83,4	5,8	20	0,95
62	12,3	0,9	14	0,99
63	15,6	1,3	18	0,95
64	25,3	4,7	25	0,95
65	37,2	6,3	21	0,99
66	18,9	5,2	17	0,95
67	45,6	7,2	29	0,95
68	38,4	3,4	23	0,99
69	64,9	4,8	26	0,99
70	34,5	3,8	30	0,99

Завдання 8. За даними кореляційної таблиці потрібно:

а) побудувати емпіричну ламану регресії Y на X;

б) вибрати вид рівняння регресії;

в) оцінити залежність між Y і X емпіричним коефіцієнтом кореляції;

г) перевірити значимість емпіричного коефіцієнта кореляції;

д) скласти емпіричне рівняння регресії Y на X;

е) накреслити графік лінії регресії у системі координат, використаної для побудови емпіричної ламаної.

71.

		X						
	(X,Y)	6	12	18	24	30	36	n_j
Y	10	3	4					7
	20		6	10	7			23
	30			30	45			75
	40				12	8	4	24
	m_i	3	10	40	64	8	4	

72.

				X				
	(X,Y)	11	16	21	26	31	36	n_j
Y	20					14	7	21
	28				32	54		86
	36		10	17	5			32
	44	8	11					19
	m_i	8	21	17	37	68	7	

73.

				X				
	(X,Y)	8	14	20	26	32	38	n_j
Y	12	5	7					12
	20		9	12	8			29
	28			25	37			62
	36				14	9	6	29
	m_i	5	16	37	59	9	6	

74.

				X				
	(X,Y)	10	17	24	31	38	45	n_j
Y	15	5	6					11
	21		12	18	10			40
	27			28	43			71
	33				19	7	8	34
	m_i	5	18	46	72	7	8	

75.

				X				
	(X,Y)	13	20	27	34	41	48	n_j
Y	22				9	7	2	18
	27			18	10			28
	32		35	50				85
	37	17	23					40
	m_i	17	58	68	19	7	2	

76.

	(X,Y)	12	18	24	30	36	42	n_j
Y	20				16	7	2	25
	32			35	38			73
	44		10	15	27			52
	56	3	7					10
	m_i	3	17	50	81	7	2	

77.

	(X,Y)	15	20	25	30	35	40	n_j
Y	18	4	5					9
	23		7	9	12			28
	28			18	25	31		74
	33				11	8	2	21
	m_i	4	12	27	48	39	2	

78.

	(X,Y)	20	25	30	35	40	45	n_j
Y	20					12	7	19
	30			14	20	25		59
	40		8	10	11			29
	50	5	6					11
	m_i	5	14	24	31	37	7	

79.

	(X,Y)	25	30	35	40	45	50	n_j
Y	20	2	8					10
	30		7	15				22
	40			18	20	35		73
	50					14	6	20
	m_i	2	15	33	20	49	6	

80.

	(X,Y)	30	36	42	48	54	60	n_j
Y	30					12	4	16
	40				25	26		51
	50		12	14	21			47
	60	3	10					13
	m_i	3	22	14	46	38	4	

Завдання 9. Маємо емпіричні середні $\overline{x}$ і $\overline{y}$, обчислені для двох незалежних вибірок обсягів m і n двох нормальних розподілів X і Y. Дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ відомі. Потрібно при рівні значимості α перевірити гіпотезу H про рівність $M(X)=M(Y)$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $M(X)\neq M(Y)$.

№ п/п	$\overline{x}$	$\overline{y}$	m	n	$D(X)$	$D(Y)$	α
81	834	791	60	85	20	31	0,05
82	524	485	58	81	18	27	0,01
83	628	580	56	82	22	32	0,05
84	315	265	53	80	24	33	0,05
85	737	693	52	83	23	34	0,01
86	840	795	61	85	25	29	0,05
87	410	362	63	87	27	35	0,01
88	812	760	51	79	31	38	0,05
89	507	456	65	73	29	42	0,05
90	342	298	67	75	32	44	0,01

Завдання 10. Маємо «виправлені» емпіричні дисперсії $S^2(X)$ і $S^2(Y)$, обчислені для незалежних вибірок обсягів m і n двох нормальних розподілів X і Y. Потрібно при рівні значимості α перевірити гіпотезу H про рівність дисперсій $D(X)=D(Y)$ при альтернативній гіпотезі H_1: $D(X)>D(Y)$.

№ п/п	$S^2(X)$	$S^2(Y)$	m	n	α
91	9,8	12,3	15	30	0,05
92	7,4	15,8	20	37	0,01
93	3,2	7,3	35	38	0,05
94	15,7	6,4	17	23	0,05
95	13,5	17,7	19	34	0,01
96	16,3	25,8	27	38	0,05
97	21,2	39,7	31	23	0,05
98	18,7	32,4	37	16	0,01
99	23,5	6,8	24	19	0,05
100	17,8	11,3	35	29	0,01

Додаток 1

Значення функції $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Значення функції $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,00000**	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	**0,34134**	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	**0,47725**	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
	3,0	**0,49865**	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
	3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
	4,0	499968	4,5	499997	5,0	49999997				

Додаток 3

t -розподіл (Стьюдента)

$$P(t > t_\alpha) = \alpha \text{ і } P(|t| > t_\alpha) = \alpha$$

	Однобічна критична область α					
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001
	Двобічна критична область α					
k	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002
1	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,30
2	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33
3	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21
4	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17
5	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89
10	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08	3,45
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39
40	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,31
60	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,23
120	1,66	1,98	2,36	2,62	2,85	3,16

Додаток 4

F -розподіл (Фишера) $P(F > t_{\alpha}) = \alpha$

	$\alpha = 0{,}05$							
k_2 \ k_1	2	3	4	5	6	8	12	24
2	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45
3	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64
5	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53
6	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84
8	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12
10	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74
12	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50
15	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29
17	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19
20	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08
25	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96
30	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89
40	3,23	2,84	2,62	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79
60	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70
120	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61
	$\alpha = 0{,}01$							
2	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46
3	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60
5	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,98	9,47
6	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31
8	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28
10	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33
12	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78
15	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29
17	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08
20	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86
25	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62
30	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47
40	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29
60	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12
120	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,66	2,34	1,95

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки для практичних, самостійних та контрольних робіт з теорії ймовірностей та математичної статистики

Укладачі: Юрій Євгенович Печеніжський,
Степан Олександрович Станішевський,
Володимир Савович Рухляда

Відповідальний за випуск: А. Є. Ачкасов

Редактор: М. З. Аляб'єв

План 2009, поз. 187 М

Подп. до друку 15.04.09	Формат 60×84 1/16	Друк на різографі
Папір офісний	Усл.- печ. л. 3,05	Уч. -изд. л. 3,1
Зам. №	Тираж 250 прим.	

ХНАГХ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ