

8. ШПРЕНГЕЛЬНЫЕ ФЕРМЫ

8.1. Образование шпренгельной фермы

Для уменьшения панелей грузового пояса в фермах больших пролетов применяют установку дополнительных ферм - шпренгелей, опирающихся в узлы пояса (рис.11, *а*). Обычно стержни шпренгелей объединяют со стержнями основной фермы (рис.11, *б*), получая таким образом **шпренгельную ферму**.

Шпренгели передают вертикальную нагрузку в узлы основной фермы и могут быть одноярусными (рис.12, *а*) и двухъярусными (рис.12, *б*).

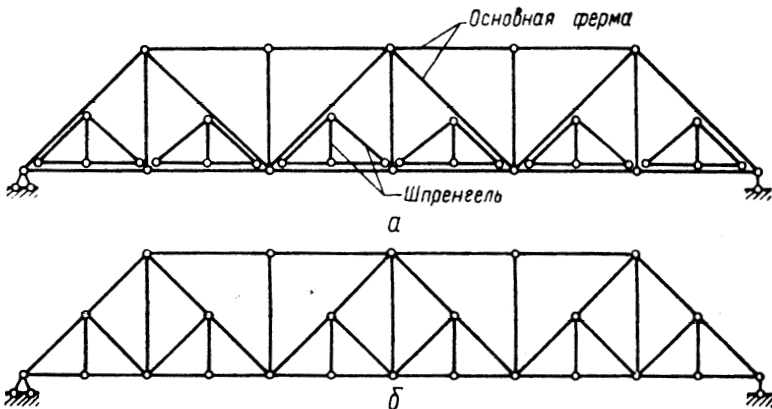


Рис.11

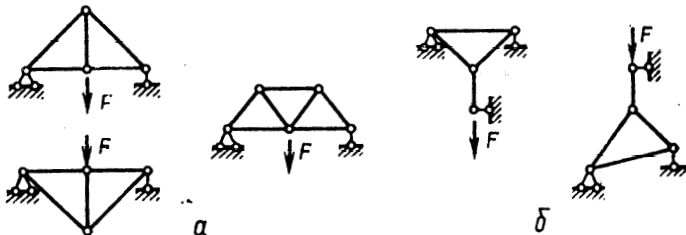


Рис.12

8.2. Расчет на неподвижную нагрузку

В шпренгельной ферме различают три типа стержней:

1) стержни, входящие только в основную ферму. Усилия в них вычисляют расчетом основной фермы (шпренгели отбрасывают, а приложенную к ним нагрузку передают в узлы основной фермы);

2) стержни шпренгелей. Усилия в них находят расчетом соответствующего шпренгеля как двухопорной фермы на местную нагрузку;

3) стержни, являющиеся общими для основной фермы и шпренгеля. Усилия в них находят как сумму усилий, полученных из расчета основной фермы и шпренгеля.

Следует отметить, что во многих случаях усилия в стержнях можно вычислить без разделения шпренгельной фермы на основную и шпренгели.

8.3. Линии влияния усилий

Некоторые особенности построения линий влияния усилий в стержнях шпренгельной фермы покажем на примере фермы, приведенной на рис.13, а.

Усилие N_1 может быть определено способом моментной точки (сечение I-I, точка K_1). Его линия влияния показана на рис.13, б.

При построении линии влияния N_2 (рис.13, в) проведем сечение II-II и учтем, что это - усилие в стержне основной фермы. Следовательно, шпренгели (в том числе их узлы 2, 4, ...) можно мысленно отбросить.

Усилие N_3 получаем из расчета соответствующего шпренгеля (рис.13, г). Его линия влияния показана на рис.13, д.

Следует отметить, что в фермах с двухъярусными шпренгелями при построении линий влияния усилий в стойках основной фермы необходимо учитывать возможность различий в линиях влияния при езде поверху и понизу.

Вопросы

1. Что такое шпренгель?
2. Чем объяснить необходимость применения шпренгелей в фермах?

3. Как различаются шпренгели в зависимости от того, в какой пояс основной фермы они передают нагрузку?
4. Назовите типы стержней шпренгельной фермы и приведите методику определения усилий в них.
5. Можно ли определить усилие в стержне шпренгельной фермы без разделения ее на основную ферму и шпренгель?

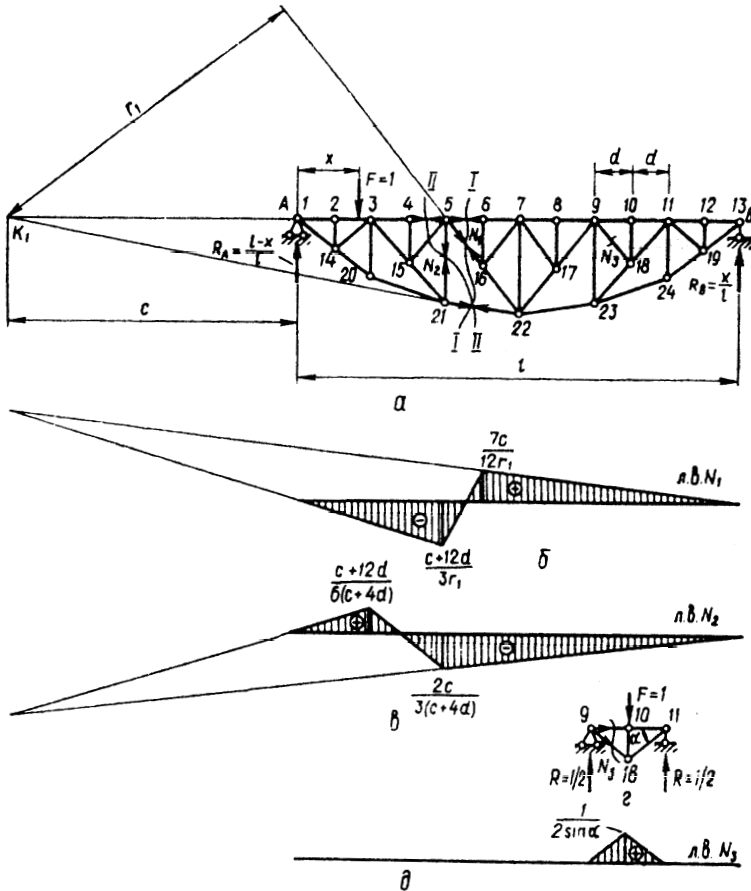


Рис.13

9. РАСПОРНЫЕ СИСТЕМЫ. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ НА ВЕРТИКАЛЬНУЮ НАГРУЗКУ

9.1. Определения

Распорной называют систему, в которой при вертикальной нагрузке, кроме вертикальных, появляются горизонтальные реакции – распор.

Распорными могут быть фермы, рамы, комбинированные системы. Основным представителем распорных систем являются арки.

Аркой называют брус малой кривизны, концы которого закреплены от взаимных линейных смещений.

В зависимости от степени статической неопределимости различают бесшарнирные арки (рис.14, а) – трижды статически неопределимые; двухшарнирные (рис.14, б) – один раз статически неопределимые; и трехшарнирные (рис.14, в) – статически определимые.

9.2. Трехшарнирные арки. Расчет на вертикальную нагрузку

Наиболее распространенными по очертанию оси являются параболические ($y = \frac{4f}{l^2}x(l-x)$) и циркульные (очерченные по дуге окружности) арки. В некоторых случаях (при возведении на слабых грунтах, в покрытиях зданий и др.) применяют арки с затяжками (рис.14, г).

При действии вертикальной нагрузки вертикальные реакции опор трехшарнирной арки (рис.15, а), определяемые из уравнений

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \Rightarrow V_B; \\ \sum M_B &= 0; \Rightarrow V_A,\end{aligned}$$

являются балочными реакциями (рис.15, б).

Как следует из уравнения $\sum x = 0$, горизонтальные реакции опор H_A и H_B одинаковы. Они обозначаются обычно H и назы-

ваются распором. Величина распора определяется из условия равенства нулю изгибающего момента в замковом шарнире С

$$\sum_{\text{лев}} M_C = \sum_{\text{прав}} M_C = M_C^0 - H \cdot f = 0; \quad H = M_C^0 / f, \quad (14)$$

где M_C^0 - балочный изгибающий момент в сечении С (рис.15, б).

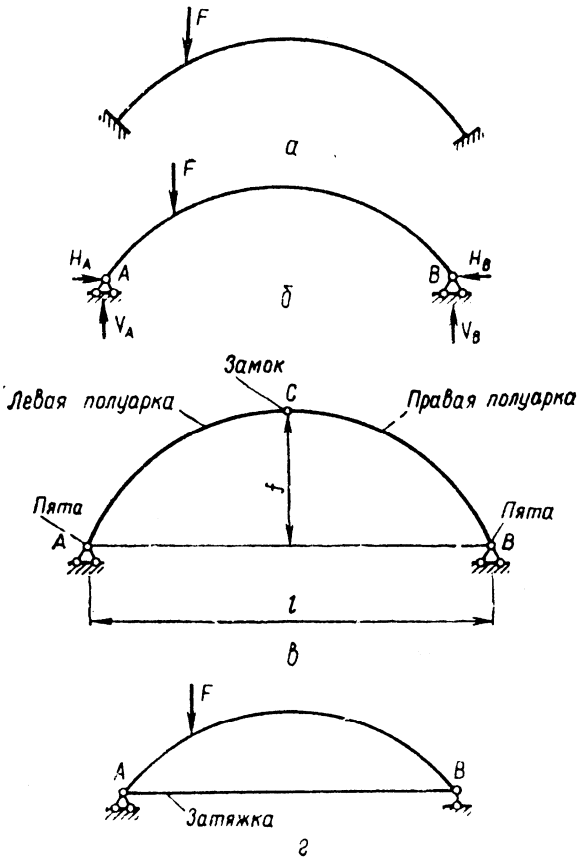


Рис.14

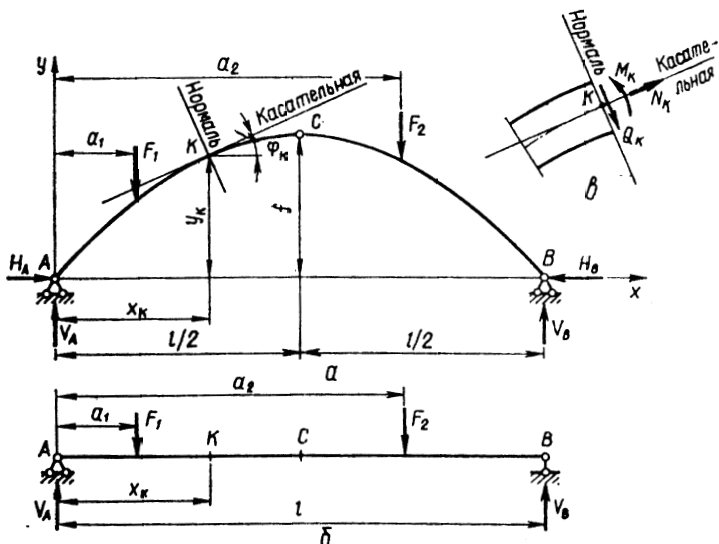


Рис.15

Внутренние усилия в сечении K арки (рис.15, а), определяемые по правилам сопротивления материалов, могут быть при вертикальной нагрузке выражены через балочные (рис.15, б) усилия (M_K^0 и Q_K^0) и распор:

$$\begin{aligned}
 M_K &= M_K^0 - H \cdot y_K, \\
 Q_K &= Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K, \\
 N_K &= -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Как следует из полученных формул, изгибающие моменты и поперечные силы в арке меньше балочных. Фактически в арке по сравнению с балкой деформации изгиба заменяются частично деформациями сжатия. Это обстоятельство определяет большую экономичность арки по сравнению с балкой. Можно поставить вопрос о таком очертании оси арки, при котором изгибающие моменты во всех ее се-

чениях обращаются в ноль. Как следует из (15), этому соответствует ось

$$y_o = M^o / H, \quad (16)$$

очерченная по закону балочных изгибающих моментов. Такая ось называется **рациональной**. Например, при действии равномерно распределенной вдоль пролета нагрузки q

$$y_o = \left(4f / l^2\right)x(l-x). \quad (17)$$

Эпюры M , Q , N в арке имеют криволинейное очертание независимо от вида нагрузки и обычно строятся с использованием выражений (15) на горизонтальной оси под аркой.

Арка с затяжкой (рис.16) является внешне балочной системой, роль распора выполняет усилие в затяжке, определяемое с помощью сечения I-I:

$$\sum_{\text{лев}} M_C = \sum_{\text{пр}} M_C = 0,$$

откуда
$$S = M_C^o / f. \quad (18)$$

Это выражение с точностью до обозначения совпадает с обычным распором (14) и усилия в такой арке определяются по формулам (15) с формальной заменой H на S .

В арке с повышенной затяжкой (рис.17) для усилия в затяжке получаем выражение

$$S = M_C^o / f'. \quad (19)$$

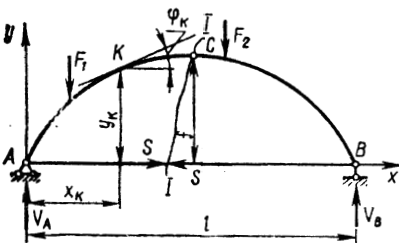


Рис.16

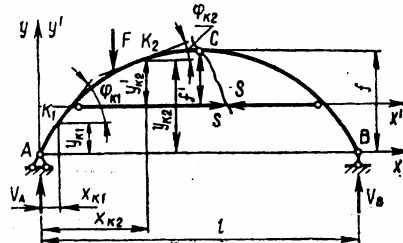


Рис.17

В сечениях ниже затяжки усилия вычисляются только через балочные усилия

$$M = M^o; Q = Q^o \cos \varphi; N = -Q^o \sin \varphi, \quad (20)$$

а выше затяжки – по формулам, аналогичным (15):

$$\begin{aligned} M &= M^o - S \cdot y', \\ Q &= Q^o \cos \varphi - S \sin \varphi, \\ N &= -Q^o \sin \varphi - S \cos \varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

где $y' = y - (f - f')$ - ордината точки оси арки, отсчитанная от затяжки.

Вопросы

1. Какие системы называют распорными?
2. Что является аркой?
3. Как различают арки по степени статической неопределимости? по очертанию?
4. В каких случаях применяют арки с затяжками?
5. Как вычисляют вертикальные реакции в трехшарнирной арке при вертикальной нагрузке?
6. Что такое распор? Как он вычисляется?
7. Как зависит величина распора от стрелы подъема арки?
8. Что такое балочный изгибающий момент M^o и балочная поперечная сила Q^o ?
9. Как вычисляют усилия в сечениях трехшарнирной арки?
10. Почему арка является более экономичной конструкцией, чем балка?
11. Что такое рациональная ось арки? Каким должно быть ее очертание?
12. Как вычисляют реакции и усилия в арке с затяжкой?
13. Каковы особенности расчета арки с повышенной затяжкой?

10. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ В ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКЕ

Для построения линий влияния усилий в арке (рис.18, *a*) воспользуемся выводами, полученными при расчете на вертикальную нагрузку. Линии влияния вертикальных реакций V_A и V_B (рис.18, *б, в*) являются балочными.

Для построения линии влияния распора воспользуемся выражением (14). Тогда линия влияния H (рис.18, *г*) получается делением ординат линии влияния балочного момента M_C^0 на стрелу подъема f .

Линию влияния изгибающего момента в сечении K построим на основании первой формулы (15) путем вычитания линии влияния распора, умноженной на ординату сечения y_K , из линии влияния балочного момента M_K^0 (рис.18, *д*):

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K.$$

Это вычитание можно выполнить **способом наложения**. Для этого на общей оси строим линии влияния M_K^0 и $H \cdot y_K$ (рис.18, *е*). При этом совпадающие части линий влияния взаимно уничтожаются, а результирующие ординаты (заштрихованы на рис.18, *е*) заключены между построенными линиями. Остается вычислить эти ординаты и отложить их на горизонтальной оси (рис.18, *ж*).

Иначе можно построить линию влияния M_K **способом нулевой точки**. Для этого необходимо найти положение нулевой точки m линии влияния, т.е. такого положения силы $F = I$, при котором $M_K = 0$. В соответствии с теоремой о трех силах (в нашем случае - R_A , R_B и F) она находится на пересечении линий действия равнодействующих опорных реакций R_A и R_B . Направление R_A находим из условия, что при положении силы $F = I$ над точкой m $M_K = 0$ (для этого R_A должна пройти через точку K). Направление R_B соответствует равенству $M_C = 0$ (через точку C). Рассто-

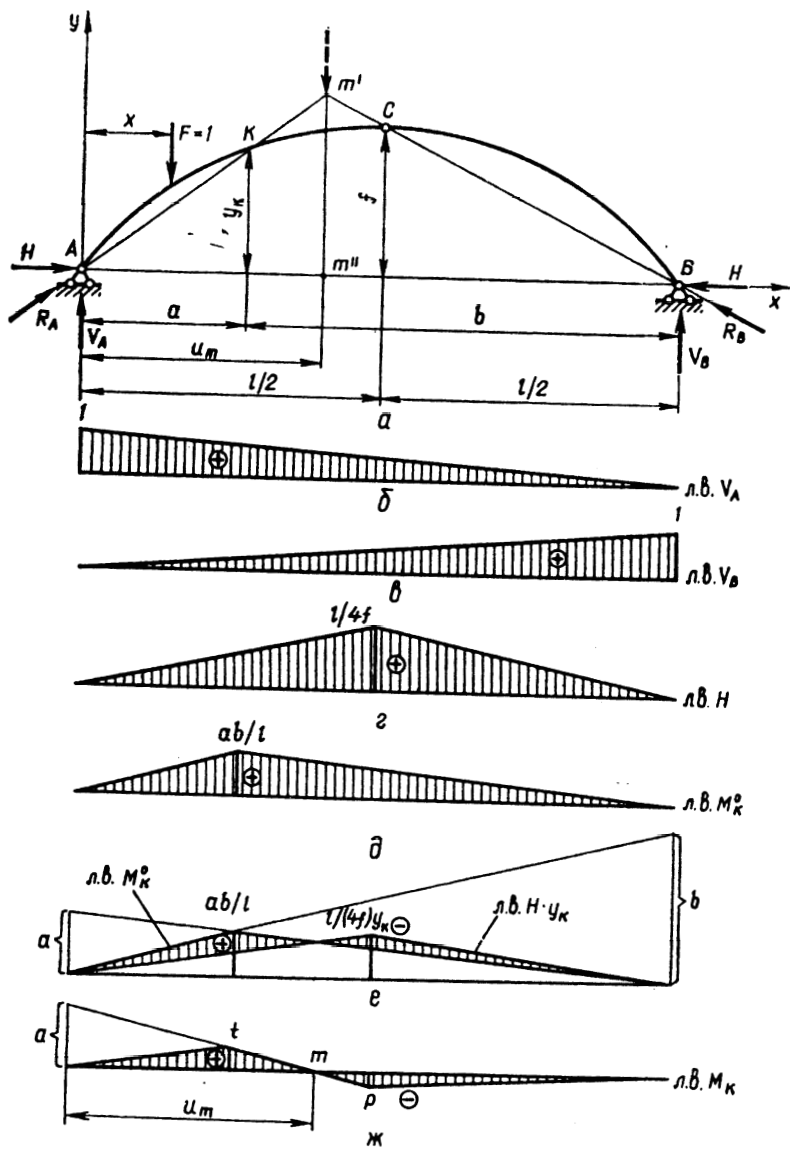


Рис.18

яние u_m от ближайшей опоры до нулевой точки m находится из геометрических соотношений:

$$u_m = f / [y_K / (2a) + f / l]. \quad (22)$$

Зная положение нулевой точки можно провести среднюю прямую линии влияния M_K из условия, что она отсекает на левой опоре ординату a (рис.18, ж), равную расстоянию от сечения до ближайшей опоры арки.

Для построения линии влияния поперечной силы воспользуемся выражением

$$Q_K = Q_K^o \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K .$$

Линия влияния балочной поперечной силы Q_K^o , процесс наложения и результирующая линия влияния показаны на рис.19, б-г.

Для использования способа нулевой точки необходимо из построений на рис.19, а определить положение точки q линии влияния:

$$u_q = f / (|tg \varphi_K| / 2 + f / l). \quad (23)$$

Аналогично для построения линии влияния продольной силы способом наложения пользуемся выражением

$$Q_K = -Q_K^o \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K .$$

Процесс наложения и результат приведены на рис.20, б, в.

Положение нулевой точки n определяется из построений на рис.20, а:

$$u_n = f / [1 / (2 / tg \varphi_K) - f / l]. \quad (24)$$

Вопросы

1. Отличаются ли линии влияния вертикальных реакций трехшарнирной арки от балочных?

2. В чем заключается способ наложения при построении линий влияния усилий в арке?
3. Как построить линии влияния усилий в арке способом нулевой точки?
4. Как определяется положение нулевых точек?
5. Сколько участков содержат линии влияния усилий в сечениях арки?

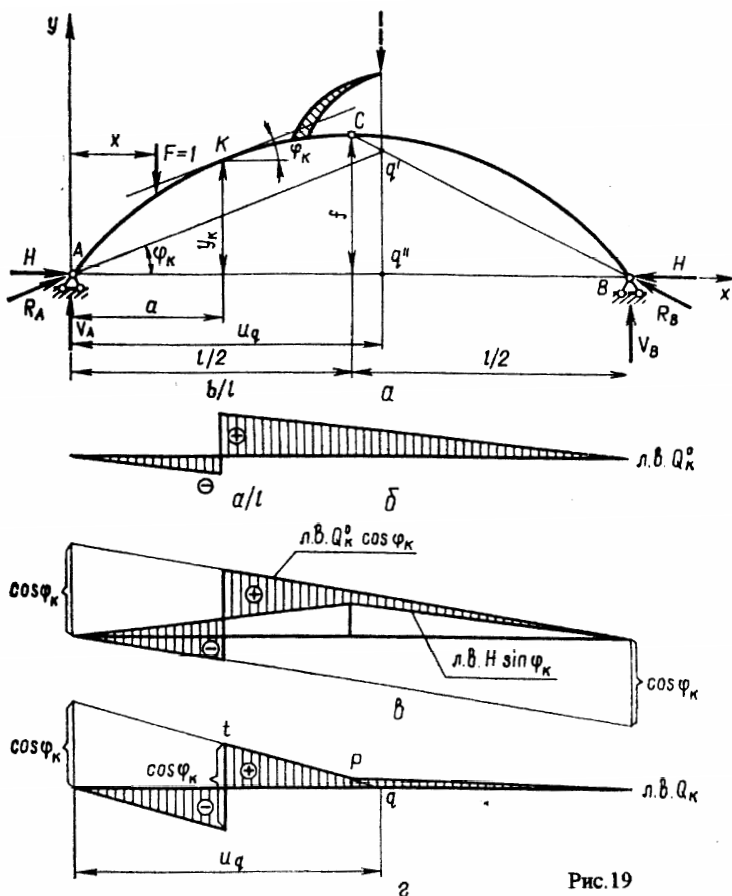


Рис.19

Рис.19

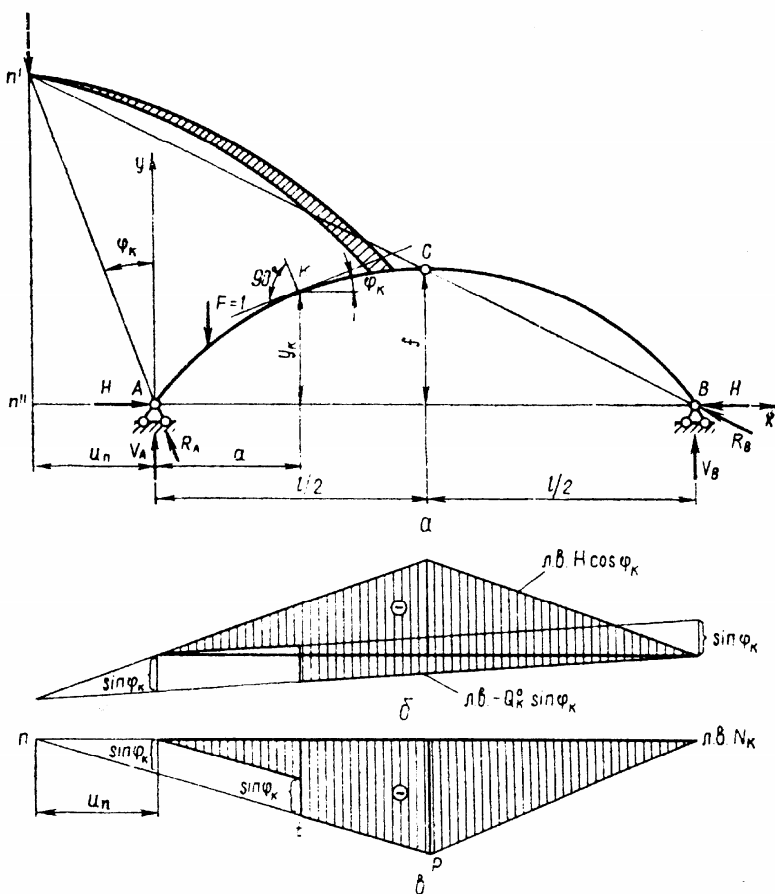


Рис.20

11. Трехшарнирные рамы. Арочные фермы

11.1. Расчет трехшарнирных рам

Расчет трехшарнирной рамы (рис.21) отличается от расчета других рам лишь определением опорных реакций. При произвольно на-

правленной нагрузке их находят из уравнений равновесия, аналогичных уравнениям трехшарнирной арки:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \Rightarrow V_B; & \sum M_B = 0; & \Rightarrow V_A; \\ \sum M_C = 0; & \Rightarrow H_A; & \sum M_C = 0; & \Rightarrow H_B; \end{aligned} \quad (25)$$

лев *пр*

Эпюры внутренних усилий строят на осях рамы.

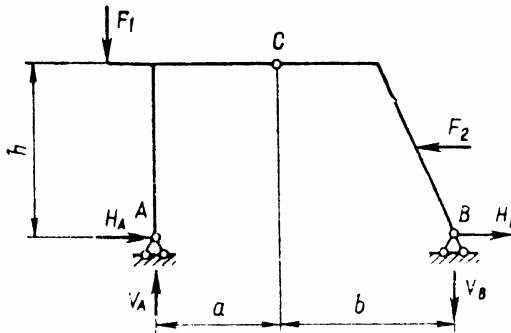


Рис.21

Отметим, что трехшарнирная рама может иметь затяжку.

11.2. Трехшарнирные арочные фермы

Реакции в арочной ферме (рис.22) определяются, как и в арке или раме:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \Rightarrow V_B = 3,5F; & \sum M_B = 0; & \Rightarrow V_A = 3,5F; \\ \sum x = 0; & \Rightarrow H_A = H_B = H; & \sum M_C = 0; & H = M_C^0 / f. \end{aligned}$$

лев

Усилия в стержнях определяют как в обычной ферме. Например, для вычисления усилия N (рис.22) проведем сечение I-I и применим способ моментной точки: $\sum M_m = 0$. Отсюда легко найти усилие N . Его можно выразить через балочный момент и распор

$$N = -M_m^o / r + H \cdot h / r.$$

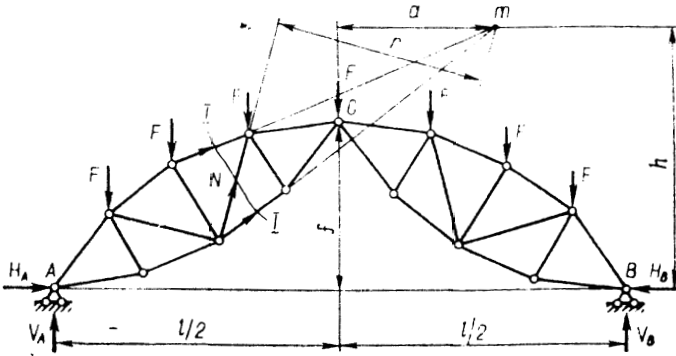


Рис.22

Такое представление удобно при построении линий влияния. В ферме, показанной на рис.23, *a*, реакции и их линии влияния - балочные. Линия влияния распора (рис.23, *б*) строится, как и в арке, по выражению $H = M_C^o / f$.

Для построения линии влияния N_I в этой ферме проведем сечение I-I и применим способ моментной точки

$$\sum M_m = V_B \cdot b - H \cdot h - N_I \cdot r = 0,$$

откуда $N_I = \frac{V_B \cdot b}{r} - H \cdot \frac{h}{r}$ или $N_I = \frac{l}{r} \cdot M_m^o - \frac{h}{r} \cdot H$.

Построение линии влияния N_I способом наложения и ее окончательный вид с учетом узловой передачи нагрузки приведены на рис.23, *в*.

Для построения линии влияния N_2 проведем сечение II-II. При грузе справа от сечения $\sum y = V_A - N_2 \cdot \sin \alpha = 0$, откуда

$$N_2 = \frac{V_A}{\sin \alpha} \text{ или } N_2 = \frac{l}{\sin \alpha} Q_{II}^o.$$

Эта линия влияния показана на рис.23, *г*.

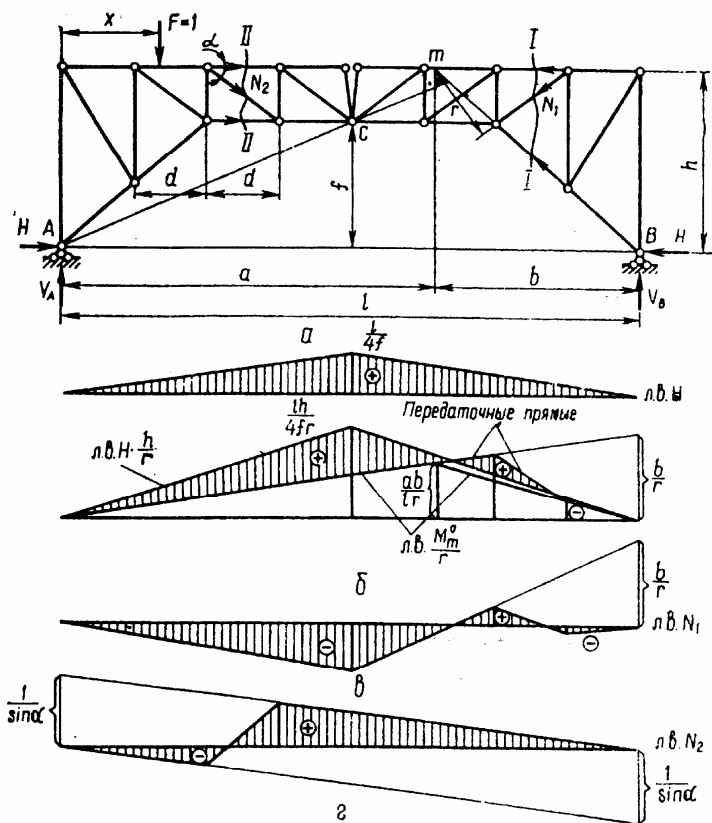


Рис.23

Вопросы

1. Как определяют реакции в трехшарнирной раме?
2. Приведите пример трехшарнирной рамы с затяжкой.
3. Что такое трехшарнирная арочная ферма?
4. Как определяют реакции в арочной ферме?
5. В чем заключается особенность построения линий влияния усилий в стержнях арочной фермы в отличие от балочной фермы?

12. КОМБИНИРОВАННЫЕ, ВИСЯЧИЕ И ВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ

12.1. Комбинированные и висячие системы

Комбинированными называют системы, в которых объединяются различные по роду работы конструкции. В основном в таких системах сочетаются изгибаемые и растянутые (сжатые) элементы. Благодаря введению растянутых элементов изгибаемые разгружаются, и расход материала уменьшается. Примерами комбинированных систем являются арка с затяжкой, балка со шпренгелем (рис.24, а), цепь с балкой жесткости (рис.24, б).

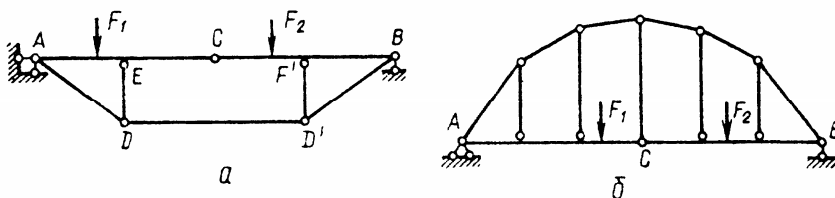


Рис.24

Расчет комбинированных систем после определения опорных реакций начинают с определения усилий в растянутых (сжатых) элементах. Далее, отсекая изгибаемые элементы, строят эпюры усилий в них от нагрузки и усилий в примыкающих растянутых (сжатых) элементах.

Висячие системы (рис.25) являются комбинированными системами, в которых основной несущей конструкцией является цепь или трос.

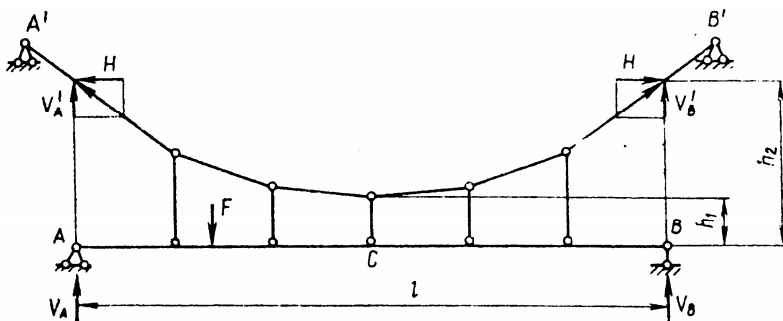


Рис.25

При вычислении усилий разрезают трос над опорами балки и вычисляют суммарные реакции $V_A + V'_A$ и $V_B + V'_B$, являющиеся балочными. Из равновесия узлов троса следует, что горизонтальные проекции усилий в элементах троса постоянны и равны H . Величину H устанавливают из условия равенства нулю изгибающего момента в шарнире C

$$H = M_C^o / (h_2 - h_1).$$

После этого находят усилия в элементах троса

$$N_i = H / \cos \alpha_i$$

и подвесках

$$N_k = H (tg \alpha_i - tg \alpha_{i+1}),$$

где α_i - угол наклона i -го элемента цепи к горизонту.

Эпюры M и Q в балке жесткости AB строят, отсекая ее от цепи.

12.2. Понятие о расчете вантовых систем

В вантовых системах (рис.26, *a*) наклоненные тяги (ванты) и подвески обычно выполняются в виде тросов. При действии нагрузки в вантах и подвесках появляются только растягивающие усилия. Благодаря этому устраняется продольный изгиб стержней и появляется возможность применения высокопрочных материалов, что снижает массу конструкции.

Вопрос о недопущении в элементах вантовой фермы сжимающих усилий решается с помощью линий влияния.

Например, для усилия N_I проведем сечение I-I и рассмотрим положение единичного груза справа от сечения. В левой части фермы работает только стержень AC , т.е. $N_3 = 0$. Так как усилия в горизонтальных элементах нижнего пояса равны нулю, то момент относительно точки B будет давать в правой части только усилие N_I . Тогда $N_I = x/r_I$. Подставляя $x = 0$ и $x = l/2$, получаем значения для построения правой прямой линии влияния N_I (рис.26, *б*). Отрезок линии влияния между точками C и G строим из условия, что при положении силы в точке K стержень AC выключается из работы и

$$N_I = 0.$$

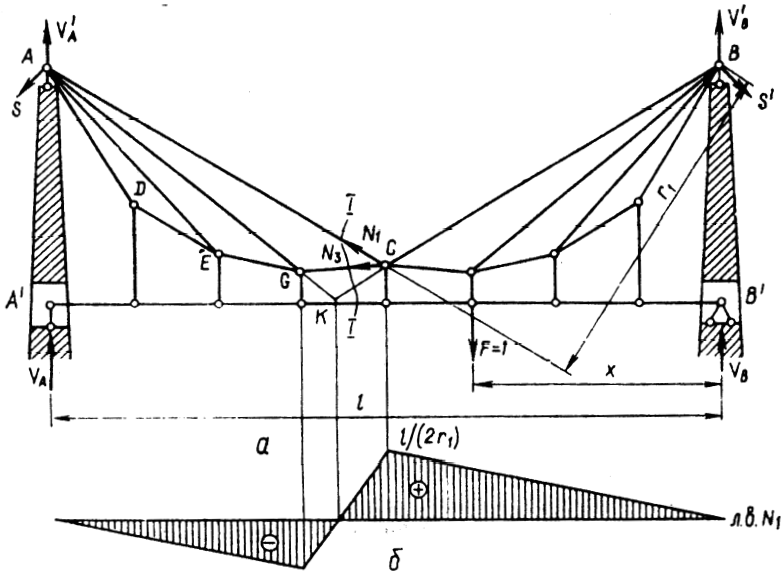


Рис.26

Пусть площадь положительной части линии влияния N_I равна ω_1 , а отрицательной - ω_2 . Тогда при действии постоянной нагрузки q и временной p наименьшее значение усилия

$$N_{I \min} = q(\omega_1 - \omega_2) - p\omega_2.$$

Из условия работы элемента только на растяжение ($N_I \geq 0$) получаем

$$p/q \leq \omega_1/\omega_2 - 1.$$

Таким образом, при проектировании вантовой фермы необходимо учитывать соотношение между временной и постоянной нагрузками.

Вопросы

1. Что называется комбинированной системой?
2. В каком порядке рассчитывают комбинированные системы?
3. Что такое висячая система?
4. Какое соотношение существует между усилиями в элементах цепи висячей системы?
5. Как работают элементы вантовой фермы?
6. Почему при проектировании вантовой фермы необходимо учитывать соотношение между постоянной и временной нагрузками?

13. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

13.1. Основные определения. Кинематический анализ

Пространственные системы по характеру образования делят на два вида: фермы и рамы.

Узлы пространственных систем могут быть жесткими и шарнирными. В жестком узле при деформациях системы не происходит взаимный поворот стержней. Шарниры в узлах могут быть шаровые (рис.27, *а*) и цилиндрические (рис.27, *б*). Шарниры считаются идеальными, т.е. не допускающими трения. В пространственных фермах стержни во всех узлах соединены шаровыми шарнирами. В рамах узлы преимущественно жесткие.

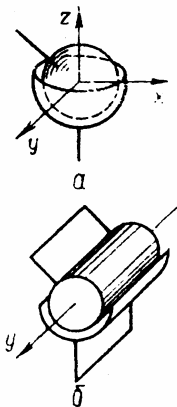


Рис.27

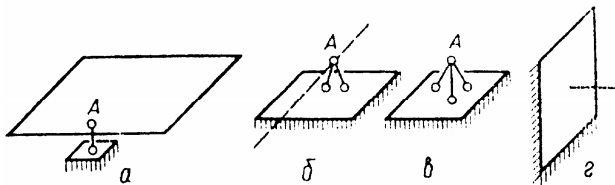


Рис.28

Различают четыре основных вида опор пространственных систем:

плоско-подвижная опора (рис.28, а) накладывает одну связь, оставляя пять из шести степеней свободы, возможных для сечения в пространстве;

линейно-подвижная опора (рис.28, б) накладывает 2 связи, оставляя 4 степени свободы;

неподвижная шаровая опора (рис.28, в) накладывает 3 связи;

зашемляющая неподвижная опора или **заделка** (рис.28, г) накладывает 6 связей.

Для определения числа степеней свободы представим сооружение как систему геометрически неизменяемых частей – блоков. Каждый такой блок имеет шесть степеней свободы. Каждый простой (соединяющий два блока) шаровой шарнир накладывает 3 связи. Тогда

$$W = 6B - 3T - C_0, \quad (26)$$

где B - число блоков, T - число простых шаровых шарниров, C_0 - число опорных связей.

Как и для плоских систем, условие $W \leq 0$ является необходимым, но недостаточным условием геометрической неизменяемости. Поэтому в этом случае необходимо дополнительно проверить геометрическую структуру системы.

13.2. Расчет пространственных рам

В сечении пространственного стержня действуют напряжения, которые в общем случае приводят к шести усилиям (рис.29): изгибающие моменты M_z и M_y , крутящий момент M_x , поперечные силы Q_z и Q_y , продольная сила N . Определение этих усилий можно выполнить через нагрузки методом сечений. Например, изгибающий

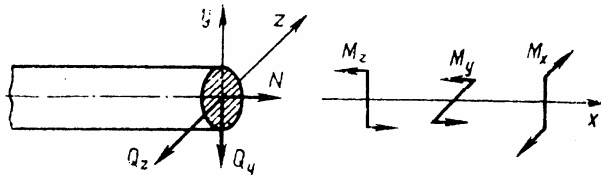


Рис.29

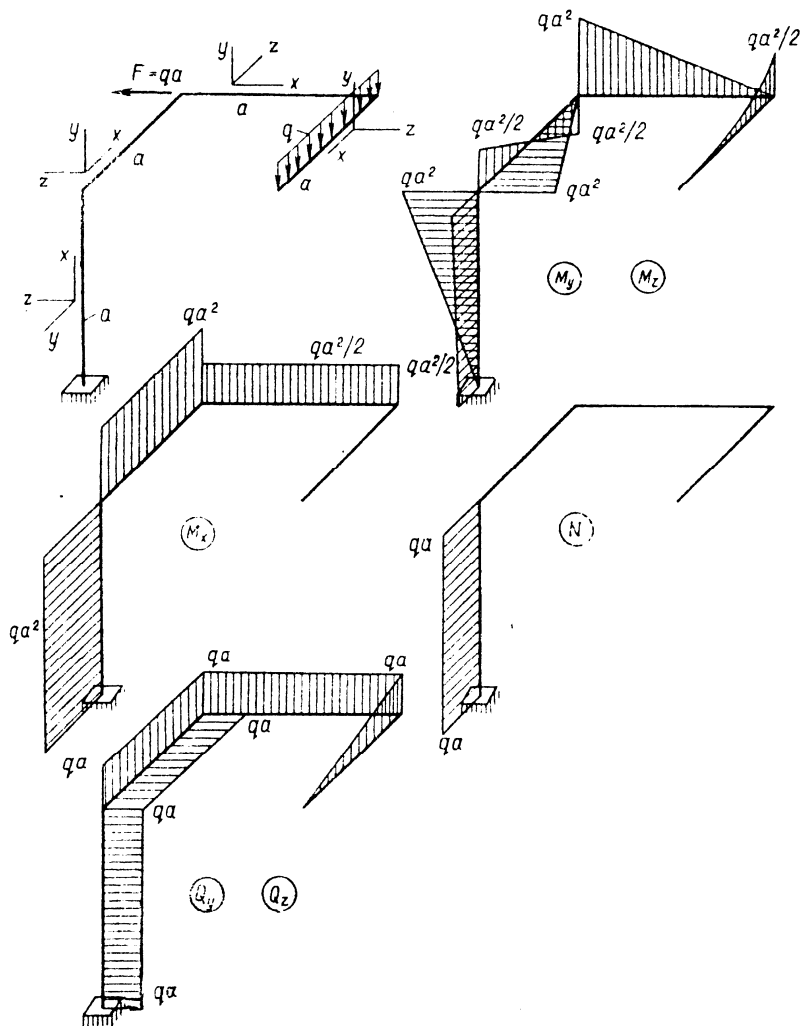


Рис.30

момент M_z равен алгебраической сумме моментов сил, действующих на одну из отсеченных частей, относительно оси Z рассматриваемого сечения. Правило знаков для всех усилий, кроме продольной силы, относительно. Эпюры M_z и M_y строят со стороны растянутых волокон. Правило знаков для продольной силы обычное: растяжение – "плюс", сжатие – "минус".

Пример построения эпюр в пространственной раме показан на рис.30.

Вопросы

1. Что называется пространственной системой?
2. Как соединяются стержни пространственных систем?
3. Какие опоры применяются в пространственных системах?
4. Как выполняется кинематический анализ пространственной системы?
5. Какие усилия возникают в сечении пространственного стержня? Как они определяются?

14. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФЕРМЫ

Стержни пространственных ферм соединяются в узлах пространственными шарнирами. Нагрузка прикладывается в узлах, поэтому, как и в плоской ферме, стержни работают только на растяжение-сжатие.

Число степеней свободы пространственной фермы определяют по формуле:

$$W = 3Y - C - C_o. \quad (27)$$

Для определения реакций в опорных связях можно записать шесть уравнений равновесия, например:

$$\begin{aligned} \sum x = 0; \sum y = 0; \sum z = 0; \\ \sum M_{ox} = 0; \sum M_{oy} = 0; \sum M_{oz} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Усилия в стержнях пространственной фермы определяют методами сечений, замены связей, кинематическим.

Метод замены связей и **кинематический** применяются так же, как и в плоских фермах.

Метод сечений реализуется способами вырезания узлов, сквозного сечения; разложения на плоские фермы.

Применение **способа вырезания узлов** отличается от плоских ферм тем, что количество неизвестных усилий в очередном рассматриваемом узле может быть равно трем (для пространственной системы сил, пересекающихся в одной точке, можно составить три линейно независимых уравнения равновесия).

Например, в ферме, приведенной на рис.31, расчет начинается с узла 1. Составляя уравнения проекций на оси координат ($\sum x = 0$; $\sum y = 0$; $\sum z = 0$), находим усилия. Далее переходим к узлу 4, затем 3 и 2.

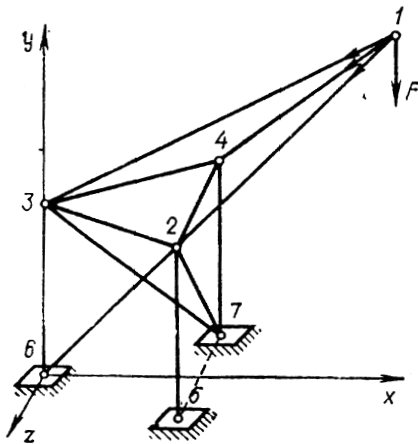


Рис.31

Частные случаи равновесия узлов приведены на рис.32.

Способ сквозного сечения применяют тогда, когда можно провести сечение, разрезающее не более шести стержней. Тогда усилия в этих стержнях могут быть найдены из шести уравнений равновесия типа (28). При этом оси проекций и моментов стараются выбрать так, чтобы в каждое уравнение равновесия входило минимальное число неизвестных усилий.

Способ разложения пространственной фермы на плоские заключается в том,

что плоские грани пространственной фермы рассматриваются отдельно друг от друга. Нагрузка раскладывается на составляющие, направленные вдоль ребер.

Для фермы, приведенной на рис.33, силу F в узле 1 раскладываем на составляющие F_1 , F_2 и F_3 . Плоская ферма 1-2-3-4 рассчитывается на силу F_1 , ферма 1-2-5-6 – на силу F_2 . Сила F_3 может быть учтена при расчете любой из этих ферм.

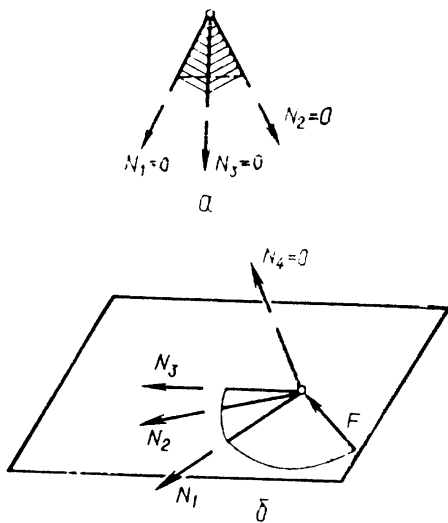


Рис.32

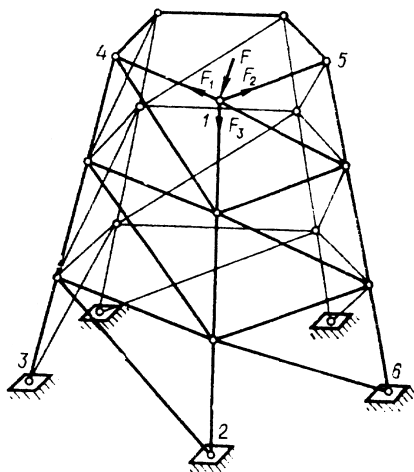


Рис.33

Вопросы

1. Какие усилия возникают в стержнях пространственной фермы? Почему?
2. Как выполняется кинематический анализ пространственной фермы?
3. Сколько уравнений равновесия можно записать для пространственной системы сил?
4. Какими способами можно определить усилия в стержнях фермы при использовании метода сечений?

15. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

15.1. Принцип возможных перемещений для упругих систем

Этот принцип является одним из наиболее общих принципов механики. В применении к упругим системам он формулируется так: если система находится в равновесии, то сумма работ всех его внешних и внутренних сил на бесконечно малых возможных перемещениях