равна нулю:

$$W + U = 0\ . \qquad (29)$$

Возможными являются любые перемещения, которым не препятствуют наложенные связи. В линейно деформируемых системах вместо бесконечно малых можно рассматривать малые конечные перемещения.

15.2. Работа внешних сил

Работа, производимая нагрузкой, во всех случаях выражается произведением некоторого силового фактора на величину, определяемую перемещениями системы. Для общности рассуждений введем понятие обобщенной силы и обобщенного перемещения. Под **обобщенной силой** будем понимать любую силу или систему сил. Тогда **обобщенное перемещение** - это такое перемещение, на котором соответствующая обобщенная сила выполняет работу.

Обобщенную силу обозначают F_i, а обобщенное перемещение - Δ_{ik} - перемещение по направлению силы F_i, вызванное силой F_k.

При статическом загружении системы (рис.34) сначала силой F_1, затем F_2 точка С сначала перемещается на величину Δ_{11}, затем еще на Δ_{12}. Работа

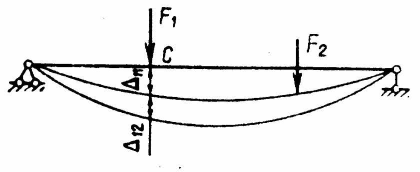

Рис.34

$$W_{11} = \frac{1}{2} F_1 \cdot \Delta_{11}\ , \qquad (30)$$

выполняемая силой F_1 на вызванном ею же перемещении Δ_{11} называется **действительной работой**. Перемещение Δ_{12} можно рассматривать как возможное перемещение для силы F_1, и работа

$$W_{12} = F_1 \cdot \Delta_{12}\ , \qquad (31)$$

выполняемая этой силой на этом перемещении называется **возможной работой**.

15.3. Работа внутренних сил

Для определения работы внутренних сил выделим в соответствии с принципом независимости действия сил два состояния балки – *1* и *2* (рис.35). На гранях элемента балки длиной dx действуют усилия M_1, Q_1 в первом состоянии (рис.36, *а*) и M_2, Q_2 во втором (рис.36. *б*). Действие усилий M_2 и Q_2 во втором состоянии вызывает искривление оси (рис.36, *в*) и сдвиг (рис.36, *г*). Тогда возможная работа сил M_1 и Q_1 на перемещениях $\chi_2 dx$ и $\gamma_2 dx$

$$dU_{12} = -M_1\chi_2 dx - Q_1\gamma_2 dx\,. \tag{32}$$

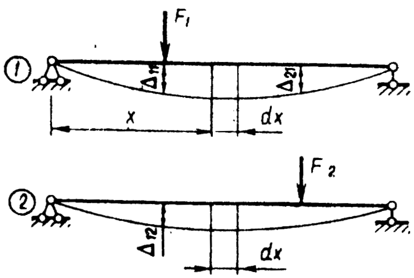

Рис.35

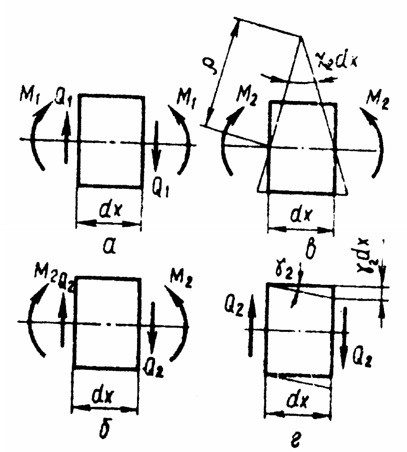

Рис.36

Учитывая известные из сопротивления материалов выражения кривизны оси $\chi_2 = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M_2}{EI}$ и угла сдвига $\gamma_2 = \mu \dfrac{Q_2}{GA}$ (здесь

$\mu = A \int\limits_{GA} \left(\dfrac{S_x}{bI_x} \right)^2 dA$ - коэффициент, учитывающий неравномерность

распределения касательных напряжений) и добавляя в общем случае плоской системы работу продольных сил $-N_1\varepsilon_2 dx$ $\left(\varepsilon_2 = \frac{N_2}{EA}\right)$, проинтегрируем (32). Получаем

$$U_{12} = -\int\limits_{(l)} \frac{M_1 M_2 dx}{EI} - \int\limits_{(l)} \mu \frac{Q_1 Q_2 dx}{GA} - \int\limits_{(l)} \frac{N_1 N_2 dx}{EA}. \qquad (33)$$

Как и для внешних сил, действительная работа внутренних сил U_{11} отличается от возможной наличием множителя $\frac{1}{2}$.

15.4. Теоремы о взаимности

Рассмотрим загружение балки сначала силой F_i, затем силой F_k (рис.37, *а*). Работа, выполняемая этими силами,

$$W^I = W_{ii} + W_{kk} + W_{ik}. \qquad (34)$$

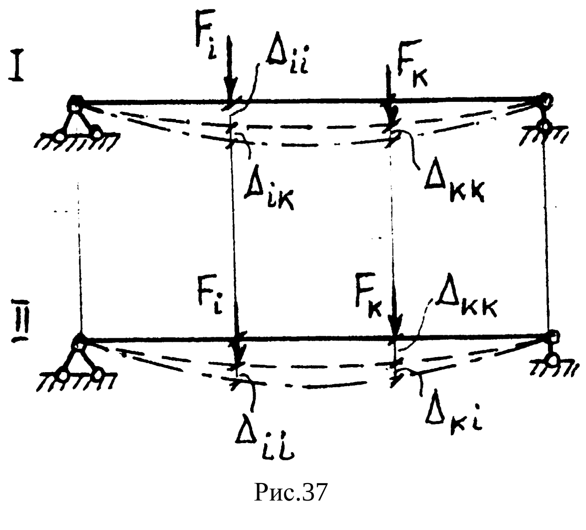

Рис.37

При обратном порядке загружения (сначала F_k, затем F_i)

(рис.37, *б*) имеем

$$W^{II} = W_{kk} + W_{ii} + W_{ki}. \quad (35)$$

Так как начальное и конечное состояние системы в 1-м и 2-м случаях совпадают, то $W^{I} = W^{II}$. Отсюда получаем

$$W_{ik} = W_{ki} \text{ или } U_{ik} = U_{ki}. \quad (36)$$

Равенства (36) выражают **теорему о взаимности работ** (Бетти).

Из этой теоремы вытекают другие теоремы. Так, если $F_i = F_k = 1$, то соответствующие перемещения от их действия обозначаются $\delta_{ii}, \delta_{ik}, \delta_{ki}, \delta_{kk}$ - единичные перемещения. Тогда $W_{ik} = \delta_{ik} \cdot F_k = \delta_{ik}$, $W_{ki} = \delta_{ki} \cdot F_i = \delta_{ki}$ и на основании (36)

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (37)$$

Это равенство выражает **теорему о взаимности перемещений** (Максвелла).

Применяя теорему Бетти к двум состояниям системы, в которых заданы единичные смещения i-й и k-й связей (рис.38), получаем **теорему о взаимности реакций**:

$$r_{ik} = -r_{ki}, \quad (38)$$

где r_{ik} - реакция i-й связи от единичного смещения k-й связи.

Аналогично из рассмотрения состояний с заданной силой $F_i = 1$ и заданным смещением $\Delta_k = 1$ (рис.39), получаем **теорему о взаимности реакций и перемещений**

$$\delta_{ik} = r_{ki}. \quad (39)$$

Вопросы

1. Как формулируется принцип возможных перемещений для упругих систем?

2. Что такое возможное перемещение?

3. Что такое обобщенная сила? обобщенное перемещение?

4. Как определяются действительная и возможная работа внешних сил? В чем их различие?

5. Как определяется возможная работа внутренних сил?

6. Как формулируется и доказывается теорема о взаимности работ?

7. Как формулируются теоремы о взаимности перемещений, реакций, перемещений и реакций?

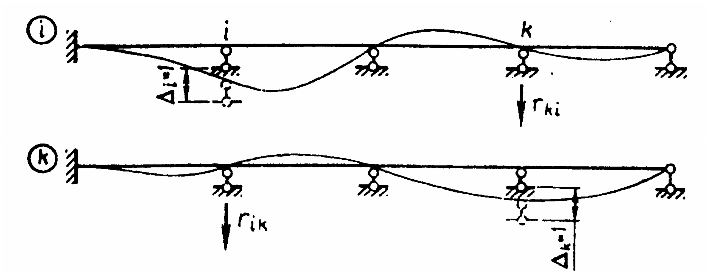

Рис.38

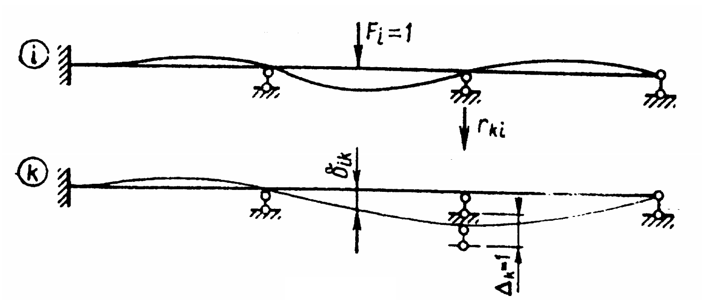

Рис.39

16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ НАГРУЗКИ МЕТОДОМ МОРА

16.1. Формула Мора для определения перемещений

Рассмотрим два состояния упругой системы. Одно из них – состояние f, в котором действует заданная нагрузка (рис.40, *а*), другое – состояние i (рис.40, *б*), в котором по направлению некоторого перемещения Δ_i от заданной нагрузки приложена сила $F_i = 1$. Применяя теорему Бетти и принцип возможных перемещений, получаем

$$\Delta_i = \int \frac{M\overline{M}_i ds}{EI} + \int \mu \frac{Q\overline{Q}_i ds}{GA} + \int \frac{N\overline{N}_i ds}{EA}. \quad (40)$$

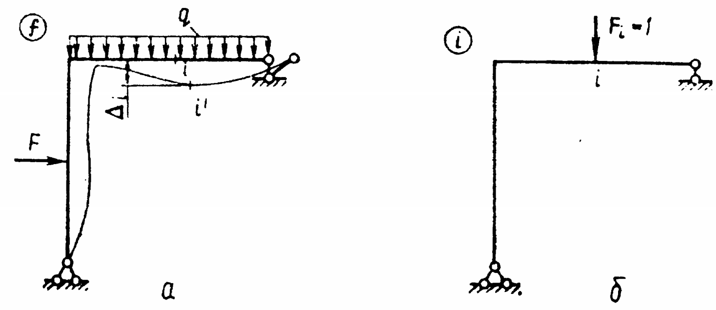

Рис.40

Эта формула называется **формулой Мора**. Она применяется для определения перемещений от нагрузки. Для этого:

1) определяют усилия M, Q, N от заданной нагрузки;
2) по направлению искомого перемещения прикладывают единичную обобщенную силу F_i;
3) находят усилия $\overline{M}_i$, $\overline{Q}_i$, $\overline{N}_i$ от единичной силы;
4) подставляют выражения усилий в формулу Мора и вычисляют перемещение.

В частных случаях формула Мора принимает более простой вид. Так, для ферм, в стержнях которых отсутствуют моменты и поперечные силы, получаем:

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{N\overline{N}_i l}{EA} \right)_k, \quad (41)$$

где $n-$ количество стержней фермы.

При расчете балок и рам влиянием поперечных и продольных деформаций на перемещения пренебрегают. Тогда,

$$\Delta_i = \int \frac{M\overline{M}_i ds}{EI} . \qquad (42)$$

16.2. Техника определения перемещений в изгибаемых системах

Для изгибаемой системы, состоящей из прямых стержней постоянной жесткости можно записать

$$\Delta_i = \sum \frac{1}{EI} \int M\overline{M}_i ds . \qquad (43)$$

Вычисление интегралов в правой части (43) в ряде случаев можно заменить **перемножением эпюр** M и $\overline{M}_i$ по правилу Верещагина или по формуле Симпсона.

Правило Верещагина можно применить, если одна из эпюр, например, $\overline{M}_i$ линейна. Тогда в соответствии с рис.41

$$\int M\overline{M}_i ds = \int M \cdot s \cdot tg\alpha ds = tg\alpha \int Msds .$$

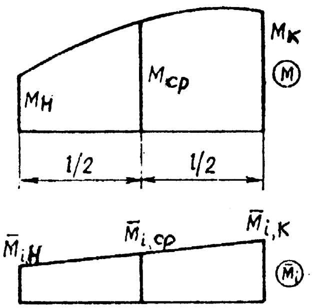

Рис.41

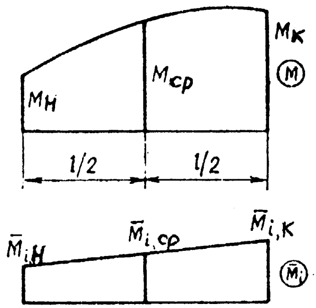

Рис.42

Интеграл в правой части полученного выражения представляет собой статический момент эпюры M относительно оси z

$$\int M \cdot sds = S_z = s_o \cdot \omega ,$$

где ω - площадь эпюры M, а s_o - координата ее центра тяжести. Тогда $\int M\overline{M}_i ds = tg\alpha \cdot s_o \cdot \omega$ или окончательно

$$\int M\overline{M}_i ds = \omega \cdot y_o , \tag{44}$$

где y_o - ордината линейной эпюры под центром тяжести площади ω.

Формула Симпсона может быть применена в тех случаях, когда произведение моментов $M\overline{M}_i$ под интегралом является полиномом не более третьей степени. Тогда

$$\int M\overline{M}_i ds = \frac{l}{6}\left(M^{н}\overline{M}_i^{н} + 4M^{ср}\overline{M}_i^{ср} + M^{к}\overline{M}_i^{к}\right)., \tag{45}$$

Смысл обозначений моментов поясняется рис.42.

Вопросы

1. Как записывается формула Мора?
2. Как выбирается единичное состояние при определении перемещений методом Мора?
3. Какой вид принимает формула Мора для ферм и для изгибаемых систем?
4. Как применяется правило Верещагина?
5. В каких случаях можно применять правило Верещагина? формулу Симпсона?

17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ОСАДКИ ОПОР И ОТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ. ПОНЯТИЕ О ЛИНИЯХ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

17.1. Перемещения от осадки опор

При смещениях опор (осадках) статически определимое сооружение (рис.43, *а*) переходит в новое положение так, что его элементы не деформируются. Тогда перемещения точек можно определить геометрически, например,

$$\Delta_k = c_1 + l \cdot tgc_3 \approx c_1 + lc_3 .$$

В более сложных случаях для определения перемещений можно воспользоваться другим методом, основанным на использовании теоремы о взаимности работ. Например, для определения Δ_k (рис.43, *а*) приложим по его направлению единичную обобщенную силу F_k (рис.43, *б*). Тогда

$$W_{kc} = W_{ck} = 0 \text{ или } -\overline{R}_1 c_1 - \overline{R}_2 c_2 - \overline{R}_3 c_3 + F_k \Delta_k = 0 ,$$

откуда
$$\Delta_k = \sum \overline{R}_i c_i . \qquad (46)$$

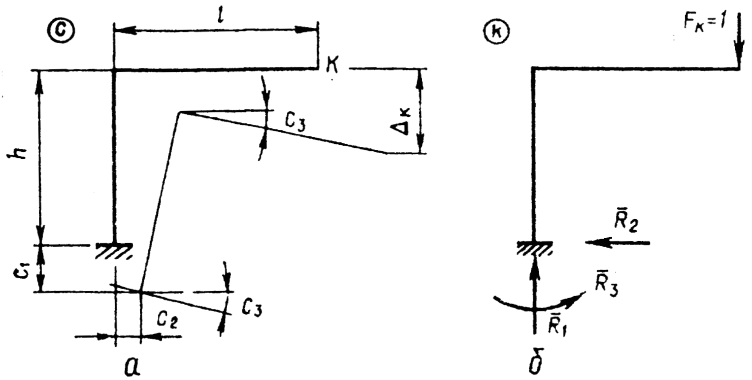

Рис.43

Следует учесть, что произведение $\overline{R}_i \cdot c_i > 0$, если реакция $\overline{R}_i$ и перемещение c_i направлены в разные стороны, и наоборот.

17.2. Перемещения от температурных воздействий

Будем считать, что сечение элементов (рис.44, *а*) имеет вертикальную ось симметрии, и температура по высоте сечения меняется по линейному закону так, что изменение температуры нижнего волокна составляет t_1, а верхнего - t_2 (рис.44, *б*). В этом случае сдвиги отсутствуют и перемещение в соответствии с формулой Мора

$$\Delta_{it} = \int \overline{M}_i d\varphi + \int \overline{N}_i \varepsilon dx,$$

где $d\varphi = \dfrac{\alpha t_1 dx - \alpha t_2 dx}{h} = \dfrac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx$ - взаимный угол поворота граней элемента длиной dx (рис.44, *в*), $\varepsilon = \alpha t_o dx$ - удлинение нейтрального слоя, $t_o = \dfrac{t_1|y_2| + t_2|y_1|}{h}$ - изменение температуры на уровне нейтрального слоя.

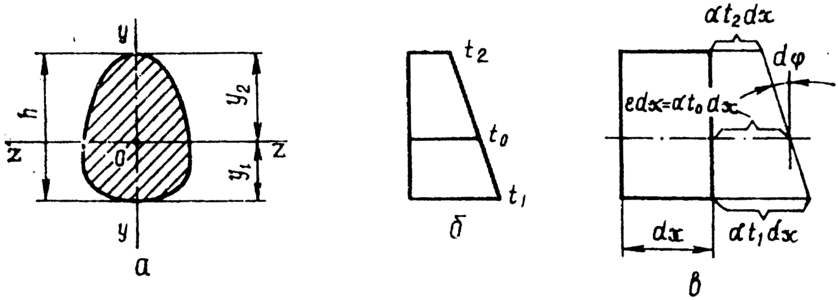

Рис.44

С учетом выражений для $d\varphi$ и ε получим

$$\Delta_{it} = \int \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \overline{M}_i dx + \int \alpha t_o \overline{M}_i dx.$$

Если систему разбить на участки, в пределах каждого из которых α, h, t_1 и t_2 постоянны, то

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{\overline{M}} + \sum \alpha t_o \omega_{\overline{N}}. \qquad (47)$$

Здесь $\omega_{\overline{M}}$ и $\omega_{\overline{N}}$ - площади, соответственно, единичной эпюры моментов и единичной эпюры продольных сил на участке, взятые со своими знаками.

17.3. Понятие о линиях влияния перемещений

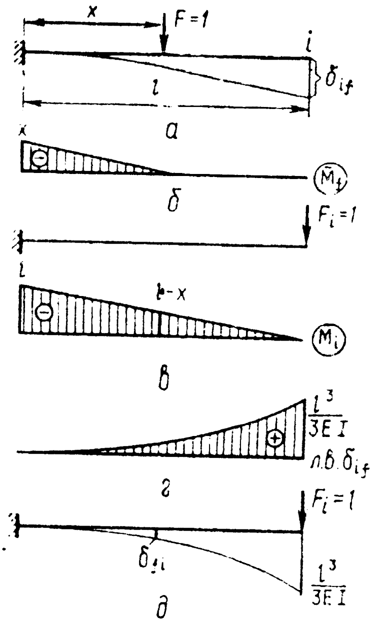

Рис.45

Построение линии влияния перемещений покажем на примере линии влияния прогиба δ_{if} конца консоли (рис.45, *а*). Установив нагрузку $F=1$ в произвольное положение, построим эпюру $\overline{M}_f$ (рис.45, *б*). Эпюра моментов $\overline{M}_i$ во вспомогательном состоянии показана на рис.45, *в*. Перемножая эпюры $\overline{M}_f$ и $\overline{M}_i$, получаем

$$\delta_{if} = \frac{1}{EI}\frac{x^2}{2}\left(l - x + \frac{2}{3}x\right) = \\ = \frac{x^2\left(l - \frac{x}{3}\right)}{2EI}$$

График полученной зависимости дает искомую линию влияния δ_{if} (рис.45, *г*).

Эту же линию влияния можно построить, используя теорему о взаимности перемещений $\delta_{if} = \delta_{fi}$. Тогда она получается как эпюра перемещений балки δ_{fi} от единичной силы $F_i = 1$, приложенной по направлению искомого перемещения (рис.45, *д*).

Вопросы

1. Как определяются перемещения от осадки опор?
2. Как устанавливаются знаки при определении перемещений от осадки опор?

3. Зависят ли перемещения от осадки опор от жесткостей системы?

4. Как определяются перемещения от температурных воздействий?

5. Появляются ли внутренние усилия в статически определимой системе от осадки опор? при температурном воздействии?