МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Л.Н.Шутенко, В.П.Пустовойтов, Н.А.Засядько

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
Краткий курс

РАЗДЕЛ 2
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

(для студентов строительных специальностей)

Харьков – ХГАГХ – 2003

Шутенко Л.Н., Пустовойтов В.П., Засядько Н.А. Строительная механика: Краткий курс / Раздел 2. Статически неопределимые стержневые системы (для студентов строительных специальностей). – Харьков: ХГАГХ, 2003. – 85 с.

Рецензент: проф., д.т.н. Г.А.Молодченко

В пособии изложены методы расчета статически неопределимых стержневых систем на заданную нагрузку, а также основы расчета сооружений по предельному равновесию. Приведены задания на расчетно-графические работы и примеры их выполнения.
Пособие предназначено для студентов строительных специальностей и филиалов академии.

Рекомендовано кафедрой строительной механики,
протокол № 5 от 29.05.03 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Статически неопределимыми называют системы, усилия в которых нельзя определить с помощью одних лишь статических уравнений – уравнений равновесия. Для их расчета необходимо дополнительно составлять кинематические уравнения – условия совместности деформаций. Как известно, между перемещениями и усилиями существует однозначная зависимость, поэтому силы в уравнениях равновесия можно выразить через перемещения и, наоборот, перемещения в условиях совместности деформаций – через усилия. В соответствии с этим для расчета статически неопределимых систем применяют три основных метода: метод сил, когда за неизвестные принимаются усилия, метод перемещений, в котором основными неизвестными принимаются перемещения, и смешанный метод.

1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

Общий для всех статически неопределимых систем порядок расчета методом сил рассмотрим в применении к рамам.

1. *Определение количества лишних связей (степени статической неопределимости)* в рамах выполняют исходя из того, что замкнутый бесшарнирный контур имеет три лишние связи, а каждый простой шарнир устраняет одну связь. Учитывая также лишние внешние связи, получаем формулу

$$n = 3К - Ш + C_o - 3, \tag{1}$$

где $К$ - число замкнутых контуров; $Ш$ - количество простых шарниров (сложные шарниры учитываются кратным числом простых: $Ш = C - 1$, где C - число стержней, соединяемых данным сложным шарниром); C_o - число опорных связей.

Для системы без опор количество лишних связей

$$n = 3К - Ш, \tag{1, a}$$

2. *Выбор основной системы*. Основная система – это статически определимая система, полученная из заданной отбрасыванием лишних связей и заменой их усилиями. Усилия в лишних связях обозначаются $X_1, X_2, ..., X_n$ и называются лишними неизвестными.

Устранение связей можно выполнить различными способами: отбрасыванием опор или заменой их опорами с ме́ньшим числом связей; постановкой шарниров в сечениях стержня; рассечением стержня. При этом необходимо помнить, что отбрасывать можно лишь *условно необходимые связи,* т.е. такие, которые не нарушают геометрической неизменяемости системы. В отличие от них устранение *абсолютно необходимых связей* приводит к геометрически изменяемой системе.

3. *Канонические уравнения* для линейно-деформируемой системы получают исходя из принципа независимости действия сил. Для этого рассматривают отдельные состояния основной системы, в каждом из которых действует лишь одно из неизвестных $X_k = 1$, и отдельно состояние, в котором действует вся заданная нагрузка. Тогда перемещение по направлению i-й отброшенной связи (i-го лишнего неизвестного) можно получить суммированием перемещений:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \ldots + \Delta_{ik} + \ldots + \Delta_{in} + \Delta_{if} =$$
$$= \delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \ldots + \delta_{ik} \cdot X_k + \ldots + \delta_{in} \cdot X_n + \Delta_{if} .$$

Учитывая то, что в заданной системе связь не нарушена, каждое из перемещений Δ_i должно быть равно нулю.

Таким образом, для системы с n лишними неизвестными получаем n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{array}{l}
\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \ldots + \delta_{1k} \cdot X_k + \ldots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1f} = 0, \\
\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \ldots + \delta_{2k} \cdot X_k + \ldots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2f} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \ldots + \delta_{ik} \cdot X_k + \ldots + \delta_{in} \cdot X_n + \Delta_{if} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \ldots + \delta_{nk} \cdot X_k + \ldots + n_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nf} = 0,
\end{array} \qquad (2)$$

где δ_{ik} - перемещение по направлению i-й отброшенной связи (X_i) в основной системе от действия $X_k = 1$ - единичное перемещение;

Δ_{if} - перемещение по направлению i-й отброшенной связи (X_i) в основной системе от действия заданной нагрузки – грузовое перемещение.

Каждое уравнение представляет собой условие совместности деформаций: отсутствие перемещения по направлению соответствующей отброшенной связи.

4. *Эпюры изгибающих моментов в основной системе* строятся отдельно от каждого неизвестного $X_i = 1$ (эпюры $\overline{M}_i$) и от заданной нагрузки (эпюра M_f). Обратим внимание на то, что на этом этапе фактически решаются основные статические уравнения задачи.

5. *Коэффициенты* δ_{ik} *и свободные члены* Δ_{if} *канонических уравнений* определяются методом Мора. В частности, для определения $\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_i \overline{M}_k dx$ перемножаются единичные эпюры $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_k$, а для определения $\Delta_{if} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_i M_f dx$ - единичная эпюра $\overline{M}_i$ с грузовой эпюрой M_f. Отметим, что коэффициенты δ_{ii}, расположенные на главной диагонали матрицы коэффициентов, называют главными. Для них выполняется условие $\delta_{ii} > 0$. Остальные коэффициенты называют побочными. Для единичных перемещений справедлива теорема о взаимности:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} .$$

Правильность вычисления перемещений рекомендуется проверить. Для этого строится суммарная единичная эпюра $\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + ... + \overline{M}_n$.

Проверка коэффициентов δ_{ik} может быть выполнена построчная или универсальная.

Построчная проверка:

$$\delta_{is} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_i \overline{M}_s dx = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} , \quad i = 1, 2, ..., n . \tag{3}$$

Универсальная проверка:

$$\delta_{ss} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_s \overline{M}_s dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} . \qquad (3, a)$$

Проверка свободных членов Δ_{if} :

$$\Delta_{sf} = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_s M_f dx = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{if} . \qquad (4)$$

6. *Решение системы канонических уравнений* выполняется любым известным методом. Правильность найденных значений X_i проверяется подстановкой в уравнения.

7. *Построение окончательной эпюры изгибающих моментов* выполняется суммированием исправленных эпюр $M_i = \overline{M}_i \cdot X_i$ и грузовой эпюры M_f :

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i + M_f . \qquad (5)$$

8. *Проверка правильности эпюры* M выполняется статическая и кинематическая.

Статическая проверка заключается в проверке равновесия узлов на эпюре M .

Кинематическая проверка может быть построчная:

$$\Delta_i = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M}_i M dx = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (6)$$

или универсальная

$$\Delta_s = \sum \frac{1}{EI} \int \overline{M} s M dx = 0 \quad . \qquad (6, a)$$

9. *Поперечные силы* можно определить непосредственно методом сечений в основной системе при действии заданной нагрузки и найденных лишних неизвестных. Для сложных рам удобнее для вычисления Q на каждом участке воспользоваться формулой

$$Q_{\substack{лев\\пр}} = \frac{M_{пр} - M_{лев}}{l} \pm \frac{ql}{2}, \tag{7}$$

где $M_{пр}$ и $M_{лев}$ - моменты на концах участка длиной l; q - равномерно распределенная перпендикулярная оси стержня нагрузка. При отсутствии распределенной нагрузки на участке

$$Q = \frac{M_{пр} - M_{лев}}{l} = const. \tag{7, a}$$

10. *Продольные силы* можно, как и поперечные силы, определить методом сечений. Для сложных рам удобнее применить способ вырезания узлов. При этом необходимо помнить о том, что в сечении стержня нужно учитывать продольные и поперечные силы, а также то, что при наличии в пределах стержня неперпендикулярной к его оси нагрузки продольные силы на концах стержня будут разными.

При определении перемещений в статически неопределимой системе можно, как и при вычислении усилий, воспользоваться эквивалентностью основной и заданной систем. Тогда по методу Мора

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int \overline{M} M dx, \tag{8}$$

где $\overline{M}$ - моменты от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения в *любой* статически определимой основной системе, M - моменты от действующей нагрузки в заданной статически неопределимой системе.

Вопросы для самопроверки

1. Какая система называется статически неопределимой?
2. Какова степень статической неопределимости замкнутого бес-

шарнирного контура?

3. Как определить степень статической неопределимости рамы?

4. Назовите три основных метода расчета статически неопределимых систем.

5. Что принимается в качестве неизвестных в методе сил?

6. Что представляет собой основная система метода сил?

7. В чем различие между абсолютно и условно необходимыми связями?

8. Приведите возможные способы отбрасывания внешних и внутренних связей.

9. Что представляют собой канонические уравнения метода сил?

10. Каков механический смысл коэффициентов и свободных членов канонических уравнений?

11. Каково свойство главных коэффициентов канонических уравнений?

12. Как проверить правильность вычисления единичных и грузовых перемещений?

13. Как можно определить усилия в заданной системе после вычисления лишних неизвестных?

14. Как проверить правильность полученной эпюры изгибающих моментов?

2. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

2.1. Симметрия рамы. Выбор симметричной основной системы

Статически неопределимая система является симметричной, если выполняется симметрия не только ее осей и опорных закреплений, но и симметрия жесткостей.

Рассмотрим раму, показанную на рис.1, *а*. Рама имеет вертикальную ось симметрии и загружена произвольной внешней нагрузкой F. Степень ее статической неопределимости $n = 3$. Выберем основную систему, не нарушая симметрии. Для этого разрежем ригель в середине пролета (рис.1, *б*).

Построив в основной системе единичные эпюры $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ (рис.1, *в*), обращаем внимание на то, что часть эпюр - $\overline{M}_2, \overline{M}_3$ и соответствующие неизвестные X_2, X_3 симметричны ("с"), а другая часть - $\overline{M}_1$ и соответственно X_1 - кососимметричны ("кс"). Учитывая то, что результат перемножения симметричной эпюры с кососимметричной всегда равен нулю, получаем $\delta_{12} = \delta_{21} = 0, \delta_{13} = \delta_{31} = 0$, и канонические уравнения разделяются:

$$\begin{aligned} &\delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} = 0; \\ &\delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2f} = 0; \\ &\delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3f} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

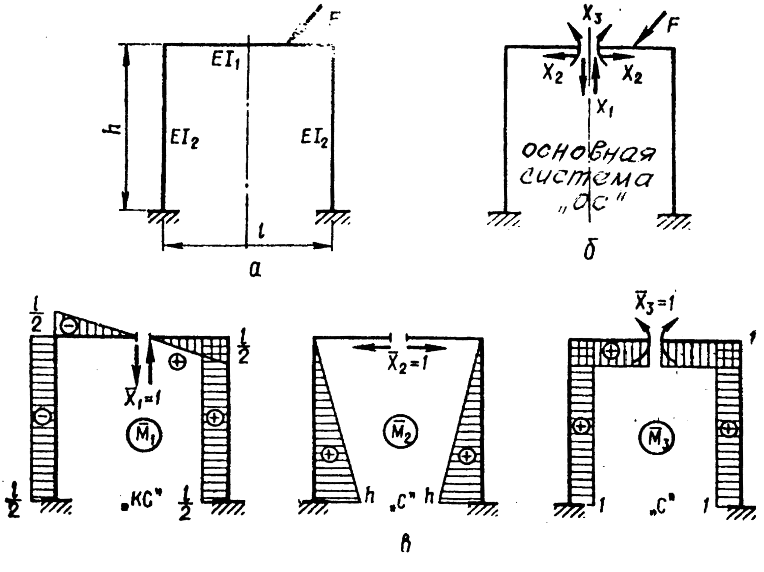

Рис.1

Таким образом, при использовании симметричной основной системы канонические уравнения разделяются на две части: одна из них содержит только симметричные неизвестные, другая – только кососимметричные.

При частных видах загружения вычисления еще больше упрощаются. Так, при симметричной нагрузке эпюра M_f - симметрична, и кососимметричные неизвестные обращаются в ноль. При кососимметричной нагрузке, соответственно, равны нулю симметричные неизвестные.

Последнее свойство симметричных систем можно использовать и при произвольной нагрузке. Для этого применяют *разложение нагрузки* на симметричную и кососимметричную составляющие. Сущность этого приема поясняется схемой, приведенной на рис.2.

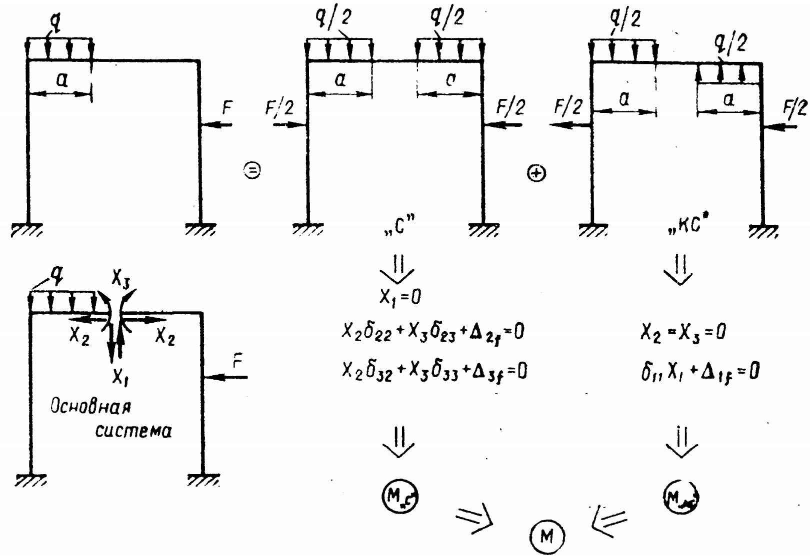

Рис.2

При расчете рамы (рис.1) все побочные перемещения, кроме δ_{23}, обратились в ноль. Для обращения в ноль и этого перемещения применяют *способ жестких консолей (упругого центра)*. Выбрав основную систему в раме (рис.1, *а*), разрезав ригель по оси симметрии, перенесем лишние неизвестные с помощью жестких консолей в некоторую точку C (рис.3, *а*). Так как консоли жесткие, условия отсутствия взаимных перемещений их концов эквивалентны условиям отсутствия взаимных перемещений концов разрезанного ригеля.

Построив эпюры моментов (рис.3, *б*), отмечаем, что эпюра $\overline{M}_1$

по-прежнему кососимметрична, $\overline{M}_2$ и $\overline{M}_3$ - симметричны. Тогда $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$.

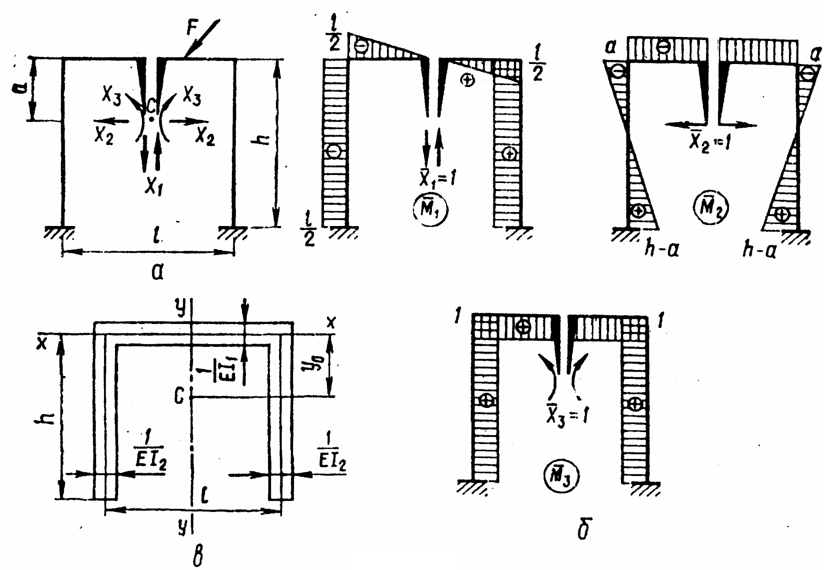

Рис.3

Найдем перемещение δ_{23} :

$$\delta_{23} = -\frac{1}{EI_1} al \cdot 1 - \frac{1}{EI_2} \frac{a - (h - a)}{2} h \cdot 1 \cdot 2$$

и потребуем, чтобы оно обратилось в ноль. Из этого условия находим длину консолей:

$$a = \frac{h^2 / (EI_2)}{l/(EI_1) + 2h/(EI_2)} . \tag{10}$$

Способ упругого центра рационально применять для расчета си-

систем, представляющих собой замкнутый или разомкнутый контур без шарниров.

Отметим, что точка C имеет упругую интерпретацию. Действительно, ее можно найти как центр тяжести условного тонкостенного сечения (рис.3, *в*).

В тех случаях, когда в симметричной раме при выборе основной системы отбрасывают связи, не лежащие на оси симметрии, и эпюры $\overline{M}_i$ становятся несимметричными, может быть применена *группировка неизвес*тных. Этот прием заключается в том, что усилия в симметрично отброшенных связях (рис.4) представляют в виде двух групп сил, одна из которых (X_1) симметрична, а другая (X_2) кососимметрична. При этом перемещение δ_{12} обращается в ноль, и канонические уравнения разделяются:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2f} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

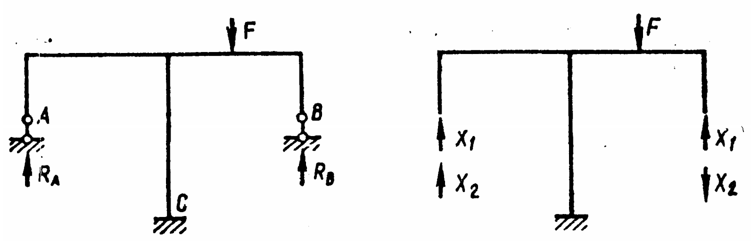

Рис.4

Вопросы для самопроверки

1. Какие способы применяются для упрощения расчета симметричных рам методом сил?

2. Какие преимущества дает выбор симметричной основной системы при расчете на: а) произвольную нагрузку, б) симметричную, в) кососимметричную нагрузку?

3. Как разложить нагрузку на симметричную и кососимметричную составляющие?

4. Когда и как применяется группировка неизвестных?

5. В каких случаях применяется способ упругого центра?

6. Как найти положение упругого центра?