1. ВСТУП

Плоска задача теорії пружності є однією з важливих при вивченні спецкурсу опору матеріалів. Бакалавр і фахівець-будівельник повинні володіти вмінням постановки та вирішення цієї задачі. Адже, розрахунок низки конструкцій зводиться до розв'язання саме плоскої задачі. До таких конструкцій відносяться масивні підпірні стінки, стінові панелі будівель та ін.

Метою цієї роботи є ознайомлення з одним з методів розв'язання плоскої задачі – методом скінченних різниць.

Перш ніж приступити до виконання роботи, необхідно ознайомитись з теоретичним матеріалом, викладеним у посібнику [1], глава VI, а також з відомостями, наведеними у п. 3 цих методичних вказівок.

2. ЗАВДАННЯ ДО РОБОТИ

Вихідні дані до виконання роботи беруть з табл. 1. і рис. 1 за вказівками викладача.

Таблиця 1

I група даних							II група даних				
№ п/п	a, м	$a : в$	c / a	$l / в$	q_1, кН/м^2	q_2, кН/м^2	№ п/п	d / a	$f / в$	F_1, кН/м	F_2, кН/м
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	2	4:4	0	0,5	0	2	1	0	0,5	3	3
2	3	4:5	0,12	0,48	2	0	2	0,2	0,4	3	2
3	4	5:4	0,14	0,46	0	3	3	0,3	0,3	2	3
4	5	5:	0,16	0,44	3	0	4	0,4	0,2	4	4
5	6	4:4	0,18	0,42	0	4	5	0,5	0,1	4	3
6	7	4:5	0,20	0,40	4	0	6	0,2	0	3	4
7	8	5:4	0,22	0,38	0	5	7	0,3	0,5	4	2
8	9	5:5	0,24	0,36	5	0	8	0,4	0,4	2	4
9	10	4:4	0,26	0,34	0	6	9	0,5	0,3	5	5
10	11	4:5	0,28	0,32	6	0	10	0	0,2	5	6
11	12	5:4	0,30	0,30	0	7	11	0,2	0,1	6	6
12	13	5:5	0,32	0,28	7	0	12	0,3	0	6	5

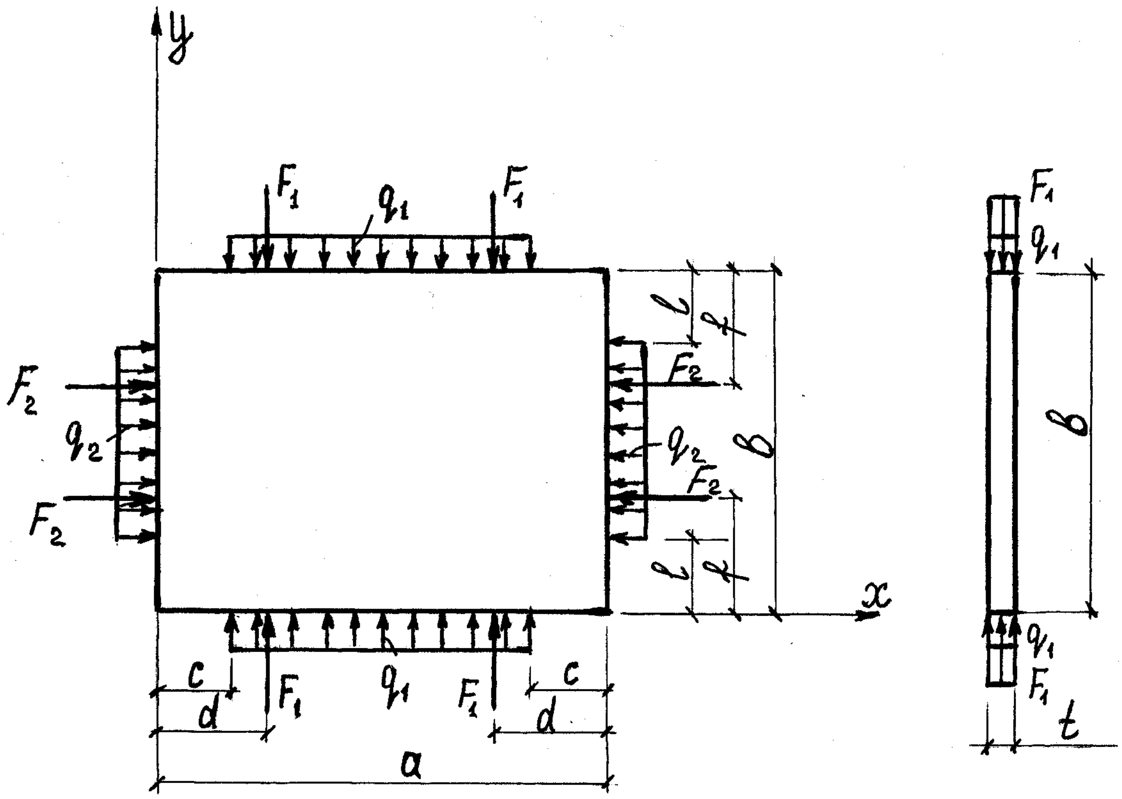

Рис. 1

Для пластинки (рис. 1) необхідно:

- відповідно до заданих у табл. 1 співвідношень обчислити всі розміри;
- накреслити пластинку в масштабі;
- розбити пластинку сіткою відповідно до заданого співвідношення $a : в$ і пронумерувати вузли з урахуванням симетрії, починаючи з внутрішніх і закінчуючи позаконтурними;
- скласти диференціальні рівняння у скінченних різницях для внутрішніх вузлів чверті сітки й звести подібні в них з урахуванням симетрії;
- визначити функції напружень у контурних та позаконтурних вузлах сітки і підставити їх значення в рівняння;
- розв’язати рівняння відносно значень функції напружень у внутрішніх вузлах сітки;
- обчислити напруження у вузлах сітки й побудувати їх епюри для пластинки.

3. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Плоска задача теорії пружності об'єднує дві задачі: ***плоску деформацію***, коли деформації в тілі розподіляються за законом площини, та ***узагальнений плоский напружений стан***, коли такому закону задовольняють напруження. Це об'єднання пояснюється тим, що розрахункові рівняння обох задач ідентичні. Зокрема, при вирішенні в напруженнях з введенням ***функції напружень Ері*** задача зводиться до пошуку бігармонічної функції напружень $\varphi(x,y)$ при виконанні графічних умов (умов на контурі).

Бігармонічною називається функція, що задовольняє рівнянню

$$\nabla^4\varphi = 0.$$

Ліва частина цього рівняння читається як «набла чотири φ» і називається подвійним оператором Лапласа над функцією φ. У розгорнутому вигляді рівняння має такий вигляд:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0. \qquad (1)$$

Граничні умови задачі також виражаються через функцію напружень:

$$X_\nu = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}l - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + X\cdot y + Y\cdot x\right)m;$$

$$Y_\nu = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + X\cdot y + Y\cdot x\right)l + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}m, \qquad (2)$$

де X_ν, Y_ν − складові навантаження відповідно вздовж осей x, y на поверхні пластинки з нормаллю ν;

X, Y − складові об'ємного навантаження;

l, m − направляючі косинуси нормалі до поверхні ν:

$$l = cos(\nu, x);\ m = cos(\nu, y).$$

Після визначення функції φ з (1) при виконанні умов (2) напруження можна знайти із співвідношень:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X \cdot y - Y \cdot x. \qquad (3)$$

У цій роботі розглядається прямокутна пластинка, завантажена тільки на контурі рівномірно вздовж товщини пластинки. Навантаження діє паралельно її основам. Це обумовлює роботу пластинки, що відповідає узагальненому напруженому стану.

Будемо вважати, що в заданій пластинці об'ємне навантаження відсутнє, тобто $X = 0, Y = 0$. Края пластинки паралельні осям координат, отже на краях, паралельних осі x, маємо $l = 0$, $m = \pm 1$, а на краях, паралельних осі y, $l = \pm 1$, $m = 0$.

Для розв'язання задачі в цій роботі застосовується ***метод скінченних різниць*** (***метод сіток***). Цей метод базується на заміні безперервної функції рядом її значень у фіксованих точках. При достатньо малій відстані між точками похідні функції можна наближено виразити через значення функції у цих точках. Завдяки цьому диференціальне рівняння задачі заміняється системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функції у заданих точках. Відповідно перетворюються і граничні умови.

Розбиваючи контур пластинки сіткою з однаковими розмірами h вічок уздовж осей x та y (рис. 2) запишемо похідні функції φ в скінченних різницях для точки з номером 0:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = (\varphi_1 - \varphi_3)/(2h);$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = (\varphi_2 - \varphi_4)/(2h); \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3)/h^2;$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0 = (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4)/h^2;$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)_0 = (\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12})/(4h^2);$$

$$\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)_0 = (\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9)/h^4; \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right)_0 = (\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11})/h^4;$$

$$\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right)_0 = [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12})]/h^4$$

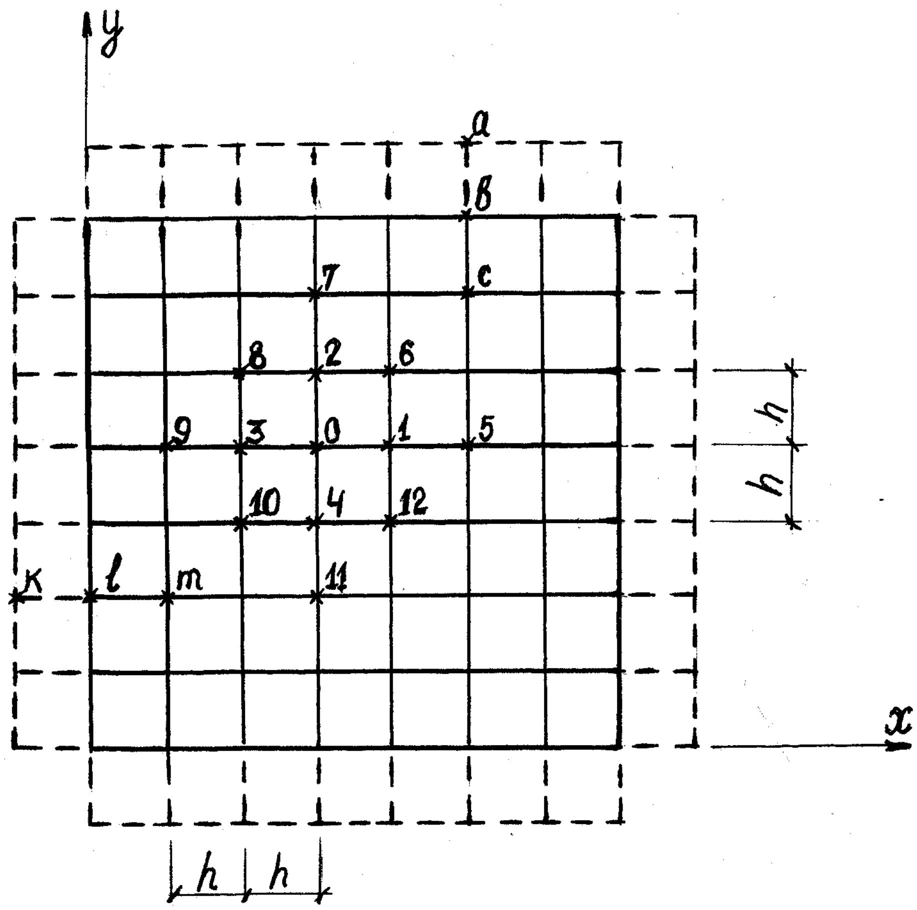

Рис. 2

З урахуванням цих виразів можна записати диференціальне рівняння (1) для точки з номером 0 у скінченних різницях. Після перетворень це рівняння набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}&20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \\ &+ (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0.\end{aligned} \qquad (5)$$

Такі рівняння складають для всіх внутрішніх точок сітки. При цьому в них увійдуть також значення функцій напружень в точках на контурі та поза контуром на відстані одного кроку h сітки.

Для визначення значення функції напружень на контурі та поза контуром використовують балочну аналогію. За цією аналогією значення функції на контурі приймають як згинаючій момент у точці балки, утвореної з відповідної межі контура пластинки. Навантаження балки беруть тим самим, що й на контурі. Для повного визначення значень φ на контурі та поза контуром розглядають контур пластинки як статично визначну раму. За умови симетрії навантаження в такій рамі можна ставити шарніри в усіх чотирьох кутах (рис. 3). У такому випадку кожен стержень рами працює на згин як окрема балка на двох шарнірних опорах, отже отримуємо

$$\varphi_в = M_в; \quad \varphi_l = M_l. \qquad (6)$$

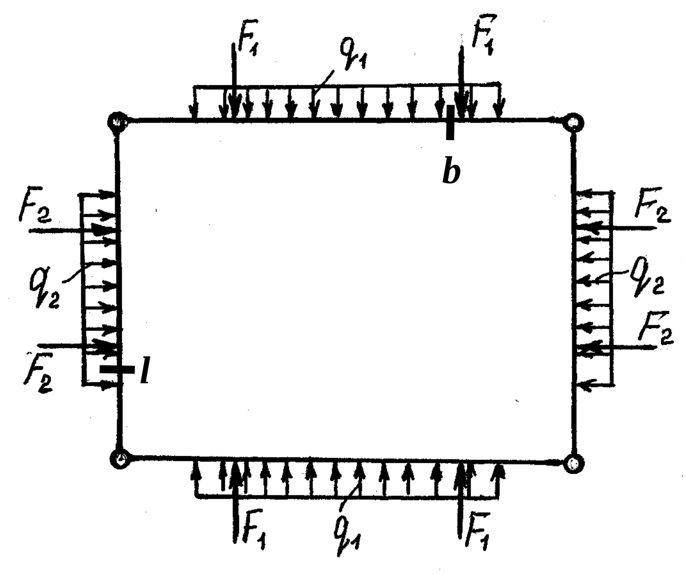

Рис. 3

Для визначення функцій поза контуром використовують співвідношення, які зокрема для точок a та k (рис. 2) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_c + 2hN_в, \\ \varphi_к &= \varphi_m + 2hN_l. \end{aligned} \tag{7}$$

У формулах (6), (7) $M_в$, M_l та $N_в$, N_l є значеннями відповідно згинаючих моментів та поздовжніх сил у перерізах $в$, l рами (рис. 3).

Після підстановки співвідношень (6), (7) у рівняння (5) одержують повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функції напружень у внутрішніх точках контура пластинки.

Після розв'язання цієї системи рівнянь напруження обчислюють за формулами (3), записаними у скінченних різницях. Зокрема, в нашому випадку для точки з номером 0 маємо:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_0 &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0 = (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4)/h^2; \\ (\sigma_y)_0 &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 = (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3)/h^2; \\ (\tau_{xy})_0 &= -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)_0 = -(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12})/(4h^2). \end{aligned} \tag{8}$$

4. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Побудувати епюри нормальних і дотичних напружень у пластині, наведеній на рис. 1 при вихідних даних табл. 2.

Таблиця 2

a, м	$a:в$	c/a	$l/в$	q_1, кН/м^2	q_2, кН/м^2	d/a	$f/в$	F_1, кН/м	F_2, кН/м
2,5	5:4	0,22	0	8	4	0,3	0,5	10	3

Розв’язання.

Схема пластинки і навантаження відповідно даних табл. 2 наведена на рис. 4.

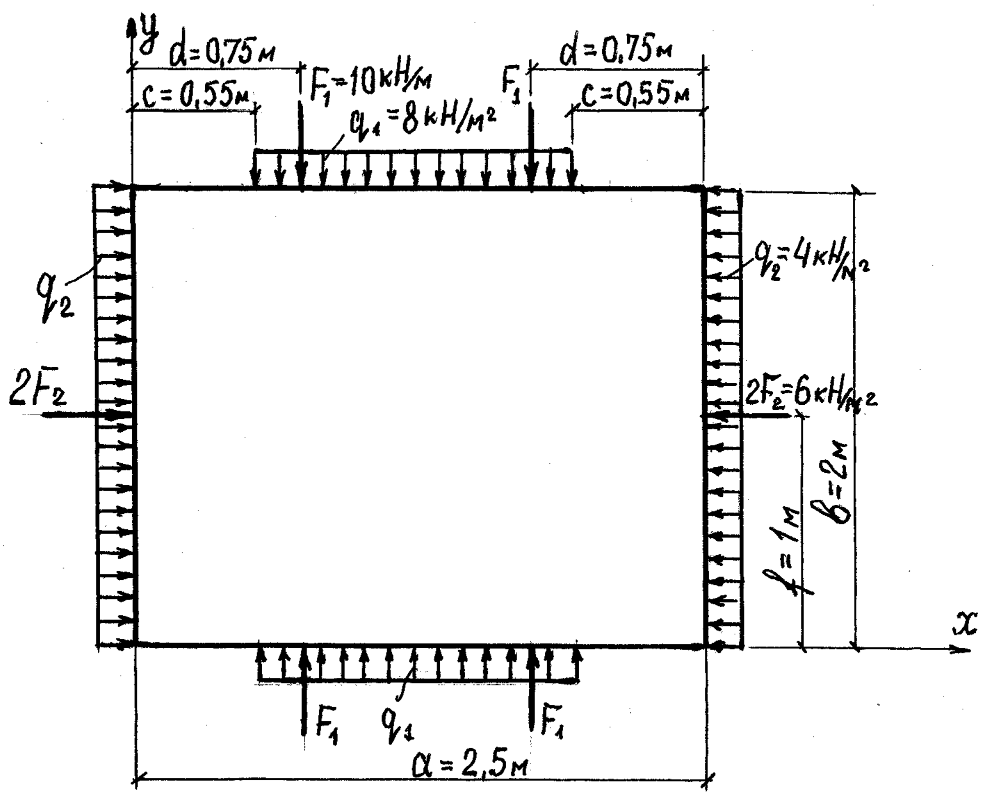

Рис. 4

Відповідно до завдання ($a : в =$ 5:4) розбиваємо пластинку сіткою з однаковим кроком $h = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$ м уздовж осей x та y (рис. 5). Пунктиром доповнюємо сітку на один крок від контуру. Вузли сітки нумеруємо, враховуючи наявність двох осей симетрії.

Враховуючи симетрію, складаємо рівняння (5) для кожної внутрішньої точки у чверті контура за схемою, наведеною на рис. 6. Ця схема показує, з яким множником необхідно брати значення функції φ для точки, відповідно розташованої відносно точки, в якій записується рівняння (5).

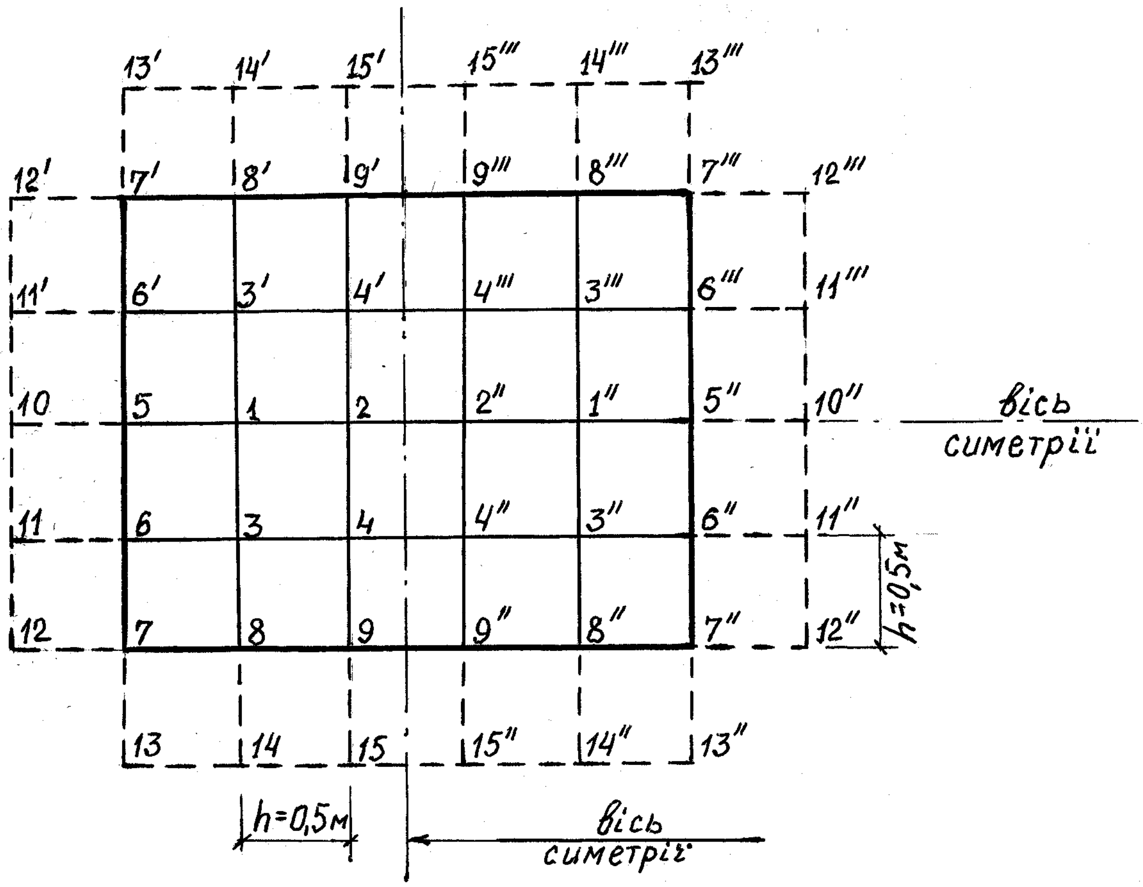

Рис. 5

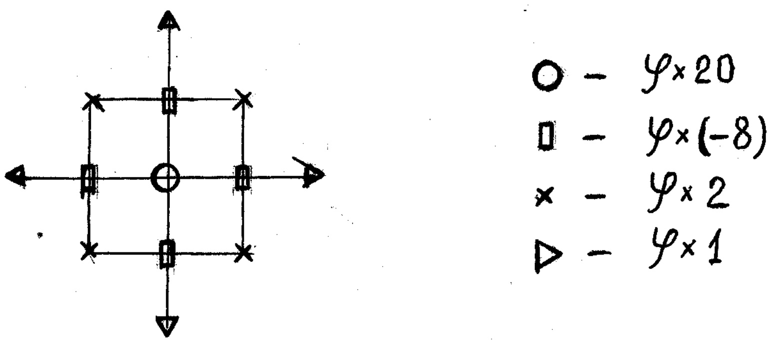

Рис. 6

Отже маємо:

для т. 1:
$$20\varphi_1 - 8(\varphi_2 + \varphi_{3'} + \varphi_5 + \varphi_3) + 2(\varphi_{4'} + \varphi_{6'} + \varphi_6 + \varphi_4) +$$
$$+ (\varphi_{2''} + \varphi_{8'} + \varphi_{10} + \varphi_8) = 0;$$

для т. 2:
$$20\varphi_2 - 8(\varphi_{2''} + \varphi_{4'} + \varphi_1 + \varphi_4) + 2(\varphi_{4'''} + \varphi_{3'} + \varphi_3 + \varphi_{4''}) +$$
$$+ (\varphi_{1''} + \varphi_{9'} + \varphi_5 + \varphi_9) = 0;$$

для т. 3: $20\varphi_3 - 8(\varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_8) + 2(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9) +$
$+ (\varphi_{4''} + \varphi_{3'} + \varphi_{11} + \varphi_{14}) = 0;$

для т. 4: $20\varphi_4 - 8(\varphi_{4''} + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_9) + 2(\varphi_{2''} + \varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_{9''}) +$
$+ (\varphi_{3''} + \varphi_{4'} + \varphi_6 + \varphi_{15}) = 0.$

Розкриваємо дужки і, враховуючи, що в симетричних точках значення функції напружень однакові ($\varphi_i = \varphi_{i'} = \varphi_{i''} = \varphi_{i'''}$), одержуємо:

$$\begin{aligned}
&20\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 + \varphi_{10} = 0;\\
&-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 = 0;\\
&-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 21\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_{14} = 0;\\
&2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 13\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 + \varphi_{15} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Утворюємо раму (рис. 7) з осями, що відповідають контуру рами і будуємо для неї епюри згинаючих моментів і поздовжніх сил від заданого на контурі навантаження (рис. 8).

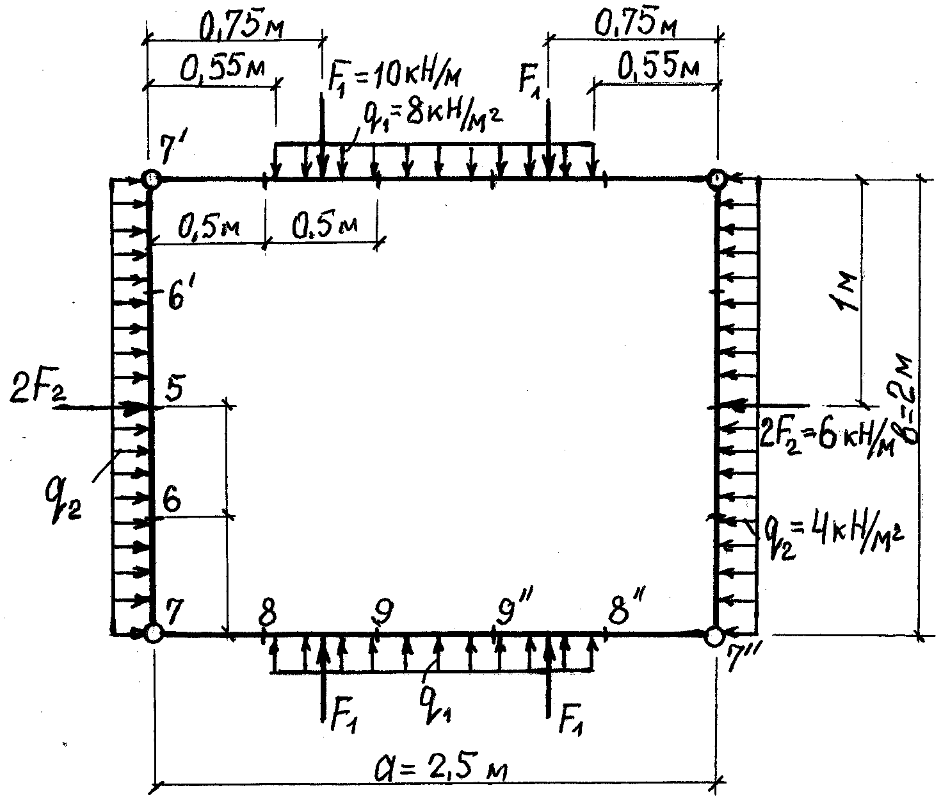

Рис. 7

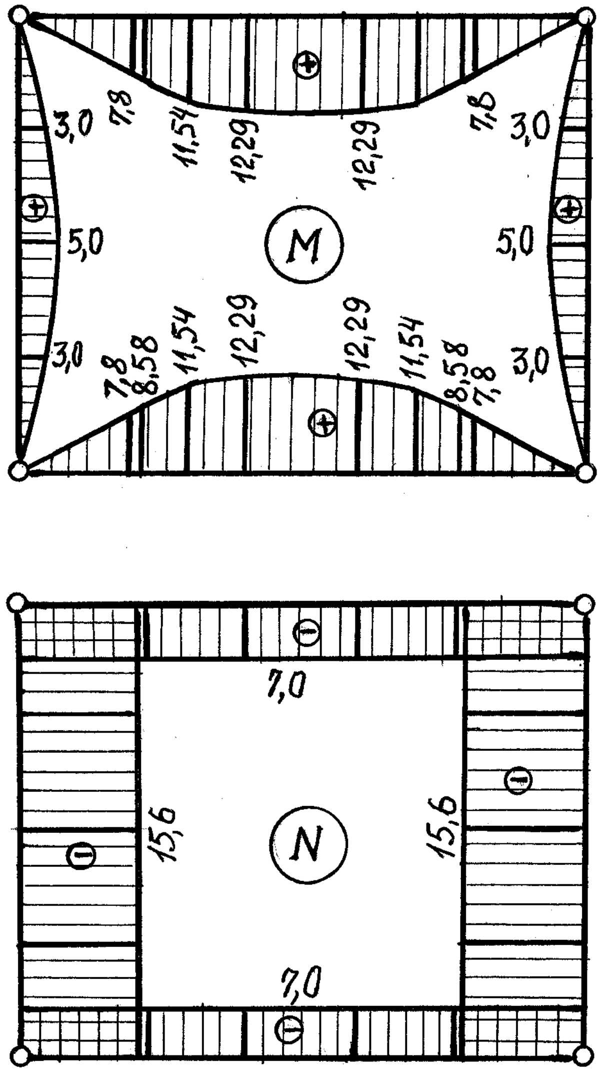

Рис. 8

Для визначення згинаючих моментів кожний стержень рами може розглядатись окремо як балка на двох шарнірних опорах (рис. 9). Поздовжні сили в стержнях рами дорівнюють відповідним реакціям балок.

Визначаємо функції напружень у точках поза контуром. Для цього використовуємо співвідношення (7):

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{10} = \varphi_1 + 2h \cdot N_5 = \varphi_1 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-15{,}6) = \varphi_1 - 15{,}6;\\
&\varphi_{11} = \varphi_3 + 2h \cdot N_6 = \varphi_3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-15{,}6) = \varphi_3 - 15{,}6;\\
&\varphi_{14} = \varphi_3 + 2h \cdot N_8 = \varphi_3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-7) = \varphi_3 - 7;\\
&\varphi_{15} = \varphi_4 + 2h \cdot N_9 = \varphi_4 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-7) = \varphi_4 - 7.
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

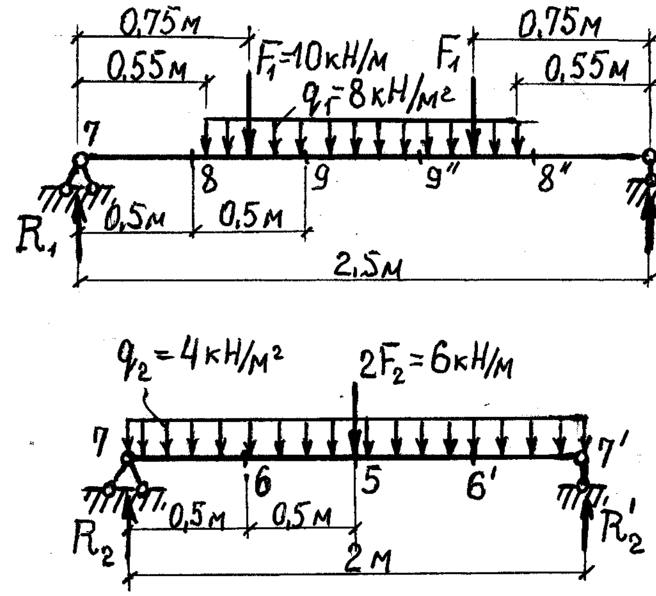

Рис. 9

Підставляючи ці співвідношення у рівняння (9), після зведення подібних одержуємо:

$$\begin{aligned} &21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 8\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_8 - 15{,}6 = 0;\\ &-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_9 = 0;\\ &-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 + 2\varphi_5 - 8\varphi_6 + 2\varphi_7 - 8\varphi_8 + 2\varphi_9 - 22{,}6 = 0;\\ &2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 + \varphi_6 + 2\varphi_8 - 6\varphi_9 - 7 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Значення функції напружень у точках на контурі визначаємо за рівностями (6):

$$\varphi_5 = M_5 = 5{,}0; \quad \varphi_6 = M_6 = 3{,}0; \quad \varphi_7 = M_7 = 0;$$

$$\varphi_8 = M_8 = 7{,}8; \quad \varphi_9 = M_9 = 12{,}29. \tag{12}$$

З урахуванням цих значень рівняння скінченних різниць набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} &21\varphi_1 - 7\varphi_2 - 16\varphi_3 + 4\varphi_4 - 28 = 0;\\ &-7\varphi_1 + 12\varphi_2 + 4\varphi_3 - 12\varphi_4 + 29{,}58 = 0;\\ &-8\varphi_1 + 2\varphi_2 + 23\varphi_3 - 7\varphi_4 - 74{,}42 = 0;\\ &2\varphi_1 - 6\varphi_2 - 7\varphi_3 + 14\varphi_4 - 62{,}14 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Розв’язуємо систему алгебраїчних рівнянь (13). З останнього рівняння виразимо φ_4:

$$\varphi_4 = -0{,}1429\varphi_1 + 0{,}4286\varphi_2 + 0{,}5\varphi_3 + 4{,}439$$

і підставимо у перші три рівняння. Після зведення подібних одержимо:

$$\begin{aligned} &20{,}43\varphi_1 - 5{,}286\varphi_2 - 14\varphi_3 - 10{,}25 = 0; \\ &-5{,}285\varphi_1 + 6{,}857\varphi_2 - 2\varphi_3 - 23{,}69 = 0; \\ &-7{,}00\varphi_1 - 1{,}000\varphi_2 + 19{,}5\varphi_3 - 105{,}5 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Далі знову виразимо φ_3 з останнього рівняння (15):

$$\varphi_3 = 0{,}3590\varphi_1 + 0{,}05128\varphi_2 + 5{,}410$$

та підставимо в перші два, і т.д.:

$$\begin{aligned} &15{,}40\varphi_1 - 6{,}004\varphi_2 - 85{,}99 = 0; \\ &-6{,}003\varphi_1 + 6{,}754\varphi_2 - 34{,}51 = 0; \\ &\varphi_2 = 0{,}8888\varphi_1 + 5{,}110; \\ &10{,}06\varphi_1 - 116{,}7 = 0; \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = 11{,}60; \qquad \varphi_2 = 15{,}42; \qquad \varphi_3 = 10{,}37; \qquad \varphi_4 = 14{,}58.$$

Перевіряємо одержане рішення підстановкою у рівняння (14):

$$\begin{aligned} &21 \cdot 11{,}60 - 7 \cdot 15{,}42 - 16 \cdot 10{,}37 + 4 \cdot 14{,}58 - 28 = 301{,}9 - 301{,}9 = 0; \\ &-7 \cdot 11{,}60 + 12 \cdot 15{,}42 + 4 \cdot 10{,}37 - 12 \cdot 14{,}58 + 29{,}58 = 256{,}1 - 256{,}2 \approx 0; \\ &-8 \cdot 11{,}60 + 2 \cdot 15{,}42 + 23 \cdot 10{,}37 - 7 \cdot 14{,}58 - 74{,}42 = 269{,}4 - 269{,}3 \approx 0; \\ &2 \cdot 11{,}60 - 6 \cdot 15{,}42 - 7 \cdot 10{,}37 + 14 \cdot 14{,}58 - 62{,}14 = 227{,}3 - 227{,}3 = 0. \end{aligned}$$

Далі обчислюємо значення φ у точках поза контуром, використовуючи формули (10):

$$\varphi_{10} = 11{,}60 - 15{,}6 = -4{,}0; \qquad \varphi_{11} = 10{,}37 - 15{,}6 = -5{,}23;$$

$$\varphi_{14} = 10{,}37 - 7 = 3{,}37; \qquad \varphi_{15} = 14{,}58 - 7 = 7{,}58;$$

$$\varphi_{13} = \varphi_6 + 2hN_7 = 3 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-7) = -4;$$

$$\varphi_{12} = \varphi_8 + 2hN_7 = 7{,}8 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot (-15{,}6) = -7{,}8.$$

Тепер можна перейти до визначення нормальних і дотичних напружень за формулами (8):

$$(\sigma_x)_1 = (\varphi_{3'} - 2\varphi_1 + \varphi_3)/h^2 = (10{,}37 - 2 \cdot 11{,}6 + 10{,}37) \cdot 4 = -9{,}84;$$

$$(\sigma_x)_2 = (\varphi_{4'} - 2\varphi_2 + \varphi_4)/h^2 = (14{,}58 - 2 \cdot 15{,}42 + 14{,}58) \cdot 4 = -6{,}72;$$

$$(\sigma_x)_3 = (\varphi_1 - 2\varphi_3 + \varphi_8)/h^2 = (11{,}6 - 2\cdot 10{,}37 + 7{,}8)\cdot 4 = -5{,}36;$$

$$(\sigma_x)_4 = (\varphi_2 - 2\varphi_4 + \varphi_9)/h^2 = (15{,}42 - 2\cdot 14{,}58 + 12{,}29)\cdot 4 = -5{,}80;$$

$$(\sigma_x)_5 = (\varphi_{6'} - 2\varphi_5 + \varphi_6)/h^2 = (3 - 2\cdot 5 + 3)\cdot 4 = -16{,}0;$$

$$(\sigma_x)_6 = (\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7)/h^2 = (5 - 2\cdot 3 + 0)\cdot 4 = -4{,}0;$$

$$(\sigma_x)_7 = (\varphi_6 - 2\varphi_7 + \varphi_{13})/h^2 = (3 - 2\cdot 0 - 4)\cdot 4 = -4{,}0;$$

$$(\sigma_x)_8 = (\varphi_3 - 2\varphi_8 + \varphi_{14})/h^2 = (10{,}37 - 2\cdot 7{,}8 + 3{,}37)\cdot 4 = -7{,}44;$$

$$(\sigma_x)_9 = (\varphi_4 - 2\varphi_9 + \varphi_{15})/h^2 = (14{,}58 - 2\cdot 12{,}29 + 7{,}58)\cdot 4 = -9{,}68.$$

$$(\sigma_y)_1 = (\varphi_5 - 2\varphi_1 + \varphi_2)/h^2 = (5 - 2\cdot 11{,}6 + 15{,}42)\cdot 4 = -11{,}12;$$

$$(\sigma_y)_2 = (\varphi_{2''} - 2\varphi_2 + \varphi_1)/h^2 = (15{,}42 - 2\cdot 15{,}42 + 11{,}6)\cdot 4 = -15{,}28;$$

$$(\sigma_y)_3 = (\varphi_4 - 2\varphi_3 + \varphi_6)/h^2 = (14{,}58 - 2\cdot 10{,}37 + 3)\cdot 4 = -12{,}64;$$

$$(\sigma_y)_4 = (\varphi_{4''} - 2\varphi_4 + \varphi_3)/h^2 = (14{,}58 - 2\cdot 14{,}58 + 10{,}37)\cdot 4 = -16{,}84;$$

$$(\sigma_y)_5 = (\varphi_1 - 2\varphi_5 + \varphi_{10})/h^2 = (11{,}6 - 2\cdot 5 - 4)\cdot 4 = -9{,}6;$$

$$(\sigma_y)_6 = (\varphi_3 - 2\varphi_6 + \varphi_{11})/h^2 = (10{,}37 - 2\cdot 3 - 5{,}23)\cdot 4 = -3{,}44;$$

$$(\sigma_y)_7 = (\varphi_8 - 2\varphi_7 + \varphi_{12})/h^2 = (7{,}8 - 2\cdot 0 - 7{,}8)\cdot 4 = 0;$$

$$(\sigma_y)_8 = (\varphi_9 - 2\varphi_8 + \varphi_7)/h^2 = (12{,}29 - 2\cdot 7{,}8 + 0)\cdot 4 = -13{,}24;$$

$$(\sigma_y)_9 = (\varphi_{9''} - 2\varphi_9 + \varphi_8)/h^2 = (12{,}29 - 2\cdot 12{,}29 + 7{,}58)\cdot 4 = -17{,}96.$$

$$(\tau_{xy})_1 = (\varphi_{4'} - \varphi_{6'} + \varphi_6 - \varphi_4)/(4h^2) = 0;$$

$$(\tau_{xy})_2 = (\varphi_{4'''} - \varphi_{3'} + \varphi_3 - \varphi_{4''})/(4h^2) = 0;$$

$$(\tau_{xy})_3 = (\varphi_2 - \varphi_5 + \varphi_7 - \varphi_9)/(4h^2) = (15{,}42 - 5 + 0 - 12{,}29)\cdot 1 = -1{,}87;$$

$$(\tau_{xy})_4 = (\varphi_{2''} - \varphi_1 + \varphi_8 - \varphi_{9''})/(4h^2) = (15{,}42 - 11{,}6 + 7{,}8 - 12{,}29)\cdot 1 = -0{,}67.$$

Дотичні напруження на контурі дорівнюють нулю:

$$(\tau_{xy})_5 = (\tau_{xy})_6 = (\tau_{xy})_7 = (\tau_{xy})_8 = (\tau_{xy})_9 = 0 .$$

Виходячи з одержаних значень, на рис. 10 побудовані епюри напружень σ_x, σ_y, τ_{xy}. Слід зауважити, що нормальні напруження повинні задовольняти умовам симетрії, а дотичні напруження є кососиметричними. Кососиметрична функція для симетричних точок має протилежні за знаком значення.

Аналізуючи розподіл нормальних напружень, відзначимо, що вони вирівнюються при віддаленні від країв пластинки. Особливо це помітно на епюрі σ_x. Так, на краї $x = 0$ різниця між напруженнями становить $16 - 4 = 12$ кПа, а поблизу середини $9{,}68 - 5{,}8 = 3{,}88$ кПа. Це явище відповідає відомому принципу Сен-Венана.

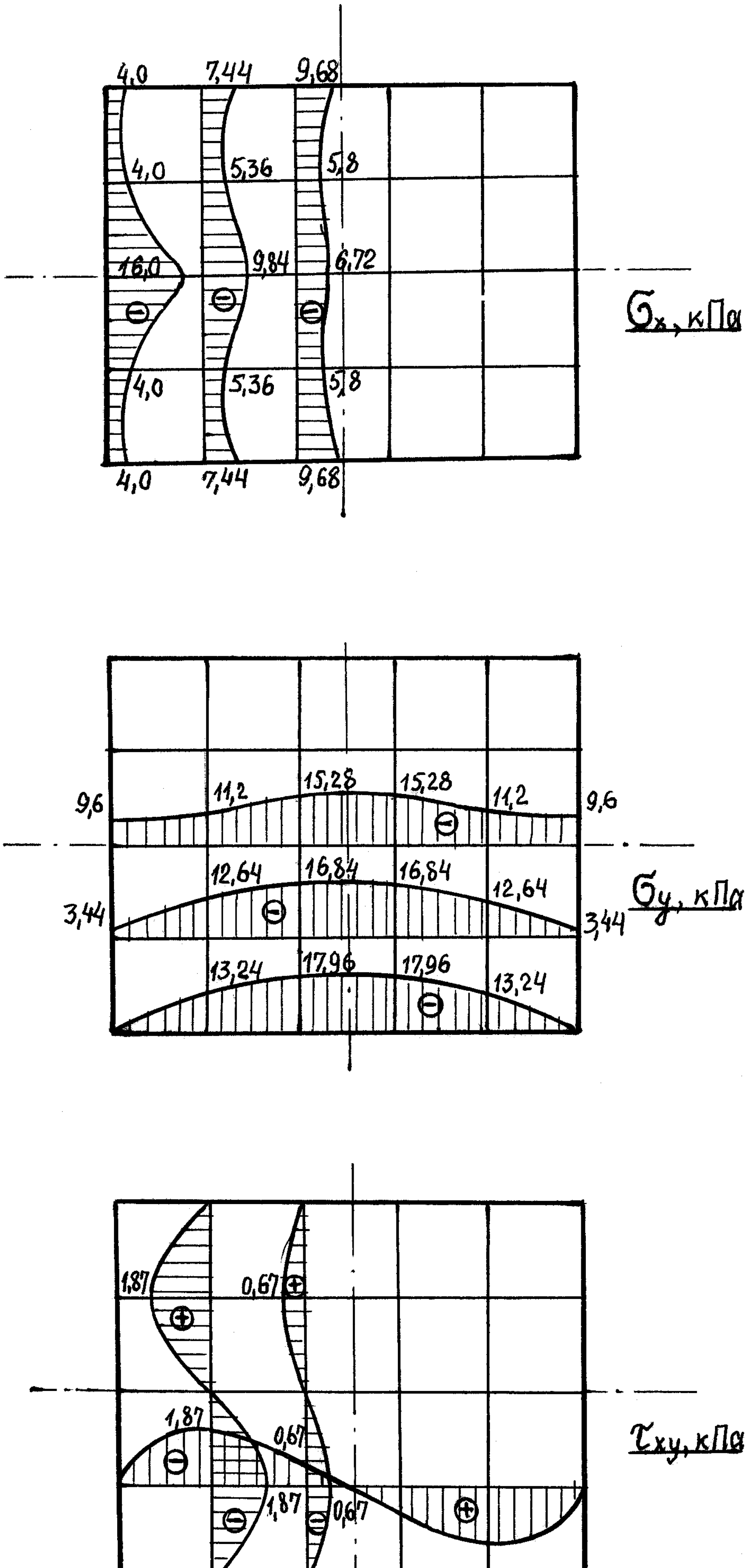
4,0
7,44
9,68
4,0
5,36
5,8
16,0
9,84
6,72
4,0
5,36
5,8
4,0
7,44
9,68
σx, кПа
9,6
11,2
15,28
15,28
11,2
9,6
3,44
12,64
16,84
16,84
12,64
3,44
13,24
17,96
17,96
13,24
σy, кПа
1,87
0,67
1,87
0,67
1,87
0,67
τxy, кПа

Рис. 10

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
2. В.Г.Рекач. Руководство к решению задач теории упругости. – М.: Высш. шк., 1977. – 216 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

до розрахунково-графічної роботи з опору матеріалів (спецкурс)
„Розв'язання плоскої задачі методом скінченних різниць"
(для студентів 2 курсу спец.8.092101 «Промислове і цивільне будівництво»)

Укладач: Микола Андрійович Засядько

Відповідальний за випуск: Л.С.Андрієвська

Редактор М.З.Аляб'єв

План 2005, поз. 213

Підп. до друку 24.03.05	Формат 60*84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк. арк. 0,7	Обл.-вид. арк. 1,2
Тираж 100 прим.	Замовл. №	Ціна договірна

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12
Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ