

МИНИСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківська національна академія міського господарства

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
з опору матеріалів
«РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНОЇ
БАГАТОПРОГІННОЇ БАЛКИ»

(для студентів 2 курсу спец.
6.092108 „Теплогазопостачання та вентиляція”,
6.092601 „Водовідведення та водопостачання”)

Методичні вказівки і завдання з опору матеріалів «Розрахунок статично невизначної багатопрогінної балки» (для студентів 2 курсу спец. 6.092108 „Теплогазопостачання та вентиляція”, 6.092601 “Водовідведення та водопостачання”). Укл. Серeda Н.В., Чупринін О.О. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 19 с.

Укладачі: Н.В. Серeda, О.О. Чупринін

Рецензент:
к.т.н., доц. Л.С. Андрієвська

Рекомендовано кафедрою будівельної механіки,
протокол № 6 від 24.01.06

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Ці методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів та підготовки до практичних занять і виконання контрольної роботи з опору матеріалів і будівельної механіки за темою “розрахунок статично невизначної багатопрогінної балки”. Вони вмістять теоретичні положення та завдання до розрахунково-графічної роботи і приклад її виконання. Призначені для студентів денної та заочної форми навчання.

Курс “Опір матеріалів і будівельна механіка” вивчається студентами після засвоєння курсів вищій математики та теоретичної механіки, в них розглядається дія сил на пружні тіла і визначаються виникаючі при цьому напруження, деформації та переміщення.

У сучасних умовах прагнення до полегшення конструкцій і споруд приводить до все більшого поширення в будівельній практиці стержневих конструкцій. При дії на ці конструкції навантажень, що прикладені в напрямі, перпендикулярному до осі стержня, в них виникає згин. Отже вивчення даної теми є важливим для інженерів технічних спеціальностей. За цією темою передбачається розв’язання розрахунково-графічної роботи. Перш ніж приступити до її виконання, необхідно ознайомитися з теоретичним матеріалом з розрахунку статично невизначних багатопрогінних балок. Цей матеріал викладено у підручниках, посібниках та методичних вказівках, які наведені в списку літератури.

2. РІВНЯННЯ ТРЬОХ МОМЕНТІВ

Нерозрізними називають балки, що лежать на декількох опорах і не мають проміжних шарнірів. Такі балки, широко застосовані в різних

конструкціях, є статично невизначними, якщо кількість опор складає більше ніж дві. На рис. 1 наведена довільно навантажена балка, що спирається на N шарнірних опор. Одна з опор робиться шарнірно-нерухомою для сприйняття осьового навантаження, інші – шарнірно-рухливими, що дає змогу балці вільно змінювати довжину, при цьому при її навантаженні поперечними силами, не виникають внутрішні подовжні зусилля.

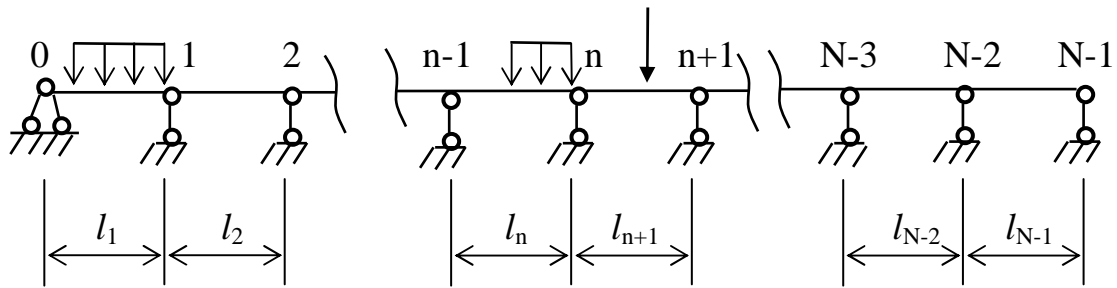


Рис. 1

При обпиранні на N шарнірних опор маємо стільки ж вертикальних реакцій. Дана система буде $(N-2)$ рази статично невизначеною, тому що рівнянь рівноваги можна скласти тільки два.

Таким чином, число «зайвих» зв'язків, а отже, і число «зайвих» реакцій буде дорівнювати кількості проміжних опор. Якщо крайня опора виконана у вигляді жорсткого защемлення, то ступінь статичної невизначеності збільшується на одиницю в порівнянні із шарнірним обпиранням.

Найбільш зручним вибором основної системи для нерозрізної балки є введення шарнірів у перерізах над усіма проміжними опорами. «Зайвими» невідомими в цьому випадку будуть згинальні моменти в опорних перерізах балки, як показано на рис. 2.

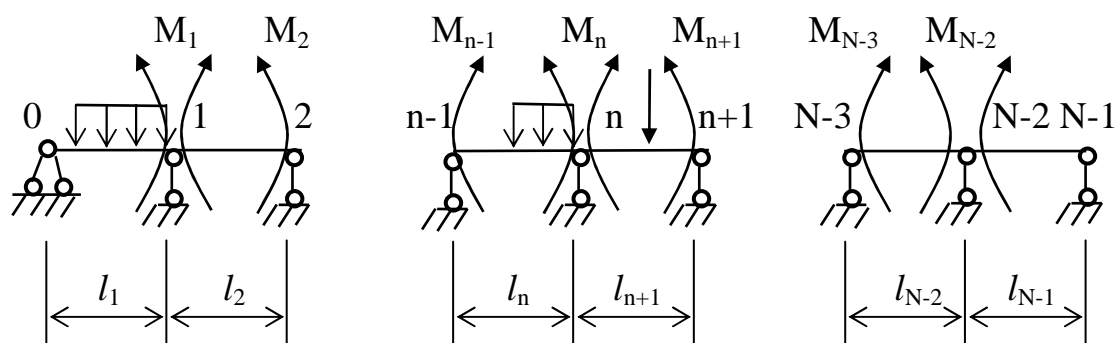


Рис. 2

Таким чином, еквівалентна система являє собою ряд простих шарнірно обпертих однопрогонних балок, навантажених заданим навантаженням і невідомими опорними згинальними моментами M_i , де $i=1, 2, \dots, N-2$, як показано на рисунку. Тут для визначеності показані позитивні опорні моменти. При такому виборі основної системи дія заданого навантаження поширюється тільки на проліт, на якому вона прикладена, вплив її на інші прольоти виражається через опорні згинальні моменти.

Для вирішення статично невизначених задач потрібно скласти додаткові рівняння – рівняння спільності деформацій. У даному разі вони будуть являти собою рівність кутів повороту опорних перерізів для суміжних балок.

Кожна двохопорна балка основної системи під дією заданого навантаження й опорних моментів деформується незалежно одна від другої. Однак у вихідній статично невизначеній системі кожна пара перерізів на опорних шарнірах являє собою один переріз, отже кут повороту в них повинен бути рівний, що можна записати в такий спосіб:

$$\Delta_n^l + \Delta_n^{pp} = 0, \quad (1)$$

де $\Delta_n^l, \Delta_n^{pp}$ - кути повороту торцевих перерізів суміжних балок, що примикають до n-ної опори ліворуч і праворуч від неї відповідно. При цьому позитивні напрямки цих кутів повороту перерізів збігаються з позитивним напрямком опорних згинальних моментів.

Тому що основна система складається з окремих, не зв'язаних між собою двохопорних балок, то для розкриття отриманого рівняння спільності деформацій досить розглянути тільки два сусідніх прольоти, розташованих ліворуч і праворуч від опори.

Відповідно до теореми про взаємність робіт співвідношення (1) можна подати у вигляді (див. рис. 3):

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{n,P} = 0, \quad (2)$$

де $\delta_{n,n-1}M_{n-1}$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від опорного моменту, що виникає на опорі n-1;

$\delta_{n,n}M_n$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від опорного моменту, що виникає на цій же опорі;

$\delta_{n,n+1}M_{n+1}$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від опорного моменту, що виникає на опорі n+1;

$\Delta_{n,P}$ - кут повороту перерізу на n-ній опорі від заданого навантаження, прикладеного на двох сусідніх з розглянутою опорою прольотах.

Для визначення наведених вище кутів повороту перерізу застосуємо правило Верещагіна. На рис. 3 наведена вантажна епюра M_p – епюра згинальних моментів від заданого навантаження й одиничні епюри M_{n-1} , M_n , M_{n+1} - епюри згинальних моментів від одиничних моментів, що діють у напрямку опорних моментів M_{n-1} , M_n , M_{n+1} відповідно.

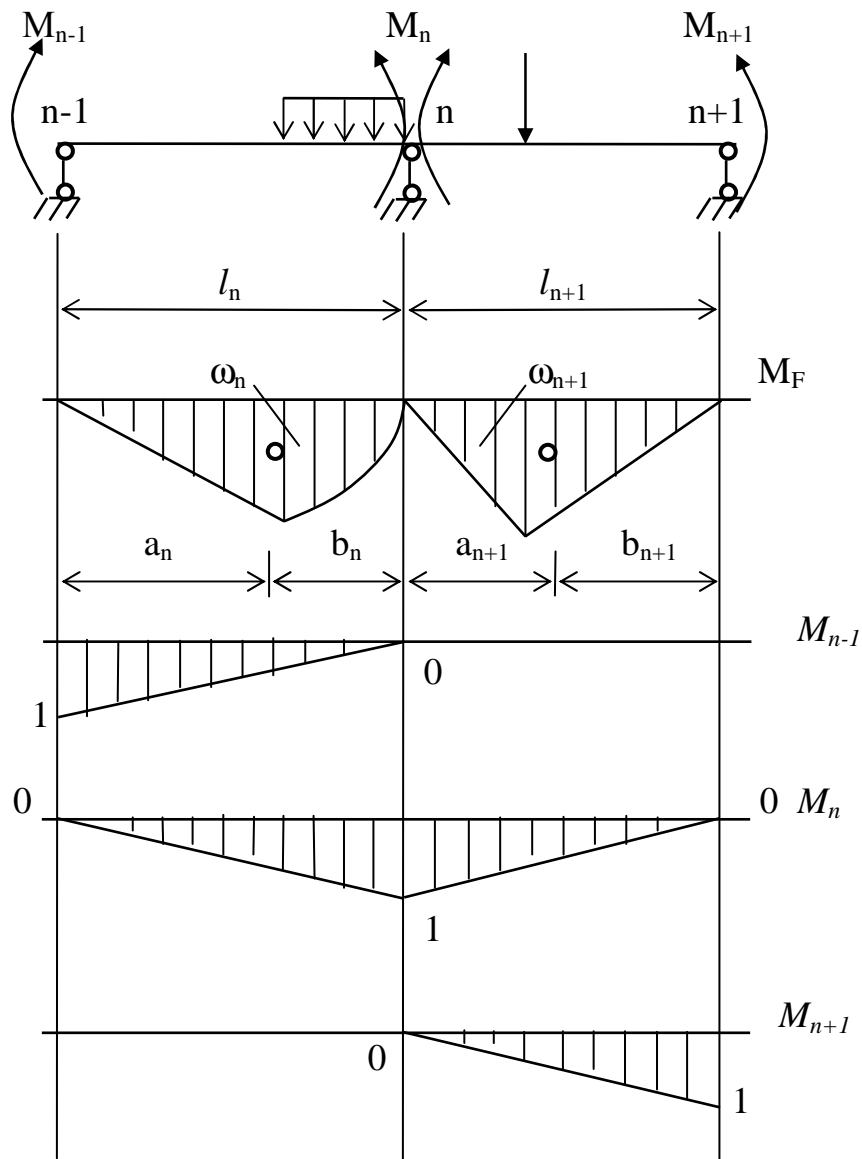


Рис. 3

Вважаючи, що жорсткість балки на згин по всій довжині постійна, представимо доданки, що входять у рівняння (2), у наступному вигляді:

$$\delta_{n,n-1} M_{n-1} = \frac{M_{n-1}}{EI} \left(\frac{l_n}{2} * 1 * \frac{1}{3} \right) = \frac{l_n}{6EI} M_{n-1};$$

$$\delta_{n,n}M_n = \frac{M_n}{EI} \left(\frac{l_n}{2} * 1 * \frac{2}{3} + \frac{l_{n+1}}{2} * 1 * \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{l_n}{3EI} + \frac{l_{n+1}}{3EI} \right) M_{n-1};$$

$$\delta_{n,n+1}M_{n+1} = \frac{M_{n+1}}{EI} \left(\frac{l_{n+1}}{2} * 1 * \frac{1}{3} \right) = \frac{l_{n+1}}{6EI} M_{n+1};$$

$$\Delta_{n,P} = \frac{1}{EI} \left(\omega_n \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right),$$

де ω_n - площа епюри згинаючого моменту, що виникає від заданого навантаження на n-ному прольоті;

ω_{n+1} - площа епюри згинаючого моменту, що виникає від заданого навантаження на прольоті n+1;

a_n - відстань від опори n-1 до центру ваги епюри моменту від заданого навантаження на n-ному прольоті;

b_{n+1} - відстань від опори n+1 до центру ваги епюри моменту від заданого навантаження на прольоті n+1.

Підставляючи отримані вирази в рівняння спільності деформацій (2) і скорочуючи жорсткість на згин, одержуємо такі рівняння, що зв'язують між собою опорні моменти, які виникають на трьох сусідніх опорах:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right). \quad (3)$$

Це рівняння називається “рівняння трьох моментів”, тому що в нього входять опорні моменти на трьох сусідніх опорах. Цих рівнянь виходить стільки, скільки вводиться шарнірів для утворення основної системи. Як було показано вище, їхнє число дорівнює кількості проміжних шарнірних опор. Для того щоб одержати систему рівнянь послідовно записують рівняння (3) для кожної проміжної опори. Оскільки це рівняння отримане для n-ної опори, то для складання системи треба додати цьому індексу значення $n=1, 2, \dots, N-2$ відповідні номерам проміжних опор. В отриманій

системі лінійних алгебраїчних рівнянь кожне рівняння буде містити три невідомих опорних моменти, а перше й останнє тільки два.

У перше й останнє рівняння системи будуть входити моменти на крайніх опорах. Якщо на крайній шарнірній опорі не прикладений зосереджений момент, то в рівнянні (3) його слід дорівнювати нулю. Якщо на цій опорі прикладений зосереджений момент, то в рівнянні підставляється його значення. Аналогічно треба діяти, коли балка має консоль. У цьому випадку момент на крайній опорі буде дорівнювати моменту від навантаження, прикладеного до консолі.

Якщо який-небудь край балки жорстко затиснутий, то закладення слід замінити додатковим прольотом нескінченно великої твердості чи нескінченно малої довжини. У розрахунках ця заміна полягає в тому, що замість жорсткого затиснення на краю вводять два шарніри на нульовій відстані між собою.

Епюру згинальних моментів будують після знаходження невідомих опорних моментів з рівнянь (3). Остаточна ця епюра згинальних моментів буде дорівнювати сумі епюр від заданого навантаження і від опорних моментів, що має вигляд ламаної лінії, яка з'єднує відрізки, відкладені над опорами і рівні знайденим опорним моментам.

Епюру поперечної сили одержують з побудованої раніше епюри згинальних моментів. Для цього використовують диференціальні залежності при згині, що отримані для того випадку, якщо вісь абсцис спрямована в праву сторону:

$$\frac{dQ}{dx} = q; \quad \frac{dM}{dx} = Q.$$

З наведених залежностей випливає, що поперечну силу на будь-якій ділянці, знаючи величину згинальних моментів на його границях, можна знайти в таким чином:

$$Q_{yч} = \frac{M_{yч}^{пр} - M_{yч}^{л}}{\ell_{yч}} + Q_0, \quad (4)$$

де $Q_{yч}$ - поперечна сила на розглянутій ділянці;

$M_{yч}^{пр}$ - значення згинаючого моменту на правій границі розглянутої ділянки;

$M_{yч}^{л}$ - значення моменту на лівій границі ділянки;

$\ell_{yч}$ - довжина ділянки;

Q_0 - доданок, присутній у тому випадку, якщо на ділянці прикладене розподілене навантаження інтенсивністю q , у цьому виразі даний доданок змінюється за довжиною ділянки, і на його границях (правій і лівій відповідно) буде дорівнювати:

$$Q_0^л = \frac{q\ell_{yч}}{2}; \quad Q_0^{пр} = -\frac{q\ell_{yч}}{2}. \quad (5)$$

3. ЗАВДАННЯ І ВИХІДНІ ДАНІ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Вихідні дані обирають відповідно до завдання за рис. 4 і таблицею, наведеними нижче. Дані з таблиці вибирають залежно від номера варіанта завдання, що складається з трьох цифр і визначається викладачем.

Для заданої статично невизначної багатопрогінної балки потрібно:

- 1) одержати основну систему, навантажену заданим навантаженням і невідомими опорними моментами;
- 2) побудувати для основної системи епюру згинальних моментів від заданого навантаження;

- 3) скласти рівняння трьох моментів для всіх проміжних опор і визначити з отриманої системи рівнянь невідомі опорні реакції;
- 4) побудувати для заданої балки епюру згинальних моментів і поперечної сили;
- 5) підібрати двотавровий перетин умов міцності, якщо допустимі напруження для сталі вважати рівними $[\sigma]=16 \text{ кН/см}^2$.

Результати розрахунку багатопрогінної балки повинні бути оформлені на паперу формату А-4. Всі креслення необхідно виконати в масштабі.

Перша цифра шифру	a м	b м	c м	d м	Друга цифра шифру	F ₁ кН	F ₂ кН	M кНм	q кН/м	Третя цифра шифру	№ схеми
1	2	2	1	2	1	80	30	30	10	1	1
2	3	2	2	2	2	40	20	40	20	2	2
3	3	3	3	3	3	60	15	20	15	3	3
4	2	2	4	1	4	70	45	70	10	4	4
5	4	4	2	5	5	50	50	20	30	5	5
6	5	1	3	2	6	50	60	50	10	6	6
7	2	2	5	4	7	40	40	40	20	7	7
8	5	5	4	6	8	60	25	30	15	8	8
9	6	1	2	4	9	60	45	60	10	9	9
0	4	2	5	2	0	80	50	10	30	0	10

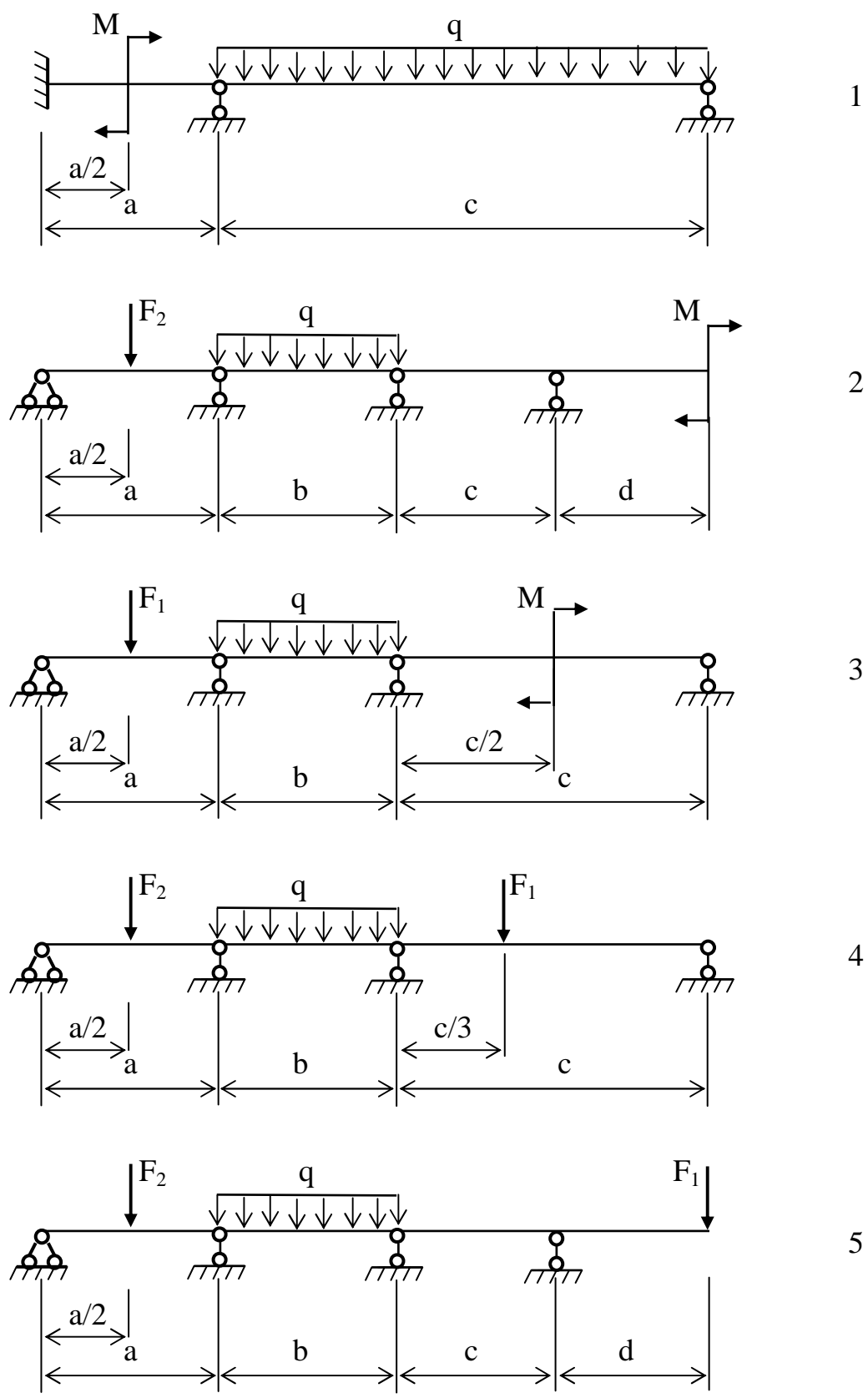
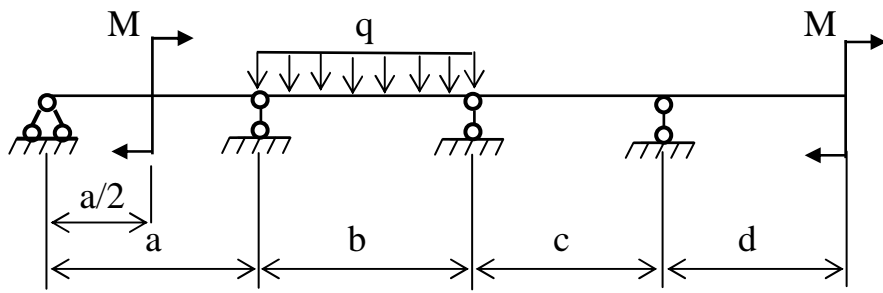
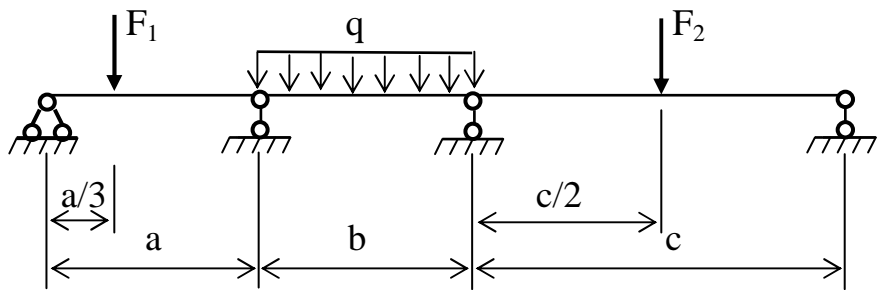


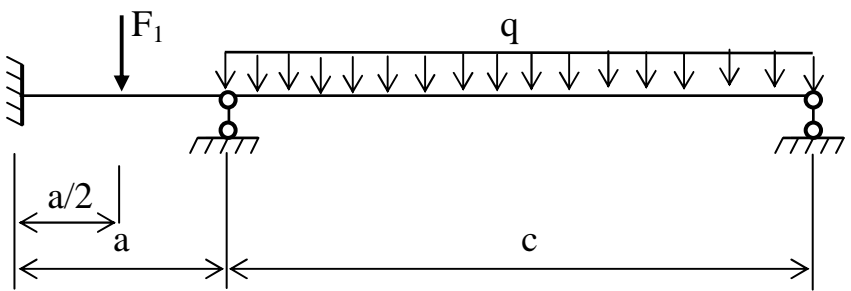
Рис. 4



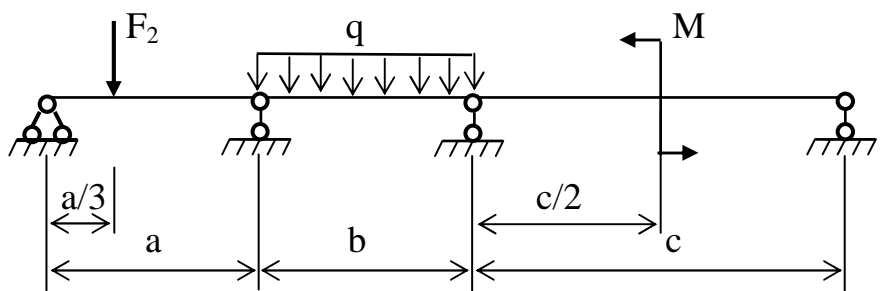
6



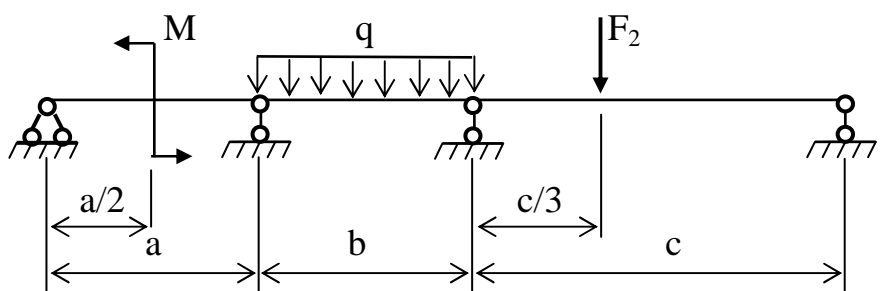
7



8



9



10

Продовження рис. 4

4. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил статично невизначної багатопрогонової балки, наведеної на рис. 5, а, використовуючи рівняння трьох моментів.

1. Одержуємо основну систему.

Для цього введемо шарніри у перерізах над усіма проміжними опорами. «Зайвими» невідомими в цьому випадку будуть згинальні моменти в опорних перерізах балки.

Оскільки лівий край балки жорстко затиснутий, то закладення слід замінити додатковим прольотом нескінченно малої довжини. Для цього замість жорсткого затиснення на лівому краї введемо два шарніри на нульовій відстані між собою. На правому краї балка має консоль. У цьому випадку момент, прикладений до консолі, перенесемо на крайню опору.

Опори і прольоти пронумеруємо, як показано на рис. 5, б, зліва праворуч.

У рівняння трьох моментів будуть входити моменти на крайніх опорах. На крайній лівій шарнірній опорі не прикладений зосереджений момент, отже, у рівнянні його слід дорівняти нулю. На правій опорі прикладений зосереджений момент, отже у рівняння підставляється його значення.

Основна система, навантажена заданим навантаженням і невідомими опорними моментами M_1 і M_2 , наведена на рис. 5, б.

2. Будуємо для основної системи епюру згинальних моментів від заданого навантаження для кожної двохопорної балки.

Епюра моментів від заданого навантаження наведена на рис. 5, в.

3. Складаємо рівняння трьох моментів (3) для двох проміжних шарнірних опор (першої і другої).

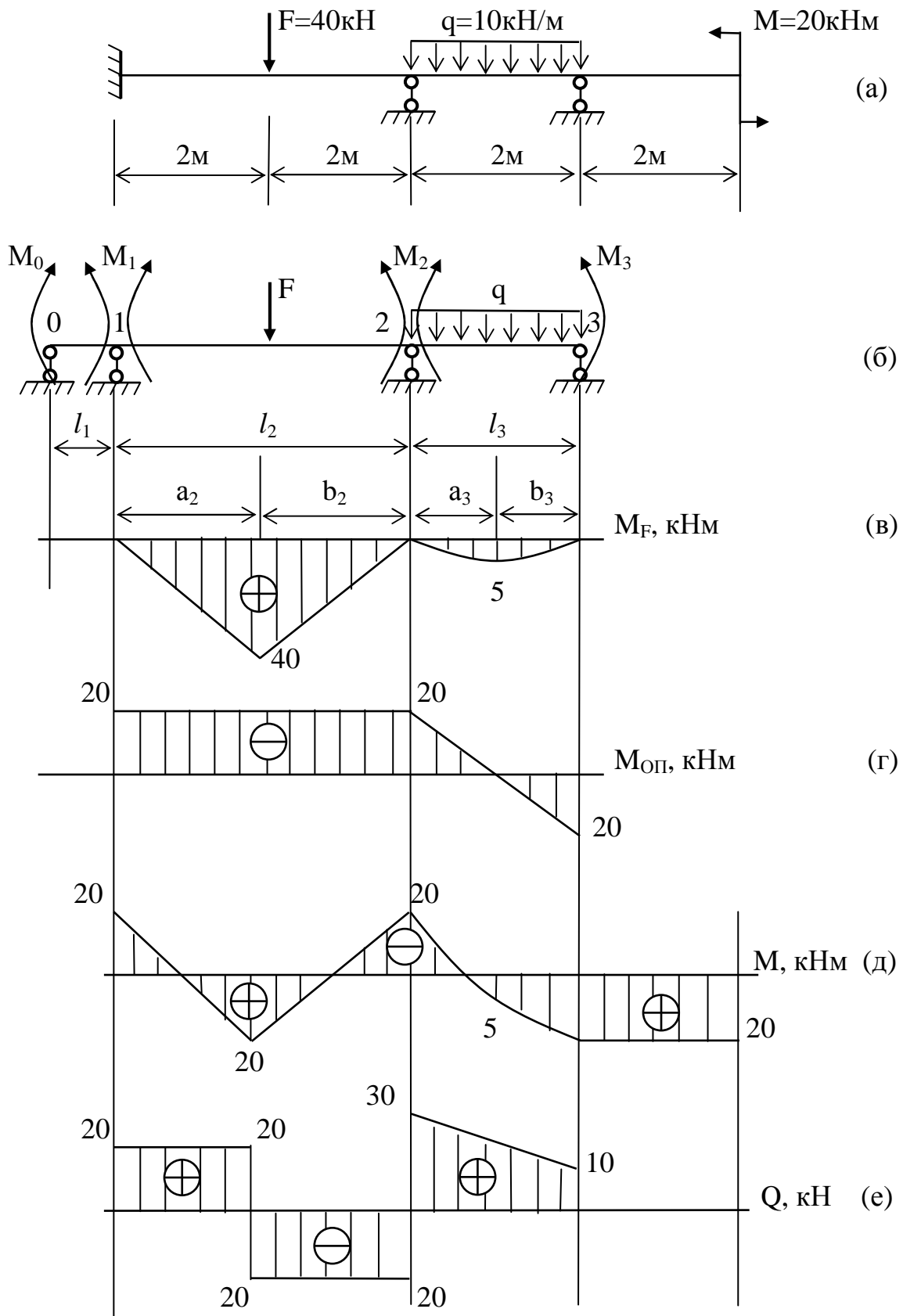


Рис. 5

Для першої опори $n=1$:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right).$$

Для другої опори $n=2$:

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \right).$$

У цих рівняннях відомі крайні опорні моменти:

$$M_0 = 0; \quad M_3 = 20 \text{ кНм}.$$

Довжини прольотів:

$$l_1 = 0; \quad l_2 = 4 \text{ м}; \quad l_3 = 2 \text{ м}.$$

Площі епюр згинальних моментів від заданого навантаження:

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \frac{1}{2} * 4 * 40 = 80 \text{ кНм}^2; \quad \omega_3 = \frac{2}{3} * 2 * 5 = 13.33 \text{ кНм}^2.$$

Відстань від відповідних опор до центра ваги епюри моменту від заданого навантаження на прольоті:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 2 \text{ м};$$

$$b_2 = 2 \text{ м}; \quad b_3 = 1 \text{ м}.$$

З урахуванням цього одержуємо систему рівнянь для визначення невідомих опорних моментів:

$$\begin{cases} 0 + 2M_1(0 + 4) + M_2 4 = -6 \left(0 + \frac{80 * 2}{4} \right); \\ M_1 4 + 2M_2(4 + 2) + 20 * 2 = -6 \left(\frac{80 * 2}{4} + \frac{13.33 * 1}{2} \right). \end{cases}$$

Або:

$$\begin{cases} 8M_1 + 4M_2 = -240; \\ 4M_1 + 12M_2 = -320. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2M_1 + M_2 = -60; \\ M_1 + 3M_2 = -80. \end{cases}$$

Звідси знаходимо невідомі опорні моменти:

$$M_1 = -20 \text{ кНм};$$

$$M_2 = -20 \text{ кНм}.$$

За цими значеннями будуюмо епюру опорних моментів, наведену на рис. 5, г, що має вигляд ламаної лінії, яка з'єднує відрізки, відкладені над опорами і рівні підрахованим опорним моментам.

4. Будуємо для заданої балки епюру згинальних моментів. Ця епюра, що дорівнює сумі епюр від заданого навантаження і від опорних моментів, наведена на рис. 5, д.

Епюру поперечної сили одержуємо з побудованої раніше епюри згинальних моментів. Для цього використовуємо залежності (4) і (5), наведені вище. Ця епюра показана на рис. 5, е.

5. Підберемо двотавровий переріз балки. Найбільший згинальний момент (за модулем), що виникає в балці, дорівнює $M_{\max} = 20 \text{ кНм} = 2000 \text{ кНсм}$. З умови міцності при згині, з урахуванням того, що припустимі напруження для сталі дорівнюють $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$:

$$W_{\text{н.о}} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{2000}{16} = 125 \text{ см}^3.$$

За сортаментом (ДСТ 8239-72) приймаємо двотавр №18, для якого момент опору вигину $W_x = 143 \text{ см}^3$.

Висновок: За результатами розрахунків можна встановити, що розглянута багатопрогінна балка, яка наведена на рис. 5, а, буде задовольняти умовам міцності (максимальне напруження буде менше ніж допустиме) у тому разі, якщо вона буде виконана з двотавру №18 або більше.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Піскунов В.Г., Феодоренко Ю.М., Шевченко В.Ю. та ін. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. - К.: Вища школа, 1994.
2. Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А. Механіка споруд. – Харків: ХДАМГ, 2001. – 234 с.
3. Сопротивление материалов. / Под общ. ред. Г.С. Писаренко. – К.: Вища школа. - 1979, 696 с.
4. Методичні вказівки і завдання до розрахунково-графічної роботи «Розрахунок статично визначної багатопрогінної балки». Укл. Колодій Л.І., Чупринін О.О. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 20 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки і завдання з опору матеріалів «Розрахунок статично невизначної багатопрогінної балки» (для студентів 2 курсу спец. 6.092108 „Теплогазопостачання та вентиляція”, 6.092601 “Водовідведення та водопостачання”).

Укладачі: Наталя Василівна Середя, Олександр Олексійович Чупринін

Відповідальний за випуск: Л.С. Андрієвська

Редактор М.З. Аляб'єв

План 2006, поз. 232

Підп. до друку	Формат 60x84, 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Обл. - вид. арк. 1,2	Ум.-друк арк. 1,0
Тираж 100 прим.	Зам №	Ціна договірна

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12.

Сектор оперативної поліграфії при ІОЦ ХНАМГ