

РАБОТА № 2 "РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ"

Задание для работы № 2

Исходные данные к работе выбираются из табл.2 и рис.51, 52 в соответствии с шифром.

Для заданной трехшарнирной арки необходимо:

- построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от заданной нагрузки;
 - построить линию влияния распора (усилия в затяжке) и линии влияния изгибающего момента, поперечной и продольной силы в сечении арки под сосредоточенной силой;
- по линиям влияния определить соответствующие усилия от заданной нагрузки и сравнить их с полученными при построении эпюр.

Указания к выполнению работы

Расчет арки начинается с вычисления опорных реакций и усилия в затяжке (для схем 2 и 3).

Далее намечают расчетные сечения для построения эпюр. Обязательно должны быть взяты точки на концах распределенной нагрузки, под сосредоточенной силой, на опорах и шарнире C . Для арки с повышенной затяжкой необходимо также взять точки D и E примыкания затяжки. Дополнительные точки назначают исходя из того, что эпюры внутренних усилий в арке криволинейны независимо от вида нагрузки на участке. Поэтому на каждом участке между обязательными точками необходимо взять хотя бы одну (при большой протяженности участка две и более) дополнительные точки.

Вычисления ведут в таблице (см. табл.3).

Геометрические и тригонометрические величины вычисляют в зависимости от заданного очертания оси арки.

Для параболической арки с осью, очерченной по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \text{ находят}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x),$$

после чего нетрудно найти $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$.

Таблица 2

1-я цифра шифра	l , м	a , м	b , м	2-я цифра шифра	Схемы по рис.51	q , кН/м	$\frac{c}{l}$	3-я цифра шифра	Очертание оси	F , кН	$\frac{f}{l}$
1	14	0	6	1	1	4,0	0,20	1	$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$	8	0,20
2	15	2	8	2	2	4,5	0,25	2	дуга окружности	9	0,22
3	16	4	10	3	3	5,0	0,30	3	$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}$	10	0,24
4	17	6	17	4	1	5,5	0,35	4	$y = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$	11	0,26
5	18	10	18	5	2	6,0	0,40	5	$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$	12	0,28
6	19	11	19	6	3	6,5	0,60	6	дуга окружности	13	0,30
7	20	6	18	7	1	7,0	0,65	7	$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}$	14	0,32
8	21	-	20	8	2	7,5	0,70	8	$y = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$	15	0,34
9	22	10	18	9	3	8,0	0,75	9	$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$	16	0,36
0	23	8	20	0	1	8,5	0,80	0	дуга окружности	17	0,38

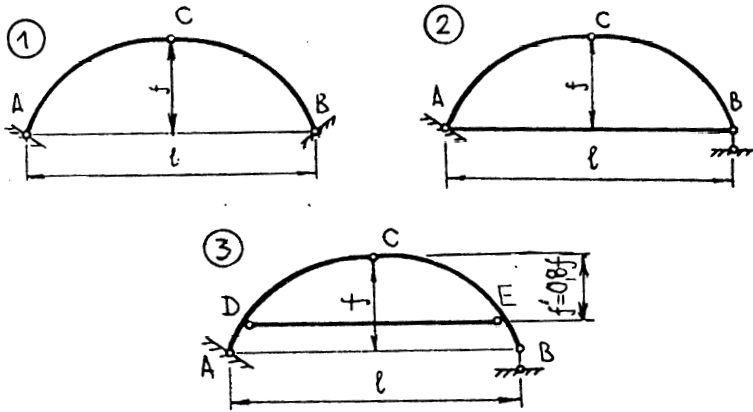


Рис.51

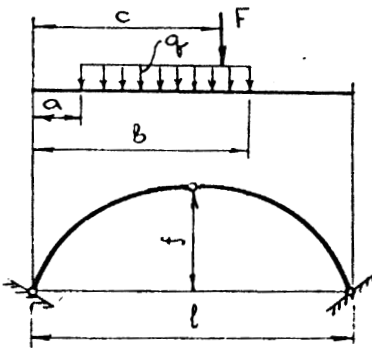


Рис.52

Для циркульной (по дуге окружности) арки предварительно находят радиус дуги

$$r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f},$$

после чего расчет ведут в такой последовательности:

$$\sin \varphi = -\frac{x}{r}; \Rightarrow \cos \varphi;$$

$$y = r \cos \varphi - (r - f).$$

Внимание! Формулы для $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ и y в циркульной арке приведены в системе координат с началом в середине пролета.

В арке, очерченной по уравнению $y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{f}{l} \cdot \frac{l-2x}{\sqrt{x(l-x)}}; \Rightarrow \sin \varphi; \cos \varphi.$$

Если ось арки очерчена по синусоиде $y = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \pi \frac{f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \Rightarrow \sin \varphi; \cos \varphi.$$

Отметим, что для всех арок, кроме циркульной, начало координат берется на левой опоре.

При расчете арки с повышенной затяжкой необходимо определять абсциссы точек D и E примыкания затяжки. Для арок разных очертаний их находят по следующим формулам:

$$\text{Для очертания } y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad x_{D,E} = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{f'}{f}} \right);$$

для циркульной $x_{D,E} = \pm r \cdot \sin \varphi_{D,E}$,

$$\text{где } \varphi_{D,E} = \arccos \cos \left(1 - \frac{f'}{r} \right);$$

$$\text{для очертания } y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)} \quad x_{D,E} = \frac{l}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{f'}{f} \left(2 - \frac{f'}{f} \right)} \right);$$

для очертания $y = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$

$$x_D = \frac{l}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{f'}{f} \right), \quad x_E = l - \frac{l}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{f'}{f} \right).$$

В примере расчета последовательность заполнения колонок 3...6 дана для циркульной арки. Для остальных арок последовательность иная: $y, \operatorname{tg} \varphi, \sin \varphi, \cos \varphi$. При расчете арки с повышенной затяжкой необходимо после вычисления ординат y ввести в таблице дополнительную колонку для определения $y' = y - (f - f')$. Величины y' нужны только для точек оси, расположенных между точками D и E .

Вычисление усилий в сечениях выполняется по формулам (15), а для арки с повышенной затяжкой – (20), (21). Отметим, что в арке с

повышенной затяжкой в точках D и E на эпюрах Q и N будут скачки и необходимо вычислять два значения Q и N - (20), (21).

При построении линий влияния сначала строятся линии влияния распора (усилия в затяжке) исходя из выражений (14), (18) и (19). После этого способом наложения в соответствии с формулами (15), (21) строят линии влияния внутренних усилий в заданном сечении. Отметим, что для сечения, расположенного ниже повышенной затяжки, усилия по (20) зависят только от балочных усилий, поэтому наложение здесь не требуется. В остальных случаях формулы (15), (21) после подстановки значений y (или y'), $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ необходимо записать в таком виде, чтобы между первым и вторым слагаемыми стоял знак минус.

Пример расчета

Для циркульной арки, приведенной на рис.53, a , построить эпюры внутренних усилий и линии влияния усилий для сечения, расположенного под сосредоточенной силой.

Решение. Найдем опорные реакции.

$$\sum M_A = -q \cdot 7 \cdot 3,5 - F \cdot 10 + V_B \cdot 14 = 0;$$

$$V_B = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3,5 + 6 \cdot 10}{14} = 11,29 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = q \cdot 7 \cdot 10,5 + F \cdot 40 - V_A \cdot 14 = 0;$$

$$V_A = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10,5 + 6 \cdot 4}{14} = 22,71 \text{ кН}.$$

Проверка

$$\sum y = V_A + V_B - q \cdot 7 - F = 22,71 + 11,29 - 4 \cdot 7 - 6 = 0.$$

$$\sum_{\text{лев}} M_C = q \cdot 7 \cdot 3,5 - V_A + H \cdot 4 = 0;$$

$$H = \frac{22,71 - 4 \cdot 7 \cdot 3,5}{4} = 15,24 \text{ кН}.$$

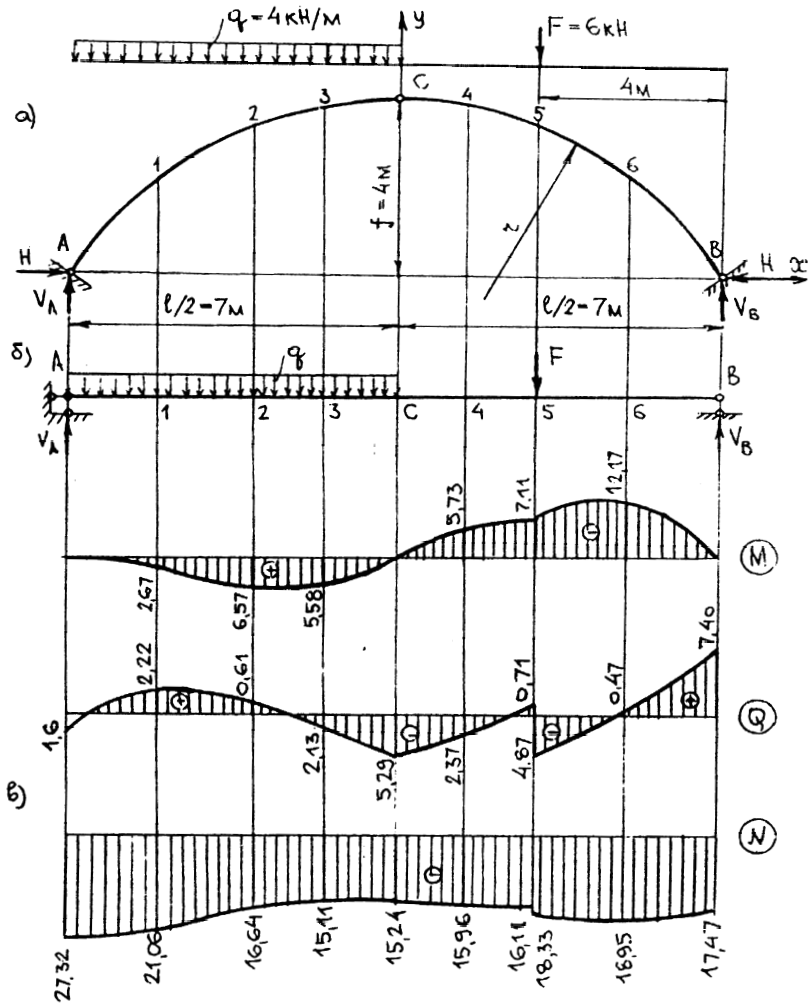


Рис.53

Проверка:

$$\sum M_C = V_B \cdot 7 - F \cdot 3 - H \cdot 4 = 11,29 - 6 \cdot 3 - 15,24 \cdot 4 \approx 0.$$

np

Найдем радиус дуги окружности:

$$r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{4}{2} + \frac{14^2}{8 \cdot 4} = 8,125 \text{ м}.$$

Назначим точки для вычисления усилий. Обязательные точки - $A, C, 5, B$. Дополнительно в правой полуарке возьмем по одной промежуточной точке в середине участков $C...5$ (точка 4) и $5...B$ (точка 6).

Для упрощения расчета в левой полуарке возьмем точки $1, 2, 3$, расположенные симметрично точкам $4, 5, 6$.

Далее начинаем расчет по табл.3. В колонке 2 записываем координаты x назначенных точек. В колонке 3 вычисляем $\sin \varphi = -\frac{x}{r}$. Далее по значению $\sin \varphi$ находим $\cos \varphi$ (колонка 4), затем $r \cos \varphi$ (колонка 5) и $y = r \cos \varphi - (r - f) = 8,125 \cdot \cos \varphi - 4,125$ (колонка 6).

Усилия M^o (колонка 7) и Q^o (колонка 8) определяем в балке, приведенной на рис.53, б. Так как в сечении 5 поперечная сила Q^o имеет скачок, то в соответствующей строке записываем два значения (слева и справа от силы). Теперь переходим к вычислению усилий по формулам (15). Последовательность вычислений понятна из следующих колонок табл.3.

По значениям колонок 10, 13, 16 на рис.53 построены эпюры M, Q и N .

Переходим к построению линий влияния. Линия влияния распределена в соответствии с выражением $H = \frac{M_C^o}{f}$ повторяет очертание линии влияния балочного момента в сечении C с ординатами, деленными

№ точки	x , м	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$r \cdot \cos \varphi$, м	y , м	M^o , кН·м	Q^o , кН
1	2	3	4	5	6	7	8
A	-7	0,862	0,508	4,125	0	0	22,71
1	-5	0,615	0,788	6,404	2,28	37,42	14,71
2	-3	0,369	0,929	7,551	3,43	58,84	6,71
3	-1,5	0,186	0,983	7,985	3,86	64,41	0,71
C	0	0	1	8,125	4	61,03	-5,29
4	1,5	-0,186	0,983	7,985	3,86	53,10	-5,29
5	3	-0,369	0,929	7,551	3,43	45,16	-5,29 -11,29
6	5	-0,615	0,788	6,404	2,28	22,58	-11,29
B	7	-0,862	0,508	4,125	0	0	-11,29

ми на f . Получаем линию влияния H в форме треугольника (рис.54) с ординатой в точке C :

$$H = \frac{l}{4f} = \frac{14}{4 \cdot 4} = 0,875.$$

Линии влияния усилий в сечении 5 строим способом наложения. Для этого пользуемся формулами (15).

Линия влияния M_5 .

$$M_5 = M_5^o - H \cdot y_5 = M_5^o - H \cdot 3,43.$$

Отложив под точкой 5 ординату $\frac{a \cdot b}{l} = \frac{10 \cdot 4}{14} = 2,86$, получа-

ем линию влияния балочного изгибающего момента M_5^o . Далее на той же оси строим линию влияния распора H с ординатами, умноженными на 3,43, т.е. под точкой C она равна $0,875 \cdot 3,43 = 3,00$. Ординаты результирующей линии влияния M_5 расположены между этими линиями (M_5^o и $H \cdot 3,43$). Знак ординат результата можно получить

Таблица 3

$H \cdot y,$ кН·м	$M,$ кН·м	$Q^o \times$ $\cos \varphi,$ кН	$H \times$ $\sin \varphi,$ кН	$Q,$ кН	$Q^o \times$ $\sin \varphi,$ кН	$H \times$ $\cos \varphi,$ кН	$N,$ кН
9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	11,54	13,14	-1,6	19,58	7,74	-27,32
34,75	2,67	11,59	9,37	2,22	9,05	12,01	-21,00
52,57	6,57	6,23	5,62	0,61	2,48	14,16	-16,64
58,83	5,58	0,70	2,83	-2,13	0,13	14,98	-15,11
60,96	≈ 0	-5,29	0	-5,29	0	15,24	-15,24
58,83	-5,73	-5,20	-2,83	-2,37	0,98	14,98	-15,96
52,57	-7,11	-4,91	-5,62	0,71	1,95	14,16	-16,11
		-10,49		-4,87	4,17		-18,33
34,75	-12,17	-8,90	-9,37	0,47	6,94	12,01	-18,95
0	0	-5,74	-13,14	7,40	9,73	7,74	-17,47

формально, считая осью окончательной линии влияния линию $H \cdot 3,43$: ординаты, расположенные над ней, положительны, под ней – отрицательны.

Остальные линии влияния строим так же:

$$Q_5 = Q_5^o \cdot \cos \varphi_5 - H \cdot \sin \varphi_5 = Q_5^o \cdot 0,929 - H \cdot (-0,369);$$

$$N_5 = -Q_5^o \cdot \sin \varphi_5 - H \cdot \cos \varphi_5 = Q_5^o \cdot 0,369 - H \cdot 0,929.$$

Все линии влияния приведены на рис.54.

Усилия от заданной нагрузки по линиям влияния:

$$M_5 = q \cdot \omega + F \cdot y = 4 \cdot \left(-\frac{0,998 \cdot 7}{2} \right) + 6 \cdot 1,146 = -7,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_5^{\text{лев}} = 4 \cdot \left(-\frac{0,142 \cdot 7}{2} \right) + 6 \cdot 0,45 = 0,712 \text{ кН};$$

$$Q_5^{\text{пр}} = 4 \cdot \left(-\frac{0,142 \cdot 7}{2} \right) + 6 \cdot (-0,479) = -4,862 \text{ кН};$$

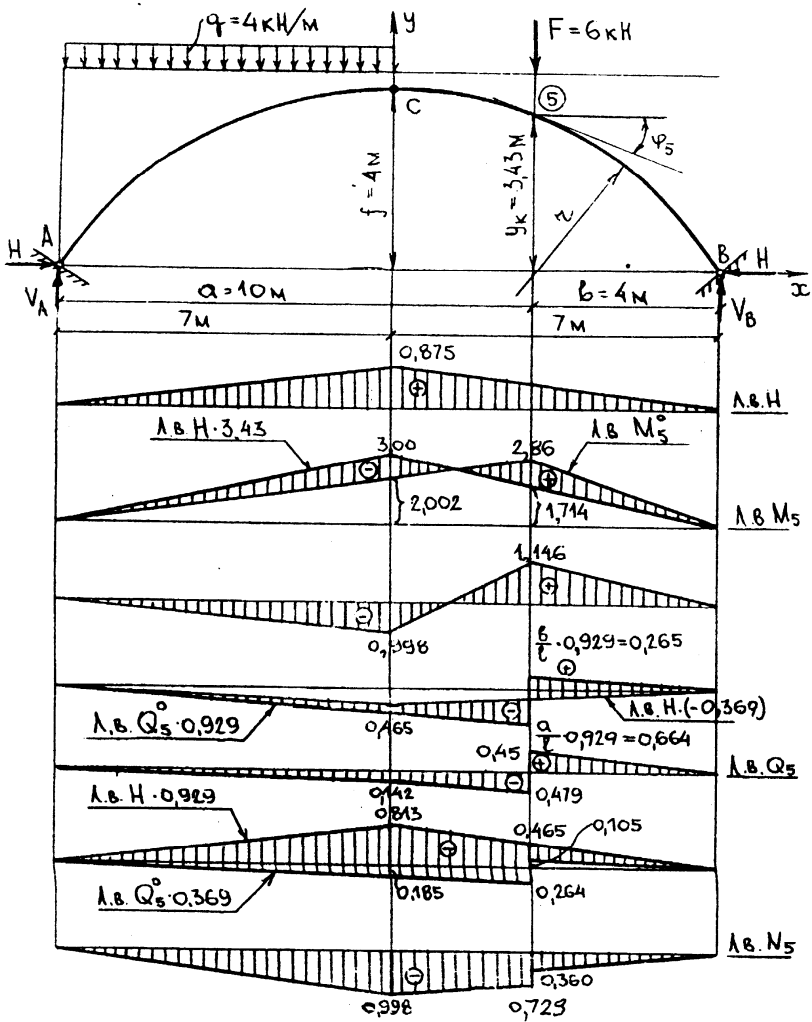


Рис.54

$$N_5^{лев} = 4 \cdot \left(-\frac{0,998 \cdot 7}{2} \right) + 6 \cdot (-0,36) = -16,1 \text{ кН};$$

$$N_5^{np} = 4 \cdot \left(-\frac{0,998 \cdot 7}{2} \right) + 6 \cdot (-0,729) = -18,32 \text{ кН}.$$

Найденные значения совпадают с полученными при построении эпюр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Строительная механика / Под ред. Ю.И.Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 479 с.
2. Строительная механика: Руководство к практическим занятиям / Под ред. Ю.И.Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 376 с.
3. Механіка споруд. Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А. – Харків, ХДАМГ, 2001. – 234 с.
4. Механіка споруд: Керівництво до практичних занять. Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А. – Харків, ХДАМГ, 2002. – 239 с.

Учебное издание
Строительная механика: Краткий курс / Раздел 1. Статически определимые системы (для студентов строительных специальностей).

Авторы: Леонид Николаевич Шутенко,
Владимир Павлович Пустовойтов,
Николай Андреевич Засядько

Редактор Н.З.Алябьев

План 2003, поз.131

Подп. к печати	Формат 60x84.1/16	Бумага офисная
Печать на ризографе	Уч.-изд. л. 6,0	Усл.-печ. л. 5,2
Тираж 100 экз.	Зак. №	Цена договорная

61002, ХГАГХ, Харьков, ул. Революции, 12

Сектор оперативной полиграфии при ИВЦ ХГАГХ