

Разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную выполняется как и в методе сил.

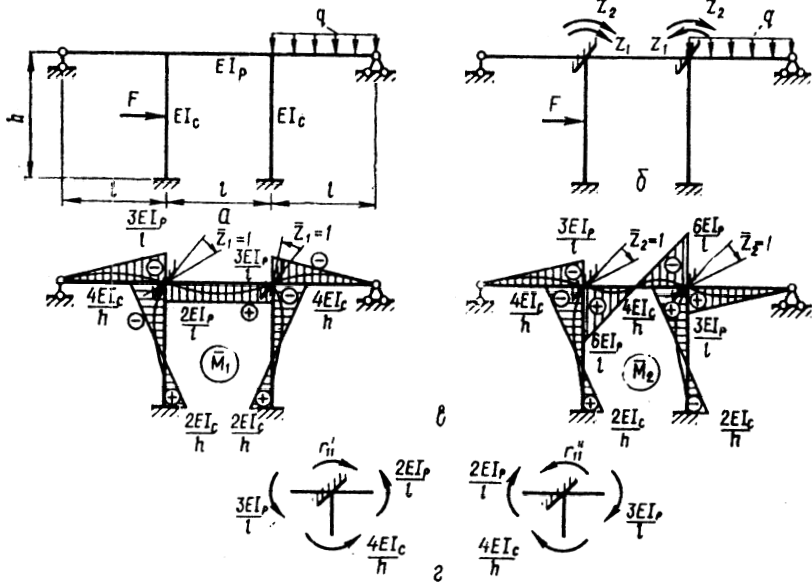


Рис.11

6.2. Расчет рам с наклонными стойками

При наличии наклонных стоек в раме со сдвигающимися узлами (рис.12, а) появляются некоторые особенности расчета.

Рассмотрим деформации основной системы (рис.12, б) при смещении $Z_2 = 1$ (рис.12, в). В силу малости перемещений можно считать узел I смещается при этом по нормали к оси стержня $A - I$ (по касательной к окружности с центром в точке A). Учитывая, что горизонтальная проекция этого перемещения равна единице, находим взаимные смещения $f_1 = ctg\alpha$ и $f_2 = c sec\alpha$ концов ригеля и стойки по нормали к их осям. теперь с помощью табл.1 получим эпюру \bar{M}_2 (рис.12, г). Здесь множители f_1 и f_2 в значениях моментов учитывают отличие от единицы смещений концов ригеля и стойки.

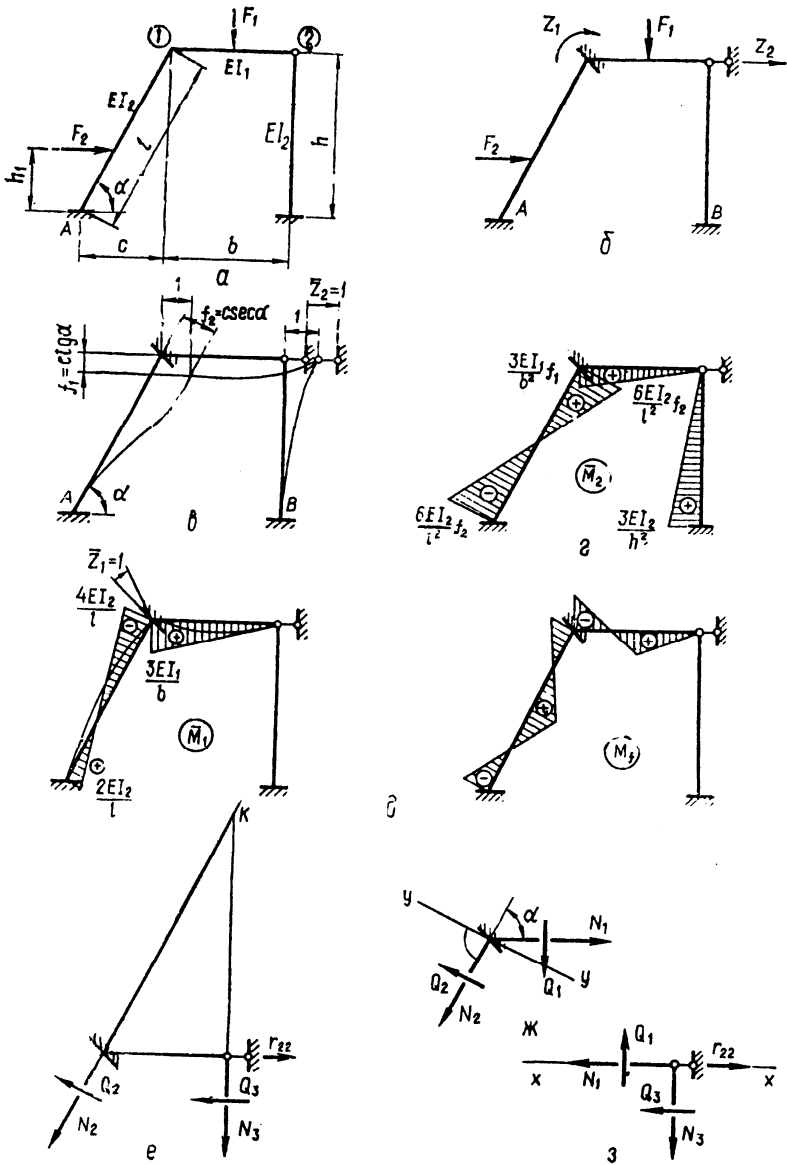


Рис.12

Построение эпюр от поворотов узлов (\overline{M}_1) и от нагрузки (M_f) не связано с какими-либо затруднениями (рис.12, д).

Реакции в плавающей заделке определяются, как и обычно. При вычислении реакций в линейной связи, вырезав ригель (рис.12, е), обнаруживаем, что на ось опорного стержня дают проекции не только поперечные силы, но и продольная сила в наклонной стойке. Тогда предварительно необходимо определить эту продольную силу способом вырезания узлов. Так, из узла 1 (рис.12, ж) следует

$$\sum y = Q_2 - Q_1 \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0 \text{ и } N_1 = \frac{Q_2 - Q_1 \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

а из узла 2 (рис.12, з)

$$\sum x = r_{22} - N_1 - Q_3 = 0 \text{ и } r_{22} = N_1 + Q_3.$$

Иногда удается записать уравнение равновесия ригеля так, что в него не входят продольные силы. В нашем примере такой результат дает уравнение моментов относительно точки K (рис.12, е).

Вопросы для самопроверки

1. Какие приемы используют для упрощения расчета симметричных рам методом перемещений?
2. Какова особенность определения реакций в групповых связях?
3. Какова особенность построения единичных эпюр моментов в рамах с наклонными стойками при наличии линейных смещений узлов?

7. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА. СМЕШАННЫЙ МЕТОД

7.1. Выбор метода расчета. Комбинированный способ

Приступая к расчету той или иной системы в первую очередь необходимо выбрать рациональный метод ее расчета. Простейшим критерием при выборе метода является меньшее количество неизвестных.

Например, рама на рис.13, а имеет степень кинематической неопределимости $n_{кин} = 3$, а степень статической неопределимости $n_{ст} = 1$, поэтому ее удобнее рассчитывать методом сил. Для рамы, приведенной на рис.13, б, $n_{ст} = n_{кин} = 2$. Симметрия рамы и нагрузки позволяют сократить число неизвестных в методе сил до одного, а в методе перемещений все неизвестные обращаются в ноль. Иначе говоря, рама является кинематически определимой и эпюра изгибающих моментов в заданной раме соответствует эпюре моментов основной системы.

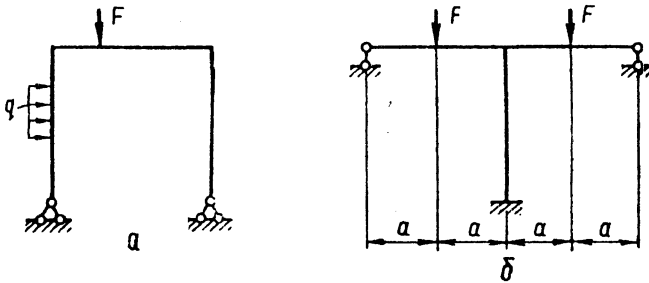


Рис.13

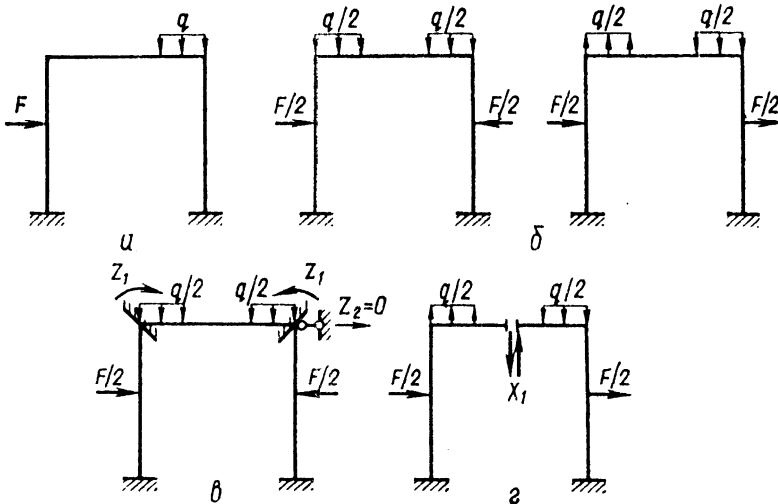


Рис.14

В некоторых случаях одну и ту же раму при разных загрузках удобно рассчитывать разными методами. Пусть П-образная симметричная рама (рис.14, *а*) загружена произвольной нагрузкой. Для этой рамы $n_{ст} = n_{кин} = 3$. Разложим нагрузку на симметричную и кососимметричную составляющие (рис.14, *б*) и для каждой из них выберем рациональный метод расчета.

При симметричной нагрузке число неизвестных в методе сил сокращается до двух (например, изгибающий момент и продольная сила в среднем сечении ригеля). В то же время в методе перемещений линейные смещения узлов отсутствуют, а угловые равны между собой.

При кососимметричной нагрузке, напротив, в методе сил остается лишь кососимметричное неизвестное (поперечная сила в середине ригеля), а в методе перемещений удастся сократить число неизвестных лишь до двух: горизонтальное смещение ригеля и групповой поворот его узлов.

Таким образом, в рассматриваемой раме расчет на симметричную нагрузку выполняем методом перемещений (рис.14, *в*), а на кососимметричную – методом сил (рис.14, *г*). Окончательные усилия получают суммированием их составляющих, найденных методом сил и методом перемещений.

Описанный способ расчета называют *комбинированным*.

7.2. Смешанный метод

В некоторых статически неопределимых системах можно выделить часть, удобную для применения метода сил, и часть, удобную для применения метода перемещений.

Метод расчета, в котором за неизвестные принимаются часть сил и часть перемещений называется *смешанным методом*. Этот метод разработан А.А.Гвоздевым.

Применение смешанного метода рассмотрим на примере рамы, показанной на рис.15, *а*. Ее расчет методом сил приводит к решению семи уравнений с семью неизвестными. Применение метода перемещений затруднено из-за наличия в среднем пролете криволинейного ригеля. Расчленим раму, выделив в ней среднюю криволинейную часть, как показано на рис.15, *б*. Как видим, средняя часть является один раз статически неопределимой. За неизвестное в ней удобно принять какое-либо усилие, например, изгибающий момент в среднем сечении S . Каждая из оставшихся частей рамы один раз кинематически неопределима. При их расчете удобно за неизвестные взять повороты

узлов. Тогда в основной системе (рис.15, в) введем шарнир в сечении C и поставим в узлах 1 и 2 плавающие заделки.

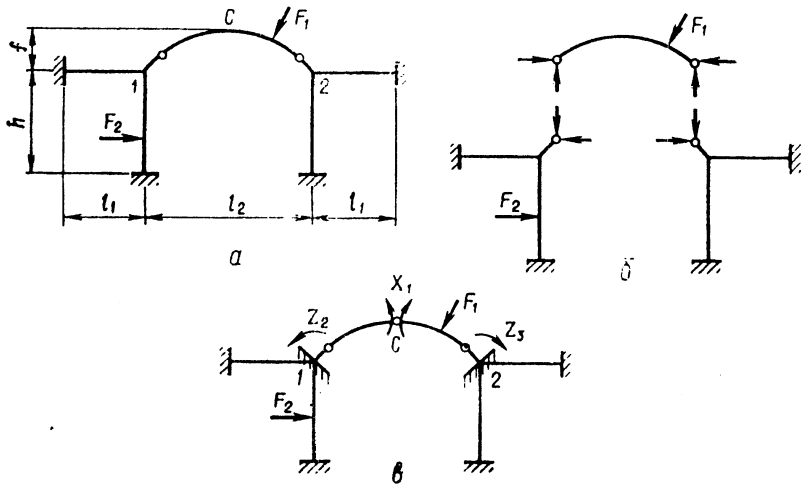


Рис.15

Условиями эквивалентности основной и заданной систем в этом случае будут отсутствие перемещений по направлению усилия X_1 и отсутствие реакций в плавающих заделках. Эти условия запишем в канонической форме:

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}Z_2 + \delta_{13}Z_3 + \Delta_{1f} &= 0, \\
 r_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2f} &= 0, \\
 r_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3f} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Канонические уравнения смешанного метода (30) содержат перемещения от сил (δ_{11} и Δ_{1f}), перемещения от смещения опор (δ_{12} и δ_{13}), реакции от сил (r_{21} , r_{31} , R_{2f}) и реакции от смещения опор (r_{22} , r_{23} , r_{32} и r_{33}).

Перемещения от сил находят по формуле Мора, например,

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 dx.$$

Перемещения от смещений опор находят либо из геометрических соотношений по эпюре перемещений, либо статическим методом.

Для определения реакций от сил и от перемещений используют условия равновесия узлов или соответствующих стержней рамы.

При вычислении коэффициентов канонических уравнений необходимо помнить о теоремах взаимности. В частности, в рассматриваемой раме $\delta_{21} = -r_{21}$, $\delta_{13} = -r_{31}$, $r_{23} = r_{32}$.

Дальнейший расчет (решение системы уравнений, построение эпюр M , Q , N) не отличается от расчетов в методе сил или в методе перемещений.

Вопросы для самопроверки

1. Каким критерием пользуются при выборе метода расчета статически неопределимой системы?
2. В чем сущность комбинированного способа?
3. Как преобразуется нагрузка для применения комбинированного способа?
4. Какие величины принимаются за неизвестные в смешанном методе?
5. Как определяется количество неизвестных смешанного метода?
6. Как выбирается основная система смешанного метода?
7. Каков механический смысл канонических уравнений смешанного метода?
8. Что является коэффициентами при неизвестных в канонических уравнениях смешанного метода? Как они определяются?
9. Удовлетворяет ли условию симметрии матрица коэффициентов канонических уравнений смешанного метода? Почему?
10. Как строят окончательные эпюры M , Q , N после определения неизвестных смешанного метода?

8. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ РАВНОВЕСИЮ

8.1. Основные понятия

Прочность упругого материала считается исчерпанной, если напряжения хотя бы в одном из сечений достигают предела пропорциональности (или близкого к нему предела текучести σ_y). Учет пластических деформаций позволяет повысить нагрузки, воспринимаемые сооружением. При переходе материала в пластическую стадию деформирования за счет перераспределения усилий разрушение во многих случаях происходит лишь тогда, когда полностью исчерпается несущая способность нескольких сечений. Состояние системы, предшествующее ее разрушению, называют *состоянием предельного равновесия*, а нагрузку, соответствующую этому состоянию, - *предельной* (F_{max}).

Для учета пластических свойств материала реальная диаграмма напряжений (например, для стали – рис.16, а) заменяется упрощенной, состоящей из двух линейных участков (рис.16, б). Первый участок действителен до предела текучести σ_y , а второй (пунктир на рис.16, б) – после предела текучести так, что модуль упругости $E_2 < E_1$.

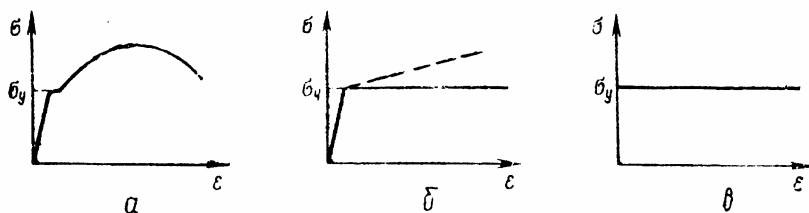


Рис.16

Для материалов с явно выраженной на диаграмме площадкой текучести Прандтль предложил на втором участке принять $E_2 = 0$, т.е. считать, что материал после достижения предела текучести неограниченно течет (горизонтальная сплошная линия на рис.16, в). Такой материал называют *идеально упруго-пластичным материалом*.

Учитывая, что пластические деформации, как правило, значительно больше упругих, последними в ряде случаев можно пренебречь.

Этому допущению соответствует диаграмма напряжений, приведенная на рис.16, в. Материал, удовлетворяющий такой диаграмме, называют *жестко-пластическим*.

8.2. Несущая способность сечения. Расчет статически определимых систем

Рассмотрим работу балки на двух упорах (рис.17, а). При росте нагрузки текучесть наступит в первую очередь в крайних волокнах сечения с наибольшим изгибающим моментом (рис.17, б). При дальнейшем увеличении нагрузки текучесть охватывает все большую часть сечения (рис.17, в), в пределе распространяясь на всю его высоту (рис.17, г). Зона пластических деформаций охватывает при этом некоторую часть балки по длине (заштрихованная часть на рис.17, г). Это состояние и будет *состоянием предельного равновесия* балки, ее несущая способность исчерпана, а в сечении с наибольшим моментом образуется *пластический шарнир* (рис.17, д). Этот шарнир отличается от идеального шарнира тем, что в нем действует постоянный момент

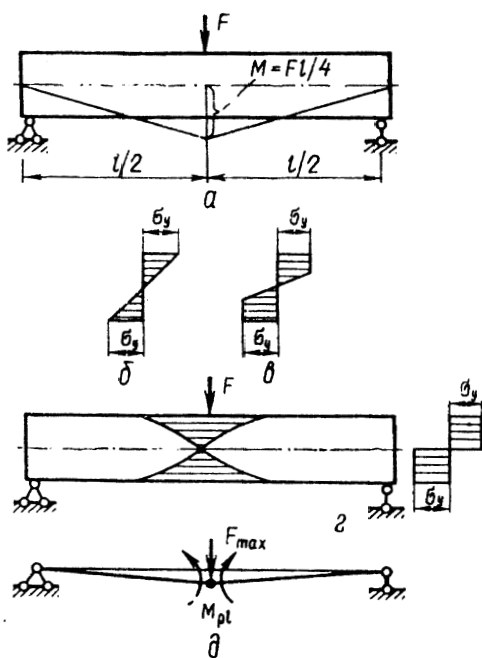


Рис.17

$$M_{pl} = \sigma_y W_{pl}, \quad (31)$$

называемый *пластическим моментом*. Пластический шарнир – односторонний (работает только в одном направлении) и исчезает при разгрузке.

Для определения несущей способности сечения найдем момент внутренних сил в состоянии предельного равновесия относительно

нейтральной оси:

$$M_{pl} = \int_{(A_1)} \sigma_y y_1 dA + \int_{(A_2)} \sigma_y y_2 dA = \sigma_y (S_1 + S_2), \quad (32)$$

где y_1 и y_2 - расстояния от нейтральной оси до элементарных площадок dA ; S_1 и S_2 - статические моменты частей A_1 и A_2 сечения относительно нейтральной оси (рис.18, а).

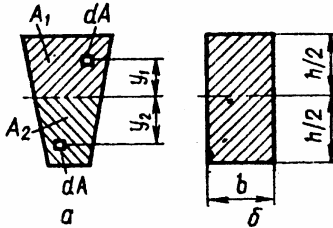


Рис.18

Сравнивая (31) и (32), получаем выражение *пластического момента сопротивления*:

$$W_{pl} = S_1 + S_2. \quad (33)$$

Если сечение симметрично относительно нейтральной оси, то

$$W_{pl} = 2S_o, \quad (34)$$

где S_o - статический момент полусечения относительно нейтральной оси.

Для прямоугольного сечения (рис.18, б)

$$W_{pl} = 2b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}.$$

Сравнивая это значение с величиной упругого момента сопротивления $W = \frac{bh^2}{6}$, получаем $W_{pl}/W = 1,5$. Таким образом, учет пластических свойств материала позволяет теоретически увеличить нагрузку до 50%. Для других форм поперечного сечения W_{pl}/W имеет различные значения: например, для круглого сечения – 1,7, для двутаврового – 1,04...1,19.

Изгибающий момент в сечении балки под силой равен $F l / 4$. Тогда предельное значение нагрузки для рассматриваемой балки найдем из условия $M_{pl} = \sigma_y W_{pl} = F_{max} l / 4$. Получаем

$$F_{max} = 4 \sigma_y W_{pl} / l \text{ или } F_{max} = b h^2 \sigma_y / l.$$

В некоторых случаях для наступления предельного равновесия может потребоваться появление не одного, а нескольких пластических шарниров.

8.3. Расчет статически неопределимых систем

В статически определимой системе увеличение предельной нагрузки при учете пластических деформаций достигается лишь за счет повышения несущей способности сечений. Статически неопределимая система не разрушается при выключении одной связи (появление пластического шарнира) и нагрузка может увеличиваться дальше за счет перераспределения усилий до тех пор, пока система не станет геометрически изменяемой.

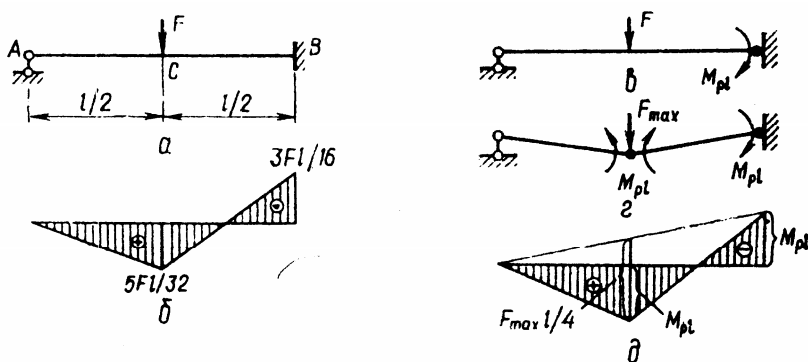


Рис.19

Проследим работу однопролетной балки (рис.19, а) при увеличении нагрузки. До тех пор, пока материал балки работает в упругой стадии, эпюра изгибающих моментов (рис.19, б) имеет наибольшую ординату в заделке. В связи с этим при росте нагрузки пластический шарнир образуется в первую очередь в этом сечении (рис.19, в). При

дальнейшем увеличении нагрузки балка работает как статически определимая, момент в сечении B остается неизменным, а изгибающий момент в сечении C растет до тех пор, пока не достигнет M_{pl} . Образуется второй пластический шарнир, наступает состояние предельного равновесия (рис.19, z). На основании предельной эпюры изгибающих моментов (рис.19, d) устанавливаем соотношение между предельной нагрузкой и несущей способностью сечения:

$$F_{max} l/4 = M_{pl} + M_{pl}/2,$$

откуда

$$F_{max} = 6M_{pl}/l.$$

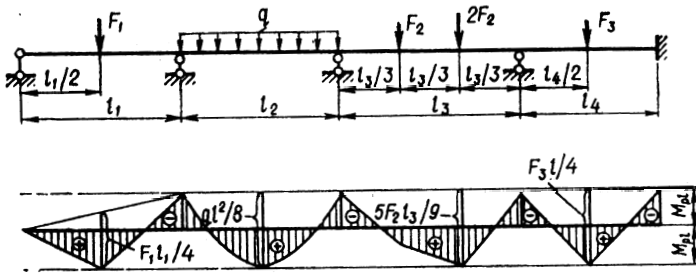


Рис.20

Разрушение пролета балки происходит при наличии в нем трех шарниров (в примере - A, B и C). На этом основан способ построения предельной эпюры изгибающих моментов в многопролетной балке, который называют *способом выравнивания моментов*. Для балки постоянного сечения этот способ применяется следующим образом (рис.20). Отложив вверх и вниз от оси значения предельных моментов M_{pl} , проводим линии, параллельные оси. Изгибающие моменты в балке не должны превышать M_{pl} , т.е. ординаты эпюры M не должны выходить за пределы проведенных линий. Вписывая в каждом пролете балочную эпюру между линиями предельных моментов, получаем эпюру моментов, соответствующую предельному равновесию - пре-

дельную эпюру. На основании этой эпюры получаем для каждого пролета предельную нагрузку:

$$F_{1,max} = 6M_{pl} / l_1, \quad q_{max} = 16M_{pl} / l_2^2, \\ F_{2,max} = 18M_{pl} / 5l_3, \quad F_{3,max} = 8M_{pl} / l_4.$$

Если нагрузки в каждом пролете не зависят друг от друга, то эти величины являются окончательными. Если же нагрузки меняются пропорционально некоторому параметру k , находят значение этого параметра для каждого пролета. Предельное значение параметра принимают наименьшим из полученных величин - k_{min} . Действительно, для разрушения балки достаточно, чтобы разрушился хотя бы один пролет.

Для более сложных стержневых систем – ферм, рам расчет затрудняется из-за необходимости установления истинного механизма разрушения. При простом нагружении (когда все нагрузки меняются пропорционально одному параметру) могут использоваться статическая и кинематическая теоремы.

В соответствии со *статической теоремой* из всех возможных вариантов распределения усилий, удовлетворяющих условиям равновесия, истинным будет то, которое соответствует наибольшей предельной нагрузке.

Кинематическая теорема утверждает, что из всего множества различных форм разрушения истинной будет та, которая соответствует наименьшей нагрузке.

Рассматривая расчет балки, мы пользовались по существу, статической теоремой. Последовательно выключая связи, мы находили наибольшую предельную нагрузку.

В более общем случае применение статической теоремы приводит к решению задачи линейного программирования.

Вопросы для самопроверки

1. Каковы свойства идеального упруго-пластического материала?
2. Какой материал называют жестко-пластическим?
3. Что понимается под состоянием предельного равновесия?
4. Что такое пластический шарнир? Чем он отличается от идеального шарнира?

5. Как определяется предельный момент?
6. Что такое механизм или схема разрушения?
7. В чем сущность способа выравнивания моментов для расчета многопролетных балок?
8. Как формулируются статическая и кинематическая теоремы для состояния предельного равновесия системы?