С.О. Станішевський
А.В. Якунін
В.С. Ситникова

В И Щ А МАТЕМАТИКА

д л я е л е к т р о т е х н і к і в

М О Д У Л Ь 1

Аналітична геометрія на площині
Вступ до математичного аналізу

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Лінійна та векторна алгебра
Площина та пряма у просторі
Комплексні числа та функції

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**С.О. Станішевський, А.В. Якунін,
В.С. Ситникова**

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для електротехніків

Модуль 1:

**Аналітична геометрія на площині.
Вступ до математичного аналізу.
Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра.
Площина та пряма у просторі.
Комплексні числа та функції**

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник*

Харків – ХНАМГ – 2009

УДК 517.2+517.51
ББК 22.1

Станішевський С.О., Якунін А.В., Ситникова В.С.
Вища математика для електротехніків. Модуль 1: Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції: Навчальний посібник. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 308 с.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України, лист № 1.4/18-Г-129 від 10.01.2009 р.

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають першому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей, а також може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Рецензенти:

В.Д. Гордевський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);

О.М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);

Ю.В. Куліш, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики (Українська державна академія залізничного транспорту);

В.Г. Моторіна, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики (Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди)

ISBN 978-966-695-123-9

Передмова

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають першому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до електротехнічних задач. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Основою даного посібника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті електропостачання і освітлення міст та на факультеті інженерної екології міст Харківської національної академії міського господарства.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей, а також може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Змістовий модуль 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Аналітичною геометрією називається розділ вищої математики, в якому вивчаються геометричні об’єкти засобами алгебри на основі методу координат.

Математичний аналіз – це сукупність розділів вищої математики, в яких вивчаються властивості змінних величин на основі понять функції, граничного переходу та неперервності.

1.1. Декартова прямокутна система координат на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найбільш поширеною на практиці є декартова прямокутна система координат.

1.1.1. Координатна пряма. Числові проміжки. Модуль дійсного числа

Напрямлена пряма, на якій задано початок відліку O і масштаб $OE = 1$, називається ***координатною прямою*** (***віссю***) (рис. 1).

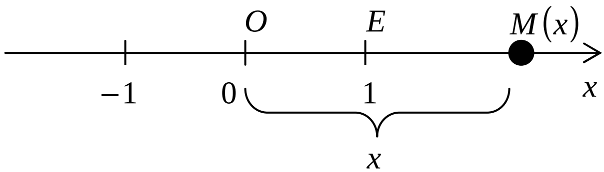


Рис. 1

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Враховуючи таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел R: $R=(-\infty;+\infty)$.

Основні ***числові проміжки*** показані на рис. 2:

$[a;b]$ – ***відрізок***; $[a;b)$, $(a;b]$, $(-\infty;a]$, $[a;+\infty)$ – ***півінтервали***; $(a;b)$, $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ – ***інтервали***, $a<b$.

Проміжки $[a;b]$; $[a;b)$, $(a;b]$, $(a;b)$ називаються ***скінченними***, а всі інші – ***нескінченними***. Числа a і b – їхні ***кінці***, $d=b-a$ – ***довжина***.

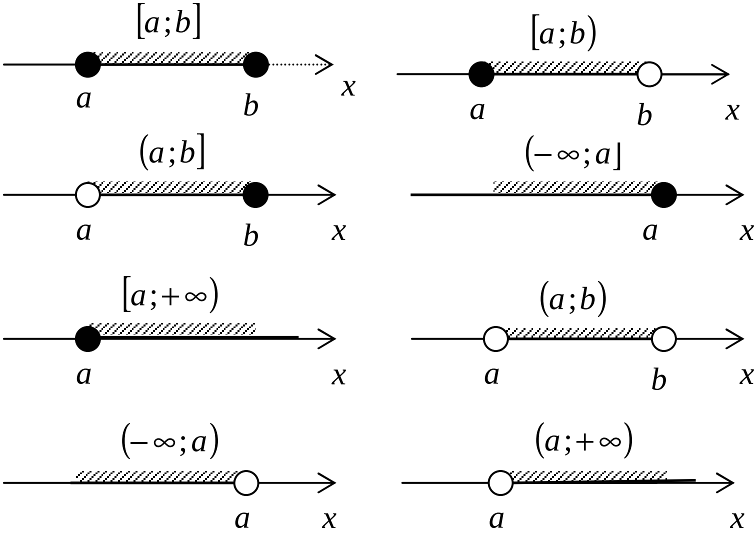


Рис. 2

Модулем (***абсолютною величиною***) дійсного числа x називається невід'ємне число, яке позначається $|x|$ і визначається формулою

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Модуль дійсного числа x дорівнює відстані відповідної точки $M(x)$ від початку відліку O (***геометричний зміст*** модуля).

Відстань між довільними двома точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1| .$$

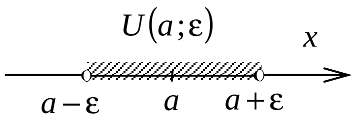


Рис. 3

Інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ називається ε***-околом числа*** a і позначається $U(a;\varepsilon)$, де ε – довільне додатне число, $\varepsilon > 0$ (рис. 3).

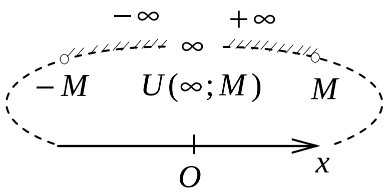


Рис. 4

<u>Зауваження</u>. Координатну пряму Ox умовно можна вважати замкненою в нескінченно віддаленій точці ∞. Тому для довільного додатного числа M, $M > 0$, розглядають $U(\infty; M) = \{x \mid |x| > M\}$ – M ***-окіл символу нескінченності*** ∞ (рис. 4).

1.1.2. Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним ***початком*** O утворюють ***декартову прямокутну систему координат на площині*** (рис. 5). Ox називається ***віссю абсцис***, а Oy – ***віссю ординат***. Сукупність прямих, що перпендикулярні координатним осям, утворює ***координатну сітку*** на координатній площині Oxy. Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x; y)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***).

З прямокутного ΔM_1NM_2 (рис. 6) за теоремою Піфагора випливає, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

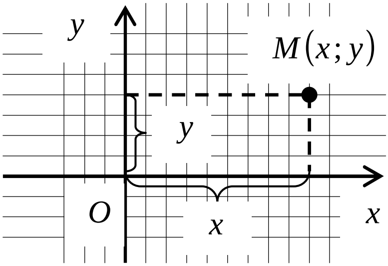


Рис. 5

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M / MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2, починаючи від точки M_1 (рис. 7). З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1NM \sim \Delta MPM_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{PM_2} = \frac{M_1N}{MP} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \ ; \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \ .$$

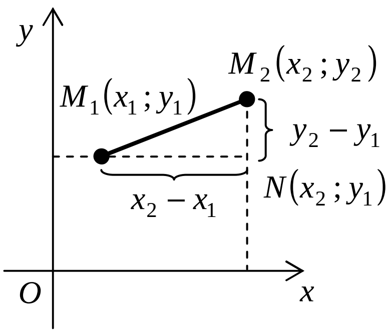


Рис. 6

Звідси ***координати точки*** $M(x, y)$***, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні***, обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \ ;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \ .$$

Зауваження 1. Якщо точка M лежить між точками M_1 і M_2, то $\lambda > 0$ (***ділення внутрішнім способом***); якщо точка M не належить відрізку M_1M_2, то $\lambda < 0$ (***ділення зовнішнім способом***).

Зауваження 2. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \;; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \;.$$

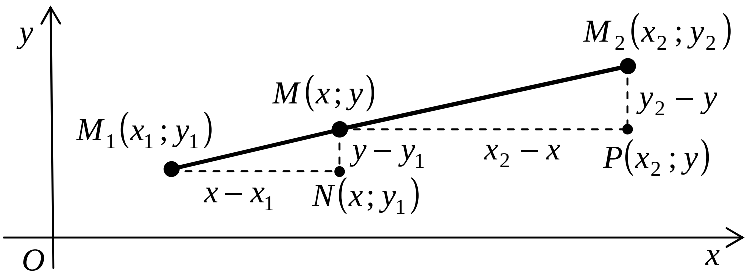


Рис. 7

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-3;4)$, $B(7;-2)$, $C(5;6)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти: а) довжину медіани AM; б) точку E перетину медіан.

□ M – середина сторони BC:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+5}{2} = 6 \;; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2 \;; \quad M(6;\, 2) \;.$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-(-3))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85} \;.$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$$\lambda = AE/EM = 2/1 = 2 \;.$$

Тоді E: $\quad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-3 + 2\cdot 6}{1+2} = 3 \;;$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot 2}{1+2} = 2\frac{2}{3} \;; \quad E\left(3;\, 2\frac{2}{3}\right) . \;\blacksquare$$

1.2. Пряма на площині. Основні типи рівняння прямої

1.2.1. Рівняння з двома змінними як рівняння лінії

Співвідношення

$$F_1(x, y) = F_2(x, y)$$

називається ***рівнянням з двома змінними***. Його можна подати у ***стандартному вигляді***

$$F(x, y) = 0 .$$

Тут $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ і $F(x, y)$ – деякі вирази.

Зображення множини розв'язків даного рівняння на координатній площині Oxy називається ***графіком*** цього рівняння.

Звичайно графіком рівняння служить деяка лінія. Наприклад, а) графіком рівняння $x^2 + y^2 = 1$ є коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $R = 1$ (***дійсна лінія***); б) графіком рівняння $x^2 + y^2 = 0$ є одна точка – початок координат $O(0;0)$ (***вироджена лінія***); в) рівняння $x^2 + y^2 = -1$ ніякого графіка не має (***уявна лінія***).

<u>Зауваження 1</u>. Вигляд рівняння лінії залежить як від самої лінії, так і від вибору системи координат.

<u>Зауваження 2</u>. Говорять, що лінія ***задана неявно***, якщо її рівняння має вигляд $F(x, y) = 0$ або $F_1(x, y) = F_2(x, y)$. Якщо рівняння лінії розв'язане відносно змінної y, то говорять, що лінія ***задана явно*** рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз. Лінія може задаватись системою рівнянь $x = x(t)$ і $y = y(t)$, де t – допоміжна змінна (параметр), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази. Тоді говорять, що лінія ***задана параметрично***. Наприклад, траєкторія руху матеріальної точки в механіці часто задається в параметричній формі, при цьому роль параметра t відіграє час.

<u>Правило 1</u>. *Щоб встановити, чи лежить указана точка* $M_0(x_0, y_0)$ *на даній лінії* l: $F(x, y) = 0$, *треба перевірити, чи*

задовольняють координати точки рівняння лінії:

$$F(x_0, y_0) = 0 \iff M_0 \in l \; ; \quad F(x_0, y_0) \neq 0 \iff M_0 \notin l \, .$$

<u>Правило 2</u>. *Щоб встановити, чи перетинаються дві дані лінії* $l_1 \colon F_1(x, y) = 0$, $l_2 \colon F_2(x, y) = 0$ *і знайти точки перетину (спільні точки), треба скласти систему рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

і розв'язати її.

<u>Правило 3</u>. *Щоб скласти рівняння даної лінії треба:*

1) *ввести систему координат;*

2) *знайти співвідношення між координатами довільної (поточної, бігучої) точки* $M(x, y)$ *цієї лінії та відомими сталими величинами, що визначають саме цю лінію, на основі характеристичної властивості даної лінії;*

3) *за допомогою рівносильних перетворень звести одержане рівняння до найбільш простого вигляду*.

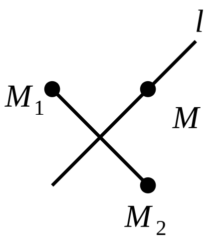


Рис. 8

<u>Зауваження 3</u>. Тип лінії визначають, зводячи її рівняння до відповідного стандартного вигляду.

<u>Приклад</u>. Скласти рівняння серединного перпендикуляра l до відрізка M_1M_2, де $M_1(-3; 4)$, $M_2(3; -1)$ (рис. 8).

□ Довільна точка $M(x, y)$ шуканої лінії рівновіддалена від кінців відрізка M_1M_2: $M_1M = M_2M$;

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \; ;$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2} \quad \Big| \uparrow 2 \; ;$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \; ;$$

$l \colon \quad 12x - 10y + 15 = 0$ – пряма лінія. ■

1.2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай ***похила пряма*** l утворює кут α з віссю Ox і перетинає вісь Oy у точці $B(0;\, b)$ (рис. 9). Тангенс кута нахилу α називають ***кутовим коефіцієнтом*** k прямої l: $k = tg\ \alpha$. Число b називають ***початковою ординатою*** прямої l.

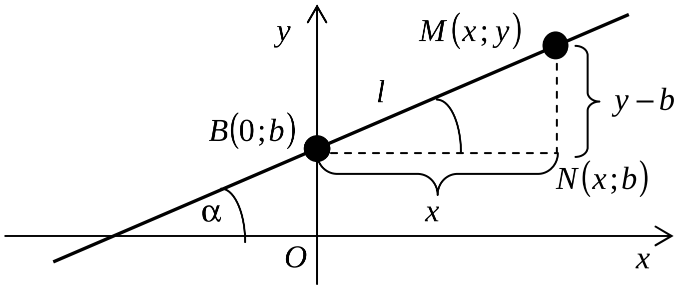


Рис. 9

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої l. У прямокутному ΔBNM $\angle MBN = \alpha$. Тоді

$$\frac{NM}{BN} = tg\ \angle MBN\ ; \quad \frac{y-b}{x} = tg\ \alpha = k\ ; \quad y - b = kx\ .$$

Звідси маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$y = kx + b\ .$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі Ox (***горизонтальна***).

<u>Зауваження 2</u>. Якщо пряма паралельна осі Oy $(\alpha = 90^\circ)$, то її кутовий коефіцієнт не існує $(k = tg\ 90^\circ = \infty)$, отже її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\, 0)$ з віссю Ox.

<u>Приклад</u>. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -3x$; в) $y = 2$; г) $x = -3$.
(Розв'язати самостійно).

1.2.3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k. Тоді для прямої l маємо

$$y = kx + b \;;\quad M_0(x_0, y_0) \in l \;\Rightarrow\; y_0 = kx_0 + b \;;$$

$$b = y_0 - kx_0 \;;\qquad y = kx + y_0 - kx_0 \;.$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку***

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Зауваження. ***Пучок прямих*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ задається сукупністю рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} y - y_0 = k(x - x_0),\ k \in (-\infty; +\infty) \\ \qquad\qquad x = x_0 \;. \end{array}\right.$$

Приклад. Написати рівняння і побудувати пряму, що належить пучку з центром у точці $M_1(-3; 1)$, якщо: а) пряма паралельна осі Ox; б) пряма паралельна осі Oy; в) пряма нахилена до осі Ox під кутом $\alpha = 60^\circ$. (Розв'язати самостійно).

1.2.4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k(x - x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \;\Rightarrow\; y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \;;$$

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ ;\quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)\ .$$

Звідси маємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ .$$

<u>Приклад</u>. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(1;-2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-1)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти рівняння бісектриси AL.

□ $$AB=\sqrt{(-5-1)^2+(1-(-2))^2}=3\sqrt{5}\ ;$$

$$AC==\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{5}\ .$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda=\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=3\ .$$

Тоді

$$L:\quad x=\frac{-5+3\cdot 3}{1+3}=1;\quad y=\frac{1+3\cdot(-1)}{1+3}=-\frac{1}{2};\quad L\left(1;-\frac{1}{2}\right);$$

$$AL:\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ ;\quad \frac{y-(-1)}{-1/2-(-1)}=\frac{x-1}{1-1}\ ;\quad x=1\,.\ ■$$

1.2.5. Загальне рівняння прямої та його окремі випадки

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеня. Навпаки, кожне рівняння першого степеня є рівнянням деякої прямої.

Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого степеня вигляду

$$Ax+By+C=0\ ,$$

де A, B і C – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зауваження 1. Загальне рівняння прямої записується з точністю до сталого множника. По можливості його зводять до вигляду, де всі коефіцієнти – цілі числа, причому перший ненульовий коефіцієнт додатний.

Зауваження 2. У залежності від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю Ox;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю Oy.

Приклад 1. У трикутнику ABC задано рівняння сторін AB: $3x - 4y - 2 = 0$ і AC: $2x + 5y - 9 = 0$. Знайти координати вершини A. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $3x - 4y + 12 = 0$ (знайти точки перетину з осями координат); б) $x = 2$ (знайти точку перетину з віссю абсцис); в) $y = -4$ (знайти точку перетину з віссю ординат).

(Розв'язати самостійно).

1.2.6. Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай похила пряма l відтинає на осях координат Ox і Oy відповідно відрізки a і b, тобто перетинає осі координат у двох заданих точках $A(a;\,0)$ і $B(0;\,b)$ (рис. 10). Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, отримаємо

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}\ ; \quad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1\ .$$

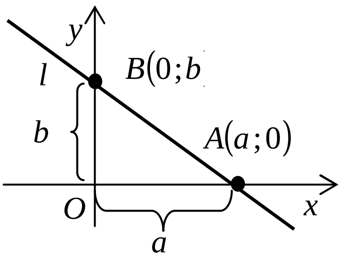


Рис. 10

Звідси маємо ***рівняння прямої у відрізках на осях***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ .$$

<u>Зауваження</u>. У відрізках на осях не можна подати рівняння прямих, які паралельні осям координат.

<u>Приклад</u>. Пряма l задана своїм загальним рівнянням $3x-4y-8=0$. Записати її рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

□ а) $3x-4y-8=0;\quad -4y=-3x+8$;

$$y=\frac{3}{4}x-2\,;\quad k=\frac{3}{4}\ ;\quad b=-2\ ;$$

б) $3x-4y-8=0;\ 3x-4y=8$;

$$\frac{3x}{8}-\frac{4y}{8}=1\ ;\quad \frac{x}{8/3}+\frac{y}{-2}=1\ ;\quad a=\frac{8}{3}\ ;\quad b=-2\ .\ ■$$

1.2.7. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рис. 11, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута φ між ними маємо

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1\ ;\qquad tg\ \varphi=\frac{tg\ \alpha_2-tg\ \alpha_1}{1+tg\ \alpha_1\cdot tg\ \alpha_2}\ .$$

Оскільки $tg\ \alpha_1=k_1$; $tg\ \alpha_2=k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\ .$$

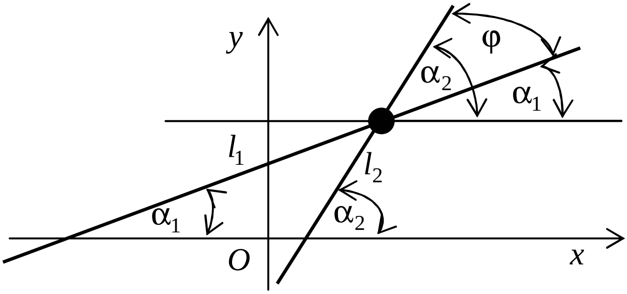


Рис. 11

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\ \varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\ \varphi \to \infty$. З одержаної формули випливає, що

1) ***необхідною і достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 = k_2$;

2) ***необхідною і достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 k_2 = -1$.

Зауваження. Кут між прямими φ розуміється як кут повороту. ***Гострий кут*** між прямими знаходиться за формулою

$$\varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|\ .$$

Приклад. У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2; 3)$. Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти CN; в) рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, де M – середина сторони AC.

□ а) Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB}=-3\,;\ k_{AC}=2\,;\ \ \varphi_г=arctg\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=arctg\left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right|=$$

$$=arctg\,1=\pi/4\ .$$

$=arctg\,1=\pi/4$. Тоді $\angle A=\pi-\varphi_г=\pi-\pi/4=3\pi/4$.

б) $CN\perp AB\ \Leftrightarrow\ k_1k_2=-1\ ;\ k_{AB}=-3\ ;$

$k_{CN}=-1/k_{AB}=1/3$; $C\in CN$; $CN:\quad y-y_0=k(x-x_0)$;

$$y-3=\frac{1}{3}(x-2)\ ;\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\ .$$

в) $A=AB\cap AC$: $\begin{cases}y=-3x+5\\ y=2x-10\end{cases}$; $A(3;-4)$.

M – середина сторони AC: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2}$;

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-4+3}{2}=-\frac{1}{2};\ \ M(5/2;-1/2)\ .$$

$ML\parallel AB$: $k_{ML}=k_{AB}=-3$; $M\in ML$; ML:

$y-y_0=k(x-x_0)$; $y+1/2=-3(x-5/2)$; $y=-3x+7$. ■

1.2.8. Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0(x_0\,,y_0)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ (рис. 12). ***Відстанню** d **від точки до прямої*** називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

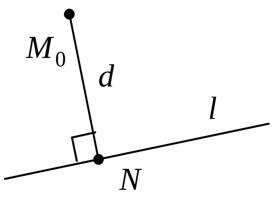


Рис. 12

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_\perp$. Склавши і розв'язавши систему рівнянь прямих l і $l_\perp$, одержимо точку перетину N. Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. В результаті (проробіть указані операції самостійно) одержимо формулу для ***відстані*** d ***від точки до прямої***

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Приклад. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/4 - y/3 = 1$ і координати вершини $C(-2; -5)$. Знайти довжину висоти CN.

□ Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду: $x/4 - y/3 = 1$; $3x - 4y = 12$; $3x - 4y - 12 = 0$.

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB:

$$CN = |3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-5) - 12| \Big/ \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 2/5 . \ \blacksquare$$

1.3. Лінії другого порядку

1.3.1. Загальне рівняння лінії другого порядку

Пряма – це єдина лінія першого порядку. Її загальним рівнянням є алгебраїчне рівняння першого степеня.

Лінії другого порядку відповідає рівняння другого степеня, загальний вигляд якого

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

де A, B, C, D, E, F – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B і C відмінне від нуля, тобто

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 .$$

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола***.

Зауваження. Надалі будемо розглядати тільки ***суттєво криві дійсні лінії*** другого порядку. Випадки виродження та уявні лінії вивчати не будемо.

1.3.2. Коло

Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (***центра*** кола) дорівнює заданому сталому числу r (***радіусу*** кола).

Розглянемо коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом r (рис. 13). Для довільної точки $M(x;y)$ кола:

$$MO = r\ ;\quad \sqrt{x^2+y^2} = r\ ;\quad x^2+y^2=r^2\ .$$

Одержане співвідношення

$$x^2+y^2=r^2$$

називається ***канонічним*** (найпростішим) ***рівнянням кола***.

Зауваження. Якщо центром кола служить точка $C(a;b)$, то маємо ***рівняння кола зі зміщеним центром*** (рис. 14)

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ .$$

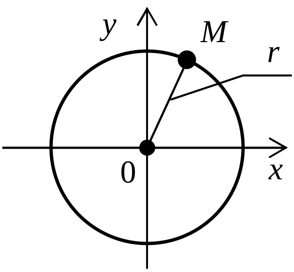


Рис. 13

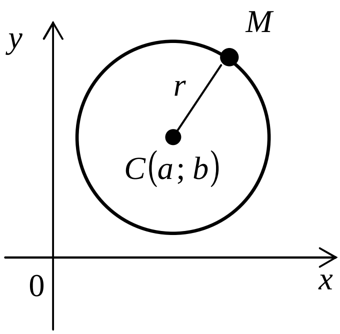


Рис. 14

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$3x^2+3y^2+6x-5y-9=0$$

є рівнянням кола. Знайти його центр $C(a;b)$ і радіус r.

□ $\quad x^2+y^2+2x-(5/3)y-3=0\ ;$

$$x^2+2x+1-1+y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-3=0\ ;$$

$$(x+1)^2+(y-5/6)^2=(13/6)^2\ ;\quad C(-1;5/6)\ ;\quad r=13/6\ .\ \blacksquare$$

Приклад 2. Дано дві точки $A(2;-3)$ і $B(-6;1)$. Скласти рівняння кола l, для якого відрізок AB служить діаметром.

□ Центром кола l є середина C діаметра AB, а радіус кола $r=AB/2$. Тоді:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2+(-6)}{2}=-2\ ;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1\ ;$$

$$C(-2;-1);\quad AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(2-(-6))^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{5}\ ;\quad r=2\sqrt{5}\ .$$

Рівняння кола $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. ■

1.3.3. Еліпс

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** еліпса) дорівнює заданому сталому числу $2a$, більшому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ еліпса (рис. 15)

$$r_1+r_2=2a\ ,$$

де $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2=2c<2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a\ .$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2=a^2-c^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{де} \quad b^2=a^2-c^2>0.$$

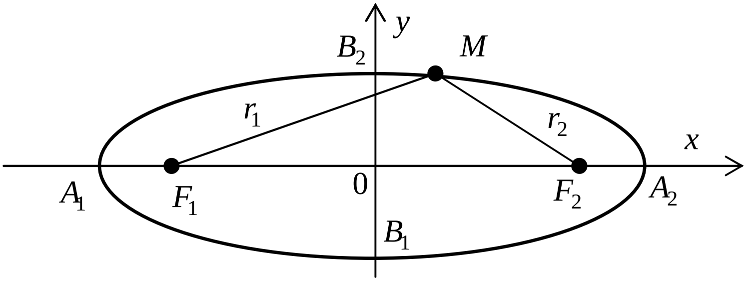


Рис. 15

Еліпс має форму овалу, який симетричний відносно ***великої осі*** $A_1A_2=2a$ і ***малої осі*** $B_1B_2=2b$, а також центрально симетричний відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** еліпса. Точки перетину з осями координат $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;\,b)$ називаються ***вершинами*** еліпса.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2=2c$ до великої осі $A_1A_2=2a$ називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається ε: $\varepsilon=c/a$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0\le\varepsilon<1$. Якщо $\varepsilon=0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a=b=r$. Чим більше значення ε, тим сильніше витягнутий еліпс вздовж великої осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x=\pm a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** еліпса. Оскільки для еліпса $\varepsilon<1$, то права директриса розміщена вертикально правіше від його правої вершини; а ліва директриса –лівіше від його лівої вершини.

Властивість директрис еліпса: *Відношення фокального радіуса* r *довільної точки еліпса до відстані* d *цієї точки до відповідного фокусу є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса* $r/d=\varepsilon$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$9x^2 + 100y^2 - 900 = 0$$

є рівнянням еліпса. Зобразити ескіз еліпса, знайшовши точки його перетину з осями координат (вершини еліпса).

□ $9x^2 + 100y^2 = 900$; $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

– еліпс, що перетинає осі координат у вершинах $A_1(-10;0)$, $A_2(10;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$.

(Ескіз еліпса зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого $b = 4\sqrt{3}$, а лівий фокус знаходиться у точці $F(-4;0)$. Знайти його ексцентриситет і написати рівняння директрис.

□ За умовою задачі $b = 4\sqrt{3}$, а половина міжфокусної відстані $c = 4$. Тоді

$$c^2 = a^2 - b^2; \ a^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = 64; \ a = 8.$$

Звідси

$x^2/36 + y^2/20 = 1$ – канонічне рівняння; $\varepsilon = 4/8 = 1/2$ – ексцентриситет; $x = \pm 8/(1/2)$; $x = \pm 16$ – директриси. ■

1.3.4. Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданому сталому числу $2a$, меншому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ гіперболи (рис. 16)

$$|r_1 - r_2| = 2a ,$$

де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right|=2a\ .$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2=c^2-a^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{ де }\ b^2=c^2-a^2>0.$$

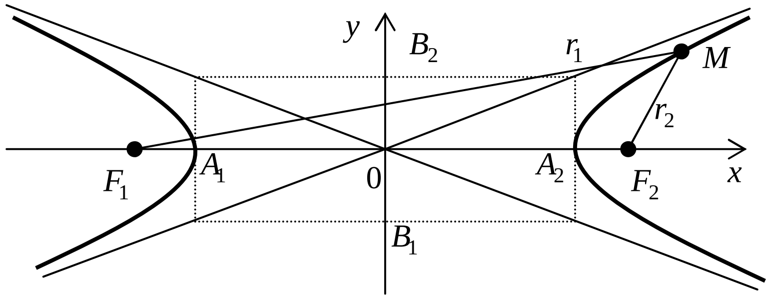


Рис. 16

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2=2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2=2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** гіперболи. Дійсні вершини $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ є точками перетину гіперболи з віссю Ox. Через уявні вершини $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі

$$y=\frac{b}{a}x\ ;\quad y=-\frac{b}{a}x$$

є ***асимптотами*** гіперболи.

Асимптотою називається пряма, що необмежено зближається з гілкою кривої на нескінченності.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2=2c$ до дійсної осі $A_1A_2=2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається ε: $\varepsilon = c/a$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи, при цьому $\varepsilon > 1$. Чим менше значення ε, тим сильніше витягнута гіпербола вздовж дійсної осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x = \pm a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то права директриса розмішена вертикально між центром і правою вершиною, а ліва директриса - між центром і лівою вершиною.

Властивість директрис гіперболи аналогічна відповідній властивості для еліпса: $r/d = \varepsilon$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$$

є рівнянням гіперболи. Знайти вершини гіперболи та її асимптоти. Зобразити ескіз гіперболи. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Знайти рівняння гіперболи l_g, якщо її ексцентриситет $\varepsilon_g = 2$, а фокуси збігаються з фокусами еліпса l_e: $x^2/100 + y^2/36 = 1$.

□ l_e: $x^2/100 + y^2/36 = 1$; $a_e^2 = 100$; $b_e^2 = 36$; $c_e^2 = a_e^2 - b_e^2$;

$$c_e^2 = 100 - 36 = 64; \; c_g = c_e = 8; \; \varepsilon_g = c_g/a_g; \; a_g = c_g/\varepsilon_g;$$

$$a_g = 8/2 = 4; \; a_g^2 = 16; \; b_g^2 = c_g^2 - a_g^2; \; b_g^2 = 8^2 - 4^2 = 48;$$

$$l_g: \; x^2/16 - y^2/48 = 1. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Точка $M\left(-8; 6\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, а її асимптоти $y = \pm(3/2)x$. Знайти канонічне рівняння, ексцентриситет і директриси гіперболи.

□ Оскільки точка M належать гіперболі, то

$$(-8)^2/a^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2/b^2 = 1.$$

З рівнянь асимптот маємо $b/a = 3/2$. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з двома невідомими a і b (зробіть це самостійно), знаходимо $a = 4$ і $b = 6$.

Звідси $x^2/16 - y^2/36 = 1$ – канонічне рівняння;

$$c^2 = a^2 + b^2; \;\; c^2 = 16 + 36 = 52; \;\; c = 2\sqrt{13}; \;\; \varepsilon = c/a;$$

$$\varepsilon = \left(2\sqrt{13}\right)/4 = \sqrt{13}/2 \text{ – ексцентриситет;}$$

$$x = \pm 4/\left(\sqrt{13}/2\right); \;\; x = \pm 8\sqrt{13}/13 \text{ – директриси. } \blacksquare$$

1.3.5. Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань від заданої точки площини F (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

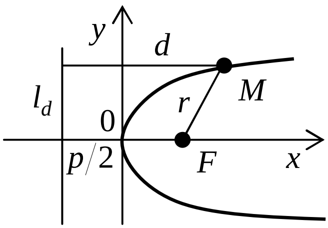


Рис. 17

Для довільної точки $M(x; y)$ параболи (рис. 17)

$$r = d,$$

де $r = MF$ – ***фокальний радіус*** точки $M(x; y)$; d – відстань точки $M(x; y)$ до директриси l_d: $x = -p/2$; $F(p/2; 0)$ – фокус; p – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p > 0$. Тоді

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + (y - 0)^2} = x - (-p/2).$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи***

$$y^2 = 2px$$

Очевидно, що $x \geq 0$.

Парабола має форму нескінченної гілки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи OF. Точка $O(0; 0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи. Асимптот парабола не має.

Зауваження 1. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет*** параболи дорівнює одиниці $\varepsilon = 1$.

Приклад 1. Визначити координати фокуса $F(p/2;\, 0)$ і рівняння директриси l_d параболи $y^2 = 12x$. Знайти кінці $M_1(p/2;\, -p)$ і $M_2(p/2;\, p)$ хорди $M_1M_2 = 2p$, яка проходить через фокус параболи і перпендикулярна до її осі. Зобразити ескіз параболи, провівши плавну лінію через її вершину O і точки $M_1(p/2;\, -p)$, $M_2(p/2;\, p)$.

□ $y^2 = 2px$; $y^2 = 12x$; $2p = 12$; $p = 6$; $F(p/2;\, 0)$; $F(3;\, 0)$; l_d: $x = -p/2$; l_d: $x = -3$; $M_1(3; -6)$; $M_2(3;\, 6)$.

(Ескіз параболи зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти рівняння параболи l_p: $y^2 = 2px$, якщо її фокус збігається з правою дійсною вершиною гіперболи l_g: $x^2/4 - y^2/6 = 1.$. Знайти точки перетину цих ліній.

□ l_g: $x^2/4 - y^2/6 = 1.$; $a_g^2 = 4$; $F(p/2; 0) = A_2(a_g; 0)$;

$$p/2 = a_g = 2; \quad p = 4; \quad l_p: \ y^2 = 2px; \quad y^2 = 8x;$$

$$\begin{cases} x^2/4 - y^2/6 = 1 \\ y^2 = 8x; \end{cases} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{8x}{6} = 1; \quad 3x^2 - 16x - 12 = 0;$$

$x_1 = 6$; $x_2 = -2/3$ – не задовольняє умову $x \ge 0$;

$$y^2 = 8 \cdot 6; \quad y_1 = 4\sqrt{3}; \quad y_2 = -4\sqrt{3};$$

$$M_1(3; -4\sqrt{3}); \quad M_2(3;\, 4\sqrt{3}). \quad ■$$

Зауваження 2. На практиці часто зустрічаються параболи з іншим розміщенням відносно системи координат. На рис. 18 – 21 наведені основні випадки і відповідні канонічні рівняння.

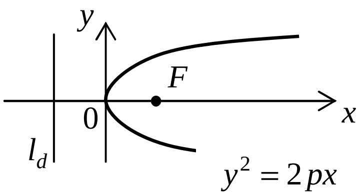


Рис. 18

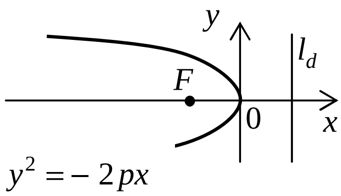


Рис. 19

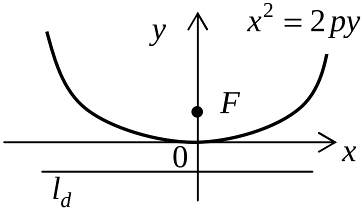


Рис. 20

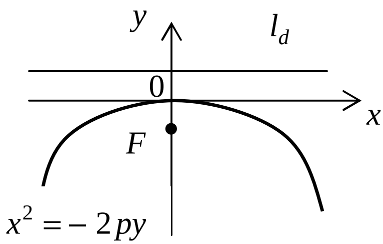


Рис. 21

1.3.6. Лінії другого порядку як конічні перерізи та їх оптична властивість

Будь-яка дійсна суттєво крива лінія другого порядку може бути одержана як перетин кругового конуса площиною, що не проходить через його вершину. Зокрема:

1) якщо площина перпендикулярна до осі конуса, то в перерізі – коло;

2) якщо площина перетинає лише одну порожнину конуса і не паралельна жодній його твірній, то в перерізі – еліпс;

3) якщо площина паралельна осі конуса, то в перерізі – гіпербола;

4) якщо площина паралельна твірній конуса, то в перерізі – парабола.

<u>Оптична властивість</u> ліній другого порядку: *промінь, що виходить з фокуса, йде вздовж фокального радіуса, відбивається від дзеркальної поверхні, що має твірною лінію другого по-*

рядку, а потім йде вздовж іншого фокального радіуса. У випадку еліпса відбиті промені проходять через другий фокус. У випадку параболи відбиті промені утворюють паралельний пучок, що йде у нескінченність. У випадку гіперболи відбиті промені утворюють пучок, що розсіюється, з центром у другому фокусі.

1.4. Полярна система координат. Параметрично задані лінії

1.4.1. Полярні координати

У ***полярній системі координат*** (рис. 22) положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(\rho;\varphi)$ – її ***полярними координатами***. Тут ρ – ***полярний радіус*** OM (відстань від точки до ***полюса*** O), φ – ***полярний кут*** $\angle xOM$ (кут між ***полярною віссю*** – напрямленою півпрямою Ox із заданим масштабом $OE=1$ – і полярним радіусом OM).

Сукупність півпрямих $\varphi = C_1 = const$, що виходять з полюса, і концентричних кіл $\rho = C_2 = const$ зі спільним центром у полюсі, утворює ***координатну сітку*** полярної системи координат.

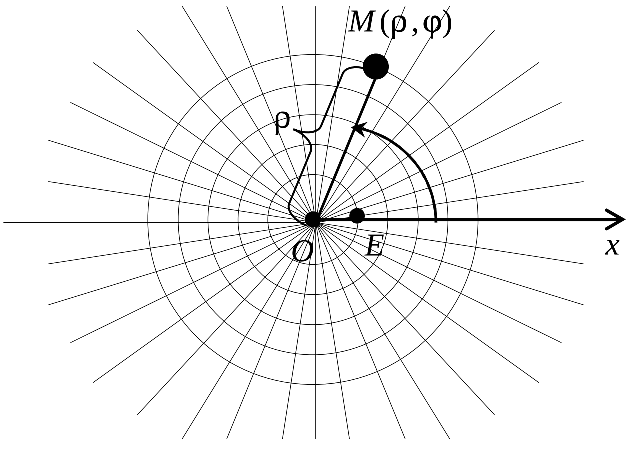


Рис. 22

Приклад 1. Побудувати точки у полярній системі координат: а) $M(4;\,\pi/3)$; б) $N(3;\,5\pi/4)$; в) $P(4;\,0)$; г) $Q(5;\,\pi)$. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Побудувати задану дугу ***спіралі Архімеда*** $\rho = (4/\pi)\varphi;\quad 0 \le \varphi \le 3\pi$, надаючи аргументу φ значення з відрізка $[0;3\pi]$ через проміжок $\pi/4$, починаючи з $\varphi = 0$.

□ Побудуємо точки за їх координатами із табл. 1, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо задану дугу спіралі Архімеда (Рис. 23). ■

Таблиця 1

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
ρ	0	1	2	3	4	5	6
φ	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4$	$5\pi/2$	$11\pi/4$	3π	
ρ	7	8	9	10	11	12	

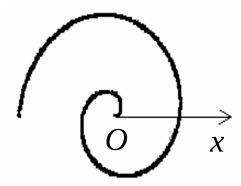


Рис. 23

Зауваження 1. Полярна система координат широко застосовується у механіці та інших областях при вивченні обертових рухів.

Зауваження 2. Надалі обмежимось розглядом тільки ***головних значень полярних координат*** $(\rho;\varphi)$, що задовольняють умови $\rho \ge 0$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

1.4.2. Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Припустимо, що полюс O полярної системи співпадає з початком декартової прямокутної системи координат Oxy, а полярна вісь служить додатною піввіссю абсцис Ox (рис. 24).

З прямокутного ΔOMN маємо ***формули переходу від полярних до декартових координат***

$$x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi,$$

а також обернені ***формули переходу від декартових до поляр-***

них координат

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\quad \sin\varphi = y\big/\sqrt{x^2+y^2}\ ;\quad \cos\varphi = x\big/\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

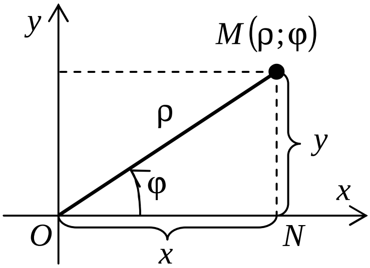


Рис. 24

Приклад 1. Використовуючи формули переходу, записати рівняння заданих ліній у полярній системі координат:

а) вертикальна пряма $x=a$;

б) горизонтальна пряма $y=b$;

в) коло $(x-a)^2+y^2=a^2$ з центром у точці $C(a;\,0)$ на осі Ox, що проходить через початок координат O;

г) коло $x^2+(y-b)^2=b^2$ з центром у точці $C(0;\,b)$ на осі Oy, що проходить через початок координат O.

□ а) $x=a$; $\rho\cos\varphi=a$; $\rho=a/\cos\varphi$;

в) $(x-a)^2+y^2=a^2$; $(\rho\cos\varphi-a)^2+(\rho\sin\varphi)^2=a^2$;

$$\rho=2a\cos\varphi\ .$$

(Пункти б) і г) розв’язати самостійно). ■

Зауваження. Деякі лінії, що у декартових координатах задаються рівняннями у незручній для дослідження неявній формі, при переході до полярних координат набувають досить простого явного вигляду $\rho=\rho(\varphi)$.

Приклад 2. Використовуючи формули переходу, записати рівняння заданих ліній у полярній системі координат і побудувати їх ескізи. (Розглядати тільки головні значення полярних координат):

а) ***лемніската*** $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $a=const>0$;

б) ***кардіоїда*** $\left(x^2+y^2-ax\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$, $a=const>0$.

□ а) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$; $(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=$

$$=a^2\left((\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2\right)\ ;\quad \rho^4\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2=$$

$$=a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\ ;\quad \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}\ .$$

Допустимі значення полярного кута визначаються системою обмежень $\rho\ge 0$; $0\le\varphi\le 2\pi$; $\cos 2\varphi\ge 0$.

Звідси $D(\rho)$: $\varphi\in[0;\pi/4]\cup[3\pi/4;5\pi/4]\cup[7\pi/4;2\pi]$.

Надаючи аргументу φ значення з області визначення $D(\rho)$ через проміжок $\pi/8$, починаючи з $\varphi=0$, побудуємо точки за їх координатами із табл. 2, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо ескіз лемніскати (Рис. 25).

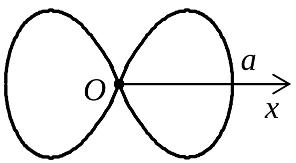


Рис. 25

(Для кардіоїди задачу розв'язати самостійно. Значення аргументу φ взяти з кроком $\pi/4$, починаючи з $\varphi=0$). ■

Таблиця 2

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
ρ	a	$a\sqrt[4]{8}/2$	0	0	$a\sqrt[4]{8}/2$
φ	π	$9\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
ρ	a	$a\sqrt[4]{8}/2$	0	$a\sqrt[4]{8}/2$	a

1.4.3. Рівняння ліній другого порядку в полярній системі координат

Рівняння ліній другого порядку в полярних координатах набувають найбільш простого вигляду, якщо полюс O розмістити відповідно у центрі кола, у лівому фокусі еліпса, у правому фокусі гіперболи чи у фокусі параболи, а за напрям полярної осі вибрати додатний напрям осі Ox (рис. 26).

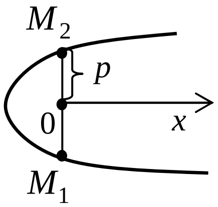


Рис. 26

Нехай $M_1M_2 = 2p$ – хорда, яка проходить через вибраний полюс і перпендикулярна до полярної осі. Число $p = M_1O = M_2O$ називається ***параметром*** лінії, $p > 0$. Для параболи параметр p уже визначений раніше як відстань від фокуса до директриси. Для кола $p = r$, а для еліпса і гіперболи $p = b^2/a$. Тоді рівняння

$$\rho = p/(1 - \varepsilon \cos\varphi)$$

визначає відповідно а) коло, якщо $\varepsilon = 0$; б) еліпс, якщо $0 < \varepsilon < 1$; в) параболу, якщо $\varepsilon = 1$; г) праву вітку гіперболи, якщо $\varepsilon > 1$.

1.4.4. Рівняння деяких ліній у параметричній формі

Нехай плоска лінія задана у декартовій прямокутній системі координат ***параметричними рівняннями***

$$x = x(t)\ ; \quad y = y(t)\ ,$$

де t – допоміжна змінна (***параметр***), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази.

Якщо з цих рівнянь удається вилучити параметр t, то одержується рівняння лінії у неявній $F(x, y) = 0$ чи навіть у явній $y = f(x)$ формах.

<u>Приклад 1</u>. Показати, що система параметричних рівнянь

$$x = a\cos t\ ; \quad y = b\sin t\ ,$$

де $a, b = const$, причому $a > 0$; $b > 0$, визначає еліпс з півосями a і b.

□ $$\cos t = x/a\ ; \quad \sin t = y/b\ ,$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = (x/a)^2 + (y/b)^2\ ; \ x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо $a = b = r$, то маємо параметричні рівняння кола $x = r\cos t$; $y = r\sin t$, $r > 0$.

<u>Приклад 2</u>. Показати, що система параметричних рівнянь

$$x = mt + a \ ; \qquad y = nt + b \ ,$$

де $a, b, m, n = const$, визначає пряму. (Розв'язати самостійно).

<u>Приклад 3</u>. Побудувати ескіз дуги ***циклоїди***, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad t \in [0;\, 4\pi] \ ; \quad a > 0 \ .$$

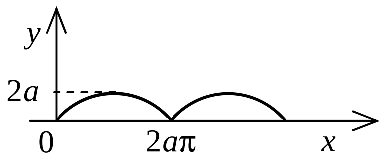


Рис. 27

□ Побудуємо точки за їх координатами із табл. 3, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо задану дугу циклоїди (Рис. 27). ■

Таблиця 3

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	
x	0	$a(\pi/2 - 1)$	$a\pi$	$a(3\pi/2 + 1)$	
y	0	a	$2a$	a	
t	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π
x	$2a\pi$	$a(5\pi/2 - 1)$	$3a\pi$	$a(7\pi/2 + 1)$	$4a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0

<u>Приклад 4</u>. Побудувати ескіз ***астроїди***, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0;\, 2\pi] \ ; \quad a > 0 \ .$$

(Розв'язати самостійно. Значення параметра t взяти з кроком $\pi/8$, починаючи з $t = 0$).

Зауваження 2. Якщо лінія задана явно рівнянням $y = f(x)$, то її можна подати в параметричній формі

$$x = t \; ; \quad y = f(t) \; .$$

Зауваження 3. Якщо лінія в полярних координатах задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, то використовуючи формули переходу $x = \rho \cos\varphi$ і $y = \rho \sin\varphi$, її можна подати в параметричній формі $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$; $y = \rho(\varphi) \sin\varphi$, де роль параметра відіграє полярний кут φ.

Приклад 5. Знайти рівняння лінії $\rho = 2p \cos\varphi / \sin^2\varphi$; $p > 0$ в декартових координатах і визначити її тип.

□ Спосіб 1. $\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi = \dfrac{2p \cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cos\varphi = 2p \; ctg^2\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi = \dfrac{2p \cos\varphi}{\sin^2\varphi}\sin\varphi = 2p \; ctg\,\varphi \; ; \end{cases}$

$$ctg^2\varphi = x/(2p) ; \quad y^2 = 4p^2 ctg^2\varphi = 4p^2 \cdot x/(2p) ;$$

$$y^2 = 2px \text{ – парабола.}$$

Спосіб 2. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\sin\varphi = y / \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$\cos\varphi = x / \sqrt{x^2 + y^2} ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2p \cdot \left(x / \sqrt{x^2 + y^2} \right) :$$

$$: \left(y / \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 ; \quad y^2 = 2px \text{ – парабола.} \quad ■$$

1.5. Сталі та змінні величини

1.5.1. Поняття про сталі та змінні величини

У результаті вимірювання таких фізичних величин, як час, довжина, об'єм, маса, заряд, напруга, температура та ін., визначаються їх числові значення. Математика займається величинами, відвертаючись від їх конкретного змісту. Далі, розглядаючи величини, матимемо на увазі їх числові значення.

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова “constans” – “сталий”) називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно сталі величини позначаються малими (інколи великими) буквами із початку латинського алфавіту $a, b, c, d, \ldots$.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається. Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами із кінця латинського алфавіту $\ldots, w, x, y, z$.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

<u>Зауваження 1</u>. Сталу величину часто зручно розглядати як окремий випадок змінної величини, всі значення якої рівні між собою.

<u>Зауваження 2</u>. Характер процесу змінювання може бути різним. Зокрема, розрізняють ***неперервні*** та ***дискретні*** змінні величини. Множиною значень неперервної величини є сукупність деяких числових проміжків. Множина значень дискретної величини складається з окремих ізольованих точок.

Наприклад:

а) Змінна величина $y = |x|$, $x \in R$ є неперервною. Її множиною значень служить закрита півпряма $[0; +\infty)$.

б) Змінна величина $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $x \in R$ є дискретною. Її множиною значень служить сукупність трьох ізольованих точок $\{-1; 0; 1\}$.

1.5.2. Класифікація змінних величин

Змінна x є ***упорядкована величина***, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє і яке наступне.

Тут ці поняття не пов’язані з часом, а служать способом упорядкування значень змінної величини.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є ***числова послідовність*** $x_1, x_2, ..., x_i, ...$. Тут при $i < k$ значення x_i попереднє, а x_k – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина x називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання:

$$\exists M > 0, \forall x: |x| \le M .$$

У противному випадку змінна величина називається ***необмеженою***. Точніше, змінна величина x називається ***необмеженою***, якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M:

$$\forall M > 0, \exists x: |x| > M .$$

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 1000/n$, $n \in N$ є обмеженою, оскільки існує таке число $M > 0$, що для всіх значень x_n виконується нерівність $|x_n| \le M$, $n \in N$. Зокрема, можна взяти $M = 2000$, оскільки

$$|x_n| = |1000/n| = 1000/n \le 2000 , \quad n \in N .$$

б) Змінна величина $y_n = (-1)^n n^2$, $n \in N$ є необмеженою, оскільки для будь-якого числа $M > 0$ можна знайти хоча б одне значення y_n, для якого виконується нерівність $|y_n| > M$. Зокрема, якщо взяти $M = 1000$, то

$$|y_{100}| = \left|(-1)^{100} \cdot 100^2\right| = 10000 > 1000 .$$

Змінна величина x називається ***зростаючою***, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення неменше попереднього. Позначається $x \nearrow$.

Змінна величина x називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення небільше попереднього. Позначається $x \searrow$ **.**

Зростаючі та спадні змінні величини називаються ***монотонними***.

Монотонна величина називається ***строго монотонною***, якщо її значення задовольняють відповідну строгу нерівність.

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 2^n$, $n \in N$ є строго зростаючою $x_n = 2^n \nearrow$, оскільки $x_{n+1} = 2^{n+1} > x_n = 2^n$, $n \in N$.

б) Змінна величина $y_n = (1/2)^n$, $n \in N$ є строго спадною $y_n = (1/2)^n \searrow$, оскільки $y_{n+1} = (1/2)^{n+1} < y_n = (1/2)^n$, $n \in N$.

в) Змінна величина $z_n = (-2)^n$, $n \in N$ є немонотонною, оскільки, зокрема,

$$z_3 = (-2)^3 \le z_2 = (-2)^2 \ ; \ \ z_4 = (-2)^4 \ge z_3 = (-2)^3 \ .$$

г) Площа S правильного вписаного в коло многокутника при подвоєнні його сторін є монотонно зростаючою величиною.

Підкреслимо, що величини з пунктів б) і г) є обмеженими, а величини з пунктів а) і в) – необмежені.

1.6. Нескінченно малі та нескінченно великі величини

1.6.1. Нескінченно малі величини

Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε.

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий момент t_ε процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_\varepsilon$ значення змінної величини x за модулем менші цього числа ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : |x| < \varepsilon .$$

Нескінченно малі величини позначаються звичайно малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \ldots$.

Те, що змінна величина α є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ (читається "α прямує до 0") або $\lim \alpha = 0$ (від латинського слова "limes" – "границя", читається "границя α дорівнює 0").

Наприклад:

а) $\alpha = 10000/n^2 \to 0$. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow |10000/n^2| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > n_\varepsilon = 1000$.

б) Змінні величини $x_n = 1 + (-1)^n$ і $y_n = n^{\cos \pi n}$ не є нескінченно малими.

<u>Зауваження</u>. Нуль 0 – це єдина стала величина, що є нескінченно малою.

<u>Геометричний зміст</u>: змінна величина α є нескінченно малою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки нуль:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_\varepsilon,\ \forall t > t_\varepsilon:\ \alpha \in U(0; \varepsilon).$$

1.6.2. Властивості нескінченно малих величин

Доведення основних властивостей нескінченно малих величин ґрунтується на їх означенні та властивостях модуля.

<u>Теорема 1</u>. *Нескінченно мала величина є обмеженою*:

$$\alpha \to 0 \ \Rightarrow\ \exists M > 0:\ |\alpha| \le M .$$

(Без доведення).

<u>Теорема 2</u>. *Сума (різниця) двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \to 0 \\ \beta \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \alpha \pm \beta \to 0 .$$

Символічний запис $0 \pm 0 = 0$.

□ $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\varepsilon/2}$: $|\alpha| < \varepsilon/2$; $|\beta| < \varepsilon/2$;

$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \alpha \pm \beta \to 0$. ■

Теорема 3. *Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною*:

$$\left. \begin{array}{r} |x| \le M \\ \alpha \to 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha x \to 0 .$$

□ $\exists M > 0 : |x| \le M$; $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\varepsilon/M}$: $|\alpha| < \varepsilon/M$;

$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x| < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon \Rightarrow \alpha x \to 0$. ■

Наслідок. *Добуток сталої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною*:

$$\left. \begin{array}{r} \alpha \to 0 \\ C = const \end{array} \right\} \Rightarrow C\alpha \to 0 .$$

Символічний запис $C \cdot 0 = 0$.

Теорема 4. *Добуток двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left. \begin{array}{r} \alpha \to 0 \\ \beta \to 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha\beta \to 0 .$$

Символічний запис $0 \cdot 0 = 0$.

□ $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\sqrt{\varepsilon}}$: $|\alpha| < \sqrt{\varepsilon}$; $|\beta| < \sqrt{\varepsilon}$;

$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \alpha\beta \to 0$. ■

Зауваження 1. Відношення двох нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0/0$. Символічний запис $0/0 = ?$

Зауваження 2. Нескінченна алгебраїчна сума нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною. Символічний запис $0 \pm 0 \pm 0 \pm \ldots = ?$

1.6.3. Нескінченно великі величини

Змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M.

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M > 0$ знайдеться такий момент t_M процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_M$ значення змінної величини x за модулем більші цього числа M:

$$\forall M > 0, \exists t_M, \forall t > t_M : |x| > M .$$

Те, що змінна величина x є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ (читається "x прямує до ∞") або $\lim x = \infty$ (читається "границя x дорівнює ∞").

Зауваження 1. Якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються додатними, то більш точно пишуть $x \to +\infty$ або $\lim x = +\infty$. Аналогічно, якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються від'ємними, то більш точно пишуть $x \to -\infty$ або $\lim x = -\infty$.

Наприклад:

а) $x_n = (-1)^n n^2 \to \infty$. Зокрема, якщо $M = 100$, то нерівність $|x_n| > M \quad \Leftrightarrow \quad \left|(-1)^n n^2\right| > 100$ виконується для всіх $n > n_M = 10$.

б) $y_n = 2^n - 100 \to +\infty$; $z_n = -n^3 + 1000/n \to -\infty$.

в) Змінні величини $x_n = 2^n + (-2)^n$ і $y_n = n^2 \sin \dfrac{\pi n}{2}$ не є нескінченно великими (хоча є необмеженими).

Зауваження 2. Не існує сталої величини, яка є нескінченно великою.

Геометричний зміст: змінна величина x є нескінченно великою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M>0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в M-околі символу нескінченності:

$$\forall M>0, \exists t_M, \forall t>t_M: \ x\in U(\infty;M).$$

Зауваження 3. Добуток сталої відмінної від нуля величини C на нескінченно велику x є нескінченно великою величиною:

$$\left.\begin{aligned} x\to\infty \\ C=const\neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ Cx\to\infty \ .$$

Зауваження 4. Добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною:

$$\left.\begin{aligned} x\to\infty \\ y\to\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ xy\to\infty \ .$$

Зауваження 5. Різниця двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $\infty-\infty$. Символічний запис $\infty-\infty=?$ Аналогічне твердження справедливе для алгебраїчної суми будь-якого скінченного числа нескінченно великих величин.

Зауваження 6. Відношення двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** ∞/∞. Символічний запис $\infty/\infty=?$

1.6.4. Зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих

Теорема 1. *Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою*:

$$x\to\infty \ \Rightarrow \ \alpha=1/x\to 0 \ .$$

Символічний запис $1/\infty=0$.

□ $\forall \varepsilon > 0, \exists t_{1/\varepsilon}, \forall t > t_{1/\varepsilon} : |x| > 1/\varepsilon$;

$$|\alpha| = 1/|x| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha \to 0 \;. \quad \blacksquare$$

<u>Теорема 2</u>. *Величина, обернена до нескінченно малої відмінної від нуля величини, є нескінченно великою*:

$$\left.\begin{aligned} \alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; x = \frac{1}{\alpha} \to \infty \;.$$

Символічний запис $1/0 = \infty$.

□ $\forall M > 0, \exists t_{1/M}, \forall t > t_{1/M} : |\alpha| < 1/M$;

$$|x| = 1/|\alpha| > M \;\Rightarrow\; x \to \infty \;. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0 \cdot \infty$. Символічний запис $0 \cdot \infty = ?$

1.7. Границя змінної величини

1.7.1. Поняття про границю змінної величини

Поняття про границю служить для характеристики напрямку процесу змінювання.

Стала величина a називається ***границею*** змінної величини x, якщо їх різниця $x - a$ є нескінченно малою величиною:

$$x - a = \alpha \to 0 \;.$$

Записується так: $x \to a$ (читається “x прямує до a”) або $\lim x = a$ (читається “границя x дорівнює a”).

Наприклад $\lim \dfrac{n+1}{n} = 1$, оскільки $\alpha = \dfrac{n+1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n} \to 0$.

<u>Зауваження 1</u>. Означення границі дано через поняття нескінченно малої величини (“***мовою нескінченно малих***”). Існують інші еквівалентні означення границі.

<u>Геометричний зміст</u>: стала величина a служить границею змінної величини x, якщо для будь-якого наперед заданого

(скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ значення змінної величини x у процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки a:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon: \; x \in U(a;\varepsilon).$$

Зауваження 2. Якщо з контексту задачі не зрозуміло, в яких умовах відбувається процес змінювання, то додаткову інформацію подають під знаком границі або після нього. Наприклад: $x_n \to a$ *при* $n \to \infty$ (читається "x_n прямує до a при n, що прямує до ∞") або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читається "границя x_n при n, що прямує до ∞, дорівнює a").

1.7.2. Властивості границь

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих.

Теорема 1. *Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.*

□ Доведення методом від супротивного.

$$\left.\begin{aligned} x &\to a \\ x &\to b \\ a &\ne b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-a=\alpha\to 0 \\ x-b=\beta\to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -a+b=\alpha-\beta\to 0\ ;$$

$$\left.\begin{aligned} b-a=\alpha-\beta\to 0 \\ b-a=const \end{aligned}\right\} \Rightarrow b-a=0 \Rightarrow b=a\ ,$$

що суперечить припущенню $a \ne b$. ■

Зауваження 1. Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання.

Теорема 2. *Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.*

$$\lim x = a \Rightarrow \exists M > 0,\ \forall x: |x| \le M\ .$$

(Без доведення).

Теорема 3. *Границя сталої величини дорівнює самій цій величині*:

$$C = const \Rightarrow \lim C = C \ .$$

□ $C = const \Rightarrow C - C = 0 \to 0 \Rightarrow C \to C$. ■

Теорема 4. *Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують*:

$$\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z \ .$$

□ $$\left.\begin{matrix} \lim x = a \\ \lim y = b \\ \lim z = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = a + \alpha, \ \alpha \to 0 \\ y = b + \beta, \ \beta \to 0 \\ z = c + \gamma, \ \gamma \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + y - z =$$

$$= (a + \alpha) + (b + \beta) - (c + \gamma) = (a + b - c) + (\alpha + \beta - \gamma) \ ;$$

$$\alpha + \beta - \gamma \to 0 \Rightarrow \lim(x + y - z) = a + b - c \ . \quad ■$$

Теорема 5. *Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують*:

$$\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y \ .$$

□ $$\left.\begin{matrix} \lim x = a \\ \lim y = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = a + \alpha, \ \alpha \to 0 \\ y = b + \beta, \ \beta \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ x\,y = (a + \alpha) \times$$

$$\times (b + \beta) = ab + (\alpha b + \beta a + \alpha\beta) \ ;$$

$$\alpha b + \beta a + \alpha\beta \to 0 \Rightarrow \lim(xy) = a\,b \ . \quad ■$$

Наслідок 1. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі*:

$$\lim(Cx) = C \cdot \lim x \ , \quad C = const \ .$$

Наслідок 2. *Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує*:

$$\lim x^n = (\lim x)^n \ , \quad n \in N \ .$$

Теорема 6. *Границя відношення двох змінних величин до-*

рівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \; .$$

□ $$\left.\begin{matrix} \lim x = a \\ \lim y = b ,\; b \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = a + \alpha ,\;\; \alpha \to 0 \\ y = b + \beta ,\;\; \beta \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \;\frac{x}{y} - \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)} \to 0 \Rightarrow \lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \; . \qquad ■$$

<u>Теорема 7</u>. *Границя невід'ємної змінної величини також невід'ємна*. Аналогічно, *границя недодатної змінної величини також недодатна*:

$$x \geq 0 \Rightarrow \lim x \geq 0 \;\; ; \quad x \leq 0 \Rightarrow \lim x \leq 0 \;\; .$$

□ Доведемо першу частину теореми методом від супротивного.

$$\lim x = a < 0; \;\; \left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ a < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x - a > -a = const > 0 \Rightarrow \;\; ;$$

$$\Rightarrow \lim (x - a) \neq 0 \, ,$$

що суперечить припущенню $\lim x = a$.

Доведення другої частини аналогічно. ■

<u>Зауваження 2</u>. Якщо змінна величина x додатна $x > 0$, то гарантувати строгу нерівність для границі $\lim x > 0$ у загальному випадку не можна. Те саме справедливе і для від'ємної змінної величини. Наприклад:

$$x_n = 1/n > 0 \;\; ; \quad \lim x_n = \lim (1/n) = 0 \;\; .$$

<u>Теорема 8 (про стабілізацію знака нерівності)</u>. *Якщо границя змінної величини додатна, то починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також додатні*:

$$\lim x > 0 \Rightarrow \exists t_0 ,\; \forall t > t_0 : \; x > 0 \, .$$

Аналогічно, *якщо границя змінної величини від'ємна, то* *починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також від'ємні*:

$$\lim x < 0 \Rightarrow \exists t_0,\ \forall t > t_0:\ x < 0\,.$$

(Без доведення).

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+7}{3x^2-2}$.

$$\square\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+7}{3x^2-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-5x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-2\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}5x+\lim\limits_{x\to 2}7}{\lim\limits_{x\to 2}3x^2-\lim\limits_{x\to 2}2}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3-5\lim\limits_{x\to 2}x+7}{3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-2}=$$

$$=\frac{(2)^3-5\cdot 2+7}{3\cdot 2^2-2}=\frac{1}{2}\,.\quad\blacksquare$$

Спираючись на розв'язаний приклад, сформулюємо наступне правило:

Границю раціонального дробу $P(x)/Q(x)$, *де* $P(x)$ *і* $Q(x)$ *– многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість* x *його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь*.

Зауваження 3. Якщо вказані умови порушуються, то треба скористатися, зокрема, властивостями нескінченно малих і нескінченно великих величин.

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3-1}$.

$$\square\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x-4}{x^3-1}=\left|\frac{(-1)^2+3\cdot(-1)-4}{(-1)^3-1}=\frac{-6}{0}\right|=\infty\,.\quad\blacksquare$$

1.7.3. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для многочленів

Правило: *Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.*

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$.

□ а) $$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^3-1}=\left|\frac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1}=\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\begin{matrix}3x^2-5x+2=0\\ x_1=1;\ x_2=2/3\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=3\lim_{x\to 1}\frac{x-2/3}{x^2+x+1}=$$

$$=3\cdot\frac{1-2/3}{1^2+1+1}=\frac{1}{3};$$ б) $$\lim_{x\to 2}\frac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l}
\underline{\ }\,3x^4-5x^3-5x+2 & x-2\\ \cline{2-2}
\underline{3x^4-6x^3} & 3x^3+x^2+2x-1\\
\quad\underline{\ }\,x^3-5x+2 & \\
\quad\underline{x^3-2x^2} & \\
\qquad\underline{\ }\,2x^2-5x+2 & \\
\qquad\underline{2x^2-4x} & \\
\qquad\quad\underline{\ }-x+2 & \\
\qquad\quad\underline{-x+2} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}\right|=$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x^3 + x^2 + 2x - 1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^3 + x^2 + 2x - 1}{x+2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \cdot 2 - 1}{2+2} = 7\frac{3}{4};$$

в) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-2} = \left|\frac{4}{0}\right| = \infty \;;$$

г) $$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^3 + 27} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2 - 3x + 9)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2 - 3x + 9} = \frac{-3+3}{(-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 9} = \frac{0}{27} = 0. \;\blacksquare$$

1.7.4. Розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів

При розкритті невизначеності виду ∞/∞ для нескінченно великих величин, зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин, використовуючи наступне правило:

Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

Зауваження 1. Указане правило справедливе для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$, тобто знак символу ∞ можна не уточнювати.

Приклад. Знайти границю:

а) $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x - 1}{5x^2 - 2x + 6};$$ б) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 4x - 7}{8x^2 - 3x + 6};$$

в) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{9x^3 + 4x}{2x^5 + x^3 + 6}.$$

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-5/x+4/x^3-1/x^4}{5/x^2-2/x^3+6/x^4}=\left|\dfrac{3-0+0-0}{0-0+0}\right|=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=$

$=\dfrac{5-0-0}{8-0+0}=\dfrac{5}{8}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}=$

$=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9/x^2+4/x^4}{2+1/x^2+6/x^5}=\dfrac{0+0}{2+0+0}=0$. ■

Зауваження 2. Очевидно, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}0,\ m<n,\\ a_{p0}/a_{q0},\ m=n,\\ \infty,\ m>n,\end{cases}$$ де a_{p0} і a_{q0} –

коефіцієнти при найвищих степенях відповідних многочленів.

1.7.5. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів

Правило: *Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.*

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6} = \frac{1}{\sqrt{5\cdot 2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6} = \left|\begin{matrix} 4x^2-5x-6=0 \\ x_1=2;\ x_2=-3/4 \end{matrix}\right| = \frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)} = \frac{5}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3/4} = \frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+3/4} = \frac{5}{11}\ ;$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4x+4+8}{-3x-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4(x+3)}{-x(3+x)} =$$

$$= \frac{6}{12}\cdot(-4)\lim_{x\to -3}\frac{1}{x} = -2\cdot\frac{1}{-3} = \frac{2}{3}\ . \qquad \blacksquare$$

1.7.6. Ознаки існування границі

Питання про границю має дві сторони: 1) Чи існує границя? 2) Як обчислити границю? Друге питання уже частково розглянуте. Звернемо увагу на перше питання.

Теорема 1. *Обмежена монотонна величина має границю.*

$$x \ge 0 \Rightarrow \lim x \ge 0\ ; \quad x \le 0 \Rightarrow \lim x \le 0\ .$$

(Без доведення).

Теорема 2 (про стиснену змінну). *Нехай задано три змінні величини* x, y *і* z, *для яких виконується подвійна нерівність*

$x \le y \le z$. *Якщо при цьому крайні змінні* x *і* z *мають однакову границю* $\lim x = \lim z = a$, *то середня змінна* y *також має ту саму границю* $\lim y = \lim x = \lim z = a$:

$$\left.\begin{array}{r} x \le y \le z \\ \lim x = \lim z = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim y = \lim x = \lim z = a \ .$$

(Без доведення).

Зауваження. Згідно з означенням границі поведінка змінної величини у початковий період процесу змінювання ніяким чином не впливає на розв'язання питання про границю.

1.7.7. Перша стандартна границя. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для тригонометричних виразів

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються уже відомі ***стандартні границі***.

Теорема 1 (***перша стандартна границя***). *Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці*:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1 \ .$$

□ Функція $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ – парна, тому можна обмежитися тільки додатними значеннями α. А оскільки $\alpha \to 0$, то можна обмежитися тільки значеннями α із першої чверті $0 < \alpha < \pi/2$.

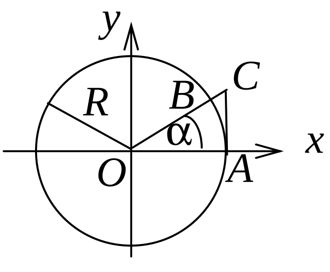


Рис. 28

Розглянемо коло радіуса R з центром у початку координат (рис. 28). Порівнюючи площі трьох вкладених одна в одну фігур, отримаємо:

$$S_{\Delta OAB} < S_{сектора OAB} < S_{\Delta OAC} \ ;$$

$$\frac{1}{2}R^2\sin\alpha < \frac{1}{2}R^2\alpha < \frac{1}{2}R^2 tg\alpha \ ; \quad \sin\alpha < \alpha < tg\alpha \quad (*);$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}\ ; \ 1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha\ ; \quad \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1 \quad (**).$$

З нерівності (*) і умови $0 < \sin\frac{\alpha}{2} < 1$ випливає

$$0 < \beta = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} <$$

$$< 2\sin\frac{\alpha}{2} < 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \alpha\ .$$

Оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha = 0$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0} 0 = 0$, то за теоремою про стиснену змінну $\lim\limits_{\alpha\to 0}\beta = \lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha = \lim\limits_{\alpha\to 0} 0 = 0$. Звідси

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0}(1-\beta) = 1 - \lim_{\alpha\to 0}\beta = 1\ .$$

Якщо врахувати, що $\cos 0 = 1$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \cos 0 = 1$.

Із цього співвідношення і нерівності (**) за теоремою про стиснену змінну нарешті одержимо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0}1 = 1\ . \qquad \blacksquare$$

<u>Наслідок 1</u>. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1$.

$$\square \ \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha} = 1\cdot 1 = 1\ . \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 2</u>. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1$.

$$\square \ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{array}{l} u = \arcsin\alpha;\ \alpha = \sin u; \\ \alpha\to 0 \ \Rightarrow \ u\to 0 \end{array}\right| =$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\sin u/u}=\frac{1}{1}=1. \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 3</u>. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1$.

$$\square \lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix} u=arctg\,\alpha;\ \alpha=tgu; \\ \alpha\to 0 \Rightarrow u\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{tgu}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{tgu/u}=\frac{1}{1}=1. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Для розкриття невизначеності виду $0/0$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.

<u>Приклад</u>. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}$.

$$\square \text{ а) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\right.$$

$$\times\lim_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)\cdot(3x/2)^2}{(3x/2)^2\cdot x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right)^2:\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{9}{2}\cdot 1^2:1=\frac{9}{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{ctg(\pi/4+x)}{4x-\pi}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}u=x-\pi/4;\ x=\pi/4+u;\\ x\to\pi/4\ \Rightarrow\ u\to 0\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/4+u+\pi/4)}{4(\pi/4+u)-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/2+u)}{4u}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{tg\,u}{u}=-\frac{1}{4}\cdot 1=-\frac{1}{4}\ . \quad ■$$

1.7.8. Друга стандартна границя. Розкриття невизначеності виду 1^{∞}

Теорема 1 (***друга стандартна границя***). *Змінна величина* $(1+1/n)^n$ *має границю при* $n\to\infty$. *Ця границя позначається буквою* e *і називається* ***числом Ейлера***:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left|1^{\infty}\right|=e\ .$$

□ $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; $x_1=\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1=2$; $x_2=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=2{,}25$;

$x_3=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}\approx 2{,}37$; $x_4=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4=\dfrac{625}{256}\approx 2{,}44$; ... .

Можна довести, що змінна величина $x_n=(1+1/n)^n$ – зростаюча x_n і обмежена числом $M=3$. Тому за теоремою про обмежену монотонну змінну існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$. ■

Зауваження 1. Далі будуть наведені способи обчислення числа Ейлера e з будь-якою наперед заданою точністю $e=2{,}718281828459045...\approx 2{,}72$. Можна показати, що число e – ірраціональне і навіть ***трансцендентне*** (воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами).

Зауваження 2. При обчисленнях границь використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|1^\infty\right| = e,$$

де змінна x – дійсна неперервна (на відміну від дискретної змінної n). Графік функції $y=(1+1/x)^x$ подано на рис. 29.

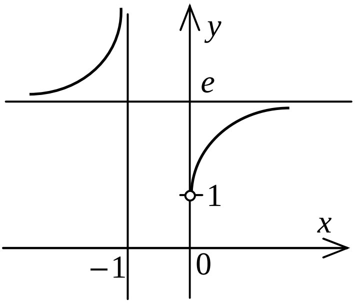


Рис. 29

2) $$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \left|1^\infty\right| = e$$

Границя виразу – одиниця плюс нескінченно мала в степені, оберненому до цієї нескінченно малої – дорівнює числу Ейлера e.

Зауваження 3. Показникова функція $y=e^x$ з основою e називається ***експонентою*** і часто позначається $y=\exp x$ (рис. 30). Логарифмічна функція $y=\log_e x$ з основою e називається ***натуральним логарифмом*** і позначається $y=\ln x$ (рис. 30). Десятковий і натуральний логарифми зв'язані співвідношеннями

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x;$$

$$\ln x = \frac{1}{M}\lg x,$$

де $M = 1/\ln 10 = 0{,}43429...$ – модуль переходу.

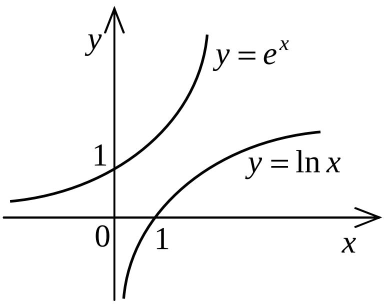


Рис. 30

Зауваження 4. З експонентою $y=e^x$ зв'язані так звані ***гіперболічні функції***:

$$sh\,x = \left(e^{x} - e^{-x}\right)/2$$ – ***гіперболічний синус*** (рис. 31);

$$ch\,x = \left(e^{x} + e^{-x}\right)/2$$ – ***гіперболічний косинус*** (рис. 31);

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$ – ***гіперболічний тангенс*** (рис. 32);

$$cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$ – ***гіперболічний котангенс*** (рис. 32);

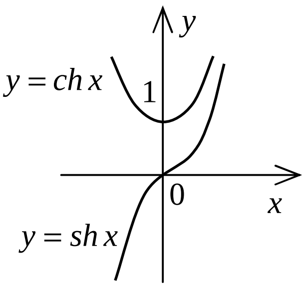


Рис. 31

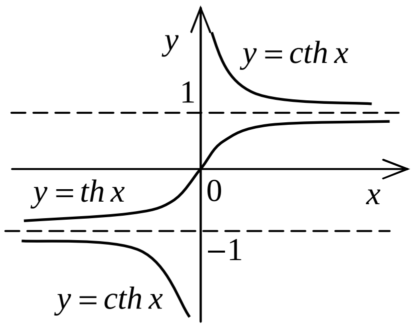


Рис. 32

Для гіперболічних функцій існує сукупність формул, що складають ***гіперболічну тригонометрію***. Зазначимо лише ***основну гіперболічну тотожність*** $ch^2 x - sh^2 x = 1$.

Наведемо (без доведення) наступні <u>наслідки</u> з другої стандартної границі, корисні при обчисленнях:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x} - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha .$$

<u>Приклад</u>. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{1/x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1} - 1}{arctg\,(x-1)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{x-5}{x+2} - 1\right)\right)^{2x+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{x+2}(2x+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{x+2}} == e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{1+2/x}} = e^{-7\cdot\frac{2+0}{1+0}} = e^{-14} \;;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{(1/\sin x)\cdot(\sin x/x)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)} = e^{1} = e \;;$$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{arctg\,(x-1)} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \left|\begin{matrix} u = x-1; \\ x\to 1 \Rightarrow u\to 0\end{matrix}\right| =$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2^{u}-1}{arctg\; u} = \lim_{u\to 0}\frac{2^{u}-1}{u} : \lim_{u\to 0}\frac{arctg\; u}{u} = \ln 2 : 1 = \ln 2\,. \;\blacksquare$$

1.7.9. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі

Нехай змінні α і β – нескінченно малі. Розглянемо їх відношення α/β (припускається, що $\beta \neq 0$). Тоді:

1) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то α називається нескінченно малою ***вищого порядку*** мализни порівняно з β і позначається $\alpha = o(\beta)$ (α прямує до нуля швидше, ніж β).

2) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^{k}} = A \neq 0$, то α називається ***нескінченно малою*** k ***-го порядку*** мализни порівняно з β.

3) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, то α і β називаються ***нескінченно малими одного порядку*** мализни.

4) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то α і β називаються ***еквівалент-***

ними нескінченно малими, позначається $\alpha \sim \beta$.

5) Якщо відношення α/β не має ні скінченної, ні нескінченної границі, то α і β називаються ***непорівнянними нескінченно малими***.

Наприклад:

а) $\alpha = \sin 2x$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x) = 2$. Отже, нескінченно малі α і β одного порядку.

б) $\alpha = x^n$, $\beta = x$, $n > 1$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^n/x\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$.

в) $\alpha = 4x^3$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha/\beta^3\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(4x^3/x^3\right) = 4$. Отже, величина α є нескінченно малою третього порядку мализни відносно β.

г) $\alpha = (x+1)/x^2$, $\beta = 1/x$, $x \to \infty$. Тоді

$\lim\limits_{x\to\infty}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(((x+1)/x^2)/(1/x)\right) = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + 1/x) = 1$.

Отже, $\alpha \sim \beta$.

д) $\alpha = x\sin(1/x)$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha/\beta\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left((x\sin(1/x))/x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ – не існує.

Отже, α і β – непорівнянні.

Нехай нескінченно мала α подана у вигляді суми $\alpha = \beta + \gamma$. Перший доданок β називається ***головною частиною*** α, якщо другий доданок γ має вищий порядок порівняно з β.

<u>Теорема 1</u>. *Нескінченно мала* α *еквівалентна своїй головній частині* β: $\alpha \sim \beta$.

□ $\alpha = \beta + \gamma$; $\dfrac{\alpha}{\beta} = 1 + \dfrac{\gamma}{\beta}$; $\lim\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim 1 + \lim\dfrac{\gamma}{\beta} = 1 + 0 = 1$; ■

Теорема 2 (принцип заміни нескінченно малих). *При розкритті невизначеності виду* $0/0$ *можна чисельник і знаменник цієї невизначеності заміняти величинами, що їм еквівалентні*:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \sim \alpha_* \\ \beta \sim \beta_*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_*}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_*}=\lim\frac{\alpha_*}{\beta_*}$$

Основні еквівалентності при $x \to 0$, що використовуються при обчисленнях границь, подані в таблиці 4:

Таблиця 4

$\sin x \sim x$	$arctg\, x \sim x$	$a^x - 1 \sim x\ln a$
$tg\, x \sim x$	$1-\cos x \sim x^2/2$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-6x^2\right)}{arctg\, x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin^2 x}$.

□ а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/5}-1}{x}=$$

$$=\left|(1+x)^{1/5}-1 \sim x/5\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x/5}{x}=\frac{1}{5};$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-6x^2\right)}{arctg\, x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\ln\left(1-6x^2\right)\sim -6x^2;\right.$$

$$\left. arctg\, x \sim x\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-6x^2}{x}=0;$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin^2 x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|e^{2x}-1\sim 2x;\ \sin x \sim x\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty.\quad ■$$

Зауваження 1. Якщо в чисельнику чи знаменнику невизначеності $0/0$ стоїть алгебраїчна сума, то в загальному випадку не можна заміняти еквівалентними величинами окремі доданки, а лише весь чисельник чи знаменник в цілому.

Зауваження 2. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

1.8. Поняття функції. Способи задання функції. Основні елементарні функції та їх графіки. Складена функція. Обернена функція

1.8.1. Загальне поняття функції. Області визначення та значень. Графік функції. Способи задання функції

Досліджуючи різні явища природи, розв'язуючи науково-технічні проблеми доводиться розглядати зміну однієї з величин у залежності від зміни іншої.

Нехай задані непорожні множини X і Y. Якщо вказано правило (***закон відповідності***) f, за яким кожному значенню x із множини X ставиться у відповідність одне певне значення y із множини Y, то кажуть, що задано ***функцію***, визначену на множині X, зі значеннями у множині Y. Функцію позначають одним із способів: $y = f(x)$, $x \in X$, або $f : X \to Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$.

При цьому x називається ***незалежною змінною*** (***аргументом***), а y – ***залежною змінною*** (***функцією***).

Множина $D(f) = X$ називається ***областю визначення*** функції. Множина $E(f)$ всіх тих значень $y \in Y$, кожне з яких відповідає принаймні одному $x \in D(f)$, називається ***областю значень*** функції.

Значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f(x_0)$ або $f(x)\big|_{x=x_0}$.

Функція $y = C, C = const$, яка на всій області визначення набуває єдиного значення C, називається ***сталою***.

Дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ називаються ***рівними***, якщо: 1) вони мають одну й ту саму область визначення $D(f) = D(g)$; 2) на кожному елементі x з цієї області визначення функції набувають однакових значень $f(x) = g(x)$.

Якщо змінні x і y розглядати як декартові координати точок на площині, то ***графіком*** функції $y = f(x)$ є множина всіх точок координатної площини Oxy з координатами $(x, f(x))$, $x \in D(f)$.

<u>Зауваження 1</u>. Кожна пряма, паралельна осі Oy, з графіком функції може мати не більше однієї спільної точки.

Функція $y = f(x)$ вважається <u>заданою</u>, якщо: 1) вказана її область визначення $D(f)$: 2) вказаний закон відповідності f.

<u>Основні способи задання функції.</u>

1) <u>Табличний спосіб задання функції.</u> При цьому способі пишуть у визначеному порядку значення аргументу $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ і відповідні значення функції $y_1, y_2, ..., y_i, ...$:

x	x_1	x_2	…	x_i	…
y	y_1	y_2	…	y_i	…

2) <u>Графічний спосіб задання функції.</u> Якщо у прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок (x, y) і при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, що паралельна осі Oy, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну функцію $y = f(x)$. Значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати.

3) <u>Аналітичний спосіб задання функції:</u>

а) ***Явна форма задання функції***. Функцію задають у вигляді формул, що визначають операції (і послідовності їх виконання), які потрібно здійснити над значенням незалежної змінної x, щоб визначити значення залежної змінної y.

Наприклад, $y = (x^{1/2} - 1)^2$, де $x \geq 0$.

б) ***Неявна форма задання функції***. Під неявним розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно y, яке визначає функцію тільки тоді, коли всі впорядковані пари (x, y), що є розв'язками даного рівняння, утворюють множину, в якій для будь-якого числа x_0 є не більш як одна пара (x_0, y_0) з першим елементом x_0.

Наприклад, $xy - 4 = 0$.

в) ***Параметрична форма задання функції***. Якщо функцію задано параметрично, то значення змінних x і y, що відповідають одне одному, визначають через третю величину t (***параметр***): $x = x(t)$, $y = y(t)$.

У деяких випадках функцію, задану параметрично, можна записати в явній формі, виключивши параметр t.

Наприклад, функція $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$, допускає запис у явній формі: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0;1]$.

Зауваження 2. Коли функція задається аналітично, то часто область визначення явно не вказується. Тоді розглядається так звана ***природна область визначення*** (***область допустимих значень***). *Щоб знайти природну область визначення треба скласти систему обмежень на всі математичні операції, що фігурують в наведених формулах, і розв'язати її.*

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y = \ln(6 - x) + \sqrt{x^2 - 4}.$$

$$\square \quad D(f): \begin{cases} 6 - x > 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x < 6 \\ |x| \geq 2 \end{cases} \quad x \in (-\infty; -2] \cup [2; 6). \ \blacksquare$$

1.8.2. Основні елементарні функції

Степенева функція $y = x^{\alpha}$:

а) α – ціле додатне число. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty < x < +\infty$. Графіки функції у цьому випадку при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рис. 33 і 34;

б) α – ціле від'ємне число. Функція визначена для усіх значень x, окрім $x = 0$. Графіки функцій при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рис. 35 і 36;

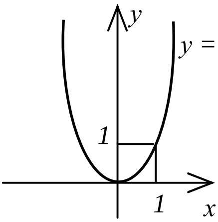


Рис. 33

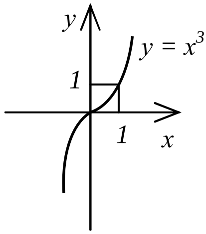


Рис. 34

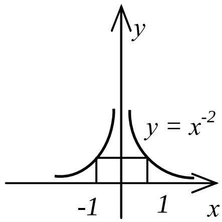


Рис. 35

в) число α – раціональне дробове. На рис. 37, 38 і 39 зображені графіки степеневої функції, коли числа α додатні. При від'ємних числах α матимемо графіки, які схожі з зображеними на рис. 35 і 36, коли знаменник дробу непарний, і їх частину праворуч від осі Oy, якщо знаменник дробу парний.

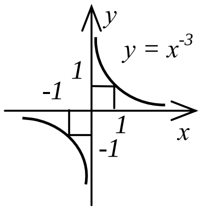


Рис. 36

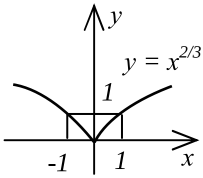


Рис. 37

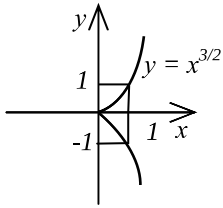


Рис. 38

<u>Показникова функція</u> $y = a^x$, $a > 0$ і $x \in R$. Графік її має вигляд, зображений на рис. 40. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$.

<u>Логарифмічна функція</u> $y = \log_a x$, $a > 0$ і $x > 0$. Графік її зображено на рис. 41. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$. $\lg x$ – десятковий логарифм, $\ln x$ – натуральний логарифм.

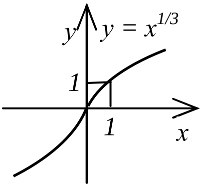


Рис. 39

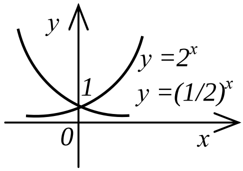


Рис. 40

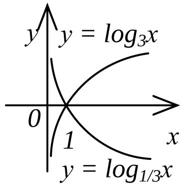


Рис. 41

<u>Тригонометричні функції</u>: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, $y = \sec x = 1/\cos x$, $y = \cos ec\, x = 1/\sin x$. Незалежна змінна x у формулах набуває значення у радіанах. Усі названі тригонометричні функції періодичні.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період 2π. Ці функції визначені при всіх значеннях $x \in R$.

Функції $y = tg\, x$ і $y = \sec x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in Z$.

Функції $y = ctg\, x$ і $y = \cos ec\, x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = k\pi$, $k \in Z$.

Графіки тригонометричних функцій зображені на рис. 42-44.

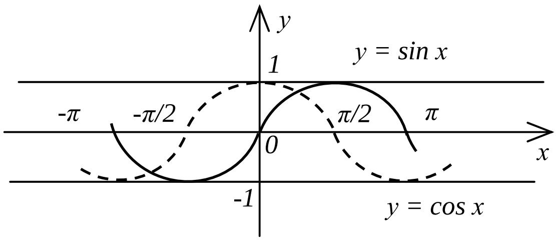


Рис. 42

<u>Обернені тригонометричні функції</u>:

а) Функція арксинус $y = \arcsin x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[-\pi/2; \pi/2]$. Графік подано на рис. 45.

б) Функція арккосинус $y = \arccos x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[0;\pi]$. Графік подано на рис. 46.

в) Функція арктангенс $y = arctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(-\pi/2;\pi/2)$. Графік подано на рис. 47.

г) Функція арккотангенс $y = arcctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(0;\pi)$. Графік подано на рис. 48.

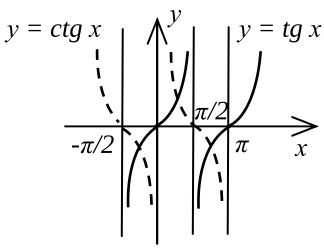


Рис. 43

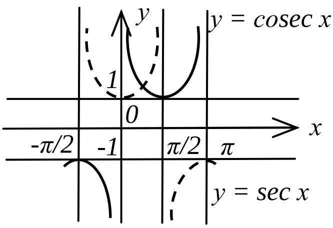


Рис. 44

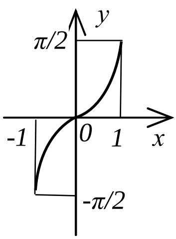


Рис. 45

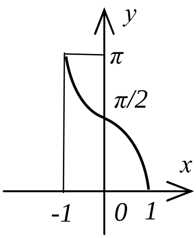


Рис. 46

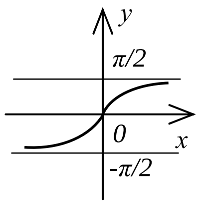


Рис. 47

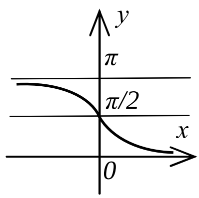


Рис. 48

Деякі границі, що відображають властивості основних елементарних функцій:

$$\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = -\pi/2; \quad \lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \pi/2;$$

$$\lim_{x\to-\infty} arcctg\, x = \pi; \quad \lim_{x\to+\infty} arcctg\, x = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a>1; \\ +\infty, & 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a>1; \\ 0, & 0<a<1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a>1; \\ +\infty, & 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a>1; \\ -\infty, & 0<a<1; \end{cases}$$

1.8.3. Класифікація функцій за їхніми властивостями

Парність. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$; і ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$. Інакше функція називається ***функцією загального вигляду*** (***загального положення***).

Наприклад, функції $y = x^2$ і $y = \cos x$ – парні, функції $y = \sin x$ і $y = arctg\, x$ – непарні, а функції $y = 2^x$ і $y = \arccos x$ – загального вигляду.

Періодичність. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує додатне число T (***період***) таке, що $f(x+T) = f(x)$, $x \in D(f)$.

Звичайно під ***періодом*** (***основним періодом***) функції розуміють T_0 – найменший з усіх додатних періодів (якщо такий існує). У цьому разі всі періоди функції йому кратні: $T = kT_0$, $k \in N$.

Приклад. Дослідити функцію $y = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$ на періодичність і у випадку періодичності знайти основний період.

□ Дана функція визначена на всій числовій прямій. Припустимо, що ця функція періодична. Тоді для довільного $x \in R$ повинна виконуватися умова $\sin(ax+b) = \sin(a(x+T)+b)$, де $T = const > 0$. Розв'яжемо це рівняння відносно T:

$$T = (\pi + 2\pi k)/a - 2x - 2b/a, \quad k \in Z; \; T = (2\pi n)/a, \quad n \in Z.$$

Величина T з першої формули не є періодом, тому що залежить від x. Друга формула задає нескінченну множину чисел. Отже, задана функція періодична. Найменшим додатним з цих чисел є $T_0 = 2\pi / |a|$ – основний період. ■

Обмеженість. Функція $y = f(x)$ є ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число M, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \le M$, і ***обмеженою знизу***, якщо існує таке число τ, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \ge \tau$.

Функція, обмежена зверху і знизу, є ***обмеженою***.

Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ обмежені зверху числом 1, а знизу числом -1. Функція $y = 2^x$ обмежена знизу числом 0, а зверху необмежена. Функції $y = tg\, x$ і $y = ctg\, x$ необмежені.

Монотонність. Функція $y = f(x)$ є ***зростаючою*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-якої пари значень $x_1 \in (a;b)$ і $x_2 \in (a;b)$ з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$, тобто *більшому значенню аргументу відповідає неменше значення функції*. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція зветься ***спадною***, тобто *більшому значенню аргументу відповідає небільше значення функції*.

Зростаючі і спадні функції називають ***монотонними***.

Якщо в поданих означеннях нестрогі нерівності замінити на строгі, то маємо ***строго монотонні*** функції.

Якщо область визначення можна розбити на деяке число проміжків, які не перетинаються, таких, що на кожному з них функція монотонна, то вони називаються ***проміжками монотонності*** функції.

Наприклад, функція $y = x^2$ визначена на всій числовій осі. Вона має два проміжки строгої монотонності $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$, на першому з яких функція є строго спадною, а на другому – строго зростаючою.

1.8.4. Класифікація функцій за їхньою будовою

Складена функція. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині U, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині X, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $u = \varphi(x)$ належить множині U. Тоді на множині X визначена функція $y = f(\varphi(x))$, яку називають ***складеною функцією*** від x або ***суперпозицією*** (***композицією***) функцій φ і f. При цьому $y = f(u)$ називають ***зовнішньою функцією***, а $u = \varphi(x)$ – ***внутрішньою функцією*** або ***проміжним аргументом***. Змінну x називають ***незалежною змінною*** або ***внутрішнім аргументом***.

Складена функція – це функція від функції. Більшість функцій, які вивчають у математиці, можна розглядати як складені функції.

Наприклад, функцію $z = \sqrt{x} - 1$ можна записати: $y = \sqrt{x}$; $z = y - 1$.

Зауваження 1. Суперпозиція може застосовуватися повторно. Наприклад, $y = \sin v$; $v = 2^u$; $u = arctg\, x$.

Зауваження 2. Розглядаючи складені функції, слід звертати увагу на області визначення функцій, що їх утворюють.

Елементарні функції. ***Елементарною функцією*** називається така, що може бути задана за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Наприклад, $y = (\lg x + 4\sqrt[3]{x} + 2tg\, x)/(10^x - x^2 \arcsin x)$ – елементарна функція, а функції $y = sign\, x$ (знак числа x) та $y = \sin x + \sin x^2 + \sin x^3 + ... + \sin x^n + ...$ не є елементарними.

Алгебраїчні функції. До числа ***алгебраїчних функцій*** належать такі елементарні функції:

1) ***Ціла раціональна функція*** або ***многочлен*** (***поліном***)

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n,$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – ***коефіцієнти*** (сталі числа); n – ***степінь*** (***порядок***) многочлена (ціле невід’ємне число). Зрозуміло, що ця функція визначена при будь-якому $x \in R$.

2) ***Дробово-раціональна функція*** (***раціональний дріб***) – відношення двох многочленів $y = P_n(x) / Q_m(x)$.

Наприклад, раціональний дріб $y = a / x$, $(a \neq 0, x \neq 0)$ виражає обернено пропорційну залежність.

3) ***Ірраціональна функція*** – це така функція $y = f(x)$, в якій зустрічається піднесення до степеня з раціональним дробовим показником.

Наприклад, функція $y = (2x^2 + \sqrt{x})/(1 + 5x^2)$ є ірраціональною.

Зауваження 3. Розглянуті три види не вичерпують усіх алгебраїчних функцій.

Елементарні функції, що не є алгебраїчними, називаються ***трансцендентними***.

Наприклад, функція $y = \cos x - 5x^3$ є трансцендентною.

Обернена функція. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X, а Y –множина її значень. Якщо ця функція $y = f(x)$ така, що при кожному фіксованому $y \in Y$ рівняння $y = f(x)$ має єдиний розв’язок $x \in X$, то можна розглядати ***обернену функцію*** $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Обернена функція $x = f^{-1}(y)$ кожному $y \in Y$ ставить у відповідність єдине значення $x \in X$ таке, що $f(x) = y$. Функція $y = f(x)$, $x \in X$ при цьому називається ***прямою функцією***.

Якщо функція f^{-1} обернена до функції f, то й функція f буде оберненою до функції f^{-1}. Функції f і f^{-1} називають ***взаємно оберненими***. Область визначення X функції f є областю значень функції f^{-1}, область значень Y функції f є областю визначення функції f^{-1}.

Графіки функцій $y = f(x)$, $x \in X$ і $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ збігаються (відображають одну залежність з різних позицій).

Зауваження 4. Якщо в оберненій функції $x = f^{-1}(y)$ ввести традиційні позначення для незалежної та залежної змінних (перезначити $x \to y$, $y \to x$), то матимемо ***обернену функцію в традиційних позначеннях змінних*** $y = f^{-1}(x)$. Графіки прямої $y = f(x)$ і оберненої $y = f^{-1}(x)$ функцій симетричні відносно бісектриси $y = x$ першого і третього координатних кутів.

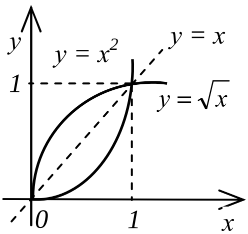


Рис. 49

Наприклад, функція $y = f(x) = x^2$ на інтервалі $[0; +\infty)$ має обернену $y = \sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображені на рис. 49.

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $[a;b]$. *Тоді обернена функція* $y = f^{-1}(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $\left[f(a); f(b)\right]$ $\left(\left[f(b); f(a)\right] \right)$.
(Без доведення).

1.9. Неперервність функції

З поняттям границі тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – неперервність функції.

1.9.1. Приріст аргументу та приріст функції. Поняття неперервності функції в точці

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і x – довільна точка з цього околу, відмінна від x_0. Різницю $\Delta x = x - x_0$ називають ***приростом незалежної змінної*** (***приростом аргументу***). Відповідну різницю $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

називають ***приростом функції***.

Тоді $x = x_0 + \Delta x$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

<u>Зауваження</u>. Приріст функції Δy залежить як від вибору точки x_0, так і від вибору приросту аргументу Δx.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо в цій точці виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Сформульоване означення неперервності накладає на функцію $f(x)$ такі умови: 1) функція визначена в деякому околі точки x_0, включаючи і саму точку x_0, тобто існує число $f(x_0)$; 2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – границя функції в точці x_0; 3) границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці.

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то для неперервної в точці x_0 функції маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, тобто *знак границі* $\lim$ *і знак неперервної функції* f *можна міняти місцями*. Іншими словами, *щоб обчислити границю неперервної функції, треба у її вираз замість аргументу підставити його границю*.

У рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ перенесемо $f(x_0)$ ліворуч та уведемо під знак границі як сталу. Тоді отримаємо $\lim\limits_{x - x_0 \to 0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$, звідки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто *функція неперервна, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна у кожній точці деякого інтервалу $(a;b)$, то вона називається ***неперервною на*** цьому ***інтервалі***.

<u>Приклад</u>. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна у довільній точці x_0 області визначення $D(f) = R$.

□ $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin(\Delta x/2)\cos(x_0 + \Delta x/2)$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(\Delta x/2) = 0$, а величина $\cos(x_0 + \Delta x/2)$ обмежена, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ■

1.9.2. Властивості функцій, які неперервні в точці

Спираючись на властивості границь, можна встановити наступне:

1) Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні у точці x_0, то функції $g(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, $h(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ і $q(x) = f_1(x)/f_2(x)$ $\left(f_2(x) \neq 0 \right)$, також неперервні у точці x_0.

2) Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то й складена функція $f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0.

3) Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 і має обернену функцію $x = f^{-1}(y)$ в деякому околі точки x_0, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$.

4) Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і відмінна від нуля $f(x_0) \neq 0$, то існує такий окіл цієї точки x_0, що для всіх x з указаного околу функція $f(x)$ не обертається в нуль і має знак, який збігається зі знаком $f(x_0)$.

Неперервність функцій використовується при обчисленні границь. З наведених властивостей випливають такі важливі наслідки:

1) ***Заміна змінної***

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \left| \begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \end{array} \right| = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

2) Границя ***показниково-степеневої функції***

$$\lim_{x\to x_0}\left(u(x)\right)^{v(x)}=\left(\lim_{x\to x_0}u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}.$$

3) *Усі елементарні функції є неперервними у кожній точці своєї природної області визначення.*

1.9.3. Односторонні границі. Одностороння неперервність

Границя функції $f(x)$ в точці x_0 при додатковій умові, що x залишається меншим x_0, називається ***лівою границею*** функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається

$$\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції $f(x)$ в точці x_0:

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Ліва і права границі називаються ***односторонніми границями***.

<u>Теорема</u>. *Для того, щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границю, яка дорівнює A, необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі в цій точці, кожна з яких також дорівнює A:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

(Без доведення).

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $(a;x_0]$, $a<x_0$. Функція $f(x)$ ***неперервна у точці*** x_0 ***зліва***, якщо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0).$$

Аналогічно, функція $f(x)$, визначена на півінтервалі $[x_0;b)$, $x_0<b$, ***неперервна у точці*** x_0 ***справа***, якщо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Загальна назва для функції, неперервної зліва чи справа, – ***односторонньо неперервна***.

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і точка $x_0 \in (a;b)$, то *для неперервності функції у точці* x_0 *необхідно і достатньо, щоб функція* $f(x)$ *була неперервна зліва і справа у точці* x_0. Іншими словами, *функція* $f(x)$, *яка визначена в деякому околі точки* x_0, *неперервна в точці* x_0, *якщо обидві її односторонні границі дорівнюють значенню функції в цій точці*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній внутрішній точці відрізка $[a;b]$ і відповідно односторонньо неперервна на його кінцях, то вона називається ***неперервною на відрізку*** $[a;b]$.

1.9.4. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Ці властивості будуть сформульовані у вигляді теорем (подаємо без доведення).

Теорема 1 (про обмеженість функції та існування найменшого та найбільшого значень). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то вона обмежена на цьому відрізку і серед її значень існує найменше* $m = f(x_1)$ *та найбільше* $M = f(x_2)$, *де* $x_1 \in [a;b]$ *і* $x_2 \in [a;b]$ (рис. 50).

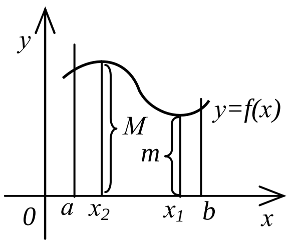


Рис. 50

Зауваження. Твердження теореми може бути невірним, якщо розглядати $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$.

Теорема 2 (про перетворення функції на нуль). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях має значення різних знаків* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Тоді на інтервалі* $(a;b)$

знайдеться хоча б одна точка $x = d$ *така, що* $f(d) = 0$ (рис. 51).

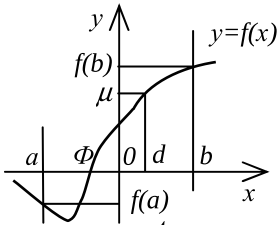


Рис. 51

Теорема 3 (про проміжне значення). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях приймає різні значення* $f(a) \neq f(b)$. *Тоді для будь-якого числа* μ, *що міститься між числами* $f(a)$ *і* $f(b)$, *на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = c$ *така, що* $f(c) = \mu$ (рис. 51).

1.9.5. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація

Неперервна в точці x_0 функція $f(x)$ повинна задовольняти наступні умови: 1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі. 2) існує скінченна ліва границя функції $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$. 3) існує скінченна права границя функції $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. 4) односторонні границі рівні. 5) спільне значення односторонніх границь дорівнює значенню функції $f(x_0)$ в цій точці x_0.

Якщо хоча б одна з перелічених умов порушується, то функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, а сама точка x_0 називається ***точкою розриву*** цієї функції.

Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні односторонні границі, то це – ***точка розриву першого роду***. Якщо у точці розриву x_0 хоча б одна з односторонніх границь нескінченна або взагалі не існує, то це – ***точка розриву другого роду***.

Якщо в точці розриву I роду x_0 односторонні границі рівні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, то маємо ***усувний розрив***, оскільки, поклавши $f(x_0) = A$, дістанемо неперервну функцію.

Якщо в точці розриву I роду x_0 односторонні границі різні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, то маємо ***скінченний стрибок*** висотою $|A_2 - A_1|$.

Якщо в точці розриву II роду x_0 існують одна нескінченна одностороння границя, а інша – скінченна чи нескінченна, то маємо ***нескінченний стрибок***.

Правило. *Для знаходження точок розриву функції* $f(x)$ *і визначення їх характеру треба:*

1) знайти можливі точки розриву (скінченні кінці інтервалів області визначення; точки, в яких змінюється характер задання функції, і т.п.);

2) у кожній "підозрілій" точці x_0 *обчислити , якщо існують, значення функції* $f(x_0)$ *та обидві односторонні границі* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ *і* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$*;*

3) з аналізу отриманих значень зробити висновок про наявність і характер розриву.

Приклад. Визначити точки розриву заданої функції та з'ясувати їх характер:

а) $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$;

б) $y = 3^{-1/x^2}$;

в) $y = \sin(\pi/x)$;

г) $y = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$

□ а) Функція $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$ невизначена у точці $x = 3$. Розглянемо

$$\lim_{x \to 3-0} arctg\left(1/(x-3)\right) = -\pi/2 \quad \text{і} \quad \lim_{x \to 3+0} arctg\left(1/(x-3)\right) = \pi/2 .$$

Функція у точці $x = 3$ має скінченний стрибок висотою π (рис. 52).

б) Функція $y = 3^{-1/x^2}$ невизначена у точці $x = 0$. Розглянемо

$$\lim_{x\to -0} 3^{-1/x^2} = 0 \text{ і } \lim_{x\to +0} 3^{-1/x^2} = 0.$$

Якщо довизначимо функцію рівністю $f(0) = 0$, то дістанемо неперервну у точці $x = 0$ функцію. Отже, маємо усувний розрив (рис. 53).

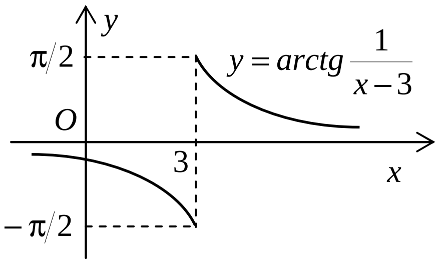


Рис. 52

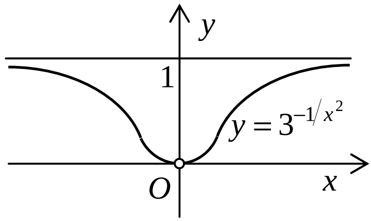


Рис. 53

в) Функція $y = \sin(\pi/x)$ невизначена у точці $x = 0$. Обидві односторонні границі $\lim_{x\to -0} \sin(\pi/x)$ і $\lim_{x\to +0} \sin(\pi/x)$ не існують. Отже, маємо точку розриву II роду (рис. 54).

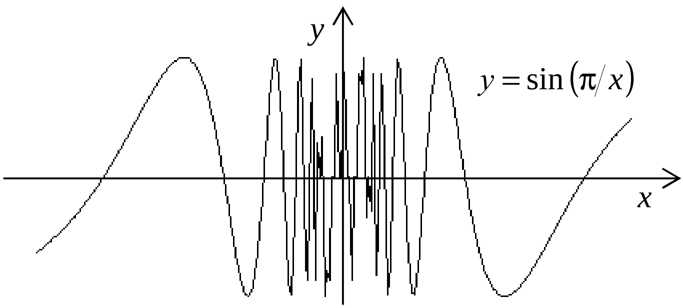


Рис. 54

г) Функція $y = f(x) = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$ визначена на всій числовій прямій, окрім точки $x = -1$, а в точці $x = 1$ змінюється її аналітичний вираз. Тому маємо дві точки, що “підозрілі” на розрив.

У точці $x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=-3;$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=+\infty .$$

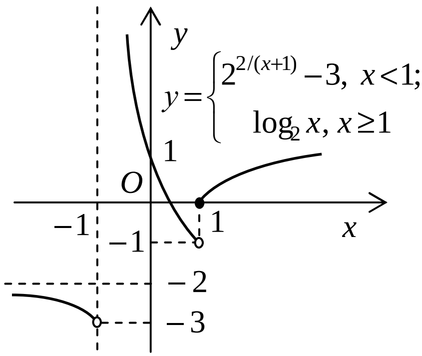


Рис. 55

Отже, у точці $x=-1$ функція має нескінченний стрибок (рис. 55).

У точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=-1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\log_2 x=0;$$

$$f(1)=\log_2 1=0.$$

Отже, у точці $x=1$ функція має скінченний стрибок висотою 1 (рис. 55). ■

1.10. Контрольні запитання

1) Що служить координатною сіткою декартової системи координат на площині?
2) За якою формулою обчислюється відстань між двома точками на площині?
3) За якими співвідношеннями обчислюються координати точки, що ділить даний відрізок у вказаному відношенні?
4) Як записується рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
5) Який вигляд має рівняння прямої, що паралельна осі ординат Oy?
6) Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.
7) Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?

8) Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?
9) Наведіть загальне рівняння прямої.
10) Як знайти гострий кут між двома похилими прямими?
11) Яка умова паралельності двох похилих прямих?
12) Яка умова перпендикулярності двох похилих прямих?
13) За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої?
14) Який вигляд має загальне рівняння лінії другого порядку?
15) Що називається колом? Наведіть канонічне рівняння кола, рівняння кола із заданим центром і радіусом.
16) Що називається еліпсом? Наведіть канонічне рівняння еліпса.
17) Яким співвідношенням зв'язані велика a і мала b півосі еліпса та половина c міжфокусної відстані?
18) Що називається гіперболою? Наведіть канонічне рівняння гіперболи.
19) Яким співвідношенням зв'язані дійсна a і уявна b півосі гіперболи та половина c міжфокусної відстані?
20) Які рівняння асимптот гіперболи?
21) Що називається параболою? Наведіть канонічне рівняння параболи.
22) Що таке ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?
23) Які рівняння директрис еліпса, гіперболи, параболи?
24) У чому полягає властивість директрис еліпса, гіперболи, параболи?
25) У чому полягає оптична властивість ліній другого порядку?
26) Як задається полярна система координат? Що таке головні значення полярних координат?
27) Що служить координатною сіткою полярної системи координат?
28) Якими співвідношеннями зв'язані полярні та прямокутні координати?
29) Яким рівнянням задаються лінії другого порядку в полярних координатах?
30) Наведіть параметричні рівняння прямої та кола.
31) Що таке сталі та змінні величини? Наведіть приклади.
32) Яка змінна величина називається обмеженою? Необмеже-

ною?

33) Яка змінна величина називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
34) Яка змінна величина називається нескінченно малою? Нескінченно великою?
35) Наведіть властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин. Як зв'язані ці величини?
36) Що називається границею змінної величини?
37) Наведіть властивості границь.
38) Що називається першою стандартною границею? Другою стандартною границею? Наведіть їх наслідки.
39) Як здійснюється порівняння нескінченно малих величин? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих.
40) Як розкривається невизначеність виду ∞/∞ для многочленів?
41) Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів, ірраціональних та тригонометричних виразів?
42) Дайте означення функції. Що називається областю визначення, областю значень і законом відповідності функції?
43) Що таке природна область визначення аналітично заданої функції? Як вона знаходиться?
44) Що таке графік функції? Наведіть основні способи задання функції.
45) Яка функція називається обмеженою? Необмеженою?
46) Яка функція називається парною? Непарною? Загального вигляду?
47) Яка функція називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
48) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади періодичних функцій.
49) Що таке складена функція? Наведіть приклади.
50) Яка функція називається оберненою до даної? Як розміщені графіки взаємно обернених функцій?
51) Яка функція називається елементарною? Наведіть приклади алгебраїчних і трансцендентних функцій.
52) Які функції відносяться до основних елементарних?
53) Наведіть приклади границь, що відображають властивості

основних елементарних функцій.

54) Що таке приріст аргументу і відповідний приріст функції? Дайте означення неперервності функції в точці “мовою приростів”.
55) Що таке ліва і права границі функції в точці? Дайте означення неперервності функції в точці через односторонні границі.
56) Наведіть основні властивості функцій, які неперервні в точці.
57) Наведіть основні властивості функцій, неперервних на відрізку.
58) Яка функція називається розривною?
59) Що таке точка розриву першого роду? Другого роду? Наведіть приклади точок усувного розриву, скінченного та нескінченного стрибка.
60) Як знаходять точки розриву аналітично заданої функції?

1.11. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Засобами аналітичної геометрії знайти:

1) рівняння сторони AB та її довжину $|AB|$;

2) рівняння висоти CN та її довжину $|CN|$;

3) рівняння медіани CM;

4) рівняння прямої ET, що проходить через точку перетину E медіан трикутника ABC паралельно стороні AB;

5) гострий кут $\varphi_г$ між висотою CN і медіаною CM;

6) точку перетину S висоти CN і прямої ET.

Зобразити трикутник ABC, знайдені точки і прямі в прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	A	B	C	№ в-та	A	B	C
1	(-6;-5)	(-4;1)	(5;2)	16	(2;-1)	(4;-7)	(-6;4)
2	(-3;-1)	(-1;9)	(2;6)	17	(5;-3)	(1;-1)	(-3;2)
3	(-1;1)	(1;5)	(4;-3)	18	(4;6)	(2;-2)	(-3;-1)
4	(-2;4)	(2;-6)	(5;2)	19	(3;4)	(-1;-6)	(-4;0)
5	(-1;-6)	(3;2)	(3;-2)	20	(1;-2)	(-3;6)	(0;2)
6	(-2;-7)	(6;-3)	(7;1)	21	(2;-1)	(-2;3)	(-6;1)
7	(-2;1)	(-4;-7)	(3;3)	22	(6;-4)	(2;4)	(-3;1)
8	(1;2)	(3;-6)	(-4;-1)	23	(2;-5)	(-8;-3)	(0;4)
9	(4;5)	(2;-3)	(-3;0)	24	(7;-5)	(-3;-3)	(2;1)
10	(5;-6)	(7;2)	(-8;-3)	25	(4;-5)	(6;1)	(-1;2)
11	(-5;-4)	(-1;4)	(6;-1)	26	(5;3)	(-1;-3)	(-3;4)
12	(-3;2)	(7;4)	(1;-5)	27	(3;1)	(-5;7)	(-3;-3)
13	(-2;-5)	(-6;-3)	(6;1)	28	(1;3)	(-5;7)	(0;-3)
14	(6;2)	(-2;4)	(-4;-5)	29	(-3;3)	(3;-1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;2)	(4;-3)	30	(3;7)	(-1;-3)	(-3;2)

Завдання 2. У прямокутній системі координат Oxy лінія другого порядку l визначається вказаною її характеристичною властивістю: для кожної точки $M(x;y)$ лінії l відношення відстаней до заданої точки $M_0(x_0;y_0)$ і до заданої прямої l_0 дорівнює заданому числу ε. Знайти загальне рівняння $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ цієї лінії l.

№ в-та	M_0	l_0	ε	№ в-та	M_0	l_0	ε
1	(2; 3)	$x=-5$	4	16	(-7; 2)	$x=-1$	3
2	(-2; 4)	$x=4$	1/2	17	(-2; -5)	$x=3$	1/4
3	(4; 3)	$x=6$	2	18	(5; -2)	$y=2$	1/2

4	(2; -3)	$x=-1$	3	19	(-4; 3)	$x=-7$	2
5	(1; -4)	$y=-6$	1/4	20	(3; -7)	$y=-2$	1/2
6	(-2; 4)	$y=3$	2	21	(2; -8)	$x=4$	1/3
7	(6; 1)	$x=-5$	1/3	22	(-6; 5)	$x=5$	1/4
8	(7; 2)	$y=6$	1/3	23	(8; -3)	$y=-1$	4
9	(4; 1)	$y=-4$	3	24	(-4; -8)	$y=-4$	1
10	(2; 3)	$x=-4$	2	25	(2; 3)	$y=-4$	2
11	(5; 6)	$x=-3$	1	26	(-5; -8)	$x=3$	1
12	(-5; 1)	$y=8$	2	27	(6; -7)	$y=1$	1/2
13	(-2; 7)	$y=-6$	1	28	(-3; 7)	$x=-2$	1/4
14	(-3; -5)	$x=8$	1/2	29	(7; -4)	$y=2$	3
15	(-6; -3)	$y=-5$	1/3	30	(4; -7)	$y=2$	2

Завдання 3. У прямокутній системі координат Oxy коло l задане своїм загальним рівнянням вигляду $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, де відсутній член з добутком координат xy. Привести задане рівняння кола до відповідного стандартного вигляду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ і знайти координати центра $C(x_0;y_0)$ і радіус R. Зобразити задане коло l у прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння кола
1	$4x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
2	$3x^2+3y^2+2x-6y-1=0$
3	$4x^2+4y^2+6x+12y-11=0$
4	$4x^2+4y^2-6x+16y-11=0$
5	$5x^2+5y^2-20x-3y-5=0$

6	$7x^2+7y^2+28x-14y-4=0$
7	$2x^2+2y^2+14x+5y-6=0$
8	$5x^2+5y^2-30x+10y-1=0$
9	$4x^2+4y^2-3x-36y-6=0$
10	$4x^2+4y^2+24x-10x-3=0$
11	$6x^2+6y^2+6x-8y-5=0$
12	$5x^2+5y^2-25x-10y-1=0$
13	$2x^2+2y^2+16x-3y-6=0$
14	$4x^2+4y^2-2x-16y+3=0$
15	$3x^2+3y^2-18x-4y+4=0$
16	$5x^2+5y^2-6x+10y-6=0$
17	$3x^2+3y^2-6x-4y-11=0$
18	$2x^2+2y^2-18x+7y-1=0$
19	$4x^2+4y^2-8x-7y-12=0$
20	$3x^2+3y^2-15x+8y-9=0$
21	$6x^2+6y^2-4x+12y+5=0$
22	$5x^2+5y^2+20x-2y-15=0$
23	$4x^2+4y^2+8x-10y-3=0$
24	$3x^2+3y^2-18x-8y-12=0$
25	$2x^2+2y^2-12x+7y-6=0$
26	$7x^2+7y^2+14x+7y-3=0$
27	$4x^2+4y^2-8x+18y-5=0$
28	$5x^2+5y^2+10x-15y-2=0$
29	$3x^2+3y^2-4x-12y+2=0$
30	$2x^2+2y^2-16x-7y+3=0$

Завдання 4. У прямокутній системі координат Oxy еліпс l заданий своїм загальним рівнянням вигляду $Ax^2 + By^2 + F = 0$, де відсутні лінійні члени відносно координат x і y, а також член з добутком координат xy. Привести задане рівняння еліпса до відповідного канонічного вигляду $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ і знайти велику a та малу b півосі, координати фокусів $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ і ексцентриситет ε. Зобразити заданий еліпс l у прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння еліпса	№ в-та	Рівняння еліпса
1	$x^2 + 16y^2 - 144 = 0$	16	$4x^2 + 49y^2 - 196 = 0$
2	$4x^2 + 9y^2 - 144 = 0$	17	$9x^2 + 49y^2 - 1764 = 0$
3	$25x^2 + 144y^2 - 3600 = 0$	18	$25x^2 + 81y^2 - 2025 = 0$
4	$49x^2 + 81y^2 - 3969 = 0$	19	$49x^2 + 64y^2 - 3136 = 0$
5	$4x^2 + 81y^2 - 324 = 0$	20	$16x^2 + 81y^2 - 1296 = 0$
6	$16x^2 + 49y^2 - 3136 = 0$	21	$4x^2 + 49y^2 - 784 = 0$
7	$49x^2 + 144y^2 - 196 = 0$	22	$49x^2 + 144y^2 - 784 = 0$
8	$9x^2 + 169y^2 - 169 = 0$	23	$25x^2 + 169y^2 - 676 = 0$
9	$49x^2 + 225y^2 - 900 = 0$	24	$25x^2 + 49y^2 - 4900 = 0$
10	$4x^2 + 169y^2 - 169 = 0$	25	$4x^2 + 225y^2 - 900 = 0$
11	$9x^2 + 256y^2 - 1024 = 0$	26	$169x^2 + 225y^2 - 4225 = 0$
12	$16x^2 + 225y^2 - 3600 = 0$	27	$49x^2 + 225y^2 - 900 = 0$
13	$64x^2 + 225y^2 - 225 = 0$	28	$16x^2 + 169y^2 - 2704 = 0$
14	$25x^2 + 256y^2 - 6400 = 0$	29	$81x^2 + 256y^2 - 324 = 0$
15	$81x^2 + 169y^2 - 1521 = 0$	30	$144x^2 + 169y^2 - 6084 = 0$

Завдання 5. У прямокутній системі координат Oxy гіпербола l задана своїм загальним рівнянням вигляду $Ax^2 + By^2 + F = 0$, де відсутні лінійні члени відносно координат x і y, а також член з добутком координат xy. Привести задане рівняння гіперболи до відповідного канонічного вигляду $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ і знайти дійсну a та уявну b півосі, координати фокусів $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ і ексцентриситет ε, а також рівняння асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$. Зобразити задану гіперболу l та її асимптоти в прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння гіперболи	№ в-та	Рівняння гіперболи
1	$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$	16	$x^2 - 9y^2 - 36 = 0$
2	$4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$	17	$9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$
3	$x^2 - 4y^2 - 16 = 0$	18	$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$
4	$x^2 - 16y^2 - 64 = 0$	19	$x^2 - 25y^2 - 100 = 0$
5	$4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$	20	$16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$
6	$x^2 - 49y^2 - 49 = 0$	21	$4x^2 - 49y^2 - 196 = 0$
7	$x^2 - 49y^2 - 196 = 0$	22	$x^2 - 49y^2 - 441 = 0$
8	$9x^2 - 49y^2 - 1764 = 0$	23	$25x^2 - 49y^2 - 1225 = 0$
9	$x^2 - 36y^2 - 36 = 0$	24	$25x^2 - 36y^2 - 900 = 0$
10	$25x^2 - 36y^2 - 3600 = 0$	25	$25x^2 - 36y^2 - 8100 = 0$
11	$x^2 - 16y^2 - 256 = 0$	26	$x^2 - 16y^2 - 1600 = 0$
12	$36x^2 - 49y^2 - 1764 = 0$	27	$9x^2 - 64y^2 - 576 = 0$
13	$9x^2 - 64y^2 - 2304 = 0$	28	$x^2 - 64y^2 - 256 = 0$
14	$25x^2 - 64y^2 - 2500 = 0$	29	$25x^2 - 64y^2 - 6400 = 0$
15	$49x^2 - 64y^2 - 3136 = 0$	30	$49x^2 - 64y^2 - 784 = 0$

Завдання 6. У прямокутній системі координат Oxy парабола l задана своїм загальним рівнянням вигляду $By^2 - Dx = 0$, де $B > 0,\ D > 0$ і відсутні лінійні члени відносно координат x і y, а також член з добутком координат xy і член з x^2. Привести задане рівняння параболи до відповідного канонічного вигляду $y^2 = 2px$ і знайти значення параметра p і координати фокуса $F(p/2;0)$, а також рівняння директриси $x = -p/2$. Зобразити задану параболу l та її директрису в прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння параболи	№ в-та	Рівняння параболи
1	$3y^2 - 10x = 0$	16	$2y^2 - 17x = 0$
2	$5y^2 - 24x = 0$	17	$4y^2 - 15x = 0$
3	$8y^2 - 27x = 0$	18	$6y^2 - 29x = 0$
4	$4y^2 - 25x = 0$	19	$2y^2 - 27x = 0$
5	$3y^2 - 32x = 0$	20	$3y^2 - 16x = 0$
6	$6y^2 - 25x = 0$	21	$4y^2 - 15x = 0$
7	$2y^2 - 15x = 0$	22	$3y^2 - 16x = 0$
8	$5y^2 - 12x = 0$	23	$8y^2 - 45x = 0$
9	$3y^2 - 22x = 0$	24	$5y^2 - 32x = 0$
10	$4y^2 - 9x = 0$	25	$6y^2 - 19x = 0$
11	$6y^2 - 35x = 0$	26	$4y^2 - 21x = 0$
12	$4y^2 - 45x = 0$	27	$4y^2 - 27x = 0$
13	$5y^2 - 36x = 0$	28	$3y^2 - 28x = 0$
14	$8y^2 - 25x = 0$	29	$9y^2 - 64x = 0$
15	$3y^2 - 20x = 0$	30	$4y^2 - 35x = 0$

Завдання 7. Лінія l задана в полярній системі координат рівнянням у явній формі $\rho = \rho(\varphi)$. Знайти точки даної лінії, що відповідають значенням аргументу φ, взятим через інтервал $\pi/8$, починаючи з $\varphi = 0$, на проміжку $0 \le \varphi \le 2\pi$ (головні значення полярних координат). Заповнити таблицю

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$
ρ										

φ	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
ρ							

Побудувати знайдені точки в полярній системі координат і одержати зображення заданої кривої l, сполучивши послідовно ці точки суцільною лінією.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.

№ в-та	Рівняння лінії	№ в-та	Рівняння лінії
1	$\rho = 1 + \sin 2\varphi$	16	$\rho = 1 + \cos 2\varphi$
2	$\rho = 4/(3 - \cos 2\varphi)$	17	$\rho = 6/(3 + \cos\varphi)$
3	$\rho = 4(1 - \sin\varphi)$	18	$\rho = 8(1 + \cos(\varphi/2))$
4	$\rho = 6/(2 + \cos\varphi)$	19	$\rho = 5/(4 - 3\sin\varphi)$
5	$\rho = 2 + \sin^3(\varphi/2)$	20	$\rho = 4\sin^3(\varphi/2)$
6	$\rho = 4 + 2\sqrt[3]{\cos\varphi}$	21	$\rho = 3 + 2\sqrt[3]{\sin\varphi}$
7	$\rho = 3 + 2\cos^3\varphi$	22	$\rho = 1 + 4\cos^2\varphi$
8	$\rho = 2 + \sqrt[3]{\cos(\varphi/2)}$	23	$\rho = 1 + \sin^2(\varphi/2)$
9	$\rho = 3(1 + \cos 2\varphi)$	24	$\rho = 4(1 - \cos 2\varphi)$
10	$\rho = 6(1 + \sin\varphi)$	25	$\rho = 2 + \cos^3(\varphi/3)$

11	$\rho = 6 - 4\cos^2\varphi$	26	$\rho = 5 - 4\sin^2\varphi$
12	$\rho = 2 - \sqrt[3]{\cos 2\varphi}$	27	$\rho = 2 + \cos^3\varphi$
13	$\rho = 2 + \sin^3(\varphi/3)$	28	$\rho = 2 - \sin^2(\varphi/3)$
14	$\rho = 4 + \cos^3(\varphi/3)$	29	$\rho = 3 - 2\sin^2(\varphi/3)$
15	$\rho = 6/(2 + \cos^3\varphi)$	30	$\rho = 4/(2 - \sin^3\varphi)$

Завдання 8. Лінія l задана в декартовій прямокутній системі координат Oxy параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Знайти точки даної лінії, що відповідають значенням параметра t, взятим через інтервал $\pi/8$, починаючи з $t = 0$, на проміжку $0 \le t \le 2\pi$. Заповнити таблицю

t	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$
x										
y										

t	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
x							
y							

Побудувати знайдені точки в декартовій прямокутній системі координат Oxy і одержати зображення заданої кривої l, сполучивши послідовно отримані точки суцільною лінією.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.

№ в-та	Рівняння лінії	№ в-та	Рівняння лінії
1	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 2\sqrt[3]{\cos t} \\ y = 4\sin t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = 6\cos(t/2) \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/2) \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2(1-\sin t) \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 6\sin t \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 6\sqrt[3]{\sin t} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 3(1+\cos t) \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = (8/\pi)t\sin t \\ y = -(8/\pi)t\cos t \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/2) \\ y = 2\sin t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin 2t \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 3(1+\cos t) \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = 1+4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 4\cos(t/2) \\ y = 2\sqrt{\sin(t/2)} \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sqrt[3]{\sin t} \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = (2/\pi)t\sin t \\ y = (6/\pi)t\cos t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = (4/\pi)t\cos t \\ y = (8/\pi)t\sin t \end{cases}$

12	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sqrt[3]{\sin t} \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \sqrt[3]{\cos t} \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2(1+\sin t) \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = 6\sqrt[3]{\cos(t/2)} \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = 4\sqrt[3]{\cos t} \\ y = 2\sin t \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = 8\cos t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t+\sin t \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}$

Завдання 9. Застосовуючи стандартні границі, еквівалентні нескінченно малі та інші прийоми (крім правила Лопіталя), знайти вказані границі.

№ в-та	Границі
1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{2x^3-4x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{2x^2+x-21}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{\sqrt{8x+1}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,tg\,2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^x$
2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+7}{5x^2+7x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+6)-\ln x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$
3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^4-x}{8x^3-2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x^2-2x}{2x^2-x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+7}\right)^{3x}$

4	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+5}{2x^2+9x-4}$; б) ‹)$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{6x^2-37x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{\sqrt{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos x}{\cos 6x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{x}$
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-7}{8x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x-2)-\ln(x+8)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2+x-28}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{3x^2-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 x}{x\sin 2x}$
6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+5x-2}{2x^3+4x^2+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x^2+4x}{x^2-4x+3}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x-48}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-1}\right)^{x+3}$
7	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-5x+28}{7x^3+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x^2-6x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg^2 3x}{x\sin 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x-5}\right)^{x-1}$
8	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+18x-3}{6x^4+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\ln(x+7)-\ln x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-10x+25}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin x-1}{(6x-\pi)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^3-8}$
9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+4x-3}{5x^3+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+4}\right)^{4x}$

10	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7+6x-1}{4x^5-4x^3+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x+35}{x^2-2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3+8}-3}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{arctg\, 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x}\right)^{3x-1}$
11	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+5x^2+1}{14x^4-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\cos 2x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^2-4x-5}{x^2+2x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x-5}-2}{x^2-9}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e+x)-1}{x}$
12	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+7x^3-4}{3x^9+5x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2-3}{x^2-x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{x\ \sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{3x}$
13	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^7-5x^3+1}{3x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{4x^2-9x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2+11}-6}{x^3-125}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{x\,tg\, 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+6}\right)^{4x}$
14	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x^2-4}{x^6-6x^3+7}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-5)\left(\ln(x-9)-\ln x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{2-\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,tg\,\dfrac{\pi x}{2}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{2x^2+x-6}$
15	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+7x^4-2}{3x^5+6x^3-x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+4x^2}-\sqrt{x^3-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{x^2+9x+8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-6}\right)^{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{x\,tg\, x}$

16	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7x^2+1}{5x^4-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(2x+3)-\ln(2x-1)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2x^2-7x-49}{x^2-14x+49}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x^3-64}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 5x}{arctg^2 3x}$
17	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+3x^4-9}{12x^3-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+5x-25}{x^2-x-30}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2\pi x}{x\,tg\,3\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-2}$
18	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^6-7x^2+1}{5x^6+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4-3}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\,arctg\,2x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5-x}{5+3x}\right)^{2/x}$
19	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6-5x^2+2}{6x^3+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)\left(\ln(4x-1)-\ln 4x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{3x^2+5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2-\sqrt{4-x^3}}$; д) $\lim\limits_{x\to0} x\,ctg\,4x$
20	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2+4x}{6x^4+4x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left(\ln(x-3)-\ln x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{\sqrt{x^3-18}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 7x}{arctg^2 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-9x+4}$
21	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4-7x+4}{25x^2+x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{3x^2+7x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3x+2}{5x+2}\right)^{4x}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin\pi x}$

22	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-x+7}{6x^8+2x^6-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\left(\ln(5x-1)-\ln 5x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{\sqrt{4+3x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{4\sin^2 x-1}{36x^2-\pi^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-6}$
23	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-x^3+10}{2x^3+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{2x^2-x-105}{x^2+5x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^3-125}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{arctg\,(x+2)}{x^2+2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-5x}{7x+2}\right)^{4/x}$
24	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-6x^2-1}{3x^2-x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+4x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2+x-42}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{(\pi-x)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{2x+3}\right)^{3/x}$
25	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-3}{5x^6+6x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x^2+9x-18}{x^2-2x-48}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x^3}-1}{\sqrt{9+x^2}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+7}\right)^{2x}$
26	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-5x+3}{3x^5+2x^3-5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+2)\left(\ln 3x-\ln 3x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{\sqrt{5x}-x}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{tg(x+1)}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$
27	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+7x-2}{8x^4-2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x(\sin 5x-\sin 3x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^3-125}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-9x+9}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+3}\right)^{x}$

28	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+5x^4-1}{3x^4+5x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+7)\big(\ln x-\ln(x+6)\big)$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+27}+2x}{\sqrt{4-7x}-5}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-8x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg^2x}{x\sin6x}$
29	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+7x^2-5}{18x^3-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2-9x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{\sqrt{3x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{2x}$
30	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-14x+2}{3x^4+7x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-9)\big(\ln x-\ln(x+3)\big)$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{7x+2}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin7x}{tg^25x}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$

Завдання 10. Визначити точки розриву заданої функції та з'ясувати їх характер. Зобразити графічно цю функцію в околі кожної точки розриву.

№ в-та	Функція	№ в-та	Функція
1	$f(x)=\dfrac{1}{x-3}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$	16	$f(x)=\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$
2	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$	17	$f(x)=\dfrac{x}{x-4}2^{4/x}$
3	$f(x)=2^{1/(x^2-1)}x$	18	$f(x)=\dfrac{x-1}{\lg(x-9)}$
4	$f(x)=\dfrac{1}{\pi x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$	19	$f(x)=\dfrac{3}{x-1}2^{3/(x+2)}$

5	$f(x)=\dfrac{1}{x-1}3^{2/(x-2)}$	20	$f(x)=\dfrac{\pi\sin x}{x(x-\pi)}$
6	$f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}2^{3/(x+2)}$	21	$f(x)=\dfrac{x}{\log_2(1+x)}$
7	$f(x)=\dfrac{1}{\pi(x-1)}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$	22	$f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$
8	$f(x)=\dfrac{\log_2(2+x)}{x-1}$	23	$f(x)=\dfrac{1}{x}2^{4/(x-4)}$
9	$f(x)=\dfrac{\log_2(1+x^2)}{x^2-x}$	24	$f(x)=\dfrac{x-1}{\log_2(4+x)}$
10	$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x(x-1)}$	25	$f(x)=\dfrac{2^x-1}{x(x-2)}$
11	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}\operatorname{arctg}(x-3)$	26	$f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x-3)}$
12	$f(x)=\dfrac{\log_2(1+x^2)}{x^2-2x}$	27	$f(x)=\dfrac{1}{x-1}3^{2/(x+1)}$
13	$f(x)=\dfrac{2^x-1}{x(x-3)}$	28	$f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-x}$
14	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\operatorname{arctg}(x+1)$	29	$f(x)=\dfrac{4}{x-2}2^{4/(x+2)}$
15	$f(x)=\dfrac{2}{x}3^{2/(x-2)}$	30	$f(x)=\dfrac{1}{x+3}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x}$

Змістовий модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Похідна та диференціал

2.1.1. Похідна. Її фізичний та геометричний зміст

Поняття похідної. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y / \Delta x$, яке також буде функцією приросту аргументу Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля* $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 записується так: $f'(x_0)$, або $y = f'(x)\big|_{x=x_0}$, або $df(x_0)/dx$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням*** функції. Функція, що має похідну у точці x_0, називається ***диференційованою*** у цій точці.

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона ***диференційована на проміжку*** $(a;b)$. Похідна функції $y = f(x)$, диференційованої у проміжку $(a;b)$, сама є функцією x.

Теорема (зв’язок між поняттями диференційованості та неперервності). *Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій* *точці* x_0*, то вона неперервна в цій точці.*

$$\square\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=y'\cdot 0=0.\ \blacksquare$$

Зауваження. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в деякій точці x_0, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці. Наприклад, $y=|x|$ – недиференційована в точці $x=0$, хоч у цій точці неперервна.

Приклад 1. Дано функцію $y=x^2$. Знайти її похідну y':

а) в довільній точці x; б) коли $x=-3$.

□ а) Для будь-якого x маємо $y=x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x+\Delta x$, то $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тоді $\Delta y/\Delta x=(2x\Delta x+(\Delta x)^2)/\Delta x=2x+\Delta x$. Обчислимо похідну $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$. б) $y'\big|_{x=-3}=2\cdot(-3)=-6$. ■

Фізичний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Візьмемо який-небудь момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t=t_0+\Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо через $\Delta S(t_0)$. Цей шлях – функція Δt. За відомим з фізики означенням, відношення $\Delta S(t_0)/\Delta t$ є середня швидкість руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt, що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta S(t_0)/\Delta t=S'(t_0)=V(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Геометричний сенс похідної. Дотична і нормаль. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M* (рис. 56). Візьмемо на лінії *L* деяку точку *N*, яка не збігається з точкою *M*. Пряма *MN* є січною для лінії *L*. Нехай тепер точка *N* наближається до точки *M*, залишаючись на лінії *L*. Тоді кожному положенню точки *N* відповідатиме своя січна і усі ці січні проходитимуть через точку *M*.

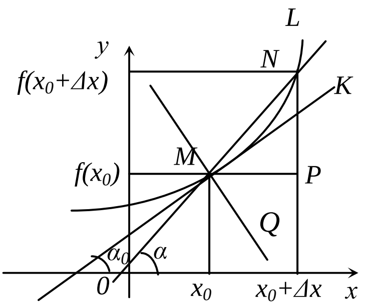


Рис. 56

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M*. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія *L*, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка *M*, яка лежить на графіку функції $y = f(x)$ має координати $(x_0;\ f(x_0))$. Нехай точка *N* належить графіку функції (рис. 56) і має координати $((x_0 + \Delta x); f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо через точку *M* пряму, паралельну Ox, і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через *P*. Розглянемо прямокутний трикутник *MNP*.

Відношення $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x = tg\,\alpha$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної *MN* до додатного напряму осі Ox.

Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ рухатиметься по лінії *L*, наближаючись до точки *M*, а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x\right] = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\alpha.$$

Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $y'_0 = f'(x_0)$, а границя правої частини дорівнює $tg\,\alpha_0$, тому $tg\,\alpha_0 = y'_0$. тобто *значення похідної функції* $f'(x)$, *у точці* x_0, *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної*.

Тоді <u>рівняння дотичної</u> до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку *M* з координатами $(x_0;\ y_0)$, можна записати у вигляді

$$y-y_0=y'_0\cdot(x-x_0)\,.$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику *M* і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння

$$y-y_0=\left(-1/y'_0\right)\cdot(x-x_0)\,.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y=x^2$ у точці $M\left(1/2;\,1/4\right)$. Скласти рівняння дотичної.

□ Візьмемо похідну від функції $y=x^2$: $y'=2x$. Тоді: $tg\,\alpha=y'(x_0)=2\cdot(1/2)=1$; $\alpha=arctg\,1=45^\circ$ – кут нахилу дотичної; $y-1/4=1\cdot(x-1/2)$; $y=x-1/4$ – дотична. ■

2.1.2. Правила диференціювання. Похідна складеної та оберненої функцій

<u>Правила диференціювання.</u> Нехай маємо деякі функції $u=u(x)$, $v=v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a;b)$. Тоді:

1) Якщо $y=cu$, то $y'=(cu)'=cu'$, де $c=const$,

тобто *сталий множник можна виносити з-під знаку похідної*;

2) Якщо $y=u\pm v$, то $y'=(u\pm v)'=u'\pm v'$,

тобто *похідна суми або різниці функцій дорівнює відповідно сумі або різниці їх похідних*;

3) Якщо $y=uv$, то $y'=(uv)'=u'v+v'u$,

тобто *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію*;

4) Якщо $y=\dfrac{u}{v}$, де $v\neq0$, то $y'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$,

тобто *похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*.

Кожне а цих правил можна розглядати як теорему.

Доведемо, наприклад, правило для дробу $y = u / v$. Якщо Δy, Δu і Δv є прирости функцій $y(x)$), $u(x)$, $v(x)$, відповідні приросту Δx аргументу x, то $y + \Delta y = (u + \Delta u)/(v + \Delta v)$,

$$\Delta y = (u + \Delta u)/(v + \Delta v) - u / v = (v\Delta u - u\Delta v)/(v(v + \Delta v)).$$

Останню рівність розділимо на Δx:

$$\Delta y / \Delta x = (v\Delta u - u\Delta v)/(\Delta x \cdot v(v + \Delta v)) =$$

$$= (v\Delta u / \Delta x - u\Delta v / \Delta x)/(v(v + \Delta v)).$$

Знайдемо границю цього співвідношення. Маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (v\Delta u / \Delta x - u\Delta v / \Delta x) / \lim_{\Delta x \to 0} (v(v + \Delta v)) =$$

$$= (v \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u / \Delta x - u \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v / \Delta x)/(v^2 + v \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v).$$

Так як $v(x)$ – диференційована і, отже, неперервна функція, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Маємо $y' = (vu' - uv')/v^2$, де $v \neq 0$.

<u>Теорема 1 (похідна складеної функції)</u>. *Якщо функція $u = u(x)$ має похідну у деякій точці $x \in (a;b)$, а функція $y = f(u)$ має похідну у відповідній точці $u = u(x)$, то й складена функція $y = f(u(x))$ має похідну у точці x, причому*

$$y'_x = (f(u(x))' = y'_u(u) \cdot u'_x(x),$$

де індекси y і x біля похідних вказують, за яким аргументом обчислюють похідні. Тобто *похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції*.

$$\square \quad y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \begin{vmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta u \to 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} (\Delta y / \Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta u / \Delta x) = y'_u \cdot u'_x. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Якщо складена функція є результатом цілого ряду суперпозицій, то для знаходження її похідної за проміжний

аргумент треба взяти результат всіх цих суперпозицій, крім останньої.

Теорема 2 (похідна оберненої функції). *Нехай функція* $y = f(x)$ *задовольняє умові існування оберненої функції і у точці* $x \in (a;b)$ *має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція* $x = f^{-1}(y)$ *у відповідній точці* $y = f(x)$ *також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю*

$$(f^{-1}(y))'_y = 1/f'_x(x).$$

$$\square \quad x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \left| \begin{matrix} \Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 1 \Big/ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta y / \Delta x \right) = 1 / y'_x . \quad \blacksquare$$

2.1.3. Основні формули диференціювання

Похідні елементарних функцій подамо всі разом (табл. 5, де $u = u(x)$), а потім вибірково доведемо деякі з них.

Таблиця 5

Формули похідних		
1. Основні формули		
№ п/п	Функція	Похідна
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
7	Тангенс	$\left(tg\ u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	Котангенс	$\left(ctg\ u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	Арксинус	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	Арккосинус	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	Арктангенс	$\left(arctg\ u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	Арккотангенс	$\left(arcctg\ u\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

2. Додаткові формули		
13	Показниково-степенева функція	$\left(u^{v}\right)' = vu^{v-1}\cdot u' + {}$ $+u^{v}\ln u\cdot v'$
14	Гіперболічний синус	$(sh\,u)' = ch\,u\cdot u'$
15	Гіперболічний косинус	$(ch\,u)' = sh\,u\cdot u'$
16	Гіперболічний тангенс	$(th\,u)' = \dfrac{1}{ch^{2}\,u}\cdot u'$
17	Гіперболічний котангенс	$(cth\,u)' = -\dfrac{1}{sh^{2}\,u}\cdot u'$

Доведемо деякі наведені формули диференціювання.

Теорема 1. *Похідна від* $\sin x$ *є* $\cos x$.

□ Дамо аргументу x приріст Δx. Тоді

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)\text{, де } y=\sin x;$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin((x+\Delta x-x)/2)\times$$

$$\times\cos((x+\Delta x+x)/2)=2\sin x(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2).$$

Розділимо на Δx:

$$\Delta y/\Delta x=(2\sin x(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2))/\Delta x.$$

Знайдемо границю

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}(\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)\times$$

$\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)$. Але $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2))=1$, тому $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x$. Остання рівність випливає з неперервності функції $\cos x$. ■

Теорема 2. *Похідна від* $tg\,x$ *є* $1/\cos^{2}x$.

□ Похідну функції $y = tg\,x = \sin x / \cos x$ можна знайти за правилом диференціювання дробу

$$y' = \left((\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x\right) / \cos^2 x =$$
$$= \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) / \cos^2 x = 1 / \cos^2 x \,. \ ■$$

<u>Теорема 3</u>. *Похідна від функції* $\log_a x$ *є* $1/(x \cdot \ln a)$.

□ Якщо Δy є приріст функції $y = \log_a x$, який відповідає приросту Δx аргументу x, то

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)\,; \quad \Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x\,;$$

$$\Delta y = \log_a (1 + \Delta x / x)\,; \quad \Delta y / \Delta x = (1/\Delta x) \log_a (1 + \Delta x / x)\,.$$

Помножимо і поділимо на x вираз, який стоїть праворуч у останній рівності: $\Delta y / \Delta x = (1/x)(x/\Delta x) \log_a (1 + \Delta x / x) =$

$= (1/x) \log_a (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x}$. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (1/x) \log_a (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x} =$$

$$= (1/x) \log_a \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x} = (1/x) \log_a e = 1/(x \cdot \ln a)\,. \ ■$$

<u>Теорема 4</u>. *Похідна від* $y = \arcsin x$ *є* $1/\sqrt{1 - x^2}$.

□ Оберненою функцією до функції $y = \arcsin x$ є функція $x = \sin y$. За теоремою про похідну оберненої функції маємо $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/(\cos(\arcsin x))$.

Оскільки $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, то $y' = 1/\sqrt{1 - x^2}$. ■

<u>Теорема 5</u>. *Похідна від* $sh\,x$ *є* $ch\,x$.

□ За визначенням гіперболічних функцій

$sh\,x = (e^x - e^{-x})/2$ і $ch\,x = (e^x + e^{-x})/2$. Похідна від функції e^{ax} є ae^{ax}. Тоді маємо

$$(sh\,x)' = ((e^x - e^{-x})/2)' = (e^x + e^{-x})/2 = ch\,x\,. \ ■$$

<u>Приклад</u>. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^2 \sin 5x$; б) $y = x^4 / \cos 3x$; в) $y = e^{arctg\, x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}$.

□ а) $y' = (x^2 \sin 5x)' = (x^2)' \sin 5x + x^2 (\sin 5x)' =$

$$= 2x \sin 5x + 5x^2 \cos 5x;$$

б) $y' = (x^4 / \cos 3x)' = \left((x^4)' \cos 3x - (\cos 3x)' x^4\right):$

$$: \cos^2 3x = \left(4x^3 \cos 3x + 3 \sin 3x \cdot x^4\right) / \cos^2 3x = .$$

$$= x^3 (4 \cos 3x + 3x \sin 3x) / \cos^2 3x;$$

в) $y' = \left(e^{arctg\, x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' = \left(e^{arctg\, x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' =$

$$= e^{arctg\, x} \cdot (arctg\, x)' - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \left(\ln(1+x^2)\right)' =$$

$$= e^{arctg\, x} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \left(1+x^2\right)' =$$

$$= \left(1/(1+x^2)\right)\left(e^{arctg\, x} - x / \sqrt{\ln(1+x^2)}\right). \quad \blacksquare$$

2.1.4. Диференціювання неявно заданої функції. Правило логарифмічного диференціювання

Правило диференціювання функції $y = y(x)$, що задана неявно рівнянням $F_1(x, y) = F_2(x, y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y як функцію від x, тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції;

2) з одержаної рівності знайти y'.

Зауваження 1. Похідна неявної функції $y = y(x)$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад 1. Знайти похідну y' неявної функції $y = y(x)$, що задана рівнянням $tg\,(2x+y)-3x^2=1+xy^2$ у точці $M(-1;2)$. Скласти рівняння нормалі.

□ $\left(tg\,(2x+y)-3x^2\right)'=\left(1+xy^2\right)'$; $\dfrac{1}{\cos^2(2x+y)}(2x+y)'-$

$$-3\cdot 2x=0+x'y^2+x(y^2)';$$

$$\left(1/\cos^2(2x+y)\right)(2+y')-6x=y^2+x\cdot 2yy';$$

$$2+y'-6x\cos^2(2x+y)=y^2\cos^2(2x+y)+2xyy'\cos^2(2x+y);$$

$$y'=\left(y^2\cos^2(2x+y)-2+6x\cos^2(2x+y)\right)/\left(1-\right.$$

$$\left.-2xy\cos^2(2x+y)\right);$$

$$y'\big|_{M(-1;2)}=\left(2^2\cos^2(2\cdot(-1)+2)-2+6\cdot(-1)\cos^2(2\cdot(-1)+2)\right):$$

$$:\left(1-2\cdot(-1)\cdot 2\cos^2(2\cdot(-1)+2)\right)=-4/5.$$

Рівняння нормалі $y-y_0=\left(-1/y'_0\right)\cdot(x-x_0)$;

$y-2=\left(-1/(-4/5)\right)\cdot\left(x-(-1)\right)$; $y=(5/4)x+13/4$. ■

Зауваження 2. У ряді випадків при диференціюванні навіть явної функції зручно попередньо перейти до її неявного задання.

Правило логарифмічного диференціювання явно заданої функції $y=f(x)$:

1) прологарифмувати ліву і праву частини відповідного рівняння $y=f(x)$*;*

2) до результату логарифмування застосувати правило диференціювання неявної функції;

3) у співвідношення для похідної y' *замість* y *підставити вираз* $f(x)$.

Теорема 2. *Похідна від* $y=x^{\alpha}$*, де* $\alpha\in R$*, є* $\alpha x^{\alpha-1}$.

□ Нехай $x>0$. Логарифмуємо дану функцію, маємо $\ln y=\alpha\ln x$. Візьмемо похідну від обох частин рівності

$y'/y=\alpha/x$. Звідси $y'=y(\alpha/x)=x^{\alpha}(\alpha/x)=\alpha x^{\alpha-1}$. ■

Теорема 3. *Похідна від* $y=u(x)^{v(x)}$ *є* $u^{v}(v'\ln u+vu'/u)$.

□ Логарифмуємо дану функцію $\ln y=v\ln u$. Візьмемо похідну від обох частин рівності $y'/y=v'\ln u+v\cdot u'/u$. Звідси $y'=u^{v}(v'\ln u+vu'/u)$. ■

Приклад 2. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y=x^{x}$; б) $y=(2x-1)^{5}\sqrt[3]{(4-x)^{2}}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right)$.

□ а) $\ln y=x\ln x$; $y'/y=\ln x+x(1/x)$; $y'=y(\ln x+1)$;

$$y'=x^{x}(\ln x+1);$$

б) $\ln y=\ln(2x-1)^{5}+\ln\sqrt[3]{(4-x)^{2}}-\ln 2^{6\sin x}-\ln(x+3)$;

$$\ln y=5\ln(2x-1)+(2/3)\ln(4-x)-6\sin x\cdot\ln 2-\ln(x+3).$$

Візьмемо похідну від обох частин одержаної рівності

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{2x-1}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4-x}\cdot(-1)-6\ln 2\cdot\cos x-\frac{1}{x+3}.$$

Звідси

$$y'=\left(10/(2x-1)-2/\left(3(4-x)\right)-6\ln 2\cdot\cos x-1/(x+3)\right)\times$$
$$\times(2x-1)^{5}\sqrt[3]{(4-x)^{2}}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right). \quad ■$$

2.1.5. Похідна параметрично заданої функції

Теорема (похідна параметрично заданої функції). *Нехай функцію* $y=f(x)$ *задано у параметричному вигляді:* $y=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$, *де* t *– параметр. Якщо функції* $\psi(t)$ *і* $\varphi(t)$ *диференційовані на інтервалі* $(\alpha;\beta)$ *і функція* $\varphi(t)$ *має обернену, причому* $\varphi_t'(t)\neq 0$, *то похідна функції* $y=f(x)$ *знаходиться як відношення* $y_x'=\psi'(t)/\varphi'(t)=y_t'/x_t'$.

□ Функція $\varphi(t)$ має обернену функцію $t=t(x)$, їх похідні зв'язані рівністю $x'_t = 1/t'_x$. Звідки $t'_x = 1/x'_t$.

Підставивши $t = t(x)$ у друге параметричне рівняння, дістанемо явну форму задання функції $y = f(x)$: $y = \psi(t(x))$.

Обчислимо її похідну як похідну складеної функції $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x$. Тоді $y'_x = \psi'(t) \cdot (1/x'_t) = \psi'(t)/\varphi'(t) = y'_t / x'_t$. ■

<u>Зауваження</u>. Похідна параметрично заданої функції також є параметрично заданою функцією: $y'_x = y'_t / x'_t$; $x = x(t)$.

<u>Приклад</u>. Знайти кут нахилу α дотичної до графіка функції $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, де $0 \le t \le \pi$, у точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$. Скласти рівняння дотичної.

□ $y'_x = (a\sin t)'_t / (a\cos t)'_t = (a\cos t)/(a\sin t) = -ctg\, t$;

$tg\,\alpha = y'_{x0} = -ctg\,(\pi/4) = -1$. Звідси $\alpha = 135^0 = 3\pi/4$.

Знайдемо координати точки дотику $M_0(x_0;\ y_0)$:

$x_0 = a\cos t_0 = a\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$;

$y_0 = a\sin t_0 = a\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$;

Тоді рівняння дотичної $y - y_0 = y'_{x0} \cdot (x - x_0)$;

$$y - \sqrt{2}\,a/2 = -1 \cdot \left(x - \sqrt{2}\,a/2\right);\quad y = -x + \sqrt{2}\,a. \ ■$$

2.1.6. Похідні вищих порядків. Механічний зміст другої похідної

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Візьмемо деяку точку $x_0 \in (a;b)$. Дамо приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ і матимемо приріст функції $f'(x)$ у точці x_0:

$$\Delta f'(x_0) = f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0).$$

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\Delta f'(x_0)/\Delta x\right) = f''(x_0)$.

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція $f(x)$ має ***похідну другого порядку*** (***другу похідну***) у точці x_0. Її позначають $y'' = f''(x_0)$, або $d^2 f(x_0)/dx^2$, або $f''(x)\big|_{x=x_0}$.

Похідну $f'(x)$ називають ***похідною першого порядку*** (***першою похідною***), а саму функцію $f(x)$ вважають ***похідною нульового порядку*** (***нульовою похідною***).

Отже, *друга похідна – це похідна від першої похідної*

$$y'' = (y')'.$$

Аналогічно визначають похідні третього і наступних порядків: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти y''', якщо $y = \sin^5 x$.

□ Послідовно знайдемо y', y'', y''':

$$y' = 5\sin^4 x \cos x; \quad y'' = \left(5\sin^4 x \cos x\right)' = 5\cdot\left(4\sin^3 x \cos x \times\right.$$

$$\left.\times \cos x + \sin^4 x \cdot (-\sin x)\right) = 20\sin^3 x \cos^2 x - 5\sin^5 x;$$

$$y''' = \left(20\sin^3 x \cos^2 x - 5\sin^5 x\right)' = 20\cdot\left(3\sin^2 x \cos x \cdot \cos^2 x + \right.$$

$$\left. + \sin^3 x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)\right) - 5\cdot 5\sin^4 x \cos x =$$

$$= 60\sin^2 x \cos^3 x - 65\sin^4 x \cos x. \ ■$$

Знайдемо вираз для другої похідної y''_{xx} параметрично заданої функції $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$.

За означенням

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (\psi'_t \cdot t'_x)'_x = (\psi'_t)'_x \cdot t'_x + \psi'_t (t'_x)'_x.$$

Обчисливши похідну по x від функції ψ'_t як похідну складеної функції $(\psi'_t)'_x = \psi''_{tt} \cdot t'_x$, дістанемо $y''_{xx} = \psi''_{tt}(t'_x)^2 + \psi'_t \cdot t''_{xx}$.

Оскільки $t'_x = 1/x'_t$, а

$$t''_{xx} = (t'_x)'_x = (1/x'_t)'_x = -(1/(x'_t)^2)\cdot x''_{tt} \cdot t'_x = -x''_{tt}/(x'_t)^3,$$

то остаточно маємо $y''_{xx} = (y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt})/(x'_t)^3$.

Приклад 2. Знайти d^2y/dx^2 для функції, заданої у параметричній формі $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

□ Спочатку обчислимо перші та другі похідні від даних функцій по параметру t:

$$x'_t = -a\sin t,\ x''_{tt} = -a\cos t;\ \ y'_t = b\cos t,\ y''_{tt} = -b\sin t.$$

Тоді $d^2y/dx^2 = ((-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)):$

$$:(-a\sin t)^3 = -b/(a^2\sin^3 t). \quad ■$$

Приклад 3. Знайти другу похідну y'' функції, що задана неявно рівнянням $2\sin y = x^2 + 2y$.

□ Спочатку обчислимо першу похідну:

$$(2\sin y)' = (x^2 + 2y)';\ 2\cos y \cdot y' = 2x + 2y';\ y' = x/(\cos y - 1).$$

Далі знаходимо $y'' = \left(x/(\cos y - 1)\right)' =$

$$= \left(x'(\cos y - 1) - x(\cos y - 1)'\right)/(\cos y - 1)^2 = (\cos y - 1 +$$

$$+ x\sin y \cdot y'):(\cos y - 1)^2 = \left(\cos y - 1 + x\sin y \cdot x/(\cos y - 1)\right):$$

$$:(\cos y - 1)^2 = \left((\cos y - 1)^2 + x^2\sin y\right):(\cos y - 1)^3. \quad ■$$

Механічний зміст другої похідної. Якщо заданий закон прямолінійного руху тіла $s = s(t)$, то $ds/dt = v(t)$ – швидкість, а $d^2s/dt^2 = dv/dt = a(t)$ – прискорення.

Приклад 4. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові:

$$y = \frac{\ln x}{x^3};\quad x^2y'' + 7xy' + 9y = 0.$$

□ Обчислимо похідні, що входять у зазначене рівняння:

$$y' = \frac{(1/x)\cdot x^3 - 3x^2\ln x}{\left(x^3\right)^2} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4};$$

$$y''=\frac{-3\cdot(1/x)\cdot x^4-4x^3(1-3\ln x)}{\left(x^4\right)^2}=\frac{12\ln x-7}{x^5}.$$

Підставимо функцію та одержані похідні у рівняння:

$$x^2\cdot\frac{12\ln x-7}{x^5}+7x\cdot\frac{1-3\ln x}{x^4}+9\cdot\frac{\ln x}{x^3}=0;$$

$$\frac{12\ln x-7+7-21\ln x+9\ln x}{x^3}=0;\quad 0=0 \text{ – вірно.}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

2.1.7. Диференціал функції та його властивості. Диференціали вищих порядків

Нехай $y=f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо для приросту функції Δy існує таке число A, що приріст функції можна записати у вигляді $\Delta y=A\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$, де множник $\varepsilon=\varepsilon(\Delta x)$ задовольняє рівності $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$, то кажуть, що функція $y=f(x)$ ***диференційована у точці*** x. Головна частина $dy=A\Delta x$ приросту функції Δy, яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається ***диференціалом функції***.

Теорема 1 (зв'язок між похідною та диференціалом). *Щоб функція $y=f(x)$ у точці x була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну $f'(x)$. Якщо виконується ця умова, то $dy=f'(x)\Delta x$.*

□ а) Необхідність. Нехай $\Delta y=dy+\varepsilon\cdot\Delta x$, де $dy=A\cdot\Delta x$, $A=const\neq 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. Тоді $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+\varepsilon\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}A+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=A+0=A;\ dy=y'\Delta x.$$

б) Достатність. Нехай $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'\neq 0$. За означенням границі $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\varepsilon$, де $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. Звідси $\Delta y=y'\Delta x+\varepsilon\,\Delta x$. Покажемо, що $y'\Delta x$ – головна частина Δy:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon\,\Delta x}{y'\Delta x}=\frac{1}{y'}\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=\frac{1}{y'}\cdot 0=0.\quad\blacksquare$$

Тут Δx не обов'язково нескінченно мала; але якщо Δx – нескінченно мала, то й dy – нескінченно мала. Саме у цих випадках dy (за умови, що $f'(x)\neq 0$) є головною частиною нескінченно малого приросту функції Δy.

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx=\Delta x$.

З урахуванням цієї рівності, маємо $dy=f'(x)dx$. Тоді $f'(x)=dy/dx$.

Тобто, *похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу*.

Правила обчислення диференціалів і основні диференціали. Правила обчислення диференціалів і диференціали основних елементарних функцій аналогічні відповідним формулам для похідних. Ці співвідношення наведені в табл. 6, де $u=u(x)$.

Приклад 1. Знайти диференціал функції:

а) $y=e^{\sqrt{x}}\ln x$; б) $y=x^4/\cos x$.

□ а) $dy=d\left(e^{\sqrt{x}}\ln x\right)=\ln x\cdot d\left(e^{\sqrt{x}}\right)+e^{\sqrt{x}}d(\ln x)=\ln x\times$
$$\times e^{\sqrt{x}}\left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\right)dx+e^{\sqrt{x}}\cdot(1/x)dx=e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\ln x+2\right)dx/(2x);$$

б) $d(x^4/\cos x)=(\cos x\cdot d(x^4)-x^4d(\cos x))/\cos^2 x=$

$$=(4x^3\cos x+x^4\sin x)\,dx/\cos^2 x.\quad\blacksquare$$

Таблиця 6

Правила обчислення диференціалів			
1	$d(u+v)=du+dv$	4	$d(uv)=vdu+udv$
2	$d(u-v)=du-dv$	5	$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$
3	$d(Cu)=Cdu$	6	$dy=y'_u\,du\,,\quad y=f\big(u(x)\big)$
Основні диференціали			
1	$d\,C=0$	5	$d(\sin u)=\cos u\;du$
2	$d\left(u^{\alpha}\right)=\alpha u^{\alpha-1}\,du$	6	$d(\cos u)=-\sin u\;du$
2а	$d(au+b)=a\;du$	7	$d(tg\,u)=\dfrac{du}{\cos^2 u}$
2б	$d\left(au^2+bu+c\right)=$ $=(2au+b)\;du$	8	$d(ctg\,u)=-\dfrac{du}{\sin^2 u}$
2в	$d\left(\sqrt{u}\right)=\dfrac{du}{2\sqrt{u}}$	9	$d(\arcsin u)=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
3	$d(\ln u)=\dfrac{du}{u}$	10	$d(\arccos u)=-\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$d\left(a^u\right)=a^u\ln a\;du$	11	$d(arctg\,u)=\dfrac{du}{1+u^2}$
4а	$d\left(e^u\right)=e^u\;du$	12	$d(arcctg\,u)=-\dfrac{du}{1+u^2}$

Геометрична інтерпретація диференціала. Нехай $y=f(x)$ – деяка диференційована функція, $M\left(x_0,y_0\right)$ – точка, що належить графіку функції, $y_0 = f\left(x_0\right)$. Проведемо через точку M (рис. 57) дотичну до графіка функції. Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної (тангенс кута нахилу α) дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$. Якщо аргументу функції надати приріст Δx, то приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На рис. 57 приріст функції Δy – довжина відрізка M_1P. При цьому приріст дотичної дорівнюватиме довжині відрізка NP. Обчисливши $|NP$ як катет прямокутного трикутника MNP, маємо

$$NP = MP \cdot tg\,\alpha = f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

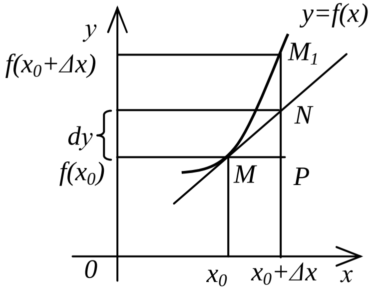


Рис. 57

За означенням диференціала $f'\left(x_0\right)\Delta x = dy$. Таким чином, якщо $\Delta y = M_1P$ – приріст ординати графіка функції, то *диференціал* $dy = NP$ *є приростом ординати дотичної*.

Диференціал у наближених обчисленнях. При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \approx f'\left(x_0\right)\Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції можна знайти за формулою

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

Зауваження 1. Нажаль, ця формула не дозволяє оцінити похибку отриманого наближення.

Приклад 2. Обчислити наближено $\sin 46^\circ$.

□ Покладемо $x_0 = \pi/4$, що відповідає 45°; $\Delta x = \pi/180$, що відповідає 1°; $x_0 + \Delta x = \pi/4 + \pi/180$, що відповідає 46°.

Тоді $\sin 46^0 = \sin(\pi/4 + \pi/180) \approx \sin(\pi/4) +$

$$+\cos(\pi/4)\cdot(\pi/180) = \sqrt{2}/2 + \left(\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(\pi/180\right) \approx$$

$$\approx 0{,}7071 + 0{,}7071\cdot 0{,}0175 \approx 0{,}7191. \quad \blacksquare$$

Теорема 2 (інваріантність форми диференціала). *Нехай* $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ *– деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію* $y = f(\varphi(x))$. *Диференціал складеної функції визначається рівністю* $dy = y'_u du$. Тобто, *форма диференціала функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу.*

□ Якщо розглядати y як функцію незалежної змінної x, то її диференціал визначається рівністю $dy = y'_x \cdot dx$. Підставивши в цю рівність замість похідної складеної функції y'_x її вираз через f'_u і φ'_x, дістанемо $dy = f'_u \cdot \varphi'_x \cdot dx$. Але, з іншого боку, $\varphi'_x \cdot dx = du$. Тоді $dy = f'_u \cdot du$. ■

Зауваження 2. Інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, а не його зміст. У формулі $dy = f'_u \cdot du$ множник du – не тільки диференціал, але і приріст Δu аргументу u, якщо u – незалежна змінна. Однак du – диференціал u, але не приріст Δu, якщо аргумент u – у свою чергу функція деякої змінної x.

Диференціали вищих порядків. Нехай маємо функцію $y = f(x)$, де x – незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy = f'(x) \cdot dx$ є деякою функцією x, але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, другий множник dx є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функція від x, то маємо право говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають ***другим диференціалом*** (***диференціалом другого порядку***) цієї функції і позначають через d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. ***Диференціалом*** n***-го порядку*** називається перший диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = \left(f^{(n-1)}(x)\cdot dx^{n-1}\right)' \cdot dx =$$
$$= \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \cdot dx^{n-1} \cdot dx = f^{(n)}(x)\cdot dx^n .$$

Зауваження 3. Диференціали другого і вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Користуючись поняттям диференціала, похідну другого і вищих порядків можна подати як відношення диференціалів відповідного порядку $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, ... , $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ при умові, що x – незалежна змінна.

2.2. Основні теореми диференціального числення

2.2.1. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші

Теорема 1 (теорема Ролля про корені похідної). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення $f(a) = f(b)$, то на інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка c, в якій похідна дорівнює нулю $f'(c) = 0$.*

□ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значень.

Якщо $M = m$, то функція стала. Похідна від сталої величини дорівнює нулю і теорема доведена.

Нехай $f(c) = M$, де $c \in (a;b)$. Через те, що $f(c) = M$ – найбільше значення функції, то $f(c+\Delta x) - f(c) \le 0$ як при $\Delta x > 0$, так і при $\Delta x < 0$. Отже, $(f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x \le 0$, коли $\Delta x > 0$, і $(f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x \ge 0$, коли $\Delta x < 0$.

За умовою теореми похідна $f'(c)$ існує, тобто, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x = f'(c)$. Але тут $f'(c) \le 0$ при $\Delta x > 0$ і $f'(c) \ge 0$ при $\Delta x < 0$. Ці нерівності сумісні лише тоді, коли $f'(c) = 0$. Отже, між a і b є точка c, де похідна дорівнює нулю. ■

<u>Геометричний зміст</u>. За умов, які вказані в теоремі Ролля, на дузі AB існує хоча б одна дотична, що паралельна осі Ox (рис. 58).

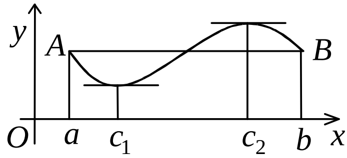


Рис. 58

<u>Теорема 2 (теорема Лагранжа про скінченні прирости)</u>. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках, то на інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка c, в якій виконується рівність* $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ – ***формула Лагранжа скінченних приростів***.

□ Визначимо число Q рівністю $(f(b)-f(a))/(b-a)=Q$. Складемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\cdot Q$. Очевидно, що $F(a)=0$ і $F(b)=0$.

Функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована у кожній внутрішній точці. Отже, вона відповідає теоремі Ролля, за якою усередині відрізка є точка c така, що $F'(c)=0$. Але $F'(x)=f'(x)-Q$. Тому $F'(c)=f'(c)-Q=0$. Звідси $f'(c)=Q$, тобто $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. ■

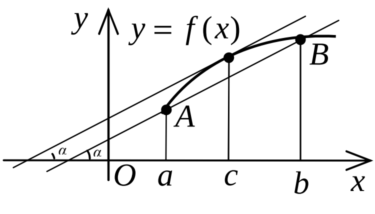


Рис. 59

<u>Геометричний зміст</u>. За умов, що вказані в теоремі Лагранжа, на дузі AB існує хоча б одна точка, в якій дотична паралельна хорді AB (рис. 59).

Теорема Ролля випливає з теореми Лагранжа як окремий випадок при $f(a)=f(b)$, тобто коли хорда AB паралельна осі Ox.

<u>Теорема 3 (теорема Коші про відношення приростів двох функцій)</u>. *Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – дві функції, неперервні на від-*

різку $[a;b]$ *і диференційовані в усіх його внутрішніх точках, причому похідна* $\varphi'(x)$ *ніде не обертається у нуль, то на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться принаймні одна така точка* c*, що виконується рівність*

$$(f(b)-f(a))/(\varphi(b)-\varphi(a)) = f'(c)/\varphi'(c).$$

□ Визначимо число Q рівністю $(f(b)-f(a))/(\varphi(b)-$ $-\varphi(a)) = Q$, де $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$. Складемо допоміжну функцію $F(x) = f(x)-f(a)-Q(\varphi(x)-\varphi(a))$. Очевидно, що $F(a)=0$ і $F(b)=0$. Тобто, функція $F(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля. Тому між a і b є така точка c, що $F'(c)=0$. Але $F'(x) = f'(x)-Q\varphi'(x)$. Отже, $F'(c) = f'(c)-Q\varphi'(c)=0$. Звідси $Q = f'(c)/\varphi'(c)$ або $(f(b)-f(a))/(\varphi(b)-\varphi(a)) =$ $= f'(c)/\varphi'(c)$. ■

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

2.2.2. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

<u>Теорема (правило Лопіталя розкриття невизначеності виду</u> $0/0$). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовані в деякому околі точки* a *(*a *– число або символ* ∞, $-\infty$, $+\infty$*), крім, можливо, самої точки* a*. Нехай також* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ *і* $\varphi'(x)\neq 0$ *в кожній точці* x *з вище вказаного околу* a, $x\neq a$. *Тоді, якщо існує границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних* $f'(x)/\varphi'(x)$ *при* $x\to a$*, то існує і границя відношення самих функцій* $f(x)/\varphi(x)$ *при* $x\to a$*, причому* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = |0/0| = \lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))$.

□ Довизначимо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ у точці a нульовим значенням $f(a)=\varphi(a)=0$ і отримаємо функції $f_*(x)$ та $\varphi_*(x)$, що задовольняють теоремі Коші на відрізку $[a;x]$, де x – довільна фіксована точка з вище вказаного околу, відмінна від

a. Застосовуючи теорему Коші, маємо

$(f_*(x)-f_*(a))/(\varphi_*(x)-\varphi_*(a)) = f'_*(c)/\varphi'_*(c)$, де $a<c<x$.

Але $f(a)=\varphi(a)=0$ і $f'_*(c)=f'(c)$, $\varphi'_*(c)=\varphi'(c)$. Тому $f(x)/\varphi(x)=f'(c)/\varphi'(c)$.

Коли $x\to a$, то і $c\to a$, оскільки $a<c<x$. Тоді якщо $\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))=A$, то $\lim\limits_{c\to a}(f'(c)/\varphi'(c))$ теж існує і дорівнює A. Звідси $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a}(f'(c)/\varphi'(c))=$

$$=\lim_{c\to a}(f'(c)/\varphi'(c))=\lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))=A.$$

Отже $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=\left|0/0\right|=\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))$. ■

<u>Зауваження 1</u>. Якщо границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних не існує, то правило Лопіталя застосовувати не можна. Але це не свідчить про те, що границя відношення самих функцій не існує.

Наприклад,

$$f(x)=x^2\sin(1/x);\quad f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x);\quad \varphi(x)=x;$$

$\varphi'(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{1}$ – не існує, але

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0.$$

<u>Зауваження 2</u>. Правило Лопіталя можна застосовувати повторно, але потрібно кожного разу перевіряти, чи не розкрилася невизначеність.

<u>Зауваження 3</u>. Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ використовується теорема, аналогічна правилу Лопіталя для невизначеності виду $0/0$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=\left|\infty/\infty\right|=\lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x)).$$

<u>Зауваження 4</u>. Для спрощення обчислень слід правило Лопіталя суміщати з іншими методами знаходження границь.

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi-4arctg\,x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi-4arctg\,x}{\ln x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\pi-4arctg\,x)'}{(\ln x)'}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4\cdot 1/(1+x^2)}{1/x}=-2;$$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1-\sin x)'}{(\cos x-\cos 3x)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-\sin x+\sin 3x\cdot 3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\cos x)'}{(-\sin x+3\sin 3x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{-\cos x+3\cos 3x\cdot 3}=\frac{1}{8};$$ г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\ln(1+x^2)\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\left(1/(1+x^2)\right)\cdot 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x^2+1}{1}=\frac{1}{2};$$ д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(tg\,3x)'}{(tg\,5x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1/\cos^2 3x)\cdot 3}{(1/\cos^2 5x)\cdot 5}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3};$$

е) $$\lim_{x\to 5}\frac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 5}\cos(\pi x)\times$$

$$\times\lim_{x\to 5}\frac{(\ln(x-5))'}{\left(\ln\left(e^x-e^5\right)\right)'}=(-1)\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1/(x-5)}{\left(1/(e^x-e^5)\right)\cdot e^x}=$$

$$=-\lim_{x\to 5}\frac{e^x-e^5}{(x-5)e^x}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 5}\frac{\left(e^x-e^5\right)'}{(x-5)'}:\lim_{x\to 5}e^x=$$

$$=-\lim_{x\to 5}\left(e^x/1\right):e^5=-e^5:e^5=-1.\quad\blacksquare$$

<u>Зауваження 5</u>. Для розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ їх за допомогою тотожних перетворень зводять до виду $0/0$ або ∞/∞, а потім застосовують правило Лопіталя.

Формальний запис: $f\cdot\varphi=|0\cdot\infty|=f/(1/\varphi)=|0/0|$

або $f\cdot\varphi=|0\cdot\infty|=\varphi/(1/f)=|\infty/\infty|$;

$$f-\varphi=|\infty-\infty|=\frac{1/\varphi-1/f}{(1/f)\cdot(1/\varphi)}=|0/0|.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)tg\,3x$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+x)\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2e^x)-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1/x^2-ctg\,x\right)$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)\,tg\,3x=\left|0\cdot\infty\right|=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2x-\pi}{ctg\,3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)'}{(ctg\,3x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\left(-1/\sin^2 3x\right)\cdot 3}=-\frac{2}{3};$$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+x)\ln x=\left|0\cdot\infty\right|=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln^{-1}x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln(1+x)\right)'}{\left(\ln^{-1}x\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{1/(1+x)}{-\ln^{-2}x\cdot(1/x)}=-\lim_{x\to+0}x\ln^2 x:$$

$$:\lim_{x\to+0}(1+x)=\left|0\cdot\infty\right|=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}:1=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=-\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x^{-1})'}=$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot 1/x}{-x^{-2}}=2\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=2\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln x\right)'}{(x^{-1})'}=$$

$$=2\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-x^{-2}}=-2\lim_{x\to+0}x=0;$$ в) $\lim\limits_{x\to1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right)=$

$$=\left|\frac{1}{0\cdot\infty}\right|=\lim_{x\to1-0}\frac{\sin^{-1}\pi x}{\ln(1-x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to1-0}\frac{\left(\sin^{-1}\pi x\right)'}{\left(\ln(1-x)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{-\sin^{-2}\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}{\left(1/(1-x)\right)\cdot(-1)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\pi\lim_{x\to1-0}\cos\pi x\times$$

$$\times\lim_{x\to1-0}\frac{1-x}{\sin^2\pi x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\pi\cdot(-1)\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{(1-x)'}{(\sin^2\pi x)'}=$$

$$=-\pi\lim_{x\to1-0}\frac{-1}{2\sin\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}=\left|-\pi\cdot\frac{-1}{2\cdot(+0)\cdot(-1)\cdot\pi}\right|=-\infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2e^x)-x\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2e^x)-\ln e^x\right)=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x+2e^x}{e^x} = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2e^x}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2e^x)'}{(e^x)'} =$$

$$= \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2e^x}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+2e^x)'}{(e^x)'} = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x} = \ln 2\,;$$

д) $$\lim_{x\to 0}\left(1/x^2 - ctg\,x\right) = |\infty-\infty| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x^2\cos x}{x^2\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x^2\cos x)'}{(x^2\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$$

$$= |1/0| = \infty. \quad \blacksquare$$

Зауваження 6. Для розкриття невизначеностей виду 0^0, 1^∞ і ∞^0 показниково-степеневий вираз f^{φ} (за основною логарифмічною тотожністю, припускаючи $f>0$) записують у вигляді $f^{\varphi} = e^{\varphi\ln f}$. У показнику маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, яка зводиться (як показано вище) до невизначеності $0/0$ або ∞/∞.

Приклад 3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^{1/\ln(e^{3x}-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{4/x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg\,x)^{2x-\pi}$.

□ а) $$\lim_{x\to+0} x^{1/\ln(e^{3x}-1)} = \left|0^0\right| = A;\quad \ln A = \lim_{x\to+0}\ln x^{1/\ln(e^{3x}-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln(e^{3x}-1)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln(e^{3x}-1)\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{\left(1/(e^{3x}-1)\right)\cdot e^{3x}\cdot 3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{e^{3x}-1}{x} : \lim_{x\to+0} e^{3x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{(e^{3x}-1)'}{x'}:1=\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{e^{3x}\cdot 3}{1}=1;\quad A=e^{1}=e;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{4/x^2}=\left|1^{\infty}\right|=A;\;\; \ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos 3x)^{4/x^2}=$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=4\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 3x)'}{(x^2)'}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos 3x\right)\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}{2x}=-6\lim_{x\to 0}\frac{tg\,3x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=-6\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,3x)'}{x'}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos^2 3x\right)\cdot 3}{1}=-18;\;\; A=e^{-18};$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}=\left|\infty^0\right|=A;\;\; \ln A=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+5^x\right)^{1/x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+5^x\right)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(x+5^x)\right)'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1/(x+5^x)\right)\cdot(1+5^x\ln 5)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+5^x\ln 5}{x+5^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+5^x\ln 5)'}{(x+5^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5\cdot 5^x\ln 5}{1+5^x\ln 5}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\ln^2 5\times$$

$$\times\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{(1+5^x\ln 5)'}=\ln^2 5\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{\ln 5\cdot 5^x\ln 5}=\ln 5;$$

$A=e^{\ln 5}=5;$ г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg\,x)^{2x-\pi}=\left|\infty^0\right|=A;$

$$\ln A=\lim_{x\to\pi/2}\ln(tg\,x)^{2x-\pi}=\lim_{x\to\pi/2}\left((2x-\pi)\cdot\ln tg\,x\right)=$$

$$=\left|0\cdot\infty\right|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln tg\,x}{(2x-\pi)^{-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\ln tg\,x)'}{\left((2x-\pi)^{-1}\right)'}=$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{(1/tg\,x)\cdot(1/\cos^2 x)}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2} = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cdot\cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{\left((2x-\pi)^2\right)'}{(\sin 2x)'} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cdot(2x-\pi)\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2} = 0; \quad A = e^0 = 1. \quad \blacksquare$$

2.2.3. Формула Тейлора

Нехай функція $f(x)$ n раз диференційовна в деякому околі точки $x = x_0$. Знайдемо многочлен

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

такий, що його значення та значення його похідних до n-го порядку включно в точці x_0 співпадають зі значеннями самої функції та її відповідних похідних у цій точці. Тобто,

$$T_n(x_0) = f(x_0);\ T_n'(x_0) = f'(x_0);\ \ldots;\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Природно очікувати, що такий многочлен у деякому смислі буде “близький” до функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Виражаючи з наведених умов коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ через значення функції та її похідних у точці x_0, отримаємо

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

– ***многочлен Тейлора*** n***-го порядку*** для функції $f(x)$. Тут $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ – n***-факторіал***; $0! = 1$; $1! = 1$.

Тоді для функції $f(x)$ в околі точки x_0 справедлива ***формула Тейлора*** n***-го порядку***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

де $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ – ***залишковий член*** формули Тейлора.

<u>Теорема</u>. *Якщо функція* $f(x)$ *в деякому околі точки* x_0 *має похідні до* $(n+1)$ *-го порядку включно, то залишковий член формули Тейлора можна подати в* ***формі Лагранжа***

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

де $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

<u>Зауваження 1</u>. Формула Тейлора є узагальненням формули Лагранжа про скінченні прирости.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо в формулі Тейлора замінити x_0 на x, x на $x + \Delta x$ і перенести $f(x)$ вліво, а потім врахувати, що $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta f(x)$ і $f^{(k)}(x) \cdot \Delta x^k = d^k f(x)$, то її можна подати в ***диференціальній формі***

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!}$$

<u>Зауваження 3</u>. При $x_0 = 0$ маємо окремий випадок формули Тейлора – ***формулу Маклорена***

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

де $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Наведемо приклади розкладання деяких функцій за формулою Маклорена.

1. Експонента $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

2. Синус

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

3. Косинус

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin\theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

4. Логарифмічна функція

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Тут $0 < \theta < 1$.

Зауваження 4. Формула Тейлора широко застосовується в наближених обчисленнях. При цьому наближенням функції служить її многочлен Тейлора $f(x) \approx T_n(x)$, а допущена абсолютна похибка дорівнює модулю залишкового члена $\Delta = |R_n(x)|$.

Приклад. Застосовуючи формулу Маклорена шостого порядку для експоненти $y = e^x$, обчислити наближене значення числа Ейлера e і оцінити допущену абсолютну похибку.

□ $n = 6$; $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} e^{\theta x}$; $x = 1$;

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \ldots + \frac{1^6}{6!} + \frac{e^{\theta \cdot 1}}{7!} 1^7 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} +;$$

$$+ \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{e^\theta}{5040} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= 2\frac{517}{720} \approx 2{,}718; \quad \Delta = \left|\frac{e^\theta}{5040}\right| < \frac{e^1}{5040} < \frac{3}{5040} < 0{,}001. \ ■$$

2.3. Застосування похідних для дослідження функцій

Вивчення кількісної сторони різних об'єктів приводить до встановлення та дослідження функціональних залежностей між змінними величинами, які відображають відповідні процеси.

Очевидно, не можливо здійснити повне дослідження функції, лише обчислюючи її значення в окремих точках. У даному розділі будуть встановлені загальні правила дослідження поведінки функції, які дозволяють зробити ескіз її графіка.

2.3.1. Умови зростання та спадання функції

Теорема 1 (достатні умови монотонності та сталості). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *похідна* $f'(x)$:

1) *додатна, то функція на цьому відрізку зростає*;
2) *від'ємна, то функція на цьому відрізку спадає*;
3) *дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала*.

□ Нехай $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$. Розглянемо довільні значення $x_1, x_2 \in [a;b]$ такі, що $x_1 < x_2$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, де $x_1 < c < x_2$. За умовою теореми $f'(c) > 0$. Звідси $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Це означає, що $f(x)$ – зростаюча функція.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

Зауваження. Розглядаємо монотонність у строгому смислі.

Приклад. Визначити інтервали зростання і спадання функції: а) $y = x^4/4$; б) $y = arctg\, x$.

□ а) Похідна цієї функції $y' = x^3$. Коли $x > 0$, то $y' > 0$ – функція зростає; коли $x < 0$, то $y' < 0$ – функція спадає.

б) Похідна цієї функції $y' = 1/(x^2 + 1)$ додатна при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, функція $y = arctg\, x$ всюди зростає. ■

2.3.2. Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$, тобто, x_0 – внутрішня точка області визначення $D(f)$.

Точка x_0 називається ***точкою мінімуму*** (відповідно ***точкою максимуму***), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно

$f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають ***точками екстремуму***, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – ***екстремальними значеннями*** (***екстремумами***) ***функції*** відповідного типу:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Зауваження 1. Розглядаємо лише точки внутрішнього локального (відносно всіх близьких сусідніх точок) строгого екстремуму.

Зауваження 2. Розрізняють точки ***гладкого екстремуму*** (див. рис. 60), в околі яких функція неперервно диференційована (графік гладкий) і похідна $f'(x) = 0$ (дотична паралельна осі Ox), і точки ***гострого екстремуму*** (див. рис. 61), в яких функція недиференційована (графік зазнає зламу) – похідна $f'(x)$ має розрив (нескінченна чи взагалі не існує).

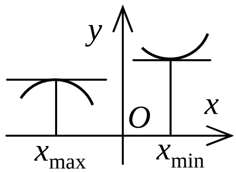


Рис. 60

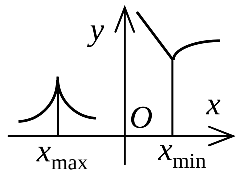


Рис. 61

Теорема 1 (теорема Ферма – необхідна умова гладкого екстремуму). *Якщо диференційована функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці дорівнює нулю* $f'(x_0) = 0$.

Доведення спирається на теорему Ролля.

Приклад. Функції $y = x^2$ і $y = x^3$ всюди диференційовані. При $x = 0$ вони мають рівну нулю похідну $y' = 0$. У цій точці функція $y = x^2$ досягає мінімуму, а функція $y = x^3$ екстремуму не має.

У цьому прикладі досліджено неперервно диференційовані функції. Розглянемо приклади функцій, що мають розриви похідної.

а) Функція $y = |x|$ – неперервна, але у точці $x = 0$ не має похідної. З графіка (рис. 62) видно, що у точці $x = 0$ функція має мінімум $y_{\min} = y(0) = 0$.

б) Функція $y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$ не має похідної у точці $x = 0$: $y' \to \infty$, коли $x \to 0$ (перевірте самостійно). З графіка (рис. 63) видно, що у точці $x = 0$ функція має максимум $y_{\max} = y(0) = 1$.

в) Функція $y = x^{1/3}$ не має похідної у точці $x = 0$: $y' \to \infty$, коли $x \to 0$. У цій точці функція екстремуму не має (рис. 64).

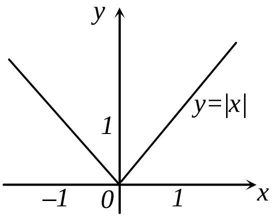


Рис. 62

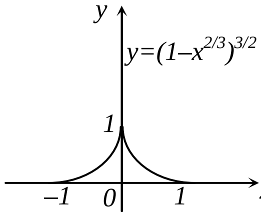


Рис. 63

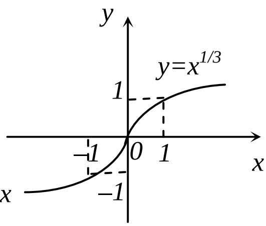


Рис. 64

Таким чином, узагальненням попередньої теореми про гладкий екстремум є

<u>Теорема 2 (необхідна умова екстремуму)</u>. *Якщо неперервна функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці або існує і дорівнює нулю* $f'(x_0) = 0$, *або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці перша похідна або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою першої похідної***.

Критична точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, називається ***стаціонарною точкою*** функції.

Зауваження 3. Стаціонарні точки – це точки, що “підозрілі” на гладкий екстремум. Критичні точки, в яких перша похідна має розрив, – це точки, що “підозрілі” на гострий екстремум.

2.3.3. Достатні умови екстремуму функції

Дослідження функції у критичних точках спирається на достатні умови екстремуму.

Теорема 1 (достатня умова екстремуму за першою похідною). *Нехай* x_0 *– критична точка похідної функції* $f(x)$*, яка диференційована в деякому околі цієї точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*. Якщо при переході зліва направо через цю точку*:

1) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з плюса на мінус, то при* $x = x_0$ *функція має максимум*;

2) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з мінуса на плюс, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *похідна* $f'(x)$ *не змінює знака, то при* $x = x_0$ *функція не має екстремуму*.

□ Нехай $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус; тобто для всіх x достатньо близьких до точки x_0, маємо: $f'(x) > 0$, коли $x < x_0$, $f'(x) < 0$, коли $x > x_0$.

За теоремою Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, де $c \in (x_0; x)$.

Якщо $x < x_0$, тоді $c < x_0$, $f'(c) > 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ і отже, $f(x) - f(x_0) < 0$ або $f(x) < f(x_0)$.

Якщо $x > x_0$, тоді $c > x_0$, $f'(c) < 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ і отже, $f(x) - f(x_0) < 0$ або $f(x) < f(x_0)$.

Таким чином, для всіх значень x, досить близьких x_0, значення функції менше, ніж значення функції у точці x_0. Це означає, що в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

<u>Правило дослідження функції $f(x)$ на монотонність і екстремум</u>:

1) *Знайти область визначення функції* $D(f)$.

2) *Продиференціювати функцію* $y = f(x)$.

3) *Знайти критичні точки першої похідної*:

а) *Стаціонарні точки. Для цього розв'язати рівняння* $f'(x) = 0$ *і з одержаних розв'язків вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

б) *Точки розриву похідної* $f'(x)$. *Для цього знайти точки, в яких похідна не існує, і з них вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

4) *На координатній прямій* Ox *відмітити (штриховкою) область визначення* $D(f)$ *функції, вказавши її межові точки, і нанести критичні точки першої похідної. У результаті область визначення буде розбита на інтервали між сусідніми точками.*

5) *На кожному інтервалі довільно вибрати одну пробну внутрішню точку* x *і визначити знак похідної* $f'(x)$ *у цій точці, а значить, і на даному інтервалі.*

6) *Виходячи зі знака похідної* $f'(x)$, *зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі*:

якщо "+", то $f(x)$ *зростає; якщо "-", то* $f(x)$ *спадає.*

7) *Проаналізувати зміну знака похідної* $f'(x)$ *при переході через кожну критичну точку і зробити висновок про наявність і характер екстремуму*:

якщо "+,-", то $f(x)$ *має максимум; якщо "-,+", то* $f(x)$ *має мінімум; якщо "+,+" або "-,-", то* $f(x)$ *екстремуму не має.*

8) *Обчислити екстремуми функції* $f(x)$ *у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують*:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^2} \big/ (x-4)$ на монотонність і екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \; x-4 \neq 0; \;\; x \neq 4; \;\; x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$$

Похідна цієї функції

$$y' = \frac{(2/3)\cdot x^{-1/3}(x-4) - \sqrt[3]{x^2}}{(x-4)^2} = -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2}.$$

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \;\; -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} = 0; \;\; x+8=0; \;\; x=-8 \in D(y);$$

б) точки розриву y': $3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0$;

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0; \;\; x = 0 \in D(y); \;\; x = 4 \notin D(y).$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 65). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -9$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, і визначаємо в них знак похідної:

$$y'(-9) = -\frac{-1}{3\sqrt[3]{-9}\cdot(-13)^2} < 0; \;\; y'(-1) = -\frac{7}{3\sqrt[3]{-1}\cdot(-5)^2} > 0;$$

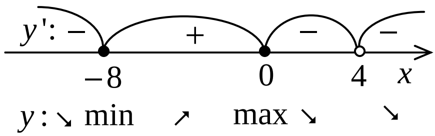


Рис. 65

$$y'(1) = -\frac{9}{3\sqrt[3]{1}\cdot(-3)^2} < 0;$$

$$y'(5) = -\frac{13}{3\sqrt[3]{5}\cdot 1^2} < 0.$$

Функція зростає при $x \in (-8; 0)$; функція спадає при $x \in (-\infty; -8) \cup (0;\, 4) \cup (4;\, +\infty)$.

Точка мінімуму $x_{\min} = -8$; точка максимуму $x_{\max} = 0$. Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(-8) = \sqrt[3]{(-8)^2} \big/ (-8-4) = -1/3; \quad y_{\max} = y(0) = 0. \ ■$$

<u>Теорема 2 (достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною)</u>. *Нехай* x_0 *– стаціонарна точка функції* $f(x)$, *яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0. *Якщо друга похідна* $f''(x)$ *у цій точці* x_0:

1) *від'ємна, то при* $x = x_0$ *функція має максимум*;

2) *додатна, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *дорівнює нулю, то питання про наявність і характер екстремуму залишається відкритим і потрібні додаткові дослідження*. (Наприклад, з використанням похідних більш високого порядку).

<u>Приклад 2</u>. Дослідити функцію $y = x\ln^2 x$ на екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \quad x > 0; \quad x \in (0; +\infty).$$

Похідна цієї функції $y' = \ln^2 x + 2\ln x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \quad \ln^2 x + 2\ln x = 0; \quad \ln x \cdot (\ln x + 2) = 0;$$

$$\ln x = 0 \ \text{ або } \ \ln x + 2 = 0; \quad x = 1 \in D(y); \quad x = e^{-2} \in D(y);$$

б) точки розриву y': немає.

Усі критичні точки є стаціонарними, де можливий гладкий екстремум. Застосовуємо другу похідну:

$$y'' = 2\ln x \cdot (1/x) + 2 \cdot (1/x) = 2(\ln x + 1)/x;$$

$$y''(1) = 2(\ln 1 + 1)/1 = 2 > 0 \ \Rightarrow \ x = 1 - \min;$$

$$y''\left(e^{-2}\right) = 2\left(\ln e^{-2} + 1\right) \big/ e^{-2} = -2e^2 < 0 \ \Rightarrow \ x = e^{-2} - \max.$$

Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(1) = 1 \cdot \ln^2 1 = 0; \ y_{\max} = y\left(e^{-2}\right) = e^{-2} \cdot \ln^2 e^{-2} = 4e^{-2}. \ ■$$

2.3.4. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним*** (***абсолютним***) ***максимумом*** і ***мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками екстремуму функції. Звідси випливає

<u>Правило знаходження найбільшого і найменшого значень</u> неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1) *знайти всі критичні точки першої похідної* $f'(x)$, *що лежать усередині відрізка* $[a;b]$;

2) *обчислити значення функції* $f(x)$ *в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка*;

3) *з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше*.

<u>Приклад</u>. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3/3 - 4x^2$ на відрізку $[-3;3]$..

□ Похідна цієї функції $y' = x^2 - 8x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \quad x^2 - 8x = 0; \quad x(x-8) = 0;$$

$$x = 0 \in [-3;3] \text{ або } x - 8 = 0; \quad x = 8 \notin [-3;3];$$

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції: $y(0) = 0$;

$$y(-3) = (-3)^3/3 - 4\cdot(-3)^2 = -45; \quad y(3) = 3^3/3 - 4\cdot 3^2 = -27.$$

Таким чином, найбільше значення $\max\limits_{x\in[-3;3]} y = y(0) = 0$ і найменше значення $\min\limits_{x\in[-3;3]} y = y(-3) = -45$. ■

2.3.5. Застосування теорії екстремуму до розв'язування прикладних задач

Застосовуючи поняття екстремуму, розв'язується багато задач геометричного і фізичного змісту. Розглядається функція, що служить моделлю відповідного процесу на деякому інтервалі (що може бути необмеженим) зміни аргументу, а потім знаходиться найбільше чи найменше значення цієї функції в даному інтервалі. При цьому зі змісту задачі наявність і характер екстремуму часто відомі, що полегшує її розв'язування.

<u>Приклад 1</u>. Нехай у результаті незалежно проведених експериментів дістали n різних значень величини x: x_1, x_2, ..., x_n. Найти таке значення цієї величини x, при якому сума квадратів похибок найменша.

□ Сума квадратів похибок є функцією

$$f(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+...+(x-x_n)^2,$$

яка всюди визначена. Шукане значення величини x знаходиться з умови найменшого значення цієї функції. Маємо:

$$f'(x)=2(x-x_1)+2(x-x_2)+...+2(x-x_n); \quad f''(x)=2n.$$

З рівняння $f'(x)=0$ знаходимо єдину критичну точку $x=(x_1+x_2+...+x_n)/n$. Оскільки в цій точці $f''(x)=2n>0$, то в ній функція досягає найменшого значення.

Отже, шуканим значенням величини x є середнє арифметичне її наближених значень. ■

<u>Приклад 2</u>. Нехай електричний ліхтар рухається на блоці вздовж вертикальної прямої Ox, що проходить через центр O круглого горизонтального майданчика радіуса $AO=R$ (рис. 66). На якій висоті $BO=x$ над горизонтальною площиною треба його повісити, щоб освітленість периметра майданчика була найкращою?

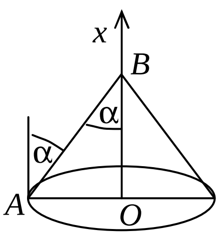


Рис. 66

□ З фізики відомо, що освітленість J предмета A прямо пропорційна косинусу кута падіння α променів і обернено пропорційна квадрату відстані $AB = r$ предмета від джерела світла B: $J = k\cos\alpha / r^2$, де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від сили світла ліхтаря.

З рис. 66 маємо: $r^2 = AB^2 = AO^2 + BO^2 = R^2 + x^2$;

$$\cos\alpha = BO / AB = x / \sqrt{R^2 + x^2} .$$

Тоді $J = kx / \left(R^2 + x^2\right)^{3/2}$, де $x \in (0; +\infty)$.

Похідна цієї функції

$$J' = k\frac{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2} - x \cdot (3/2) \cdot \left(R^2 + x^2\right)^{1/2} \cdot 2x}{\left(R^2 + x^2\right)^3} = \frac{k\left(R^2 - 2x^2\right)}{\left(R^2 + x^2\right)^{5/2}} .$$

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$J' = 0;\ \ k\left(R^2 - 2x^2\right) \Big/ \left(R^2 + x^2\right)^{5/2} = 0;\ \ R^2 - 2x^2 = 0 ;$$

$$x = -R\sqrt{2}/2 \notin (0; +\infty);\ \ x = R\sqrt{2}/2 \in (0; +\infty);$$

б) точки розриву J': $\left(R^2 + x^2\right)^{5/2} = 0$; $x \in \varnothing$.

Оскільки при $x \to 0$ і $x \to +\infty$ $J(x) \to 0$, а усередині інтервалу $(0; +\infty)$ маємо єдину стаціонарну точку $x = R\sqrt{2}/2$, в якій

$$J\left(R\sqrt{2}/2\right) = k\left(R\sqrt{2}/2\right) \Big/ \left(R^2 + \left(R\sqrt{2}/2\right)^2\right)^{3/2} = 2\sqrt{3}k/9 > 0 ,$$

то в цій точці функція $J(x)$ приймає найбільше значення. Отже, ліхтар треба повісити на висоті $BO = R\sqrt{2}/2$. ■

2.3.6. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a; b)$ і в точці $x_0 \in (a; b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0\left(x_0 ; f(x_0)\right)$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 67). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 68).

Точка $M_0\big(x_0\,;f(x_0)\big)$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x < x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x > x_0$ – з іншого (рис. 69). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

Крива (графік функції) називається ***опуклою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Тобто, на цьому інтервалі крива лежить нижче кожної своєї дотичної.

Аналогічно, на ***інтервалі вгнутості*** крива лежить вище кожної своєї дотичної.

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

<u>Теорема 1 (достатні умови опуклості та вгнутості)</u>. *Нехай на інтервалі* $(a;b)$ *задана двічі диференційована функція* $f(x)$. *Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *друга похідна* $f''(x)$:

1) *від'ємна, то графік функції опуклий*;
2) *додатна, то графік функції вгнутий*;
3) *дорівнює нулю, то графік функції – пряма лінія*.

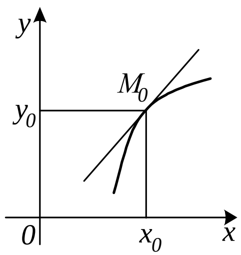


Рис. 67

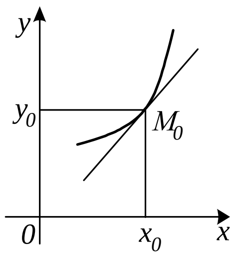


Рис. 68

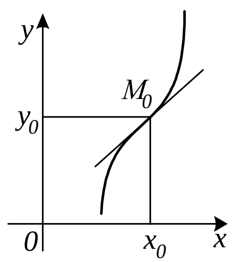


Рис. 69

Теорема 2 (необхідні умови точки перегину). *Якщо* $M_0(x_0; y_0)$ *– точка перегину графіка функції* $f(x)$*, то друга похідна* $f''(x)$ *в точці* x_0 *або існує і дорівнює нулю* $f''(x_0) = 0$*, або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної***.

Зауваження 1. Критичні точки другої похідної – це точки, що “підозрілі” на перегин.

Теорема 3 (достатня умова точки перегину). *Нехай* x_0 *– критична точка другої похідної функції* $f(x)$*, яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*. Якщо при переході через цю точку*:

1) *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то при* $x = x_0$ *функція має перегин*;

2) *знак другої похідної* $f'(x)$ *не змінюється, то при* $x = x_0$ *функція перегину не має.*

Зауваження 2. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

Приклад. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln(x^2 + 9)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \ x^2 + 9 > 0;\ \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{2x}{x^2+9};\quad y'' = 2\cdot\frac{x^2+9-2x\cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y'' = 0$; $\dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2} = 0$; $9 - x^2 = 0$; $x = \pm 3 \in D(y)$;

б) точки розриву y'': $(x^2+9)^2 = 0$; $x \in \varnothing$.

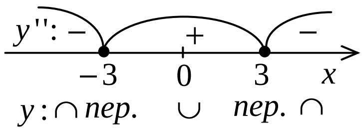


Рис. 70

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 70). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, і визначаємо в них знак другої похідної:

$$y''(-4) = \frac{2(9-(-4)^2)}{((-4)^2+9)^2} = \frac{2\cdot(-7)}{25} < 0;$$

$$y''(0) = \frac{2(9-0^2)}{(0^2+9)^2} = \frac{2}{9} > 0; \quad y''(4) = \frac{2(9-4^2)}{(4^2+9)^2} = \frac{2\cdot(-7)}{25} < 0.$$

Функція опукла при $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; функція вгнута при $x \in (-3; 3)$.

Перегин при $x_1 = -3$ і $x_2 = 3$. Тоді

$$y_1 = \ln((-3)^2 + 9) = \ln 18; \quad y_2 = \ln(3^2 + 9) = \ln 18.$$

Отже, $M_1(-3; \ln 18)$ і $M_2(3; \ln 18)$ – точки перегину. ■

2.3.7. Асимптоти графіка функції

Нехай $y = f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M(x; f(x))$ до цієї прямої прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження 1. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти бувають двох видів: ***вертикальні*** й ***похилі*** (зокрема, ***горизонтальні***) (рис. 71).

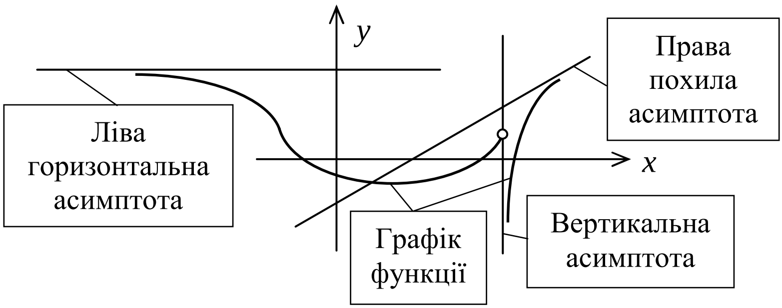


Рис. 71

а) Вертикальна асимптота має рівняння $x = a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ нескінченна.

Зауваження 2. Точки, що "підозрілі" на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$ та точки розриву функції $y = f(x)$.

Зауваження 3. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

Приклад 1. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y = \ln(x+3)/(x^2-16)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \begin{cases} x+3>0 \\ x^2-16 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-3 \\ x \neq \pm 4; \end{cases} \quad x \in (-3;4) \cup (4;+\infty).$$

$x_1 = -3$ і $x_2 = 4$ – точки, що "підозрілі" на вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x\to -3+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|-\infty/(-7)\right|=+\infty \Rightarrow x=-3$$

– вертикальна асимптота.

$$\lim_{x\to 4-0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(-0)\right|=-\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to 4+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(+0)\right|=+\infty \Rightarrow x=4$$

– вертикальна асимптота. ■

б) Похила (зокрема, горизонтальна) асимптота. Нехай функція $y=f(x)$ має при $x\to+\infty$ праву похилу асимптоту, рівняння якої $y=kx+b$ (рис. 72). Визначимо числа k і b.

Нехай $M(x;f(x))$ – змінна точка, що належить графіку функції, і $N(x;y)$ – відповідна точка, що належить асимптоті. Відстань від точки M до асимптоти дорівнює довжині перпендикуляра MP. За умовою $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$. Якщо φ – кут нахилу асимптоти до осі Ox, то з ΔNMP маємо $NM=MP/\cos\varphi$. Оскільки φ – стала величина і $\varphi\neq\pi/2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} NM=0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$ одночасно.

Але $NM=|QM-QN|=|f(x)-y|=|f(x)-kx-b|$. Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ або $\lim\limits_{x\to+\infty} x(f(x)/x-k-b/x)=0$.

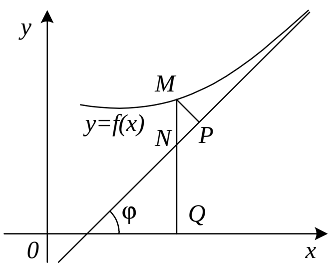


Рис. 72

Через те, що $x\to+\infty$, має виконуватись рівність

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)/x-k-b/x)=0.$$

Оскільки k і b – сталі величини, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(b/x)=0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x-k)=0$ або $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right)$.

Знайшовши k, для b маємо $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$.

Отже, якщо пряма $y = kx + b$ є правою похилою асимптотою, то k і b знаходяться як границі

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right);\ \ b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx),$$

де спочатку обчислюється k, а потім b.

Навпаки, якщо існують указані границі для визначення k і b, то має місце рівність $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$ і пряма $y = kx + b$ є похила асимптота. Якщо хоча б одна з двох границь для k і b не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Зауваження 4. Права горизонтальна асимптота $(k = 0)$ має рівняння $y = b$, де $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Зауваження 5. Аналогічно розглядається випадок лівої похилої (зокрема, горизонтальної) асимптоти, коли $x \to -\infty$.

Зауваження 6. Графік функції $y = f(x)$ може мати не більше двох похилих (зокрема, горизонтальних) асимптот. При цьому крива повинна мати відповідну нескінченну гілку при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Приклад 2. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = \ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ e^{2x} + e^{-3} > 0;\ \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо ліву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right)}{x} = \left|\frac{-3}{-\infty}\right| = 0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)=-3.$$

Отже, пряма $y=-3$ – ліва горизонтальна асимптота.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(e^{2x}+e^{-3})\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+e^{-3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}+e^{-3}\right)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-2x\right)=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-\ln e^{2x}\right)=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-3}}{e^{2x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}+e^{-3}\right)'}{\left(e^{2x}\right)'}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=\ln 1=0.$$

Отже, пряма $y=2x$ – права похила асимптота. ■

<u>Приклад 3</u>. Знайти асимптоти функції $y=(x^2+3x-1)/x$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ x\neq 0;\ \ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

$x=0$ – точка, що "підозріла" на вертикальну асимптоту.

$$\lim_{x\to-0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(-\infty)\right|=+\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to+0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(+\infty)\right|=-\infty\ \Rightarrow\ x=0$$

– вертикальна асимптота.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left((x^2+3x-1)/x-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(3-1/x)=3 \quad\Rightarrow\quad y=x+3$$

– похила (ліва і права одночасно) асимптота. ■

2.3.8. Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Нехай функція задана явно рівнянням $y=f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову ескіза графіка можна здійснювати за наступною схемою.

1. *Попереднє дослідження.*

1.1. *Знаходження області визначення* $D(f)$ *функції.*

1.2. *Знаходження точок перетину графіка з осями координат.*

1.3. *Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від'ємна).*

1.4. *Дослідження функції на парність і непарність.*

1.5. *Дослідження функції на періодичність.*

2. *Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень* $E(f)$ *функції. Знаходження асимптот.*

2.1. *Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.*

2.2. *Дослідження поведінки функції "на нескінченності" (при* $x\to-\infty$ *і* $x\to+\infty$*). Знаходження області значень* $E(f)$ *функції. Знаходження похилих асимптот.*

3. *Дослідження функції за допомогою першої похідної.*

3.1. *Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.*

3.2. *Знаходження точок екстремуму та відповідних екс-*

тремальних значень функції.

4. *Дослідження функції за допомогою другої похідної.*

4.1. *Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції.*

4.2. *Знаходження точок перегину.*

5. *Побудова графіка.*

5.1. *Побудова асимптот.*

5.2. *Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах.*

5.3. *Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі* Ox *відповідно до знака функції), де лежать частини графіка.*

5.4. *При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка.*

5.5. *Побудова ескіза графіка.*

Зауваження. При дослідженні конкретної функції не обов'язково строго додержуватися зазначеної вище схеми. Можна навіть не з'ясовувати тих чи інших властивостей, якщо вони досить очевидні. Так, на періодичність треба досліджувати тригонометричні функції, а раціональні функції – не треба, оскільки відомо, що вони неперіодичні.

Приклад. Дослідити функцію $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ і побудувати ескіз її графіка.

□ Область визначення функції $D(f): x\in R$.

Точки перетину графіка функції:

з віссю Oy: $y(0)=(6\cdot 0-0)^{1/3}=0$;

з віссю Ox: $y=0$; $\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}=0$; $6x^2-x^3=0$; $x^2(6-x)=0$; $x=0$; $x=6$; маємо дві точки $(0;0)$ і $(6;0)$.

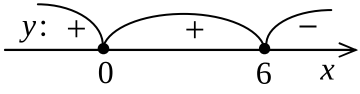


Рис. 73

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 73): функція від'ємна при $x\in(6;+\infty)$; функція додатна при $x\in(-\infty;0)\cup(0;6)$.

$y(-x) \neq y(x)$; $y(-x) \neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.

Функція неперіодична.

Точок розриву і скінченних кінців інтервалів області визначення функція не має, тому вертикальні асимптоти відсутні.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = -\infty.$$

Область значень функції $E(f): y \in R$.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (6/x - 1)^{1/3} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x\right) = \left|\infty - \infty\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\left(6x^2 - x^3\right)^{2/3} - x\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= 6 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(6/x - 1)^{2/3} - (6/x - 1)^{1/3} + 1} == 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Отже, пряма $y = -x + 2$ є похила (ліва і права) асимптота.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = (\sqrt[3]{6x^2 - x^3})' = (4 - x)\Big/\sqrt[3]{x(6 - x)^2};$$

стаціонарні точки: $y' = 0$; $(4 - x)\Big/\sqrt[3]{x(6 - x)^2} = 0$; $x = 4$;

похідна не існує у точках: $\sqrt[3]{x(6 - x)^2} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 74): функція спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; функція зростає при $x \in (0; 4)$; точка мінімуму $x_{\min} = 0$; точка максимуму

$x_{\max} = 4$; відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(4) = \sqrt[3]{6 \cdot 4^2 - 4^3} = 2\sqrt[3]{4}.$$

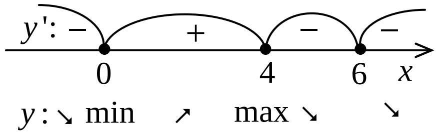


Рис. 74

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = -8\Big/\left(x^{4/3}(6-x)^{5/3}\right);$$

точки, де $y'' = 0$, відсутні; друга похідна не існує у точках: $x^{4/3}(6-x)^{5/3} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 75): функція опукла при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$; функція

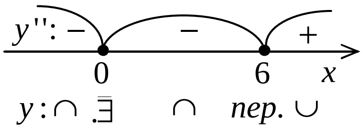


Рис. 75

вгнута при $x \in (6; +\infty)$;

$x_{пер} = 6$; $y_{пер} = y(6) =$

$= \sqrt[3]{6 \cdot 6^2 - 6^3} = 0.$

Отже, $(6; 0)$ – точка перегину.

Ескіз графіка дослідженої функції побудовано на рис. 76. ■

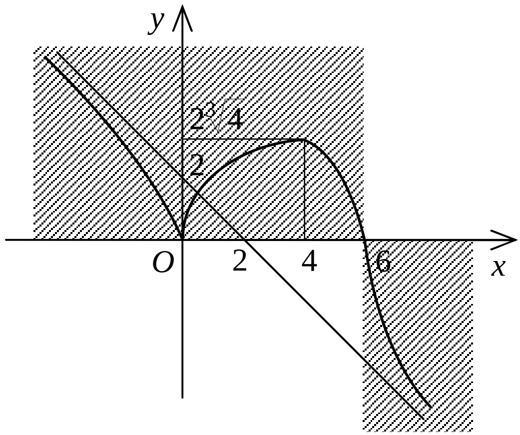


Рис. 76

2.4. Контрольні запитання

1) Що називається похідною функції?
2) У чому полягає фізичний зміст похідної?
3) У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
4) Який зв'язок між диференційованістю та неперервністю?
5) За якими правилами обчислюється похідна суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
6) Як знаходиться похідна складеної функції? Оберненої функції? Параметрично заданої функції?
7) Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
8) Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?
9) У чому полягає правило логарифмічного диференціювання?
10) Дайте означення похідної n-го порядку. У чому полягає фізичний зміст другої похідної?
11) Що називається диференціалом функції?
12) У чому полягає геометричний зміст диференціала?
13) Як зв'язані похідна і диференціал?
14) За якими правилами обчислюється диференціал суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
15) Наведіть формули диференціалів основних елементарних функцій.
16) Як диференціал застосовується в наближених обчисленнях?
17) Що називається диференціалом n-го порядку?
18) У чому полягає інваріантність форми першого диференціала? Чи поширюється властивість інваріантності на диференціали вищих порядків?
19) Сформулюйте теорему Ролля про корені похідної. Який її геометричний зміст?
20) Сформулюйте теорему Лагранжа про скінченні прирости. Який її геометричний зміст?
21) Сформулюйте теорему Коші про відношення приростів двох функцій.
22) У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?
23) Як зводяться невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до

одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞?

24) Наведіть формулу Тейлора n-го порядку із залишковим членом у формі Лагранжа.
25) Як записується формула Тейлора в диференціальній формі?
26) Наведіть приклади розкладання функцій за формулою Маклорена.
27) Як формула Тейлора застосовується в наближених обчисленнях?
28) У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?
29) Що називається точкою мінімуму функції? Точкою максимуму?
30) У чому полягає необхідна умова екстремуму?
31) Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
32) У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?
33) Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.
34) У чому полягає достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною?
35) Як знаходяться найменше та найбільше значення функції в замкненій області?
36) Яка функція називається опуклою (вгнутою) в точці та на інтервалі?
37) Що таке точка перегину?
38) У чому полягають достатні умови опуклості та вгнутості?
39) У чому полягає необхідна умова точки перегину?
40) Що таке критичні точки другої похідної?
41) Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин за другою похідною.
42) Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?
43) Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похилої асимптоти?
44) Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескіза графіка.

2.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти похідну функції $y = y(x)$, що задана явно (пункти “а”, “б” і “в”) чи неявно (пункт “г”).

№ в-та	Функція
1	а) $y = 2^{-x^2} ctg 4x$; б) $y = \dfrac{\arccos(1/x)}{2\log_2(x-1)}$; в) $y = (arcctg 4x)^{\ln x}$; г) $x + \ln y = \sin(xy)$
2	а) $y = \arcsin x^3 \cdot \sin 3x$; б) $y = \dfrac{3^{4x}}{3ctg\, x^2}$; в) $y = \left(\ln(x^2+1)\right)^{\cos(1/x)}$; г) $y + \sin x = x\cos y$
3	а) $y = \sin 3x^2 \log_5(3x-1)$; б) $y = \dfrac{4^{x^3}}{2\arcsin(1/x)}$; в) $y = (arctg\, 5x)^{\cos x}$; г) $e^y x - \sin x = y^2$
4	а) $y = tg(4x-3) \cdot 5^{2\sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{\log_8(2x-1)}{3arctg(1/x)}$; в) $y = (\arccos 3x)^{\ln(x-1)}$; г) $ctg\, y + xe^y = 1$
5	а) $y = \ln^2 x \cdot \arcsin(2/x)$; б) $y = \dfrac{ctg(2+x^2)}{5\log_3 2x}$; в) $y = (tg\, x)^{\sin 3x}$; г) $xy + 2 = x + \ln y$
6	а) $y = 2\log_2(4x+1) \cdot ctg(1/x)$; б) $y = \dfrac{e^{3x^2}}{3\cos(7x-3)}$; в) $y = (\ln x)^{arctg 4x}$; г) $\ln y + \sin xy = x$
7	а) $y = e^{-3x} arcctg(3/x)$; б) $y = \dfrac{\cos 3x^2}{\arcsin(x^3+1)}$; в) $y = (ctg 2x)^{tg\, x}$; г) $y\sin y = x^2 - y^2$

8	а) $y=\ln(2x^2-1)\cdot 2^{4x}$; б) $y=\dfrac{ctg\,3x}{arctg(3/x)}$; в) $y=(\cos 2x)^{tg\,x}$; г) $ye^{2y}+\sqrt{x}=y^2$
9	а) $y=\arccos(3/x)\cdot\log_4 3x$; б) $y=\dfrac{6^{3x^2}}{ctg\sqrt{x}}$; в) $y=(tg\,2x)^{arctg\,x}$; г) $y^2\sin xy=1-x$;
10	а) $y=2^{x^2}\log_3(2x-5)$; б) $y=\dfrac{\arccos\sqrt{x+1}}{ctg\,3x}$; в) $y=(\sin 2x)^{\cos x}$; г) $tg\,(x/y)+e^x=y$
11	а) $y=\sin(8/x)\cdot e^{4x^2}$; б) $y=\dfrac{\sin(2x-1)}{\arccos^3 x}$; в) $y=(\cos\sqrt{x})^{\ln x}$; г) $e^{x/y}+x^2=y$
12	а) $y=\sqrt[3]{x^4}\sin x^3$; б) $y=\dfrac{\sqrt{\cos(4x+1)}}{\arcsin 2x}$; в) $y=(ctg\,2x)^{5x^2}$; г) $3^x+3^y=(x-y)\ln 3$
13	а) $y=\lg(2x^3+1)\cdot tg(1/x)$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\ln\cos 2x}$; в) $y=(\ln x)^{\sin 2x}$; г) $x+2y^4=tg\,xy$
14	а) $y=\sqrt{x^5}\,arcctg\,5x^2$; б) $y=\dfrac{tg\,(2x+5)}{\cos\left(2/\sqrt{x}\right)}$; в) $y=(x\sin x)^x$; г) $\arcsin xy=x-y$
15	а) $y=arctg\,(5/x^2)\cdot\lg^2 x$; б) $y=\dfrac{tg\sqrt{1+3x^2}}{\cos 6x}$; в) $y=(\sin x)^{e^{4/x}}$; г) $y^4+x^4=\ln(x/y)$

16	а) $y=\sqrt[4]{x^7}\,arctg7x^2$; б) $y=\dfrac{\arccos x^2}{\sqrt{1-x^4}}$; в) $y=(\ln x)^{\sin 4x}$; г) $x\cos y=y+ctg\,x$
17	а) $y=4^{\sqrt{x}}\cdot\sin 2x^3$; б) $y=\dfrac{tg^2 3x}{\cos x-x}$; в) $y=(\arccos x)^{1/x^3}$; г) $\sin(x+y)=y^2-x^4$
18	а) $y=3^{2x^3}\cdot\cos 6x$; б) $y=\dfrac{x^2-\sqrt{x+1}}{tg\,4x}$; в) $y=(\sin x)^{2\sqrt{x}}$; г) $xy+1=\arccos(x-y)$.
19	а) $y=5^{x^3}\cdot\sin 3x$; б) $y=\dfrac{x-2\cos x}{ctg\,2x}$; в) $y=(\arccos x)^{4\sin x}$; г) $e^y x=\ln(x-y)$.
20	а) $y=(3x+\lg x)\cdot 4^{x^2}$; б) $y=\dfrac{\lg^2 x}{\sin 2x-2x}$; в) $y=(arcctg3x)^{\sin x}$; г) $arcctg\;xy=x^3+y^3$
21	а) $y=(e^{x^2}-x)\cdot\sin 4x$; б) $y=\dfrac{arcctg\sqrt[4]{x}}{1+\ln x}$; в) $y=(\arcsin 2x)^{\ln x}$; г) $2x-y^2=\cos\;xy$
22	а) $y=(\ln x-\lg x)\cdot ctg\,2x$; б) $y=\dfrac{\cos 4x}{arctg\,x^2}$; в) $y=(tg3x)^{e^x}$; г) $y\sin y=x^2+2y$
23	а) $y=\sin e^x\cdot\ln\cos x$; б) $y=\dfrac{\sin 3x-x^3}{arcctg3x^2}$; в) $y=(tg\,5x)^{ctg\,x}$; г) $xy^3+\cos(x-y)=0$

24	а) $y=\arcsin 3x\cdot\lg^3 x$; б) $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2-2}}{\cos 2x}$; в) $y=(ctg\,2x)^{\ln 4x}$; г) $y+x=\sin(y/x)$
25	а) $y=e^{\sqrt{x}}\cdot\arcsin 2x$; б) $y=\dfrac{x^3-3\sin x}{tg3x}$; в) $y=(ctg2x)^{e^x}$; г) $xy^3=\arccos(x-y)$
26	а) $y=4^{\sqrt{x}}\cdot\sin(2/x)$; б) $y=\dfrac{ctg\,x}{x^4+\cos 2x^2}$; в) $y=(tg\,4x)^{\arcsin x}$; г) $x-y=arctg(y/x)$
27	а) $y=\lg^2 x\cdot\arccos 2\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{2+\cos x^2}{ctg4x}$; в) $y=(\sin 3x)^{arcctg\,x}$; г) $y^3-\cos x=x^3\sin y$
28	а) $y=\cos^2 x\cdot\arcsin 2\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{arctg2x}$; в) $y=(tgx)^{\sin 3x}$; г) $xy=\ln(x-y)$
29	а) $y=\log_3^2 x\cdot\cos 4\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{tg\,3x}{arcctg\,x^2}$; в) $y=(ctg\,4x)^{1/x}$; г) $2x-y^2=\sin(x/y)$
30	а) $y=(\ln x-\lg x)\cdot tg\,e^x$; б) $y=\dfrac{arctg\sqrt{x}}{1+\ln x}$; в) $y=(\arccos x)^{\cos 2x}$.; г) $y\sin y+\sin x=x^3$

Завдання 2. Знайти другу похідну y''_{xx} функції $y = y(x)$, що задана параметрично.

№ в-та	Функція	№ в-та	Функція
1	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = te^{-t} \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2t - \cos 2t \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 2tg\, t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = e^t + t \\ y = e^t / t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = e^t + \sin t \\ y = 2ctg\, t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin t \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = t \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = 2\cos t \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = arctg\,(1/t) \\ y = e^t \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = \arccos t \\ y = 1/\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 2\, tg\ t \\ y = 1/\sin 2t \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos^3 t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 2\ln \cos t \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = 2\cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \ln\left(1-t^2\right) \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = t - \sin 2t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = arctg\, t \\ y = 1/\sqrt{1+t^2} \end{cases}$

11	$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + tg\ t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg\, 2t \end{cases}$
12	$\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = arctg\sqrt{t} \\ y = \ln(1 + t) \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t^2 - \sin 2t. \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = e^t / t \\ y = t\, e^{-t} \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = t \sin t \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = arctg\sqrt{t} \\ y = \sqrt{1 + t} \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = \ln \sin t; \\ y = \ln \cos t \end{cases}$

Завдання 3. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка l заданої функції у відповідній точці $M_0(x_0; y_0)$. Зобразити дотичну та нормаль у декартовій прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y = (1 - \sin x)^{ctg\,(x/4)}$; $x_0 = \pi$	16	$y = (1 + (1/\pi)\sin \pi x)^{x^2}$; $x_0 = 1$
2	$y = (1 - \cos x)^{tg\,(x/2)}$; $x_0 = \pi/2$	17	$tg(x - y) + x^2 + 2y^2 = 3$; $M_0(1;1)$
3	$y = \dfrac{(2 - x)^5 (x + 1)^2}{x\ \sqrt{(5 - x)^3}}$; $x_0 = 1$	18	$y = \dfrac{(3x - 5)^2}{(x + 1)\ \sqrt[3]{(2 - x)^4}}$; $x_0 = 1$

4	$y=(1+2\,tg\,x)^{\cos x}$; $x_0=0$	19	$\ln(xy+1)+y^3-1=0$; $M_0(0;1)$
5	$x^2/64-y^2/16=1$; $M_0(10;-3)$	20	$\begin{cases} x=\sqrt{2}(\cos t+t\sin t)-1 \\ y=\sqrt{2}(\sin t-t\cos t)-1 \end{cases}$; $t_0=\pi/4$
6	$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin 2t \end{cases}$; $t_0=\pi/2$	21	$\begin{cases} x=(1/\pi)t\cos t+\pi \\ y=2t\sin t \end{cases}$; $t_0=\pi/2$
7	$x^2/25+y^2=1$; $M_0(4;-3/5)$	22	$\cos\frac{y}{x}+x^3-4y-2=0$; $M_0(1;0)$
8	$x^2/100+y^2/4=1$; $M_0(8;-6/5)$	23	$tg(x-1/y)+3y^2-3x=0$; $M_0(1;1)$
9	$x^2/16-y^2=1$; $M_0(5;-3/4)$	24	$\sin\frac{x}{y}+4y-x+4=0$; $M_0(0;-1)$
10	$x^2+y^2=25$; $M_0(-4;3)$	25	$\arcsin(xy)+3y-x+3=0$; $M_0(0;-1)$
11	$x^2/100+y^2/25=1$; $M_0(-8;3)$	26	$\cos(x/y)+3y-x+2=0$; $M_0(0;-1)$
12	$x^2/64-y^2/16=1$; $M_0(-10;-3)$	27	$e^y-5\sin(xy)-1=0$; $M_0(1;0)$
13	$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=\pi-\cos(t/2) \end{cases}$; $t_0=\pi$	28	$\begin{cases} x=\ln(1+t^2)-\ln 2 \\ y=4\,arctg\,t-\pi \end{cases}$; $t_0=1$

14	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 4\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases};$ $t_0 = \pi/4$	29	$\begin{cases} x = 2\sqrt{1-t^2} \\ y = 6\arcsin t - \pi \end{cases};$ $t_0 = 1/2$
15	$x^2/16 - y^2/4 = 1$; $M_0(-5; -3/2)$	30	$x^2/25 - y^2/150 = 1$; $M_0(-7; 12)$

Завдання 4. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові.

№ в-та	Функція та рівняння	№ в-та	Функція та рівняння
1	$y = e^{-2x}/x^2$; $xy' + 2(x+1)y = 0$	16	$y = \ln^2 x/x$; $x^2 y' + xy - 2\ln x = 0$
2	$y = \sin\sqrt{x}$; $4x\,y'' + 2y' + y = 0$	17	$y = x\,arctg\,x$; $x^4 y'' - 2(xy' - y)^2 = 0$
3	$y = \sin^2 x$; $2y\,y'' + 4y^2 = (y')^2$	18	$y = e^{\sin x}$; $y'' - y'\cos x + y\sin x = 0$
4	$y = x\sqrt{6\ln x}$; $xy\,y' = y^2 + 3x^2$	19	$y = ctg^2 x$; $y''\cos^2 x = 2y + 6y^2$
5	$y = x/\ln x$; $x^4 y'' + xy^2 = 2y^3$	20	$y = (1+x^2)\ arctg\,x$; $(1+x^2)\ (xy'' - y') + 1 = x^2$
6	$y = x/(x+1)$; $xy'' + 2y\,y' = 0$	21	$y = x\sin x$; $y'' + y - 2\cos x = 0$
7	$y = e^{x^2/2}$; $y\,y'' - (y')^2 = e^{x^2}$	22	$y = \sqrt{\cos x}$; $4y^3 y'' + 2y^4 + \sin^2 x = 0$

8	$y=\cos(1/x)$; $x^4y''+2x^3y'+y=0$	23	$y=x\cos x$; $y''+y+2\sin x=0$
9	$y=\sqrt{\ln x}\big/x^2$; $2x^5y\,y'+4x^4y^2=1$	24	$y=\sqrt{x}\,e^x$; $4x^2y''=(4x^2+4x-1)\,y$
10	$y=\cos x^2$; $xy''-y'+4x^3y=0$	25	$y=tg\,x/x$; $xy'+y-1\big/\cos^2 x=0$
11	$y=x\;ctg\,x$; $y''\sin^2 x=2y-2$	26	$y=x^2\big/2-4\big/x+3$; $x\,y''+2y'=3x$
12	$y=tg\,x$; $\left(y'-y^2\right)y''=2y\,y'$	27	$y=x\,e^{-x^2}$; $y''+6y-4x^2y=0$
13	$y=x\;e^{-x}$; $y''-y+2\;e^{-x}=0$	28	$y=x^2\big/\sin x$; $xy'-y\,(2-x\,ctg\,x)=0$
14	$y=xe^{1/x}$; $x^4y''-y=0$	29	$y=x^2\sin x$; $x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0$
15	$y=e^{\sqrt{x}}$; $4x\,y''+2y'-y=0$	30	$y=x^3\ln x$; $x^2y''-6y-5x^3=0$

Завдання 5. Застосовуючи правило Лопіталя та інші прийоми, знайти вказані границі.

№ в-та	а)	б)
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x+tg5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x}$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x+4}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}(x+\cos x)^{1/x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x^2}{1-\cos x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$

4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg2x+arctgx}$	$\lim\limits_{x\to 0}\,(\cos 4x)^{1/x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^3+tg2x^2}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(arcctg\ x)^{1/\ln(1+x^2)}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x+3tg5x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(e^x-e\right)^{2/\ln(x-1)}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg5x}{\arcsin 3x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+e^{-2x}\right)^x$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\arcsin x^2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\,(x+\ln x)^{1/\ln x}$
9	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin(x+1)}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\,(\ln(x+1))^{1/\ln 2x}$
10	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2arctg\ x}\right)^x$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x/2)}{\sin^2 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\,(\ln(4x+1))^{1/\ln x}$
12	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{\ln(1+1/x)}$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(e^x-e^{-x}\right)^{2/\ln x}$
13	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(ctg^2\,x\cdot\arcsin 3x)$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x\cdot\sin 3x}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\,(\sin 2x)^{1/\ln tg\,x}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 4x}{1-\cos 5x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\,x^{1/\ln\sin x}$
16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg^3x-2\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)^{1/\ln x}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\sin 2x}{arctg5x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\,(ctg2x)^{tg\,x}$

18	$\lim\limits_{x\to 0}(ctg\,x \cdot arctg 2x)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg\,x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x-\sin^2 x}{1-\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to \pi/4}(tg 2x)^{1/\ln(4x-\pi)}$
20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x+4x^2)}{x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{1/x^2}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tgx-x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{2/x}$
22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,(x^2-x)}{8x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{2/\ln\cos x}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3+x^2}{1-\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{4/tg^2 x}$
24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg 2x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}(1+e^x)^{x}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{8x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(\sin x+x)^{1/\ln x}$
26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x^2}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(tg 2x)^{1/\ln x}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to 1}(e-e^x)^{x-1}$
28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x)-1)^{x}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x^2-2x}{\sin 6x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2arctg\,x)^{3/\ln(1+x^2)}$
30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x^2}{1-\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(tg\,2x)^{1/\ln\sin x}$

Завдання 6. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції на вказаному відрізку.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.

№ в-та	Функція та відрізок
1	$y = x^2 + 16/x - 12$,[1,4]
2	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 3$,[0,6]
3	$y = 2\sqrt{x} - x + 4$,[0,4]
4	$y = x - 4\sqrt{x} + 2$,[1,9]
5	$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 1$,[–3,3]
6	$y = 5 - x - 4/(x+2)^2$,[–1,2]
7	$y = \dfrac{-x^2 + 7x - 7}{x^2 - 2x + 2}$,[1,4]
8	$y = 1 - \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$,[1,5]
9	$y = -x^2/2 + 8/x + 10$,[–4,–1]
10	$y = -\dfrac{x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5}$,[–2,1]
11	$y = 1 + 2\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$,[0,4]
12	$y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$,[1,5]
13	$y = -x^2/2 + 2x + 8/(x-2) + 3$,[–2,1]
14	$y = 2\sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 1$,[–4,2]
15	$y = 4/x^2 - 8x - 11$,[–2,–1/2]
16	$y = 6 - x - 4/x^2$,[1,4]
17	$y = \dfrac{4(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5}$,[–3, 2]

18	$y=2-\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$,[–1,5]
19	$y=10x/(1+x^2)+3$,[0,3]
20	$y=2x^2+108/x-60$,[2,4]
21	$y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}-1$,[–1,6]
22	$y=x-4\sqrt{x+2}+9$,[–1,7]
23	$y=2-4x/(4+x^2)$,[–4,2]
24	$y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}+1$,[–2,4]
25	$y=-\dfrac{4(x^2+3)}{x^2+2x+5}$,[–5,1]
26	$y=x^2-2x+16/(x-1)-12$,[2,5]
27	$y=2\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}-3$,[–3,4]
28	$y=8x+4/x^2-17$,[1/2,2]
29	$y=x^2+4x+16/(x+2)-10$,[–1,2]
30	$y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}+2$,[–2,5]

Завдання 7. Дослідити задану функцію засобами диференціального числення, знайти асимптоти та побудувати графік.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.

№ в-та	Функція	№ в-та	Функція
1	$y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$	16	$y=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$
2	$y=\dfrac{x^3}{2(3-x^2)}$	17	$y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

3	$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$	18	$y = \frac{8x}{(x-2)^2}$
4	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	19	$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$
5	$y = \frac{x^2}{2(x-2)}$	20	$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
6	$y = \frac{3-x^2}{x+2}$	21	$y = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$
7	$y = \frac{3x^4+1}{x^3}$	22	$y = \frac{4x}{(x-3)^2}$
8	$y = \frac{x^2}{x^2-1}$	23	$y = \frac{6x^2}{(x-1)^2}$
9	$y = \frac{x}{x^2-1}$	24	$y = \frac{1}{2x} + 2x^2$
10	$y = \frac{4}{x} + \frac{x^2}{2}$	25	$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$
11	$y = \frac{x^4}{(1+x)^4}$	26	$y = \frac{4(x-1)^2}{x^2}$
12	$y = \frac{x^4}{2(x-1)^3}$	27	$y = \frac{9x}{(x-4)(2x+1)}$
13	$y = \frac{9(x-3)}{2(x-2)^2}$	28	$y = \frac{2x+6}{(x+2)^2}$
14	$y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$	29	$y = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$
15	$y = \frac{2x+3}{(x+1)^2}$	30	$y = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$

Змістовий модуль 3. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА У ПРОСТОРІ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ

3.1. Визначники та їх властивості

3.1.1. Означення визначника. Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника

Визначником (***детермінантом***) n***-го порядку*** називається число Δ_n, яке записується у вигляді квадратної таблиці

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що має n ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** визначника. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю,*** а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю*** визначника.

Головна діагональ визначника проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3.1.2. Обчислення визначника

<u>Загальне правило</u> обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

а) *Визначник першого порядку* Δ_1 $(n=1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11} :

$$\Delta_1 = a_{11} \ .$$

б) *Визначник* n*-го порядку* Δ_n $(n \geq 2)$ *дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}$$

(***розклад визначника за елементами першого рядка***).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:

1) визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

(<u>правило “хреста” (схема на рис. 77)</u>:
визначник другого порядку Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*);

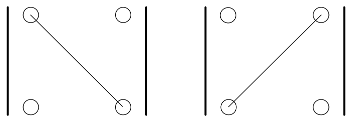
2) визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}\, a_{11}$$

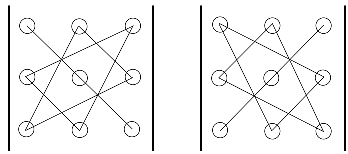
(<u>правило “трикутників” (схема на рис. 78)</u>:

визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком "+" , а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* "-").



"+" "-"

Рис. 77



"+" "-"

Рис. 78

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку за правилом "хреста" $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

$$\square \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 2 \ . \qquad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти мінор M_{23} і алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} даного визначника

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} .$$

$$\square \ a_{23} = -1 \ ; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 6 = 24 \ ;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 24 = -24 \ . \ \blacksquare$$

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку, розклавши його за елементами першого рядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(2-0) - 2(-1-0) - 4(-3+10) = -32 \ . \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку за правилом “трикутників”

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 +$$

$$+(-1)\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 9 - 3\cdot 4\cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15 \ . \quad \blacksquare$$

Зауваження. Елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й об’єкти іншої природи.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & x \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

$$\square \quad 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & x\\ x & -1\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & x\\ 1 & -1\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & x\end{vmatrix}=0\ ;\quad -2x^2-2x+4=0\ ;$$

$$x^2+x-2=0\ ;\quad x_1=-2;\quad x_2=1\ .\ \blacksquare$$

3.1.3. Основні властивості визначника

Зауваження 1. Для скорочення формулювань будь-який рядок чи будь-який стовпець називатимемо ***рядом***.

Властивість 1. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду і дорівнює значенню визначника*:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

– ***розклад визначника за*** i ***-м рядком***;

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$$

– ***розклад визначника за*** j ***-м стовпцем***.

Зауваження 2. При розкладанні визначника рекомендується вибирати такий ряд, в якому найбільше нульових елементів.

Наслідок. *Визначник з нульовим рядом дорівнює нулю*.

Властивість 2. *Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями і навпаки*.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями і навпаки називається ***транспонуванням*** визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається ***транспонованим***, його значення дорівнює значенню самого визначника Δ_n: $\Delta_n^T=\Delta_n$.

Властивість 3. *Якщо поміняти місцями два паралельних ря-*

ди, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною.

Властивість 4. *Визначник з двома однаковими паралельними рядами дорівнює нулю.*

Властивість 5. *Спільний множник елементів будь-якого ряду можна виносити за знак визначника.*

Іншими словами, *щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного ряду.*

Властивість 6. *Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю.*

Властивість 7. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого паралельного йому ряду дорівнює нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 , \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad i \neq j \ .$$

Властивість 8. *Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи іншого паралельного йому ряду, помножені на одне і те саме число.*

Властивість 9. *Якщо кожний елемент якого-небудь ряду є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких відповідний ряд складається з перших доданків, а в другому – з других доданків.*

3.1.4. Зведення визначника до східчастого вигляду

Визначник, у якому всі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником верхнє трикутного вигляду*** (рис. 79).

Аналогічно вводиться поняття визначника ***нижнє трикутного вигляду*** (рис. 80).

Окремим випадком визначника трикутного вигляду є визначник ***східчастої форми*** як трапеція. На рис. 81 подано ***верхнє трапецієвидний*** визначник.

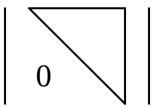


Рис. 79

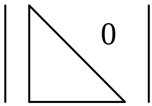


Рис. 80

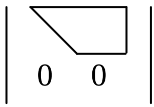


Рис. 81

<u>Зауваження</u>. Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду, користуючись основними його властивостями.

<u>Теорема</u>. *Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі*. (Доведіть самостійно).

<u>Приклад</u>. Обчислити визначник, попередньо звівши його до верхнє трикутного вигляду з одиницями на головній діагоналі:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \left| R_1 \leftrightarrow R_3 \right| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 3R_1 \\ R_3 := R_3 - 2R_1 \\ R_4 := R_4 - R_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \left| R_2 \leftrightarrow R_4 \right| =$$

$$=\left|R_2 \leftrightarrow R_4\right| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_3 := R_3 + 3R_2 \\ R_4 := R_4 - 2R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \left|R_3 := R_3 + R_4\right| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left|R_4 := R_4 - 8R_3\right| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} = 54\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 54$, де R_i – i-й рядок. ■

3.2. Матриці та операції над ними

3.2.1. Означення матриці. Рівність матриць. Види матриць. Визначник квадратної матриці. Норма матриці

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\ .$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** і позначається 0.

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n-го порядку сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю***.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє трикутною*** (***верхнє трикутною***)

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix};\ U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** і позначається E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність визначник

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A = 0$, то матриця називається ***виродженою*** (***особливою***).

Якщо визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$, то матриця називається ***невиродженою*** (***неособливою***).

Для довільної прямокутної матриці A розміру $m \times n$ (за аналогією з модулем вектора) вводиться узагальнена числова характеристика – ***норма*** матриці $\|A\|$, яка задовольняє наступні аксіоми

$$\|A\| > 0, \text{ якщо } A \neq 0; \quad \|0\| = 0; \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|;$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|; \quad \|AC\| \leq \|A\| \, \|C\|,$$

де α – довільне дійсне число; A, B, C – довільні матриці, для яких відповідні операції мають зміст.

Існують різні види норми матриці. Обмежимось розглядом ***евклідової норми***, що задається рівністю

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} .$$

Зауваження. Для вектора (матриці-рядка чи матриці-стовпця) евклідова норма співпадає з його модулем.

3.2.2. Операції над матрицями

Сумою матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається така матриця $C = A + B$ того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} , \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} .$$

Аналогічно вводиться ***різниця*** матриць

$$C = A - B \iff c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} , \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} .$$

Добутком матриці A розміру $m \times n$ ***та числа*** α називається така матриця $C = \alpha A$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число

$$C = \alpha A \iff c_{ij} = \alpha a_{ij} , \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} .$$

Таким чином, *операції додавання та віднімання матриць і множення матриці на число виконуються поелементно*.

Зауваження 1. Щоб визначник помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент одного довільно вибраного рядка чи стовпця. Щоб матрицю помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент матриці в цілому.

Приклад 1. Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \; C = 2A - 3B .$$

$$\square \quad 2A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; \; 3B = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ -9 & -12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} -19 & 18 & -17 \\ 15 & 12 & -8 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Добутком матриці A розміру $m \times p$ ***на матрицю*** B розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B

$$C_{m \times n} = A_{m \times p} B_{p \times n} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}.$$

<u>Зауваження 2</u>. Добуток AB існує тільки тоді, коли розміри матриць A і B ***узгоджені***: перший співмножник A має число стовпців, яке дорівнює числу рядків другого співмножника B. Навіть коли обидва добутки AB і BA мають смисл, то в загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються ***переставними***. Зрозуміло, що переставні матриці завжди квадратні.

<u>Зауваження 3</u>. Зазначимо деякі властивості добутку матриць:

1) $AE = A$; $EA = A$; 2) $(AB)C = A(BC)$;

3) $A(B + C) = AB + AC$; 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

5) для квадратних матриць A і B справедливо

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B.$$

<u>Приклад 2</u>. Для заданих матриць A і B узгоджених розмірів знайти добутки AB і BA

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ $$C_{2\times 2} = A_{2\times 3} B_{3\times 2} =$$

$$=\begin{pmatrix} -2\cdot 3+3\cdot 2+(-4)\cdot 4 & -2\cdot(-1)+3\cdot 0+(-4)\cdot 1 \\ 3\cdot 3+2\cdot 2+(-5)\cdot 4 & 3\cdot(-1)+2\cdot 0+(-5)\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -16 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}; \qquad D_{3\times 3}=B_{3\times 2}\,A_{2\times 3}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 3+(-1)\cdot 2 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5) \\ 2\cdot(-2)+0\cdot 3 & 2\cdot 3+0\cdot 2 & 2\cdot(-4)+0\cdot(-5) \\ 4\cdot(-2)+1\cdot 3 & 4\cdot 3+1\cdot 2 & 4\cdot(-4)+1\cdot(-5) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 7 & -7 \\ -4 & 6 & -8 \\ -5 & 14 & -21 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки і стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

<u>Приклад 3</u>.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.2.3. Обернена матриця та її обчислення

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\ .$$

<u>Теорема</u>. *Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} *– алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* A.

(Без доведення).

<u>Приклад</u>. Упевнитися, що дана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $A\,A^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ $$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

– матриця A невироджена.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\ ; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\ ; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\ ;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\ ; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\ ;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\ ; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\ ;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\ ;\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Рівності $A A^{-1}=E$ і $A^{-1}A=E$ перевірте самостійно. ■

3.2.4. Мінори матриці. Ранг матриці

Виділимо в матриці A розміру $m\times n$ будь-які k рядків і k стовпців $(1\le k\le \min\{m,n\})$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається ***мінором*** M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rank\,A$ матриці A розміру $m\times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Ясно, що

$$0\le rank\,A\le \min\{m,n\}\ ,$$

причому ранг дорівнює нулю тільки для нульової матриці.

Якщо $rank\,A=\min\{m,n\}$, то матриця A називається ***матрицею повного рангу***.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

3.2.5. Методи обчислення рангу матриці

Мінор M_{k+1} $(k+1)$-го порядку, який містить у собі деякий мінор M_k k-го порядку, називається ***обвідним*** для цього мінора M_k.

<u>Теорема 1</u>. *Якщо в матриці A існує відмінний від нуля мінор $M_r\ne 0$ r-го порядку, а всі його обвідні мінори M_{r+1} $(r+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то число r є рангом матриці A.*

(Без доведення).

Метод обвідних мінорів знаходження рангу матриці A розміру $m \times n$ складається з наступних кроків:

1) *Покласти* $k := 0$.

2) *Обчислити почергово обвідні мінори* M_{k+1} $(k+1)$*-го порядку. Якщо деякий мінор* M_{k+1} *відмінний від нуля, то прийняти його за базисний і перейти до кроку* 3). *Якщо всі обвідні мінори* $(k+1)$*-го порядку дорівнюють нулю, то перейти до кроку* 4).

3) *Покласти* $k := k+1$. *Якщо* $k = \min\{m, n\}$, *то перейти до кроку* 4). *У противному разі перейти до кроку* 2).

4) *Покласти* $\text{rank}\, A = k$ *і закінчити обчислення*.

<u>Приклад 1</u>. Знайти ранг даної матриці A методом обвідних мінорів і вказати її базисний мінор

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ $k = 0$; $M_1 = 1 \neq 0$; $k = 1$; $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$;

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ ; \ k = 2 \ ; \ M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \text{rank}\, A = 2 \ ; \ M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

– базисний мінор. ■

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох паралельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $A \sim B$.

Теорема 2. *Еквівалентні матриці мають один і той же ранг*

$$A \sim B \;\Rightarrow\; rank\, A = rank\, B\,.$$

Іншими словами, *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці*.

(Без доведення).

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці A розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої ***верхнє трапецієвидної*** (зокрема, ***верхнє трикутної***) матриці $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1r} & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \widetilde{a}_{2r} & \widetilde{a}_{2(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

в якій ненульові діагональні елементи дорівнюють одиниці.

Ранг трапецієвидної матриці $\widetilde{A}$ *дорівнює числу* r *її ненульових рядків*.

Тоді

$$rank\, A = rank\, \widetilde{A} = r\,.$$

За базисний мінор $\tilde{M}_r$ трапецієвидної матриці $\tilde{A}$ можна взяти кутовий мінор

$$\tilde{M}_r = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{a}_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} .$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти ранг даної матриці A методом елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} .$$

□

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_3 \right| \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left| R_1 := -R_1 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 5R_1 \\ R_3 := R_3 + 6R_1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 15 \\ 0 & -9 & -7 & -15 \end{pmatrix} \sim \left| R_3 := R_3 + R_2 \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left| R_2 := R_2 / 9 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 7/9 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$rank\, A = r = 2$, де R_i – i-й рядок; S_j – j-й стовпець. ■

3.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язування

3.3.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

Система m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з*** n ***невідомими*** x_j $(j=\overline{1,n})$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n})$ і b_i $(i=\overline{1,m})$ – задані числа:

a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n})$ – ***коефіцієнти*** при невідомих;

b_i $(i=\overline{1,m})$ – ***вільні члени*** (***праві частини***).

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Для квадратної системи визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається ***визначником системи***

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0$ $(i=\overline{1,m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною*** (***суперечливою***), якщо вона не має жодного розв'язку.

Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв'язок $x_j = 0$ $(j=\overline{1,n})$.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо її розв'язок єдиний, і ***невизначеною*** – в противному разі.

Введемо матричні позначення

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C=\left(A \mid B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих*** розміру $n\times 1$; A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$; B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***) розміру $m\times 1$; C – ***розширена матриця*** системи розміру $m\times(n+1)$;

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі $AX=B$.

Для квадратної системи $\Delta_n=\det A$.

Теорема Кронекера – Капеллі. *Система* m *лінійних алгебраїчних рівнянь з* n *невідомими* $AX=B$ *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці* $C=\left(A \mid B\right)$ *дорівнює рангу основної матриці* A: $rank\,C=rank\,A=r$. *У випадку сумісності:* 1) *якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих* $r=n$, *то система має єдиний розв'язок (є визначеною);* 2) *якщо цей спільний ранг менше числа невідомих* $r<n$, *то система є невизначеною і має безліч розв'язків, які залежать від* $n-r$ *довільних сталих (параметрів)* (рис. 82).

(Без доведення).

Оскільки розширена матриця C включає в себе основну матрицю A, то $rank\,A\le rank\,C$. Розширена матриця C одержана з основної матриці A доданням тільки одного стовпця, тому $rank\, C \le rank\, A + 1$.

Нехай система сумісна $rank\, C = rank\, A = r$ і M_r – деякий (довільно вибраний) базисний мінор її основної матриці A. *Якщо залишити в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких входить в базисний мінор, то одержана система буде рівносильна початковій.*

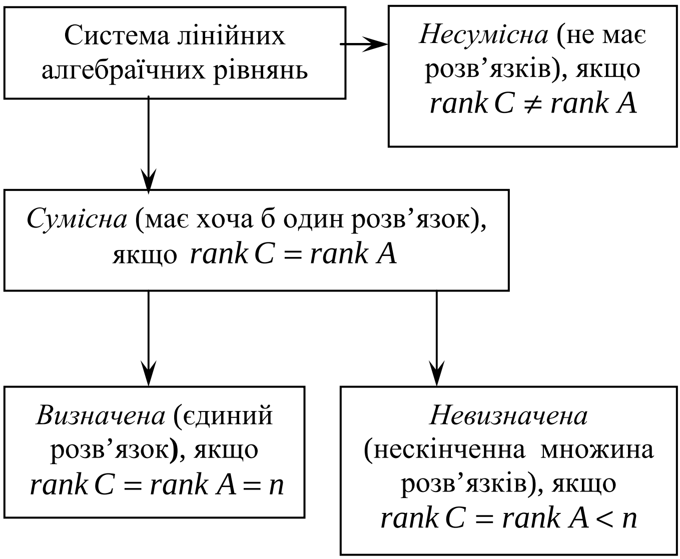


Рис. 82

Якщо сумісна система є невизначеною $rank\, C = rank\, A = r < n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються ***базисними***, а решта $n - r$ невідомі x_j називаються ***вільними***.

Залишимо в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких увійшла в базисний мінор, і перенесемо вправо всі члени з вільними невідомими. Розглядаючи вільні невідомі як довільні сталі (параметри), одержуємо квадратну систему r-го порядку відносно базисних невідомих, визначником якої служить базисний мінор M_r. Оскільки $M_r \ne 0$, то базисні невідомі знаходяться однозначно. Таким чином, отримуємо ***загальний розв'язок*** початкової системи. При довільно вибраних фіксованих значеннях вільних невідомих (параметрів) одержуємо ***частинний розв'язок***. Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних невідомих, називається ***опорним розв'язком***.

<u>Приклад</u>. Перевірити дану систему на сумісність

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

□ Для знаходження рангу використовуємо метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці $C = \left(A \mid B\right)$ та переставлення стовпців тільки основної матриці A зводимо розширену матрицю C до східчастої форми з верхнє трапецієвидною основною матрицею A. Ранг основної матриці A дорівнює числу рядків трапеції. Якщо в розширеній матриці C нижче рядків трапеції всі елементи нульові, то її ранг дорівнює рангу основної матриці $rank\,C = rank\,A$. У противному разі ранг розширеної матриці на одиницю більший $rank\,C = rank\,A + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}; \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left|\begin{matrix} R_2 := R_2 - R_1 \\ R_3 := R_3 - 5R_1 \end{matrix}\right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := R_3 - 3R_2\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := -R_3/5\right| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left|S_2 \leftrightarrow S_4\right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси $rank\,A = 2;\quad rank\,C = 3$.

Оскільки $rank\,C \neq rank\,A$, то система несумісна. ■

Зауваження 1. Загальний розв'язок СЛАР може мати різний вигляд, що, зокрема, залежить від вибору складу базисних і вільних невідомих і від способу введення довільних сталих.

Зауваження 2. Загальний розв'язок X сумісної неоднорідної СЛАР $AX = B$ можна подати у вигляді суми загального розв'язку X_0 відповідної однорідної СЛАР $AX = 0$ і будь-якого частинного розв'язку X_* вихідної неоднорідної СЛАР

$$X = X_0 + X_* .$$

В свою чергу, загальний розв'язок X_0 відповідної однорідної СЛАР можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$X_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{n-r} X_{n-r}$$

$n - r$ лінійно незалежних частинних розв'язків X_j $(j = \overline{1, n-r})$ цієї однорідної СЛАР, що утворюють так звану ***фундаментальну систему розв'язків***. Тут C_j $(j = \overline{1, n-r})$ – довільні сталі (параметри).

3.3.2. Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Теорема. *Якщо основна матриця* A *квадратної системи* $AX = B$ *невироджена (тобто,* $\det A \neq 0$*), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою*

$$X = A^{-1} B .$$

□ Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B\,; \qquad \left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B\,;$$

$$EX=A^{-1}B\,; \qquad X=A^{-1}B\,. \qquad \blacksquare$$

Приклад. Розв'язати квадратну систему

$$\begin{cases} 3x-2y-5z=-7 \\ 2x+y+2z=0 \\ 2x-y-3z=-4 \end{cases}$$

за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***).

$$\square \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$AX=B\,; \quad \det A=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

– матриця A невироджена.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1\,; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=10\,;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-4\,; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1\,;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\,; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1\,;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\,; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-16\,;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7\,; \quad A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B \ ; \quad X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7+0-4 \\ -70+0+64 \\ 28+0-28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{matrix} \qquad \blacksquare$$

3.3.3. Розв’язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Розв’язання квадратної системи з невиродженою основною матрицею можна подати безпосередньо через визначники.

<u>Теорема (правило Крамера)</u>. *Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою*

$$x_j = \Delta_n^{(j)} / \Delta_n \ , \qquad j = \overline{1,n} \ ,$$

де $\Delta_n^{(j)}$ – допоміжний визначник, одержаний з основного визначника Δ_n заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_n^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} .$$

<u>Приклад 1</u>. Розв’язати квадратну систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases}$$

□ $\Delta=\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&-1&2\\2&-1&3\end{vmatrix}=-4\neq 0$; $\Delta^{(1)}=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-3&-1&2\\-4&-1&3\end{vmatrix}=-4$

$$\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&-3&2\\2&-4&3\end{vmatrix}=0\ ;\quad \Delta^{(3)}=\begin{vmatrix}3&-2&1\\1&-1&-3\\2&-1&-4\end{vmatrix}=8\ ;$$

$$x=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1;\ y=\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta}=\frac{0}{-4}=0;\ z=\frac{\Delta^{(3)}}{\Delta}=\frac{8}{-4}=-2\,.$$ ■

Приклад 2. Перевірити, що дана система

$$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=3\\6x_1+2x_2-x_3=1\\3x_1+x_2-3x_3=-2\end{cases}$$

сумісна і невизначена. Користуючись методом Крамера, знайти її загальний розв’язок і виділити з нього опорний розв’язок.

□ Для знаходження рангу використовуємо метод обвідних мінорів.

$$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\6&2&-1\\3&1&-3\end{pmatrix}\ ;\ rank\,A=2\ ;\ M_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

– базисний мінор.

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&2&3\\6&2&-1&1\\3&1&-3&-2\end{array}\right)\ ;\quad rank\,C=2\ .$$

Оскільки $rank\,A=rank\,C=r=2<n=3$, то система сумісна і невизначена.

Приймаємо x_2 і x_3 – базисні невідомі (відповідають стовпцям базисного мінору), а x_1 – вільне невідоме (відповідає стовпцю, що не входить у базисний мінор). Нехай $x_1 = C_1$, де C_1 – довільна стала (параметр). Залишаємо в системі тільки перше та друге рівняння, що відповідають рядкам базисного мінору. Переносимо члени з вільним невідомим $x_1 = C_1$ вправо. Одержану квадратну систему відносно базисних невідомих x_2 і x_3 розв'язуємо методом Крамера.

$$x_1 = C_1 \ ; \quad \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3 - 3C_1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 - 6C_1 \end{cases}; \quad \Delta = M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \ ;$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 3-3C_1 & 2 \\ 1-6C_1 & -1 \end{vmatrix} = 15C_1 - 5 \ ; \ \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3-3C_1 \\ 2 & 1-6C_1 \end{vmatrix} = -5 \ ;$$

$$x_2 = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{15C_1 - 5}{-5} = -3C_1 + 1; \ \ x_3 = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1 \ .$$

Отже, $x_1 = C_1$; $x_2 = 1 - 3C_1$; $x_2 = 1$, $C_1 \in R$
– загальний розв'язок.

Покладемо $x_1 = C_1 = 0$. Тоді $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_2 = 1$
– опорний розв'язок. ■

3.3.4. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо довільну прямокутну систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця, а C – розширена матриця цієї системи. Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці C і переставленню стовпців тільки основної матриці A відповідають наступні рівносильні перетворення лінійної системи:

1) переставлення місцями будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Метод Гаусса дослідження і розв’язування СЛАР складається з двох основних етапів.

На першому етапі (***прямий хід*** методу Гаусса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи. Спочатку виділяють перше рівняння і відповідно перше невідоме. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять перше рівняння на $a_{11} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно перше невідоме з другого рівняння, потім з третього рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Виділяють друге рівняння і відповідно друге невідоме. Припустимо, що $a_{22} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять друге рівняння на $a_{22} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно друге невідоме з третього рівняння, потім з четвертого рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Цей процес продовжують до тих пір, доки не дійдуть до останнього найнижчого рівняння або ситуації, коли виділене рівняння і всі рівняння, що лежать нижче нього, мають тільки нульові коефіцієнти при невідомих.

В результаті система зводиться до наступної східчастої форми

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{1(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{2(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{x}_r + \tilde{a}_{r(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_r \\ 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ 0 = \tilde{b}_{r+2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 = \tilde{b}_m \end{cases}$$

Якщо хоча б один з вільних членів $\tilde{b}_j$ $\left(j = \overline{r+1,\, m}\right)$ відмінний від нуля, то система несумісна, тобто не має розв’язків.

Якщо всі вказані вільні члени дорівнюють нулю $\tilde{b}_j = 0$ $\left(j = \overline{r+1,\, m}\right)$, то система сумісна і $rank\, A = rank\, C = r$. Перші r невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j = \overline{1,\, r}\right)$ є базисними, а решта $n-r$ невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j = \overline{r+1,\, n}\right)$ – вільні. Тоді здійснюють перехід до другого етапу.

На другому етапі (***зворотний хід*** методу Гаусса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри) $\tilde{x}_j = C_{j-r}$ $\left(j = \overline{r+1,\, n}\right)$. Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв’язують, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з останнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме $\tilde{x}_r$. Потім одержане значення $\tilde{x}_r$ підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього $\tilde{x}_{r-1}$ і т.д., доки не знайдуть $\tilde{x}_1$.

<u>Зауваження</u>. Прямий хід методу Гаусса зручно виконувати в матричній формі, зводячи розширену матрицю до східчастого вигляду з верхнє трапецієвидною основною матрицею. При

цьому застосовуються елементарні перетворення рядків розширеної матриці і переставлення стовпців тільки основної матриці (перенумеровування невідомих).

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -6. \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

□ Прямий хід:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -10 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2/4 \\ R_3 := R_3 - R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -7/4 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \end{array}.$$

Оскільки останньому рядку відповідає рівняння з нульовими коефіцієнтами і відмінним від нуля вільним членом, то система несумісна (не має розв'язків). ■

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases}$$

□ <u>Прямий хід</u>:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5\\ 7 & 5 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right)\end{array} \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_2 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5\\ 5 & 7 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right)\end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1\\ R_3 := R_3 - 3R_1\\ R_4 := R_4 - 5R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7\\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7\\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right)\end{array} \sim \left| R_2 := -R_2/4 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7\\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right)\end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_3 := R_3 + 4R_2\\ R_4 := R_4 + 8R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right)\end{array} \sim \left| R_3 \leftrightarrow R_4 \right| \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ \sim \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim |S_3 \leftrightarrow S_5| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Система сумісна, але невизначена і

$$rank\, C = rank\, A = r = 3 < n = 5.$$

Тут x_2, x_1, x_5 – базисні невідомі; x_4, x_3 – вільні невідомі.

<u>Зворотний хід</u>:

Вільні невідомі приймаємо за довільні сталі (параметри)

$$x_4 = C_1\ ;\ \ x_3 = C_2.$$

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_2, x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 + 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 \\ x_1 + \dfrac{3}{4}x_5 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{2}C_1 - \dfrac{5}{4}C_2 \\ x_5 = -7 + 8C_1 \end{cases}.$$

Цю систему розв’язуємо, підіймаючись знизу вгору, починаючи з останнього рівняння.

$$x_4 = C_1\ ;\ \ x_3 = C_2\ ;\ \ x_5 = -7 + 8C_1\ ;\ \ x_1 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 -$$

$$-\frac{3}{4}x_5=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2-\frac{3}{4}\left(-7+8C_1\right)=7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2 \ ;$$

$$x_2=4+C_1-2C_2-3x_1-2x_5=4+C_1-2C_2-$$

$$-3\left(7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2\right)-2\left(-7+8C_1\right)=-3-\frac{3}{2}C_1+\frac{7}{4}C_2 \ .$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$x_1=7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2 \ ; \ \ x_2=-3-\frac{3}{2}C_1+\frac{7}{4}C_2 \ ;$$

$$x_3=C_2 \ ; \quad x_4=C_1 \ ; \quad x_5=-7+8C_1 \ ,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Поклавши $x_3=C_2=0$ і $x_4=C_1=0$, отримуємо опорний розв'язок

$$x_1=7 \ ; \ \ x_2=-3 \ ; \ \ x_3=0 \ ; \quad x_4=0 \ ; \quad x_5=-7 \ . \qquad ■$$

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=9 \\ x_1-3x_2+2x_3=-3 \\ x_1-2x_2+x_3=-1 \end{cases} .$$

(Розв'язати самостійно).

3.3.5. Однорідна квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі однорідна прямокутна СЛАР $AX=0$ завжди сумісна і має тривіальний (нульовий) розв'язок $X=0$, бо ранг розширеної матриці $C=\left(A \ \vdots \ 0\right)$ дорівнює рангу основної матриці A. Нульовий розв'язок $X=0$ єдиний, якщо цей спільний ранг дорівнює числу невідомих. У противному разі СЛАР має безліч розв'язків.

З наведених міркувань для квадратної СЛАР випливає така

<u>теорема</u>. *Однорідна квадратна система* $AX=0$ *має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю* $\det A=0$. *Якщо цей визначник відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок.*

<u>Приклад 1</u>. Знайти значення параметра α, при яких однорідна квадратна СЛАР

$$\begin{cases} x_1-\alpha x_2+7x_3=0 \\ x_1+3x_2-5x_3=0 \\ x_1-x_2+\alpha x_3=0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок (має безліч розв'язків).

$$\square \qquad \Delta=\det A=0\ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix}=0\ ;$$

$$\alpha^2+8\alpha-33=0\ ; \quad \alpha_1=3; \quad \alpha_2=-11\ . \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Переконатись, що дана однорідна квадратна СЛАР має безліч розв'язків. Знайти її загальний розв'язок і будь-який ненульовий частинний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3=0 \\ 4x_1-2x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

$$\square \qquad \Delta=\det A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0\ .$$

Отже, система має безліч розв'язків. Розв'язуємо систему методом Гаусса.

<u>Прямий хід</u>:

$$C=\left(A\mid 0\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&0\\2&2&-1&0\\4&-2&3&0\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l}R_2:=R_2-2R_1\\R_3:=R_3-4R_1\end{array}\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&0\\0&6&-5&0\\0&6&-5&0\end{array}\right)\sim\left|R_3:=R_3-R_2\right|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&0\\0&6&-5&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left|R_2:=R_2/6\right|\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&0\\0&1&-5/6&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Отже,

$$rank\,C=rank\,A=r=2<n=3,$$

Тут x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

<u>Зворотний хід</u>:

Відкидаємо тотожність $0=0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу (параметр)

$$x_3=C\ .$$

Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільну невідому. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases}x_1-2x_2=-2x_3\\ \qquad\ \ x_2=\dfrac{5}{6}x_3\end{cases}.$$

Розв’язуємо систему, починаючи з останнього рівняння.

$$x_3=C\ ;\quad x_2=\frac{5}{6}C\ ;$$

$$x_1=2x_2-2C=2\cdot\frac{5}{6}C-2C=-\frac{1}{3}C\ .$$

Отже, загальний розв'язок

$$x_1 = -\frac{1}{3}C \ ; \quad x_2 = \frac{5}{6}C \ ; \quad x_3 = C \ , \quad C \in R \ .$$

Покладемо $C = 6$. Тоді маємо ненульовий частинний розв'язок $x_1 = -2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$. ■

3.3.6. Розв'язування лінійної системи і обернення матриці за допомогою розбиття на блоки

Довільну матрицю прямими, паралельними її рядкам і стовпцям, можна розбити на блоки, тобто записати у вигляді ***блочної матриці***. Наприклад

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right) .$$

Кожний блок A_{ij} називається ***підматрицею*** матриці A.

З блочними матрицями можна виконувати звичайні операції, розглядаючи підматриці як елементи.

Нехай A – невироджена квадратна матриця n-того порядку, а E – одинична матриця того же порядку. Складемо блочну матрицю $C = \left(A \mid E \right)$ і помножимо її зліва на матрицю A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}C = \left(A^{-1}A \mid A^{-1}E \right) = \left(E \mid A^{-1} \right) .$$

Оскільки множення матриці C на деяку матрицю зліва рівносильне відповідним лінійним операціям з рядками матриці C, то одержаний результат можна використати для знаходження оберненої матриці.

Якщо вказана блочна матриця $\left(A \mid E \right)$ за допомогою елементарних перетворень її рядків зводиться до вигляду $\left(E \mid B \right)$, то $B = A^{-1}$.

Звичайно, елементарні перетворення здійснюються модифікованим ***методом Гаусса***.

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad (A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left|R_1 \leftrightarrow R_2\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left|\begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 + 3R_1 \end{array}\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)=\left|R_2 := -3R_2 - 2R_3\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)=\left|R_3 := R_3 - 10R_2\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -45 & 30 & 3 & 21 \end{array}\right)=\left|R_3 := R_3 : (-45)\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{array}\right)=\left|\begin{array}{l} R_2 := R_2 - 4R_3 \\ R_1 := R_1 + R_3 \end{array}\right|=$$

$$
=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & 0 & -2/3 & 14/15 & -7/15 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 4/15 & -2/15 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{array}\right) = \left| R_1 := R_1 - 3R_2 \right| =
$$

$$
=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/15 & -1/15 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 4/15 & -2/15 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{array}\right) = \left(E \;\vdots\; A^{-1} \right);
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/15 & -1/15 \\ -1/3 & 4/15 & -2/15 \\ -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare
$$

Нехай задана визначена (має, причому єдиний, розв’язок) квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку $AX = B$, з якої треба знайти значення лише перших m невідомих x_j $\left(j = \overline{1, m};\ m < n \right)$.

Розбиттям матриць на блоки

$$
A = \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right); \quad X = \left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hdashline X_2 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{array}\right),
$$

де

$$
A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}; \quad X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},
$$

цю систему можна подати у вигляді

$$
\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = B_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = B_2 \end{cases}.
$$

Вилучивши із системи X_2, приходимо до одного рівняння відносно шуканих невідомих X_1

$$\left(A_{11}-A_{12}\,A_{22}^{-1}\,A_{21}\right)X_1=B_1-A_{12}\,A_{22}^{-1}\,B_2\ .$$

Зауваження. Якщо невироджена квадратна матриця A розбита на блоки

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

то обернену матрицю A^{-1} також можна подати у блочному вигляді

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right),$$

де

$$C_{11}=\left(A_{11}-A_{12}\,A_{22}^{-1}\,A_{21}\right)^{-1}\ ;\quad C_{21}=-A_{22}^{-1}\,A_{21}\,C_{11}\ ;$$

$$C_{22}=\left(A_{22}-A_{21}\,A_{11}^{-1}\,A_{12}\right)^{-1}\ ;\quad C_{12}=-A_{11}^{-1}\,A_{12}\,C_{22}\ .$$

3.4. Вектори й операції над ними

3.4.1. Скалярні та векторні величини. Основні поняття

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox, Oy і Oz зі спільним початком O утворюють ***декартову прямокутну систему координат*** у просторі (рис. 83). Ox називається ***віссю абсцис***, Oy – ***віссю ординат***, а Oz – ***віссю аплікат***. Три взаємно перпендикулярні координатні площини Oxy, Oxz і Oyz ділять весь простір на вісім частин (***октантів***). Сукупність площин, які перпендикулярні координатним осям, утворює просторову ***координатну сітку***.

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $(x;y;z)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***, z – ***апліката***). Для знаходження цих координат через точку $M(x;y;z)$ проведемо три площини, які перпендикулярні координатним осям. Вони перетинають відповідні осі у точках $M_x(x;0;0)$, $M_y(0;y;0)$ і $M_z(0;0;z)$.

Приклад. Побудувати точки $M(2;-3;5)$ і $N(-2;4;-5)$.

□ Проведемо з початку координат O відрізок довжиною 2 одиниці в додатному напрямку осі Ox і отримаємо точку $M_x(2;0;0)$. Проведемо з точки $M_x(2;0;0)$ відрізок довжиною 3 одиниці паралельно осі Oy в від'ємному напрямку, і отримаємо точку $M_{xy}(2;-3;0)$. Проведемо з точки $M_{xy}(2;-3;0)$ відрізок довжиною 5 одиниць паралельно осі Oz в її додатному напрямку і отримаємо шукану точку $M(2;-3;5)$.

(Точку $N(-2;4;-5)$ побудувати самостійно). ■

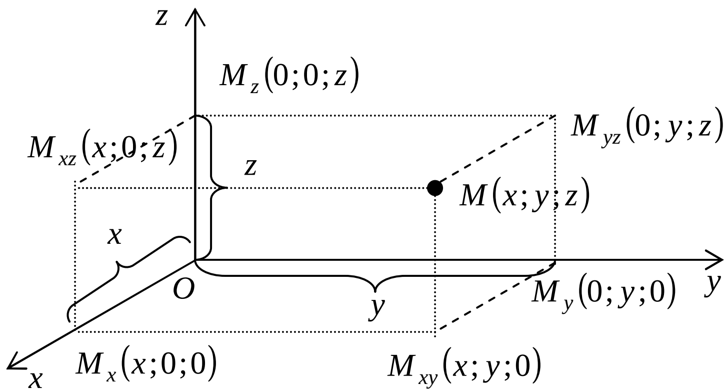


Рис. 83

Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Приклади скалярів: площа фігури, густина речовини, температура, електричний заряд і т. п.

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Приклади векторів: швидкість, сила, момент сили, напруженість електричного поля і т. п.

Вектор зображається напрямленим прямолінійним відрізком, в якому вказано його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 84).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

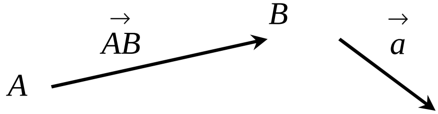


Рис. 84

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\vec{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрям довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

Зауваження 1. Надалі будемо розглядати тільки ***вільні вектори***, для яких вибір положення початку не має значення. Вільний вектор цілком характеризується модулем і напрямком.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Зауваження 2. Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.

Вектори, які лежать у паралельних площинах або в одній площині, називаються ***компланарними***.

Зауваження 3. Два вектори завжди компланарні.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо: 1) модулі векторів рівні $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 2) вектори колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

3.4.2. Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 85) або за правилом паралелограма (рис. 86).

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє наступні умови: 1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$; 2) $\lambda\vec{a}\parallel\vec{a}$; 3) якщо $\lambda>0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік; якщо $\lambda<0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки; якщо $\lambda=0$, то $0\vec{a}=\vec{0}$.

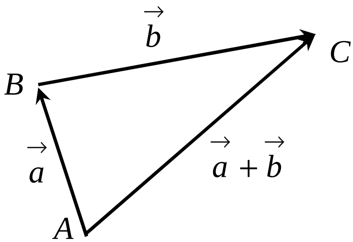


Рис. 85

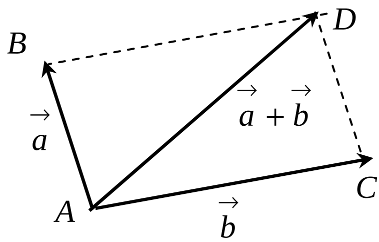


Рис. 86

Вектор $(-1)\vec{a}$ називається ***протилежним*** вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$.

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Різниця $\vec{a} - \vec{b}$ обчислюється за формулою

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \ .$$

Розглянуті операції називаються лінійними, оскільки мають відповідні властивості (аналогічні властивостям операцій над дійсними числами):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \ ; \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \ ;$$

$$\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda \ ; \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta \vec{a}) \ ; \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \ ;$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a} \ ; \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \ ; \quad 1\vec{a} = \vec{a} \ .$$

3.4.3. Проекція вектора. Координати вектора. Рівність векторів у координатній формі

Проекцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, називається число, яке позначається $np_{\vec{b}} \vec{a}$ і обчислюється за формулою

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi \ ,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0 \le \varphi \le \pi$ (рис. 87).

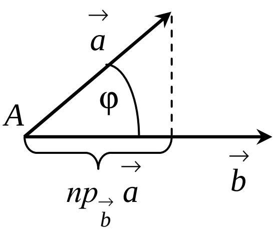


Рис. 87

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 88). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих вздовж додатного напрямку відповідно осей Ox, Oy і Oz, утворює ***координатний базис*** $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

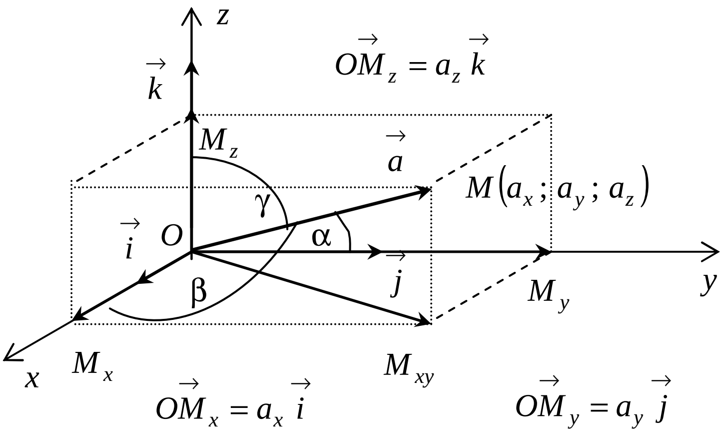


Рис. 88

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$ (рис. 88). Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат

$$a_x = np_{Ox}\vec{a} \; ; \quad a_y = np_{Oy}\vec{a} \; ; \quad a_z = np_{Oz}\vec{a}$$

називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$.

Координатні орти мають вигляд:

$$\vec{i}(1; 0; 0), \quad \vec{j}(0; 1; 0), \quad \vec{k}(0; 0; 1) \; .$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ – вільний, то його можна відкладати від довільної точки, зокрема, від початку координат O. Тоді вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ служить ***радіусом-вектором*** точки $M(a_x; a_y; a_z)$.

Радіус-вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|\vec{OM}_x| = |a_x|$, $|\vec{OM}_y| = |a_y|$ і $|\vec{OM}_z| = |a_z|$. Тому

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.

Кути α, β і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ відповідно з осями Ox, Oy і Oz, називаються ***напрямними***, а

$$\cos\alpha = a_x \big/ |\vec{a}| ; \quad \cos\beta = a_y \big/ |\vec{a}| ; \quad \cos\gamma = a_z \big/ |\vec{a}|$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Зауваження. Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

(Перевірити самостійно).

Приклад. Знайти модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{a}(-1;2;-2)$. (Розв'язати самостійно).

Із співвідношень

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OM}_{xy} + \vec{OM}_z = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z$$

$$\text{і} \quad \vec{OM}_x = a_x \vec{i} \;; \quad \vec{OM}_y = a_y \vec{j} \;; \quad \vec{OM}_z = a_z \vec{k} \;,$$

одержимо

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

– ***розклад вектора за координатним базисом*** $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і кінця $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то із співвідношення

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

маємо

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)\ .$$

Тобто, *координати вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ *і початку* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ обчислюється за формулою

$$M_1M_2=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Два вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати*

$$\vec{a}=\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} a_x=b_x \\ a_y=b_y \\ a_z=b_z \end{cases}$$

3.4.4. Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$; $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Тоді

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})+(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}\ ;$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})-(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}\ ;$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}\ .$$

Тобто, *лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно*:

при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються);

при множенні вектора на число кожна координата множиться на це число.

<u>Умова колінеарності (паралельності) двох векторів</u>: *Два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні*

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z};\quad \vec{a}\neq\vec{0};\ \vec{b}\neq\vec{0}\ .$$

$$\square\ \ \vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \exists\lambda,\ \vec{a}=\lambda\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_x=\lambda b_x\ ;$$

$$a_y=\lambda b_y;\ a_z=\lambda b_z\ \Leftrightarrow\ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ .\qquad\blacksquare$$

<u>Приклад</u>. Знайти, при яких значеннях α і β дані вектори колінеарні

$$\vec{a}=(\alpha-2;\,4;\,-3);\quad \vec{b}=(5;\,3\beta;\,6)\ .$$

$$\square\ \ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ ;\quad \frac{\alpha-2}{5}=\frac{4}{3\beta}=\frac{6}{-3}\ ;$$

$$\frac{\alpha-2}{5}=-2\ ;\ \ \frac{4}{3\beta}=-2\ ;\quad \alpha=-8\ ;\ \ \beta=-\frac{3}{2}\ .\ \ \blacksquare$$

3.4.5. Поділ відрізка у заданому відношенні

Координати точки $M(x;\ y;\ z)$, яка ділить відрізок $M_1 M_2$ у заданому відношенні λ, починаючи від точки M_1, визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ ;\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ .$$

$$\square\quad \overrightarrow{M_1M}\parallel\overrightarrow{MM_2}\ \Leftrightarrow\ \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda\ ;$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda\ ;\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda\ ;\quad \frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda\ ;$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ ;\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ .\quad \blacksquare$$

Зауваження. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda=1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ;\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\ .$$

Приклад. Точки $A(1;-4;3)$ і $B(3;0;6)$ служать кінцями діаметра сфери. Знайти координати її центра $C(x;\ y;\ z)$ і радіус r.

$$\square\quad AC=BC:\ x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ;\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\ ;$$

$$x=\frac{1+3}{2}=2\ ;\ \ y=\frac{-4+0}{2}=-2\ ;\ \ z=\frac{4+6}{2}=5\ ;\ \ C(2;-2;5)\ ;$$

$$r=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ;$$

$$r=\sqrt{(2-1)^2+(-2-(-4))^2+(5-3)^2}=3\ .\quad \blacksquare$$

3.4.6. Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi .$$

Нагадаємо, що $\cos 0 = 1;\ \cos 90^\circ = 0$.

Властивості скалярним добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Тоді $пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

<u>Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів</u>: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді , коли їх скалярний добуток дорівнює нулю*

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\quad \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0} .$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2 = 1\ ;\ \ (\vec{j})^2 = 1\ ;\ (\vec{k})^2 = 1\ ;$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0\ ;\ \ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0\ ;\quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0\ .$$

Нехай $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$

$$= a_x b_x (\vec{i})^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y (\vec{j})^2 +$$

$$+ a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z (\vec{k})^2 =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ .$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ .$$

Звідси $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0;\quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

<u>Приклад</u>. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори перпендикулярні

$$\vec{a} = (2\alpha; -5; -3);\quad \vec{b} = (\alpha; -\alpha; 6)\ .$$

$$\square\ \ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0\ ;$$

$$2\alpha \cdot \alpha + (-5) \cdot (-\alpha) + (-3) \cdot 6 = 0\ ;$$

$$2\alpha^2 + 5\alpha - 18 = 0;\quad \alpha_1 = 2;\quad \alpha_2 = -9/2\ .\quad \blacksquare$$

<u>Фізичний зміст скалярного добутку</u>: якщо під дією сили $\vec{F}$ матеріальна точка здійснює переміщення $\vec{s}$, то виконана робота дорівнює скалярному добутку сили на переміщення $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

3.4.7. Векторний добуток векторів. Площа трикутника

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 89) називається вектор, який позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ і задовольняє наступні умови:

1) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) Модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi .$$

Іншими словами, модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (<u>геометричний зміст векторного добутку</u>):

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{пар} .$$

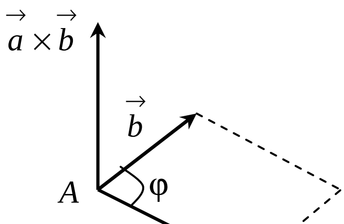


Рис. 89

3) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

Іншими словами, напрям вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ визначається за правилом буравчика.

Отже,

$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$; $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$;· $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=S_{пар}$.

Нагадаємо, що $\sin 0 = 0$.

Зауваження 1. Векторний добуток нульовий, якщо вектори колінеарні або хоча б один із них нульовий.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

Векторний добуток не комутативний: при зміні порядку співмножників він змінює знак на протилежний, залишаючись таким же за абсолютною величиною;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\vec{a}\times\vec{b}$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

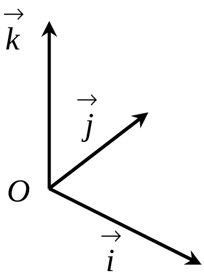


Рис. 90

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ (рис. 90), отримаємо:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}\ ;\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}\ ;\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\ ;$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\ ;\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\ ;\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ .$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тоді *векторний добуток двох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому перший рядок складається з координатних ортів, другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

□ $$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\,\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\,\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\,\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_x\,\vec{j}\times\vec{i}+$$

$$+a_yb_y\,\vec{j}\times\vec{j}++a_yb_z\,\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\,\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\,\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\,\vec{k}\times\vec{k}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \quad ■$$

<u>Зауваження 2</u>. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника, то з геометричного змісту векторного добутку маємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|.$$

<u>Приклад</u>. Обчислити площу трикутника з вершинами

$$A(1;-1;2),\quad B(5;-6;2)\ \text{ і }\ C(1;3;-1).$$

□ $$\vec{AB}=\left(5-1;-6-(-1);2-2\right)=\left(4;-5;0\right);$$

$$\vec{AC}=\left(1-1;3-(-1);-1-2\right)=\left(0;4;-3\right);$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}\ ;\quad |\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25\ ;$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 25=12{,}5\ . \qquad \blacksquare$$

3.4.8. Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів. Розклад вектора за довільним базисом

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Геометричний зміст: *модуль мішаного добутку* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ *чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ (рис. 91): $V_{пар-да}=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|$.

$\square$ $V_{пар-да}=S_{пар-ма}\cdot H$; $S_{пар-ма}=|\vec{a}\times\vec{b}\,|$;

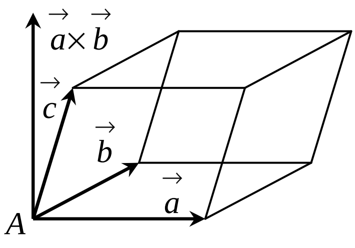


Рис. 91

$$H=\left|пр_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|=$$

$$=\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|};$$

$$V_{пар-да} = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot \frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Об’єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою $V_{SABC} = \dfrac{1}{6}\,|(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}|$.

Нехай $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$;

$\vec{c} = c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}$.

Тоді *мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}) =$$

$$= \left(\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k} \right) \cdot (c_x\,\vec{i} +$$

$$+ c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}) = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)c_x - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)c_y +$$

$$+ \left(a_x b_y - a_y b_x\right)c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;-1;2)$, $A(5;1;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;0;3)$. Знайти її об'єм.

$$\square \quad \vec{SA} = (5-4;\, 1-(-1);\, 4-2) = (1;\, 2;\, 2)\ ;$$

$$\vec{SB} = (3-4;\, 2-(-1);\, -1-2) = (1;\, 3;\, -3)\ ;$$

$$\vec{SC} = (0-4;\, 0-(-1);\, 3-2) = (-4;\, 1;\, 1);\quad (\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54\ ;\quad V_{SABC} = \frac{1}{6}\ |(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}\,| =$$

$$= (1/6)\cdot|54| = 9\ . \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об'єм дорівнює нулю. Звідси маємо умову компланарності трьох векторів: *три вектора компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю*:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ \text{– компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0\ .$$

Приклад 2. Задані три точки $A(1;\, 0;\, -1)$, $B(4;\, -1;\, 2)$ $C(0;\, 1;\, -3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка $M(2;\, \alpha;\, -1)$ лежить в площині (ABC).

□ Указані чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\vec{AM}$, $\vec{BM}$ і $\vec{CM}$ компланарні, тобто

$$(\vec{AM}\times\vec{BM})\cdot\vec{CM} = 0\ .$$

$$\vec{AM} = (2-1;\, \alpha-0;\, -1-(-1)) = (1;\, \alpha;\, 0)\ ;$$

$$\vec{BM} = (2-4;\, \alpha-(-1);\, -1-2) = (-2;\, \alpha+1;\, -3)\ ;$$

$$\vec{CM} = (2-0;\ \alpha-1;\ -1-(-3)) = (2;\ \alpha-1;\ 2)\ ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -3 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \alpha = \frac{1}{3}\ . \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 3</u>. Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює ***базис*** у тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді

$$\vec{d} = d_a\,\vec{a} + d_b\,\vec{b} + d_c\,\vec{c}\ .$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$. Числа d_a, d_b, d_c служать ***координатами*** вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Якщо відомі координати базисних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і вектора $\vec{d}$ у координатному базисі $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, то, записавши розклад вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ у скалярній формі, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_x\,d_a + b_x\,d_b + c_x\,d_c = d_x \\ a_y\,d_a + b_y\,d_b + c_y\,d_c = d_y \\ a_z\,d_a + b_z\,d_b + c_z\,d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

Приклад 3. Перевірити, що задані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$:

$$\vec{a} = (2; -1; 4) \ ; \quad \vec{b} = (1; 0; -3) \ ; \quad \vec{c} = (-2; 1; -1) \ ;$$

$$\vec{d} = (0; -1; 10) \ .$$

□ $$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 4 - 0 - 1 + 6 = 3 \neq 0 \, .$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a + d_b - 2d_c = 0 \\ -d_a + \quad\ + d_c = -1 \\ 4d_a - 3d_b - d_c = 10 \end{cases} ;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ ; \quad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \ ;$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -6 \ ; \quad \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$d_a = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1; \ d_b = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2; \ d_c = \frac{\Delta^{(3)}}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0 \, . \ \blacksquare$$

3.5. Лінійні простори та відображення. Власні вектори і власні числа

3.5.1. Поняття про n-вимірний лінійний простір

Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Будь-яку упорядковану множину n дійсних чисел $(x_1;\, x_2;\ldots;x_n)$ називають ***n-вимірною точкою*** M, тобто $M=(x_1;\, x_2;\ldots;x_n)$. Множину всіх n-вимірних точок називають ***n-вимірним точковим простором*** R^n. Числа $x_1;\, x_2;\ldots;x_n$ називають ***координатами*** точки M. Число n називають розмірністю простору.

Одновимірний простір R^1 (пряма), двовимірний простір R^2 (площина) і тривимірний простір R^3 можна зобразити геометрично. Для інших просторів наочність зникає.

Система координат простору R^n задається сукупністю n координатних осей Ox_i, $i=\overline{1,\, n}$, зі спільним початком $O(0;\, 0;\ldots;0)$. При цьому i-та координатна вісь – це множина всіх точок $M(x_1;\, x_2;\ldots;x_n)$, у яких i-та координата x_i довільна, а всі інші рівні нулю $x_k=0$; $k=\overline{1,\, n}$; $k\neq i$.

Будь-яка упорядкована пара точок $A(x_1;\, x_2;\ldots;x_n)$ (***початок***) і $B(y_1;\, y_2;\ldots;y_n)$ (***кінець***) n-вимірного простору називається ***n-вимірним вектором*** $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Вектору $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ відповідає упорядкована множина чисел $(a_1;\, a_2;\ldots;\, a_n)$ – його ***координат*** (***компонент***). При цьому $a_i=y_i-x_i$; $i=\overline{1,\, n}$.

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$.

Компоненти n-вимірного вектора $\vec{a}(a_1;\, a_2;\ldots;\, a_n)$ можна розміщувати у рядок або у стовпчик. При цьому говорять про ***вектор-рядок*** (***матрицю-рядок***) або ***вектор-стовпець*** (***матри-***

цю-стовпець):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Довільній точці $M(a_1; a_2; ...; a_n)$ n-вимірного простору R^n відповідає певний ***радіус-вектор*** $\vec{a} = \vec{OM} = (a_1; a_2; ...; a_n)$ і навпаки. Тому R^n також можна розглядати як n***-вимірний векторний простір***.

Векторний простір R^n називається ***лінійним***, якщо у ньому визначено операції додавання векторів і множення вектора на число, які мають наведені раніше лінійні властивості.

Непорожня підмножина V векторів із R^n називається ***лінійним підпростором*** (***лінійним многовидом***) у R^n, якщо для двох довільних векторів $\vec{a} \in V$ і $\vec{b} \in V$ будь-яка їх лінійна комбінація $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \in V$.

Лінійний підпростір V, утворений всіма можливими лінійними комбінаціями вигляду $\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_m \vec{a_m}$, називається ***лінійною оболонкою*** системи векторів $\vec{a}_1$; $\vec{a}_2$; ...; $\vec{a}_m$.

Вектори $\vec{a}_1$; $\vec{a}_2$; ...; $\vec{a}_m$ називаються ***лінійно незалежними,*** якщо рівність

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_m \vec{a_m} = 0$$

виконується лише за умови, коли всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ одночасно дорівнюють нулю.

Якщо ця рівність можлива, коли хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля, то вектори називаються ***лінійно залежними***.

Дана рівність у координатній формі – це лінійна однорідна система

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1m}\alpha_m = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nm}\alpha_m = 0\ , \end{cases}$$

де $\vec{a}_j = (a_{1j};\, a_{2j};\ldots;\, a_{nj}),\quad j = \overline{1,\, m}$. Однорідна система завжди має нульовий розв'язок $\alpha_j = 0,\quad j = \overline{1,\, m}$. Якщо крім нульового система має інші розв'язки, то вектори лінійно залежні. Якщо нульовий розв'язок єдиний, то вектори лінійно незалежні.

Максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює розмірності простору.

Будь-яка упорядкована множина n лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ n-вимірного лінійного векторного простору R^n утворює ***базис*** у тому смислі, що *довільний вектор* $\vec{a}$ *цього простору єдиним способом можна подати у вигляді розкладу за вибраним базисом*

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n\ ,$$

де $\alpha_1, \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n$ – координати вектора $\vec{a}$ у вибраному базисі $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n\right\}$.

Упорядкована множина n векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ є лінійно незалежною (утворює базис) n-вимірного простору R^n тоді і тільки тоді, коли визначник, у якому стовпцями служать координати відповідних векторів, відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Наприклад, лінійно незалежні одиничні вектори

$$\vec{e_1} = (1;\, 0;\dots;\, 0), \quad \vec{e_2} = (0;\, 1;\dots;\, 0), \ \dots, \quad \vec{e_n} = (0;\, 0;\dots;\, 1)$$

утворюють ***канонічний координатний базис*** простору R^n. При цьому для вектора $\vec{a}(a_1;\, a_2;\dots;\, a_n)$ маємо

$$\vec{a} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + \dots + a_n \vec{e_n} \ .$$

Будь-які два неколінеарні вектори на площині R^2 є лінійно незалежними і утворюють базис

Будь-які три некомпланарні вектори тривимірного простору R^3 є лінійно незалежними і утворюють базис.

Приклад. Задано три вектори

$$\vec{a} = (2;\, -1;\, -3); \quad \vec{b} = (-1;\, 3;\, 0); \quad \vec{c} = (1;\, 2;\, -2) \ .$$

у деякому базисі простору R^3. Переконатися, що ці вектори утворюють новий базис і знайти координати вектора

$$\vec{d} = (-4;\, 7;\, 3)$$

у цьому базисі.

$$\square \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ .$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – лінійно незалежні і утворюють базис. Нехай $\vec{d}=\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}$, де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі. Тоді

$$\begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=-4 \\ -\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3=7 \\ -3\alpha_1-2\alpha_3=3 \end{cases}; \quad \Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}=5\neq 0 \;;$$

$$\Delta^{(1)}=\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-5 \;; \quad \Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix}=10 \;;$$

$$\Delta^{(3)}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0 \;; \quad \alpha_1=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=\frac{-5}{5}=-1 \;;$$

$$\alpha_2=\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta}=\frac{10}{5}=2 \;; \quad \alpha_3=\frac{\Delta^{(3)}}{\Delta}=\frac{0}{5}=0 \;.$$

Отже, в новому базисі $\vec{d}=(-1;\,2;\,0)$. ■

3.5.2. Лінійні відображення

Нехай X і Y – довільні множини і D – деяка підмножина множини X. Якщо кожному елементу x множини D за деяким законом F ставиться у відповідність певний елемент y множини Y, то говорять, що задано ***відображення*** (***перетворення, оператор***) $y=F(x)$.

$$y=f(x),\ x\in X \quad \text{або} \quad f:\,X\to Y \quad \text{або} \quad X\xrightarrow{f}Y \;.$$

Множина D називається ***областю визначення*** відображення F і позначається $D(F)$.

Якщо $y=F(x)$, то елемент y називається ***образом*** елемента x, а елемент x – ***прообразом*** елемента y. Множина всіх образів y, коли x пробігає всю область визначення D, називається ***областю значень*** відображення F і позначається $E(F)$.

Інші форми запису відображення

$$F: X \to Y \quad \text{або} \quad X \xrightarrow{F} Y .$$

Два відображення F_1 і F_2 називаються ***рівними*** $F_1 = F_2$, якщо їх області визначення співпадають $D(F_1) = D(F_2) = D$ і для всіх $x \in D$ виконується рівність $F_1(x) = F_2(x)$.

Нехай X і Y – лінійні простори, $X = R^n$, $Y = R^m$. Відображення A з областю визначення $D(A)$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1) $D(A)$ – лінійний підпростір;

2) $A(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) = \alpha_1 A(\vec{x}_1) + \alpha_2 A(\vec{x}_2)$

для будь-яких векторів $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 \in D(A)$ і довільних чисел α_1, α_2.

<u>Зауваження</u>. Надалі обмежимось розглядом найбільш важливого для практики випадку, коли областю визначення лінійного відображення служить весь відповідний простір: $D(A) = R^n$.

Область значень $E(A)$ лінійного відображення $\vec{y} = A(\vec{x})$ також є лінійним підпростором. Розмірність області значень $E(A)$ називається ***рангом*** лінійного перетворення.

Множина всіх векторів $\vec{x} \in R^n$, які лінійне відображення A переводить у нульовий вектор $A(\vec{x}) = \vec{0}$, називається ***ядром*** цього відображення.

Ядро лінійного відображення також є лінійним підпростором. Розмірність ядра називається ***дефектом*** лінійного відображення A.

Сума рангу і дефекту лінійного відображення дорівнює розмірності простору R^n *– області визначення.*

Якщо прообраз $\vec{x}$ і образ $\vec{y}$ лінійного відображення розглядати як матриці-стовпці

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix},$$

то лінійне відображення можна подати у матричній формі

$$\vec{y} = A\vec{x},$$

де A – ***матриця лінійного відображення***, складена з його коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Нехай задано два лінійні відображення $\vec{y} = A\vec{x}$ і $\vec{z} = B\vec{y}$, де $\vec{x} \in R^n$, $\vec{y} \in R^m$, $\vec{z} \in R^k$. У результаті послідовного застосування спочатку першого, а потім другого з них можна одержати лінійне відображення $\vec{z} = BA\vec{x}$, яке називається ***добутком відображень***. Матриця цього відображення дорівнює добутку матриць відображень B і A.

<u>Приклад 1</u>. Для заданих двох лінійних відображень знайти добуток першого з них на друге:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 - 3x_2 \\ y_3 = -x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} z_1 = -2y_1 + y_2 - y_3 \\ z_2 = y_1 - 3y_2 + 2y_3 \end{cases}.$$

□ Дані відображення мають відповідні матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток BA цих матриць

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Отже, шуканий добуток (в координатній формі)

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 11x_2 \\ z_2 = -7x_1 + 19x_2 \end{cases}. \quad ■$$

Якщо лінійне відображення кожному вектору $\vec{x} \in R^n$ ставить у відповідність той самий вектор $\vec{x}$, то відображення називається ***тотожним*** (***одиничним***) і позначається E: $E\vec{x} = \vec{x}$. Матриця тотожного відображення E є одиничною:

Нехай розмірності області визначення і області значень лінійного відображення $\vec{y} = A\vec{x}$ співпадають $n = m$. Тоді відображення A називається ***зворотним***, коли існує ***обернене лінійне відображення*** A^{-1}, яке кожному вектору $\vec{y} \in R^n$ ставить у відповідність єдиний вектор $\vec{x} \in R^n$ такий, що $\vec{y} = A\vec{x}$. Матриця оберненого відображення A^{-1} є оберненою до матриці A.

Приклад 2. Знайти матрицю, обернену до заданої матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ Запишемо відповідне лінійне перетворення $\vec{y} = A\vec{x}$ у координатній формі

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему відносно x_1, x_2, наприклад, методом Гаусса. Одержимо обернене відображення (у координатній формі)

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 - y_2 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 \end{cases}.$$

Матриця цього відображення

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

є матрицею, оберненою до матриці A. ■

3.5.3. Перетворення прямокутних координат на площині. Паралельне перенесення і поворот

Нехай на площині задано дві декартові прямокутні системи координат: стара $Oxyz$ і нова $O_* x_* y_* z_*$. Треба знайти відображення, що виражає координати довільної точки (вектора) в одній системі через її координати в іншій.

Розглянемо три випадки.

Паралельне перенесення системи координат. Нехай положення початку координат нової системи O_* у старій системі задається радіус-вектором $\vec{r}_0 = (x_0\,; y_0)$, а відповідні осі обох систем паралельні та однаково напрямлені (рис. 92).

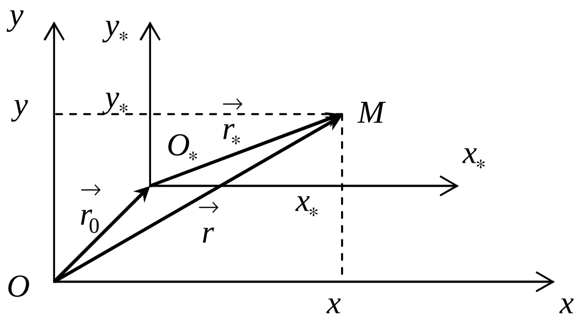


Рис. 92

Положення довільної точки M у старій системі визначається радіус-вектором $\vec{r} = (x; y)$, а у новій – радіус-вектором $\vec{r}_* = (x_*\,; y_*)$. Із трикутника OO_*M маємо $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_*$. Записуючи цей вираз у координатній формі, отримаємо формули

$$\begin{cases} x = x_* + x_0 \\ y = y_* + y_0 \end{cases},$$

якими старі координати подаються через нові.

З іншого боку $\vec{r}_* = \vec{r} - \vec{r}_0$. Переходячи до координатної форми, одержимо формули

$$\begin{cases} x_* = x - x_0 \\ y_* = y - y_0 \end{cases},$$

якими нові координати подаються через старі.

<u>Поворот системи координат</u>. Нехай обидві системи мають спільний початок, тобто $O = O_*$, а осі нової системи $O_* x_* y_* z_*$

повернуті на кут φ відносно осей старої системи $Oxyz$ (рис. 93).

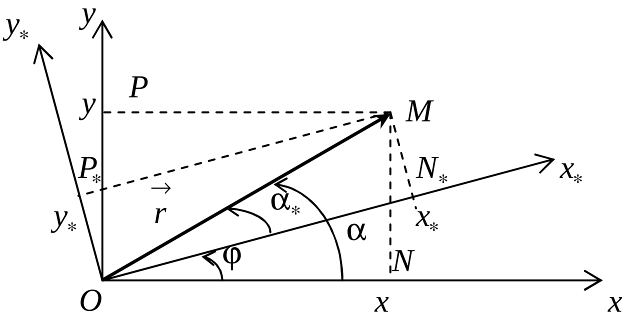


Рис. 93

Положення довільної точки M в обох системах визначається одним і тим же радіус-вектором, тобто $\vec{r} = \vec{r}_*$. Позначимо через r довжину радіус-вектора, а через α і α_* – кути які утворює радіус-вектор з віссю Ox старої і віссю Ox_* нової систем координат.

Із прямокутних трикутників ONM і OPM маємо

$$x = r\cos\alpha \ ; \quad y = r\sin\alpha \ .$$

Аналогічно, з прямокутних трикутників ON_*M і OP_*M отримаємо $x_* = r\cos\alpha_*$; $y_* = r\sin\alpha_*$.

Тоді, враховуючи співвідношення $\alpha = \alpha_* + \varphi$, одержимо

$$x = r\cos\alpha = r\cos(\alpha_* + \varphi) = r\cos\alpha_*\cos\varphi - r\sin\alpha_*\sin\varphi =$$

$$= x_*\cos\varphi - y_*\sin\varphi \ ; \quad y = r\sin\alpha = r\sin(\alpha_* + \varphi) =$$

$$= r\sin\alpha_*\cos\varphi + r\cos\alpha_*\sin\varphi = y_*\cos\varphi + x_*\sin\varphi \ .$$

Таким чином, маємо формули

$$\begin{cases} x = x_* \cos\varphi - y_* \sin\varphi \\ y = x_* \sin\varphi + y_* \cos\varphi \end{cases},$$

які виражають старі координати через нові.

Оскільки стара система координат повернута відносно нової на кут $-\varphi$, то аналогічно можна отримати формули

$$\begin{cases} x_* = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y_* = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases},$$

якими нові координати подаються через старі.

<u>Зауваження 1</u>. Одержані перетворення повороту є взаємно оберненими лінійними відображеннями.

<u>Паралельне перенесення і поворот системи координат</u>. Нехай положення початку координат нової системи O_* у старій системі задається радіус-вектором $\vec{r_0} = (x_0, y_0)$, а осі нової системи $O_* x_* y_* z_*$ повернуті на кут φ відносно осей старої системи $Oxyz$ (рис. 94).

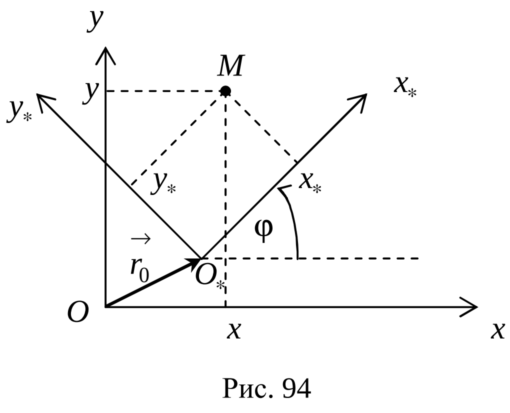


Рис. 94

Виходячи з отриманих раніше співвідношень і враховуючи незалежність паралельного перенесення і повороту, одержимо формули

$$\begin{cases} x = x_* \cos\varphi - y_* \sin\varphi + x_0 \\ y = x_* \sin\varphi + y_* \cos\varphi + y_0 \end{cases},$$

які виражають старі координати через нові, а також формули

$$\begin{cases} x_* = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y_* = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases},$$

якими нові координати подаються через старі.

Зауваження 2. Перетворення координат використовуються, наприклад, для зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду.

Приклад 1. Рівняння лінії другого порядку в старій системі координат має вигляд $4x^2 - 2xy + 4y^2 = 15$. Знайти рівняння цієї кривої в новій системі координат, яка одержана зі старої поворотом на кут $\varphi = 45^\circ$.

$$\square \quad \begin{cases} x = x_* \cos 45^\circ - y_* \sin 45^\circ = x_* \sqrt{2}/2 - y_* \sqrt{2}/2 \\ y = x_* \sin 45^\circ + y_* \cos 45^\circ = x_* \sqrt{2}/2 + y_* \sqrt{2}/2 \end{cases};$$

$$4\left(x_* \sqrt{2}/2 - y_* \sqrt{2}/2\right)^2 - 2\left(x_* \sqrt{2}/2 - y_* \sqrt{2}/2\right)\times$$

$$\times\left(x_* \sqrt{2}/2 + y_* \sqrt{2}/2\right) + 4\left(x_* \sqrt{2}/2 + y_* \sqrt{2}/2\right)^2 = 15 \ ;$$

$$2x_*^2 - 4x_* y_* + 2y_*^2 - x_*^2 + y_*^2 + 2x_*^2 + 4x_* y_* + 2y_*^2 = 15 \ ;$$

$$3x_*^2 + 5y_*^2 = 15 \ ; \quad \frac{x_*^2}{5} + \frac{y_*^2}{3} = 1 \ .$$

Отже, маємо еліпс із півосями $a = \sqrt{5}$ і $b = \sqrt{3}$. ■

Приклад 2. Загальне рівняння гіперболи в старій системі координат має вигляд $x^2 - 3y^2 + 2x + 12y - 20 = 0$. Звести рівняння гіперболи до канонічного вигляду за допомогою переходу до нової системи координат, одержаної зі старої паралельним перенесенням на вектор $\vec{r_0} = (-1; 2)$. (Розв’язати самостійно).

3.5.4. Власні вектори та власні числа квадратної матриці

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Розглянемо відповідне лінійне відображення простору R^n самого в себе: $\vec{y} = A\vec{x}$. Якщо існують ненульовий вектор $\vec{x}$ і число λ такі, що виконується рівність $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, то говорять, що λ – ***власне число*** матриці A, а $\vec{x}$ – її ***власний вектор***, який відповідає власному числу λ.

Отже, множення матриці на власний вектор рівносильне множенню власного числа на цей вектор.

Вказане матричне рівняння можна подати у вигляді

$$A\vec{x} = \lambda E\vec{x}\ ; \quad (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}.$$

Ця однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок $\vec{x}$ тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Одержане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** матриці A. Відповідний многочлен

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

називається ***характеристичним многочленом*** матриці A.

Характеристичне рівняння можна подати в розгорнутій формі

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Власні числа $\lambda_j \ (j = \overline{1,n})$ *є коренями характеристичного* *рівняння*.

Власні числа можуть бути дійсними чи комплексними, простими чи кратними. Множину всіх власних чисел $\lambda_j \left(j=\overline{1,n}\right)$ даної матриці називають її ***спектром***.

Якщо відоме деяке власне число λ, то з однорідної системи

$$\left(A-\lambda E\right)\vec{x}=\vec{0}$$

можна знайти відповідні власні вектори.

Найбільший модуль власного числа матриці називають її ***спектральним радіусом*** і позначають $\rho\left(A\right)$:

$$\rho\left(A\right)=\max_j\left|\lambda_j\right| .$$

<u>Властивості власних векторів і власних чисел</u>:

1) *Кожному власному вектору відповідає одне власне число*.

2) *Якщо* $\vec{x}$ *– власний вектор з власним числом* λ, *то довільний вектор* $\alpha\vec{x}$ $\left(\alpha\neq 0\right)$, *колінеарний вектору* $\vec{x}$, *також є власним вектором з тим же власним числом* λ. Тобто, *власний вектор визначається з точністю до довільного ненульового множника*. Звичайно виділяють одиничні власні вектори.

3) *Якщо* $\vec{x}_1$ *і* $\vec{x}_2$ *– власні вектори матриці* A *з одним і тим же власним числом* λ, *то їх сума* $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ *також є власним вектором матриці* A *з тим же самим власним числом* λ.

4) *Визначник матриці* A *дорівнює добутку всіх її власних чисел* $\det A=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j=\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

5) ***Слідом*** матриці A називається сума всіх елементів головної діагоналі $Sp\,A=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$. *Слід ма-*

триці A *дорівнює сумі всіх її власних чисел*

$$Sp\,A=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n\ .$$

<u>Зауваження</u>. Якщо $\vec{x}_j$ $\left(j=\overline{1,m}\right)$ – власні вектори матриці A відповідно з різними власними числами λ_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ $(m\le n)$, то ці вектори – лінійно незалежні. Обернене твердження у загальному випадку невірне: можуть існувати лінійно незалежні вектори, що відповідають одному і тому самому власному числу.

<u>Приклад 1</u>. Знайти власні числа λ_1, λ_2 та одиничні власні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матриці $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)=0\ ;\quad \begin{vmatrix}-2-\lambda & 4\\ 5 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0\ ;$$

$$\lambda^2-4\lambda-32=0\ ;\quad \lambda_1=-4\ ;\ \ \lambda_2=8\ .$$

З однорідної системи

$$(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}\ ;\ \begin{cases}(-2-\lambda)\,x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(6-\lambda)\,x_2=0\end{cases},\ \text{де}\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори.

При $\lambda_1=-4$ маємо

$$\begin{cases}\left(-2-(-4)\right)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+\left(6-(-4)\right)x_2=0\end{cases};\quad x_1=-2t;\ \ x_2=t;\ \ t\in R\ ,$$

де t – параметр. Тоді

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}; \; |\vec{x}_1| = \sqrt{(-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5}\,t\,; \; \vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 8$ маємо

$$\begin{cases} (-2-8)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (6-8)x_2 = 0 \end{cases}; \; x_1 = 2t; \; x_2 = 5t; \; t \in R\,; \; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ 5t \end{pmatrix};$$

$$|\vec{x}_2| = \sqrt{(2t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{29}\,t\;; \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} \\ 5/\sqrt{29} \end{pmatrix}. \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти власні числа λ_1, λ_2, λ_3 та одиничні власні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матриці $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0\;; \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\;;$$

$$-\lambda^3 + \lambda = 0\;; \quad \lambda_1 = 0; \;\; \lambda_2 = 1; \;\; \lambda_3 = -1\,.$$

З однорідної системи

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}\,; \; \begin{cases} (-3-\lambda)x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}, \text{ де } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори.

При $\lambda_1 = 0$ маємо

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2x_3 \\ \ x_1 + x_2 = -2x_3 \end{cases}; \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ t \end{pmatrix};$$

$$|\vec{x}_1| = \sqrt{0^2 + (-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5}\,t; \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Власні вектори $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ знайдіть самостійно. ■

3.5.5. Матричні многочлени

Нехай A – довільна квадратна матриця n-того порядку. Якщо у довільний многочлен

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

замість змінної x підставити матрицю A, то отримаємо матрицю

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \ldots + a_{m-1} A + a_m E,$$

яка називається ***многочленом від матриці*** A (***матричним многочленом***).

Зауваження. Над многочленами від однієї і тієї ж матриці A можна здійснювати алгебраїчні дії як над звичайними многочленами.

Теорема Келі – Гамільтона. *Довільна квадратна матриця є коренем свого характеристичного многочлена.*

(Без доведення).

Приклад. Перевірити, що задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

є коренем свого характеристичного многочлена.

□ Знаходимо характеристичний многочлен матриці A

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-10 \ .$$

Обчислимо $f(A)$

$$f(A)=A^2-3A-10E=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}-10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad ■$$

3.5.6. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом простих ітерацій

Будь-яку квадратну систему лінійних рівнянь можна подати у вигляді $X = AX + B$.

Тоді її можна розв'язувати одним із методів послідовних наближень – ***методом простих ітерацій***

$$X_0=C \ ; \quad X_k = AX_{k-1}+B \quad (k=1,\,2,\,3,\,...),$$

де вдале початкове значення C вибирається довільно, виходячи з досвіду попередніх розрахунків. За його відсутності можна, наприклад, покласти $C=0$.

Послідовність X_k $(k=1,\,2,\,3,\,...)$ збігається до шуканого розв'язку X , якщо всі власні числа матриці A за модулем менші від одиниці.

На практиці зручніше користуватись умовою: *метод простих ітерацій є збіжним, якщо норма матриці A менша одиниці* $\|A\|<1$.

Приклад. Поклавши $X_0=0$, знайти методом простих ітерацій три перші наближення X_k $(k=1,\,2,\,3)$ розв'язку X системи рівнянь $X = AX + B$, де

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}4\\0{,}3 & -0{,}5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}3\end{pmatrix}.$$

□ $$\|A\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2};$$

$$\|A\|=\left(|0{,}2|^2+|0{,}3|^2+|-0{,}4|^2+|-0{,}5|^2\right)^{1/2}=\sqrt{0{,}54}<1.$$

Отже, метод простих ітерацій є збіжним.

Нехай $X_0=0$. Тоді за формулою

$$X_k=AX_{k-1}+B\quad(k=1,\,2,\,3,\,...)$$

маємо: $$X_1=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}4\\0{,}3 & -0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}3\end{pmatrix};$$

$$X_2=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}4\\0{,}3 & -0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}24\\-0{,}12\end{pmatrix};$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}4\\0{,}3 & -0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}24\\-0{,}12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}196\\-0{,}168\end{pmatrix}.$$ ■

3.6. Площина та пряма у просторі

3.6.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0}$ (рис. 95).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$$

або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– ***рівняння площини, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = (A; B; C)$.

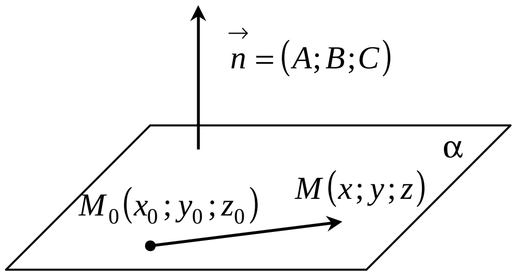


Рис. 95

3.6.2. Загальне рівняння площини. Дослідження неповного загального рівняння

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

і отримаємо $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тоді одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x, y, z, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Зауваження. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Рівняння довільної площини можна звести до загального вигляду.

Теорема. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат* x, y, z. *Кожному лінійному рівнянню зі змінними* x, y, z *відповідає деяка площина.*

(Без доведення)

У таблиці 1 відображені особливості розміщення площини, коли один або декілька коефіцієнтів її загального рівняння дорівнюють нулю. (Частина ілюстративних зображень окремих випадків розміщення площини наведена на рис. рис. 96– 98. Ілюстрації для інших випадків зробіть самостійно).

Таблиця 1

№ п/п	Рівняння	Характеристика розміщення площини
1	$By + Cz + D = 0$	паралельна осі Ox
2	$Ax + Cz + D = 0$	паралельна осі Oy
3	$Ax + By + D = 0$	паралельна осі Oz (рис. 96)
4	$Ax + By + Cz = 0$	проходить через початок координат $O(0;0;0)$ (рис. 97)
5	$Cz + D = 0$	перпендикулярна до осі Oz (рис. 98)
6	$By + D = 0$	перпендикулярна до осі Oy
7	$Ax + D = 0$	перпендикулярна до осі Ox
8	$By + Cz = 0$	проходить через вісь Ox
9	$Ax + Cz = 0$	проходить через вісь Oy
10	$Ax + By = 0$	проходить через вісь Oz
11	$z = 0$	Координатна площина Oxy
12	$y = 0$	Координатна площина Oxz
13	$x = 0$	Координатна площина Oyz

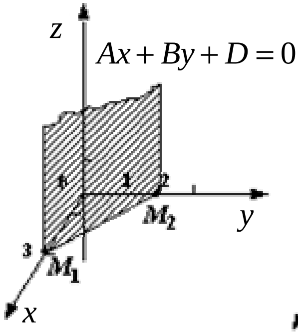


Рис. 96

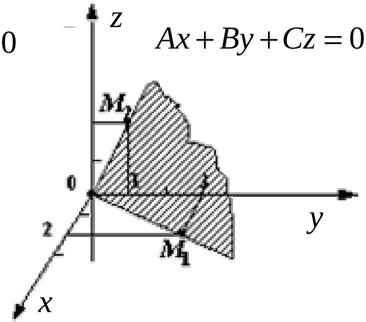


Рис. 97

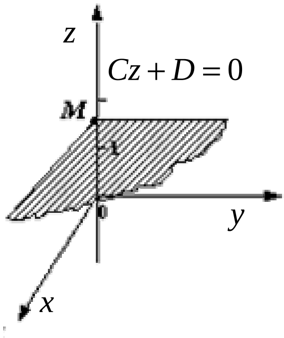


Рис. 98

<u>Приклад</u>. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

$$\square \quad M \in \alpha \; ; \quad \vec{n} = \overrightarrow{NP} \perp \alpha \; ;$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \; ;$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{NP} = (1 - 5; \, -3 - (-6); \, -1 - 0) = (-4; \, 3; \, -1) \; ;$$

$$-4(x - 1) + 3(y - (-1)) + (-1)(z - 2) = 0 \; ;$$

$$-4x + 4 + 3y + 3 - z + 2 = 0 \; ; \; -4x + 3y - z + 9 = 0 \; ;$$

$$4x - 3y + z - 9 = 0 \; . \quad \blacksquare$$

3.6.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 99).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо три вектори

$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$

і $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x;y;z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні. Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$$(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

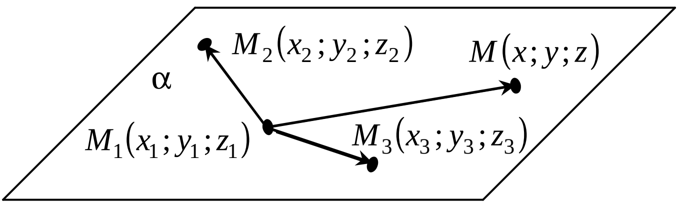


Рис. 99

Приклад. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки.

□ $\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$;

$$11x + 12y - 8z + 17 = 0 \ . \quad \blacksquare$$

3.6.4. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$ (рис. 100). Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \ bcx + acy + abz - abc = 0 \ ;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

– ***рівняння площини у відрізках на осях***.

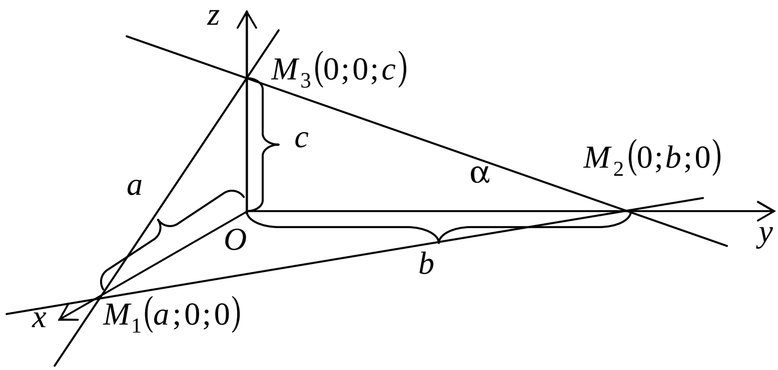


Рис. 100

<u>Приклад 1</u>. Звести загальне рівняння площини

$$3x - 6y + 8z + 12 = 0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

□ $3x-6y+8z=-12 \quad \Big| :(-12)\,; \quad \dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-2/3}=1\,.$ ■

<u>Приклад 2</u>. Знайти точки перетину площини

$$\alpha:\quad 3x-2y+6z-12=0$$

з координатними осями і зобразити площину, побудувавши її сліди – лінії перетину з координатними площинами.

□ $\alpha\cap Ox:\ \begin{cases} y=0\\ z=0\\ 3x-2y+6z-12=0\end{cases};\quad \begin{matrix} a=4\\ M_1(4;0;0)\end{matrix};$

$\alpha\cap Oy:\ \begin{cases} x=0\\ z=0\\ 3x-2y+6z-12=0\end{cases};\quad \begin{matrix} b=-6\\ M_2(0;-6;0)\end{matrix};$

$\alpha\cap Oy:\ \begin{cases} x=0\\ y=0\\ 3x-2y+6z-12=0\end{cases};\quad \begin{matrix} c=2\\ M_3(0;0;2)\end{matrix}.$

Площина α зображена на рис. 101. ■

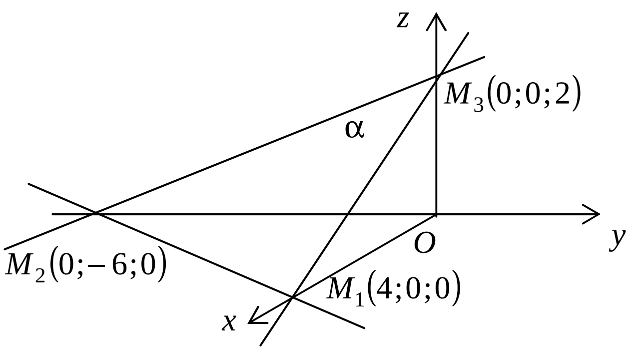


Рис. 101

3.6.5. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 102). Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

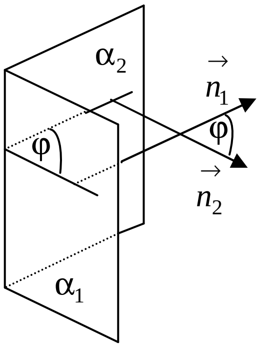


Рис. 102

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 .$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} .$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} .$$

<u>Приклад</u>. Знайти кут між заданою площиною $\alpha_1:\ 2x - y - 2z + 6 = 0$ і координатною площиною Oxy.

□ $\vec{n}_1 = (2; -1; -2)$; $\alpha_2:\ z = 0$; $\vec{n}_2 = \vec{k} = (0; 0; 1)$;

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3} ;$$

$$\varphi = \arccos(-2/3) . \qquad \blacksquare$$

3.6.6. Умова перетину трьох площин у одній точці

Три площини α_i : $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли квадратна система, складена з рівнянь цих площин, має єдиний розв'язок. Тобто, коли визначник системи відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

<u>Приклад</u>. Знайти точку перетину трьох площин

$$2x - 4y + 3z - 1 = 0 \ ; \ 3x - y + 5z - 2 = 0 \ ;$$

$$4x + 3y + 4z = 0 \ .$$

(Розв'язати самостійно. Використати метод Крамера).

3.6.7. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0\,; y_0\,; z_0)$ (рис. 103).

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1\,; y_1\,; z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1 M_0} = (x_0 - x_1\,; y_0 - y_1\,; z_0 - z_1)$. Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1 M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

$$d = \frac{|\,\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1 M_0}\,|}{|\,\vec{n}\,|} = \frac{|\,A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Оскільки $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

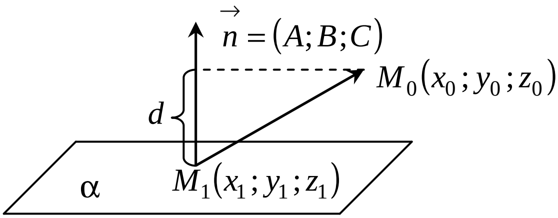


Рис. 103

Приклад. Знайти відстань d від точки $M_0(2;-4;3)$ до площини $\alpha:\ 3x-2y-6z-1=0$.

(Розв'язати самостійно).

3.6.8. Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s}=(m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 104).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

– ***канонічні рівняння прямої***.

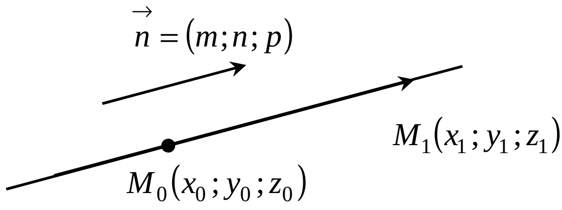


Рис. 104

3.6.9. Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m} = t \;; \quad \frac{y-y_0}{n} = t \;; \quad \frac{z-z_0}{p} = t \;;$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

<u>Приклад</u>. Пряма задана своїми канонічними рівняннями

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+4}{0} = \frac{z}{-2} \;.$$

Записати параметричні рівняння цієї прямої.

(Розв'язати самостійно).

3.6.10. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;0;3)$ і $M_2(4;-2;3)$. (Розв'язати самостійно).

3.6.11. Пряма як перетин двох площин. Загальні рівняння прямої

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l служить лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } \alpha_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то система

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

називається ***загальними рівняннями прямої***.

Зауваження 1. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

Зауваження 2. Рівняння

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\ ,$$

де λ – параметр, задає пучок площин, які проходять через пряму l.

Приклад. Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x-2y+4z-10=0 \\ 3x+2y-2z+6=0 \end{cases}.$$

Знайти її 1) канонічні рівняння; 2) параметричні рівняння.

□ 1) Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x=0$, тоді

$$\begin{cases} -2y+4z-10=0 \\ 2y-2z+6=0 \end{cases}; \quad y=-1; \quad z=2; \quad M_0(0;-1;2).$$

Канонічні рівняння

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y-(-1)}{14}=\frac{z-2}{8};$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}.$$

(Параметричні рівняння знайти самостійно). ■

3.6.12. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \ \text{ і } \ l_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\vec{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} .$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 .$$

Умова паралельності двох прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} .$$

3.6.13. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \ \text{ і } \ l_2: \ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} .$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, коли вектори $\vec{s_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\vec{s_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використовуючи умову компланарності трьох векторів $(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{s_1}) \cdot \vec{s_2} = 0$, одержуємо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

<u>Зауваження 1</u>. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність служить умовою їх належності одній площині. Якщо ця умова

не виконується, то прямі l_1 і l_2 є мимобіжними.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$, який перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ на вектор $\vec{a}$

$$d = \left| \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} \right| \Big/ \left| \vec{a} \right| = \left| \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\vec{s_1} \times \vec{s_2} \right) \right| \Big/ \left| \vec{s_1} \times \vec{s_2} \right| .$$

<u>Зауваження 2</u>. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

<u>Приклад</u>. Знайти відстань d між заданими прямими:

$$l_1: \ \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+3}{2} \quad \text{і} \quad l_2: \ \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2} .$$

$$\Box \quad \vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} .$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1M_2} = (0-2; 2-(-5); 3-(-3)) = (-2; 7; 6)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21} \ ; \ |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}| = -2 \cdot (-4) +$$

$$+ 7 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0 \ ; \quad d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|0|}{\sqrt{21}} = 0 .$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються. ■

3.6.14. Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l: \ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \ ; \quad \alpha: \ Ax+By+Cz+D=0 \ .$$

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}=(m;n;p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A;B;C)$ до 90° (рис. 105). Тоді

$$\cos\left(90^\circ-\varphi\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \ .$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|\,Am+Bn+Cp\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \ .$$

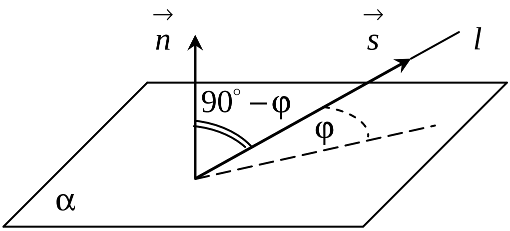


Рис. 105

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C} \ .$$

Умова паралельності прямої та площини

$$Am + Bn + Cp = 0 \ .$$

3.6.15. Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l: \ \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases} ; \quad \alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба скласти і розв'язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гаусса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \ .$$

1) Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = -\ (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cp) \ .$$

2) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

Приклад. Знайти проекцію N точки $M_0(2; -5; 4)$ на площину $\alpha: \ 3x + 2y - z - 6 = 0$.

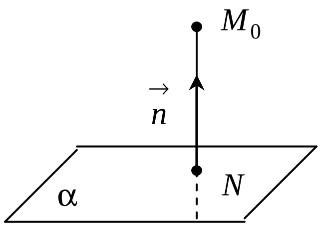


Рис. 106

□ Точка N служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 106). Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна покласти $\vec{s}=\vec{n}=(3;\,2;\,-1)$. Тоді параметричні рівняння прямої M_0N: $x=3t+2;\quad y=2t-5;\quad z=-t+4$.

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t+2)+2(2t-5)-(-t+4)-6=0\ ;\quad t=-1\ .$$

Тоді

$$x=3(-1)+2=-1;\quad y=2(-1)-5=-7;\quad z=-(-1)+4=5\ .$$

Отже, проекцією служить точка $N(-1;-7;5)$. ■

3.6.16. Відстань від точки до прямої

Нехай треба знайти відстань d від точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями:

$$x=mt+x_0;\quad y=nt+y_0;\quad z=pt+z_0\ .$$

Розглянемо три способи визначення цієї відстані.

<u>Спосіб 1</u>. Візьмемо на прямій відому точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{s}=(m;n;p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$ (рис. 107). Площа S цього паралелограма

$$S=|\vec{s}|\cdot d\quad \text{або}\quad S=|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|\ .$$

Звідси

$$d = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}| \big/ |\vec{s}| \ .$$

<u>Спосіб 2</u>. Проведемо через точку M_1 площину α, яка перпендикулярна до прямої l (рис. 108). Вектор нормалі $\vec{n}$ площини α колінеарний напрямному вектору $\vec{s}$ прямої l. Можна покласти $\vec{n} = \vec{s} = (m; n; p)$. Тоді

$$\alpha: \ \ m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0 \ .$$

Далі треба знайти точку N перетину прямої та площини. Ця точка служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на пряму l. Отже, $d = M_1N$.

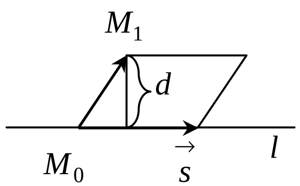


Рис. 107

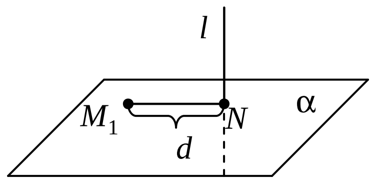


Рис. 108

<u>Спосіб 3</u>. Розглянемо функцію $u = d^2(t)$, яка дорівнює квадрату відстані

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - mt - x_0)^2 + (y_1 - nt - y_0)^2 + (z_1 - pt - z_0)^2}$$

від точки M_1 до довільної точки прямої l.

Відстань d від точки M_1 до прямої l відповідає найменшому значенню цієї функції. Зі змісту задачі випливає, що мінімум існує і є єдиним екстремальним значенням. Тому відповідне значення параметра t_m визначається однозначно з необхідної умови екстремуму $u'(t)=0$:

$$-2m\left(x_1-mt-x_0\right)-2n\left(y_1-nt-y_0\right)-2p\left(z_1-pt-z_0\right)=0\ ;$$

$$t_m=\frac{m\left(x_1-x_0\right)+n\left(y_1-y_0\right)+p\left(z_1-z_0\right)}{m^2+n^2+p^2}\ .$$

Тоді $d=d\left(t_m\right)$.

<u>Приклад</u>. Знайти відстань d від заданої точки M_1 до заданої прямої l:

$$M_1\left(2;\,3;\,-5\right)\ ;\qquad \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{2}\ .$$

□ Застосовуємо <u>спосіб 1:</u>

$$\vec{s}=\left(-1;-2;2\right);\quad |\vec{s}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=3\ ;$$

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\left(2-(-1);\,3-2;\,-2-0\right)=\left(3;\,1;\,-2\right);$$

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\,\vec{i}+4\,\vec{j}+5\,\vec{k}\ ;$$

$$|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{2^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}\ ;$$

$$d=|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|\big/|\vec{s}\,|=\frac{5\sqrt{2}}{3}\ .$$

(<u>Способами 2 і 3</u> розв’язати задачу самостійно). ■

3.7. Комплексні числа та функції

3.7.1. Поняття комплексного числа

Один із способів побудови комплексних чисел полягає в тому, що множину дійсних чисел розширюють приєднанням до неї нового числового об'єкта – кореня i рівняння $x^2+1=0$.

Комплексним числом (в алгебраїчній формі) називається вираз $z=x+iy$, де x,y – дійсні числа; i – ***уявна одиниця***, $i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$. Числа x і y називаються відповідно ***дійсною й уявною частинами*** комплексного числа z. Позначаються $x=\operatorname{Re} z$; $y=\operatorname{Im} z$.

Множина всіх комплексних чисел позначається C.

Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне число $z=x+i0=x$, у якого уявна частина дорівнює нулю: $y=0$. Таким чином, множина дійсних чисел R є підмножиною множини комплексних чисел C: $R \subset C$.

Комплексне число $z=iy=0+iy$, $y \neq 0$, у якого дійсна частина дорівнює нулю, а уявна частина відмінна від нуля, називається ***чисто уявним***.

Два комплексних числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ називаються ***рівними***, якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини: $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2 \; i \; y_1=y_2$.

Комплексне число ***рівне нулю*** $z=0$, якщо рівні нулю його дійсна та уявна частини: $z=0 \Leftrightarrow x=0 \; i \; y=0$.

<u>Зауваження</u>. Для комплексних чисел не існують поняття “більше”, “менше”.

Комплексне число $-z=-x-iy$ називається ***протилежним*** до числа $z=x+iy$.

Два комплексних числа $z=x+iy$ і $\bar{z}=x-iy$, у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються ***комплексно спряженими***. Очевидно, що $\bar{\bar{z}}=z$.

3.7.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня здійснюються за правилами дій над многочленами з врахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних.

Зокрема, ***додавання і віднімання*** комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюються покомпонентно:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Множення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за правилом множення двочленів з урахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Зауваження 1. Для множення комплексного числа $z = x + iy$ на дійсне число a досить кожну його компоненту помножити на це число a: $az = ax + iay$.

Зауваження 2. Знайдемо натуральні степені уявної одиниці: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$. Отже

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Зауваження 3. При піднесенні комплексного числа до натурального степеня можна застосовувати відомі з елементарної математики формули скороченого множення.

Зауваження 4. Сума і добуток двох комплексно спряжених чисел $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$ є дійсним числом:

$$z + \bar{z} = 2x; \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Ділення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$ виконується так: 1) треба чисельник і знаменник дробу z_1 / z_2 домножити на число $\bar{z}_2$, спряжене до знаменника z_2; 2) врахувати, що $i^2 = -1$, і звести подібні; 3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі.

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Зауваження 5. Основні властивості розглянутих арифметичних операцій над комплексними числами співпадають з відповідними властивостями аналогічних операцій над дійсними числами. Тому для комплексних чисел залишаються справедливими всі теореми, правила, формули, що виведені для дійсних чисел на підставі цих властивостей.

Приклад. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

$$z = (2-3i)(4+i) - (1-2i)^2 + 10\,(5-7i):(3-4i)\,.$$

□ Виконуємо дії як над многочленами:

$$z = (2-3i)(4+i) - (1-2i)^2 + 10\,(5-7i):(3-4i) = (8+2i-$$

$$-12i - 3i^2 - 1 + 4i - 4i^2 + 10\left((5-7i)(3+4i)\right)/\left((3-4i)(3+4i)\right) =$$

$$= 8 + 2i - 12i + 3 - 1 + 4i + 4 + 10\left(15 + 20i - 21i - 28i^2\right):(9-$$

$$-16i^2\Big) = 14 - 6i + 10\,(15 + 20i - 21i + 28):(9+16) = 14 - 6i +$$

$$+ 2\,(43 - i):5 = (70 - 30i + 86 - 2i):5 = 156/5 - (32/5)\,i\,. \ ■$$

3.7.3. Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент комплексного числа

Якщо на площині введено прямокутну декартову систему координат Oxy, то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел C можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає єдина точка $M\,(x;y)$ і навпаки (рис. 109). Дійсні числа зображаються точками осі абсцис Ox, тому вісь Ox називається ***дійсною віссю***. Чисто уявні числа зображаються точками осі ординат Oy, тому вісь Oy називається ***уявною віссю***. Числу $z = 0$ відповідає початок координат $O\,(0;0)$.

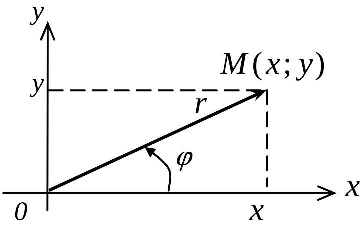


Рис. 109

Координатна площина Oxy, яка зображає множину всіх комплексних чисел C, називається ***комплексною площиною*** C або z***-площиною***.

Зауваження 1. Комплексне число $z = x + iy$ можна також зобразити радіус-вектором $\overrightarrow{OM}\,(x;y)$, що виходить із початку координат $O(0;0)$ і закінчується в точці $M\,(x;y)$ (рис. 109).

Зауваження 2. Додавання і віднімання комплексних чисел можна здійснювати за правилами (трикутника і паралелограма) відповідних операцій над векторами (рис. 110).

Якщо на комплексній площині (рис. 109) ввести також полярну систему координат $Or\varphi$ з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox, то точку $M\,(x;y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ можна задати полярними координатами $M\,(r;\varphi)$.

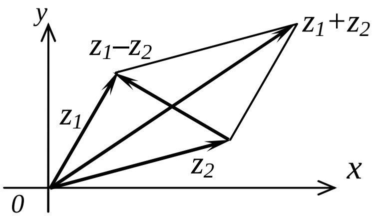


Рис. 110

Полярний радіус r (довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$) називається ***модулем*** комплексного числа z і позначається $|z| = r$.

Очевидно, що $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

Полярний кут φ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ і полярною віссю Ox) називається ***аргументом*** комплексного числа z і позначається $Arg\,z = \varphi$.

Аргумент φ, як кут повороту, визначається з точністю до сталого доданку вигляду $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (довільного числа повних обертів).

Єдине значення φ, що задовольняє умову $-\pi < \varphi \le \pi$, називається ***головним значенням аргументу*** і позначається $\arg z$. Отже, $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, y \ge 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0; \\ \pi/2, & x = 0;\ y > 0; \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

<u>Зауваження 3</u>. Для числа $z = 0$ модуль дорівнює нулю $r = |0| = 0$, а аргумент φ довільний.

<u>Зауваження 4</u>. У рівних комплексних чисел $z_1 = z_2$ модулі також рівні $r_1 = r_2$, а аргументи зв’язані співвідношенням $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тобто відрізняються на доданок $2\pi k$.

3.7.4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Використовуючи зв’язок декартових і полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Вираз $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називається ***тригонометричною формою комплексного числа***.

Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Якщо звернутись до ***основної формули Ейлера***

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

(її доведення дається в теорії рядів), то від тригонометричної форми можна перейти до ***показникової форми комплексного числа*** $z=re^{i\varphi}$.

Приклад. Зобразити на комплексній площині і подати в тригонометричній та показниковій формах наступні комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1=-\sqrt{3}-i;\quad z_2=2-2i;\quad z_3=2i;\quad z_4=-2;\quad z_5=-2+i.$$

□ Побудуємо задані числа на комплексній площині (рис. 111). Знайдемо модуль і головне значення аргументу кожного з цих чисел та запишемо їх у тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{z_1=-\sqrt{3}-i}:\quad x_1=-\sqrt{3};\quad y_1=-1;\quad |z_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=2;$$

$$\arg z_1=\operatorname{arctg}(y_1/x_1)-\pi,\quad x_1<0, y_1<0;$$

$$\arg z_1=\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})-\pi=\pi/6-\pi=-5\pi/6;$$

$$z_1=2\left(\cos(-5\pi/6)+i\sin(-5\pi/6)\right);\quad z_1=2e^{i(-5\pi/6)}.$$

$$\underline{z_2=2-2i}:\quad x_2=2;\quad y_2=-2;\quad |z_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=2\sqrt{2};$$

$$\arg z_2=\operatorname{arctg}(y_2/x_2),\quad x_2>0;\ \arg z_2=\operatorname{arctg}(-1)=-\pi/4;$$

$$z_2=2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)\right);\quad z_2=2\sqrt{2}\,e^{-i(\pi/4)}.$$

$$\underline{z_3=2i}:\quad x_3=0;\quad y_3=2;\quad |z_3|=\sqrt{x_3^2+y_3^2}=2;$$

$$\arg z_3=\pi/2,\quad x=0;\ y>0;$$

$$z_3=2\left(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)\right);\quad z_3=2e^{i(\pi/2)}.$$

$$\underline{z_4=-2}:\quad x_4=-2;\quad y_4=0;\quad |z_4|=\sqrt{x_4^2+y_4^2}=2;$$

$$\arg z_4=\operatorname{arctg}(y_4/x_4)+\pi,\quad x_4<0, y_4\ge 0;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi; \quad z_4 = 2(\cos\pi + i\sin\pi); \quad z_4 = 2e^{i\pi}.$$

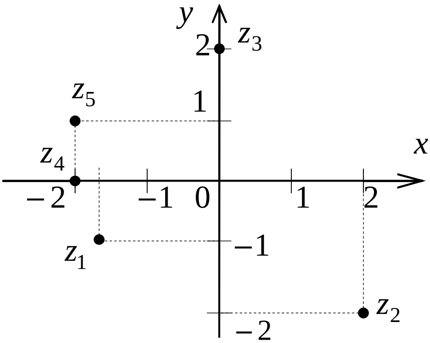


Рис. 111

$\underline{z_5 = -2 + i:}$

$$x_5 = -2; \quad y_5 = 1;$$

$$|z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{5};$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(y_5 / x_5) + \pi,$$

$$x_5 < 0, y_5 \ge 0;$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(-1/2) +$$

$$+ \pi = \pi - \operatorname{arctg}(1/2);$$

$$z_5 = \sqrt{5}\, e^{i(\pi - \operatorname{arctg}(1/2))};$$

$$z_5 = \sqrt{5}\left(\cos(\pi - \operatorname{arctg}(1/2)) + i\sin(\pi - \operatorname{arctg}(1/2))\right). \quad \blacksquare$$

3.7.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 +$$

$$+ i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників. Отже,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \qquad Arg(z_1 z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 .$$

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, причому z_2

відмінне від нуля $z_2 \neq 0$, то їх частка:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= (r_1/r_2)\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Часткою z_1/z_2 двох комплексних чисел z_1 і z_2, де дільник $z_2 \neq 0$, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого z_1 і дільника z_2, а аргумент – різниці аргументів діленого z_1 і дільника z_2. Отже,

$$\frac{z_1}{z_2} == \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad \frac{z_1}{z_2} == \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i};$$

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|; \qquad Arg\,(z_1/z_2) = Arg\,z_1 - Arg\,z_2.$$

Зауваження 1. Множення комплексних чисел можна розглядати як ще один вид (поряд зі скалярним і векторним) добутку плоских векторів. Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора z_1 проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2, і розтягом його в $|z_2|$ разів (для випадку $|z_2|>1|$ див. рис. 112). Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора z_1 за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2, і стиском його в $|z_2|$ разів (для випадку $|z_2|>1|$ див. рис. 113).

Натуральним степенем z^n комплексного числа z називається комплексне число, отримане множенням числа z самого на себе n раз, де n – натуральне число.

Із правила множення комплексних чисел у тригонометричній формі випливає ***перша формула Муавра***:

$$z^n = (r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Коренем n ***-го степеня*** $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається таке комплексне число, n-й степінь якого дорівнює z:

Очевидно, що корінь n-го степеня з нуля дорівнює нулю.

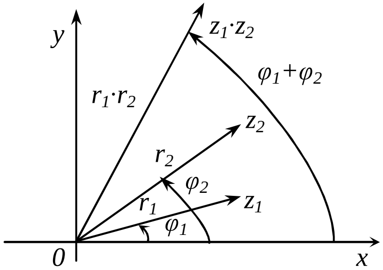


Рис. 112

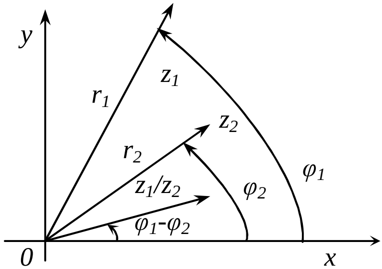


Рис. 113

Якщо комплексне число z відмінне від нуля $z \neq 0$, то корінь n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ має рівно n різних значень, що визначаються за ***другою формулою Муавра***:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0,1,2,\ldots,n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметичне значення кореня з додатного числа.

На комплексній площині всі корені n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа $z \neq 0$ зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

Зауваження 2. Хоча б один корінь n-го степеня з додатного дійсного числа буде дійсним.

Приклад 1. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$.

□ Запишемо число $\sqrt{3}+i$ в тригонометричній формі

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)\right).$$

За першою формулою Муавра

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}=\left(2\left(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)\right)\right)^{10}=$$

$$=2^{10}\left(\cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3)\right)=2^{10}\left(\cos(\pi+2\pi/3)+\right.$$

$$\left.+i\sin(\pi+2\pi/3)\right)=2^{10}\left(-\cos(2\pi/3)-i\sin(2\pi/3)\right)=$$

$$=2^{10}\left(1/2-i\cdot\sqrt{3}/2\right)=2^{9}-i\cdot 2^{9}\sqrt{3}\,.\quad\blacksquare$$

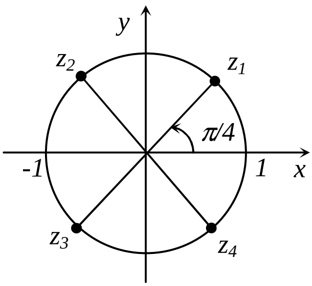


Рис. 114

Приклад 2. Знайти всі значення кореня четвертого степеня $\sqrt[4]{-1}$.

□ Запишемо підкореневе число -1 у тригонометричній формі

$$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$$

(див. рис. 114).

За другою формулою Муавра

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}(\cos(\pi+2\pi k)/4+$$

$$+i\sin(\pi+2\pi k)/4),\text{ де } k=0,1,2,3.$$

Тобто, коренями є комплексні числа:

$$z_1=\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)=\left(\sqrt{2}/2\right)(1+i)\,;$$

$$z_2=\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)=\left(\sqrt{2}/2\right)(-1+i)\,;$$

$$z_3=\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4)=\left(\sqrt{2}/2\right)(-1-i)\,;$$

$$z_4=\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4)=\left(\sqrt{2}/2\right)(1-i)\,,$$

які зображено на рис. 114. ■

3.7.6. Многочлени. Розкладання на множники. Розв'язування квадратних рівнянь

Функція комплексної змінної

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

називається ***многочленом*** n ***-го степеня*** стандартного вигляду.

Тут z – комплексний аргумент: n – степінь многочлена;

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ – сталі комплексні ***коефіцієнти***; a_0 називається ***старшим коефіцієнтом***, причому $a_0 \neq 0$; a_n називається ***вільним членом***.

Теорема 1 (теорема Безу). *При діленні многочлена* $P_n(z)$ *на різницю* $z-a$ *остача від ділення дорівнює* $P_n(a)$.

□ $P_n(z) = Q_{n-1}(z)\cdot(z-a)+R$. Нехай $z \to a$, тоді $P_n(a) = R$. ■

Наслідок 1. *Якщо* a – *корінь многочлена* $P_n(z)$, *то цей многочлен* $P_n(z)$ *ділиться без остачі на різницю* $z-a$, *тобто розкладається на множники*

$$P_n(z) = Q_{n-1}(z)\cdot(z-a),$$

де частка $Q_{n-1}(z)$ – *многочлен на одиницю меншого степеня.*

Теорема 2 (основна теорема алгебри). *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \geq 1$ *має хоча б один корінь (дійсний чи комплексний).*

Наслідок 2. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \geq 1$ *має рівно* n *коренів, серед яких можуть бути однакові.*

Наслідок 3. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \geq 1$ *розкладається на множники у вигляді:*

$$P_n(z) = a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m},$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $z_1, z_2, \ldots, z_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1+k_2+\ldots+k_m = n$.

Корені квадратного рівняння $az^2+bz+c=0$ $(a \neq 0)$ з комплексними коефіцієнтами a, b, c знаходяться за відомими формулами:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad D = b^2 - 4ac,$$

де $\sqrt{D}$ – одне зі значень квадратного кореня з дискримінанта D.

На множині комплексних чисел для коренів квадратного рівняння залишається справедливою теорема Вієта:

$$z_1 + z_2 = -b/a, \quad z_1 z_2 = c/a.$$

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння $4z^2 - 8z + 5 = 0$.

□ $D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -16$; $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$;

$$z_{1,2} = \frac{8 \pm 4i}{2 \cdot 4} = 1 \pm \frac{1}{2} i. \quad ■$$

3.7.7. Комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині

Комплексна функція z ***дійсної змінної*** t кожному значенню t з деякої непорожньої множини D дійсних чисел за певним законом ставить у відповідність одне єдине значення комплексної змінної z з деякої області E комплексної площини. Комплексна функція $z = z(t)$ дійсної змінної t визначається рівністю $z = x(t) + i\, y(t)$, $t \in D$, де $x(t)$ та $y(t)$ – задані дійсні функції (відповідно дійсна і уявна частини змінної $z = z(t)$).

Функція $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ в ***комплексно-параметричній формі*** задає деяку плоску лінію L. Параметричні рівняння цієї лінії: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Комплексній змінній $z = z(t)$ відповідає вектор-функція.

Для знаходження похідної $z' = z'(t)$ комплексної функції $z = x(t) + i\, y(t)$ дійсної змінної треба продиференціювати окремо дійсну $x(t)$ та уявну $y(t)$ частини: $z' = x'(t) + i\, y'(t)$.

Приклад 1. Визначити вид і зобразити на комплексній площині лінію, задану рівнянням $z = 3\cos t + 3i\sin t$.

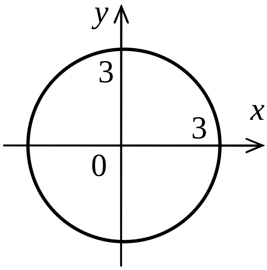


Рис. 115

□ Щоб визначити вид лінії, підставимо в її рівняння $z = x + i\,y$ і зведемо його до відповідного стандартного вигляду. Потім побудуємо цю лінію.

$x + iy = 3\cos t + 3i\sin t$; $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ –

коло радіуса $r = 3$ з центром у початку координат, задане в параметричній формі (рис. 115). Його канонічне рівняння $x^2 + y^2 = 9$. ■

Приклад 2. Знайти похідну функції $z = 4\cos^2 t + i\,e^{8t}$ в точці z_0, що відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$.

$$□ \quad z' = \left(4\cos^2 t + i\,e^{8t}\right)' = -8\cos t\cdot\sin t + 8i\,e^{8t} = -4\sin 2t +$$

$$+ 8i\,e^{8t};\ \ z'(\pi/4) = -4\sin(\pi/2) + 8i\,e^{2\pi} = -4 + 8i\,e^{2\pi}. \ ■$$

3.7.8. Поняття функції комплексної змінної. Деякі елементарні функції комплексної змінної

Для геометричного тлумачення поняття функції комплексної змінної розглядаються два екземпляри площини комплексних чисел: z***-площина*** $z = x + i\,y$ і w***-площина*** $w = u + i\,v$.

Нехай на z-площині задана довільна множина точок D. Якщо кожній точці $z = x + i\,y$ множини D за певним законом f поставлено у відповідність одну точку $w = u + i\,v$ (або декілька точок) w-площини, то говорять, що на множині D задано однозначну (або багатозначну) ***комплексну функцію комплексної змінної*** $w = f(z)$. D називається ***множиною визначення*** функції $w = f(z)$, а множина E усіх значень w, що приймає функція, називається ***множиною значень*** цієї функції.

Степенева функція з натуральним показником n має вигляд $w = z^n$, де $n \in N$. Степенева функція $w = z^n$ визначена на всій комплексній площині, однозначна, неперервна. Похідна $w' = nz^{n-1}$ всюди неперервна.

Коренева функція має вигляд $w = z^p$, де $p = m/n$ – нескоротний правильний дріб: $0 < m/n < 1$, $m, n \in N$.

Коренева функція (радикал) $w = z^p$ визначена на всій комплексній площині і багатозначна. Похідна $w' = p\,z^{p-1}$ всюди визначена і неперервна, крім $z = 0$.

Показникова (***експоненціальна***) ***функція*** комплексної змінної визначається рівністю $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. На дійсній осі $y = 0$ ця функція збігається з дійсною експонентою e^x. Зберігається основне правило: при множенні експонент їх показники додаються $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Справедливі також співвідношення: $e^{z_1}\big/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$; $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$.

Модуль комплексної експоненти $\left|e^z\right| = e^x$, а аргумент $Arg\,e^z = y + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отже, ця функція є періодичною з уявним періодом $2\pi i$: $e^{z+2\pi ni} = e^z$.

Похідна комплексної експоненти $w = e^z$ дорівнює їй самій і всюди відмінна від нуля $w' = e^z \neq 0$.

Тригонометричні та гіперболічні функції комплексного аргументу визначаються за допомогою ***основної формули Ейлера*** $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ і узагальнюють відповідні дійсні функції:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};\ tg\,z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$ctg\,z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};\ \ sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\ \ ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \quad cth\,z = \frac{ch\,z}{sh\,z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Оскільки комплексна експонента e^z є періодичною з уявним періодом $2\pi i$, то тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ також періодичні на всій комплексній площині з дійсним періодом 2π, а $tg\,z$ і $ctg\,z$ – з дійсним періодом π:

$$\sin z = \sin(z + 2\pi); \quad \cos z = \cos(z + 2\pi);$$

$$tg\,z = tg\,(z + \pi); \quad ctg\,z = ctg\,(z + \pi).$$

Причому на відміну від дійсних функцій, на всій комплексній площині $\sin z$ і $\cos z$ є необмеженими:

$$|\cos z| \to +\infty, \quad |\sin z| \to +\infty \quad \text{при } y \to \pm\infty.$$

Гіперболічні функції $sh\,z$ і $ch\,z$ на всій комплексній площині є періодичними з уявним періодом $2\pi i$, а $th\,z$ і $cth\,z$ – з уявним періодом πi:

$$sh\,z = sh(z + 2\pi i); \quad ch\,z = ch(z + 2\pi i);$$

$$th\,z = th(z + \pi i); \quad cthz = cth(z + \pi i).$$

<u>Зауваження 1</u>. Для тригонометричних і гіперболічних функцій комплексного аргументу залишаються справедливими основні тотожності (синус і косинус суми, різниці та ін.), а також формули диференціювання.

Допоміжні формули Ейлера

$$sh\,z = -i\sin iz; \quad ch\,z = \cos iz; \quad th\,z = -i\,tg\,iz; \quad cth\,z = i\,ctg\,iz$$

дають зв’язок гіперболічних функцій з тригонометричними.

<u>Приклад</u>. Знайти $\cos(3 + 4i)$.

□ $$\cos(3+4i) = \frac{e^{i(3+4i)} + e^{-i(3+4i)}}{2} = \frac{e^{-4}e^{3i} + e^4 e^{-3i}}{2} =$$

$$= \left(e^{-4}(\cos 3 + i\sin 3) + e^4(\cos 3 - i\sin 3)\right)/2 =$$

$$= \left(\cos 3 \cdot (e^{-4} + e^4) - i\sin 3 \cdot (e^4 - e^{-4})\right)/2 =$$

$$=\frac{e^4+e^{-4}}{2}\cos 3-i\frac{e^4-e^{-4}}{2}\sin 3=ch4\cos 3-i\,sh4\sin 3\,. \ \blacksquare$$

Логарифмічна функція $w=Ln\,z$ комплексної змінної визначається як обернена до показникової:

Комплексне число $w=Ln\,z$ називається ***натуральним логарифмом*** ненульового комплексного числа z, якщо виконується рівність $e^w=z$. Звідси $Ln\,z=\ln|z|+i\,Arg\,z$.

Функція $w=Ln\,z$ є нескінченнозначною і визначена на всій комплексній площині, за винятком початку координат $z=0$. Якщо для аргументу $z\neq 0$ обмежитися його головним значенням $-\pi<\arg z\leq\pi$, то одержимо ***головне значення логарифму*** $\ln z=\ln|z|+i\arg z$.

Зауваження 2. Якщо число z – дійсне додатне, тоді головне значення аргументу $\arg z=0$ і головне значення логарифму співпадає зі звичайним натуральним логарифмом $\ln z=\ln|z|$.

Зауваження 3. На логарифм комплексної змінної поширюються основні властивості звичайного логарифму дійсного аргументу: $Ln(z_1z_2)=Ln\,z_1+Ln\,z_2$; $Ln(z_1/z_2)=Ln\,z_1-Ln\,z_2$; $Ln(z)^n=n\,Ln\,z$.

Зауваження 4. За допомогою логарифмічної функції визначаються:

а) ***загальна степенева функція*** $w=z^a=e^{a\,Ln\,z}$, де показник $a=\alpha+i\beta$ – довільне комплексне число. Ця функція багатозначна, її ***головне значення*** $w=e^{a\ln z}$.

б) ***загальна показникова функція*** $w=a^z=e^{z\,Ln\,a}$, де основа $a=\alpha+i\beta\neq 0$ – довільне ненульове комплексне число. Ця функція багатозначна, її ***головне значення*** $w=e^{z\ln a}$.

в) ***показниково-степенева функція*** $w=z_1^{z_2}=e^{z_2\,Ln\,z_1}$, де основа відмінна від нуля $z_1\neq 0$. Ця функція нескінченнозначна, її ***головне значення*** $w=e^{z_2\ln z_1}$.

3.8. Контрольні запитання

1) Що називається визначником?
2) Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
3) За яким правилом обчислюється значення визначника n-го порядку?
4) Сформулюйте правила “хреста” і “трикутників” для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.
5) Сформулюйте основні властивості визначника.
6) Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?
7) Що називається матрицею?
8) Яка матриця називається невиродженою?
9) Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число? Чим відрізняється множення матриці на число від множення визначника на число?
10) Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції?
11) Що таке обернена матриця та як вона обчислюється?
12) Що називається рангом матриці?
13) Як знаходиться ранг матриці методом обвідних мінорів?
14) Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?
15) Які матриці називаються еквівалентними?
16) Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?
17) Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими?
18) Яка система називається сумісною? Визначеною?
19) Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.
20) Як знаходиться розв’язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці?
21) Як розв’язується квадратна СЛАР методом Крамера?
22) Як розв’язується довільна СЛАР методом Гаусса?
23) Сформулюйте умову наявності в квадратної СЛАР ненульових розв’язків.
24) Як використовуються блочні матриці для розвязування СЛАР і знаходження оберненої матриці?

25) Як задається прямокутна система координат у просторі? Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?
26) Що таке скалярні та векторні величини?
27) Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?
28) Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?
29) Як знаходяться проекція вектора на ненульовий вектор?
30) Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?
31) Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?
32) Як формулюється умова колінеарності двох векторів?
33) Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?
34) Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
35) У чому полягає умова ортогональності двох векторів?
36) Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
37) У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?
38) Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
39) У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
40) У чому полягає умова компланарності трьох векторів?
41) Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?
42) Що називається n-вимірним векторним простором? Який простір є лінійним?
43) Яка система векторів називається лінійно незалежною?
44) Що таке базис n-вимірного векторного простору?
45) Що називається лінійним відображенням? Що таке матриця лінійного відображення?
46) Як задаються паралельне перенесення і поворот прямокутної системи координат на площині?
47) Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?
48) Як знаходяться власні числа і власні вектори?
49) Сформулюйте властивості власних чисел і власних векторів.

50) Що таке матричний многочлен?
51) Сформулюйте теорему Келі – Гамільтона про характеристичний многочлен.
52) Як розв’язується СЛАР методом простих ітерацій?
53) Наведіть основні типи рівняння площини.
54) Як обчислюється кут між площинами?
55) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
56) Як обчислюється відстань від точки до площини?
57) Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.
58) Як обчислюється кут між прямими у просторі?
59) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
60) Як обчислюється кут між прямою і площиною?
61) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
62) Як знаходиться відстань між непаралельними прямими?
63) Як знаходиться відстань від точки до прямої у просторі?
64) Як записується комплексне число в алгебраїчній формі?
65) Наведіть умову рівності двох комплексних чисел.
66) Чим відрізняється між собою пара комплексно спряжених чисел?
67) Що служить геометричним зображенням комплексного числа і всієї множини комплексних чисел?
68) Які арифметичні операції зручно виконувати в алгебраїчній, а які – в тригонометричній чи показниковій формах?
69) Чим відрізняється добуток комплексних чисел від скалярного і векторного добутку векторів?
70) Скільки різних значень має корінь n-го степеня з комплексного числа? Як розміщені ці значення на комплексній площині?
71) Який вигляд має розклад многочлена на множники на множині комплексних чисел?
72) Що називається комплексною функцією дійсної змінної? Що служить графіком такої неперервної функції?
73) Як здійснюється диференціювання комплексної функції дійсної змінної?

74) Що називається комплексною функцією комплексної змінної?
75) Наведіть основну формулу Ейлера.
76) Якими формулами виражається зв'язок тригонометричних і гіперболічних функцій з комплексною експонентою e^z?
77) Як визначається комплексна логарифмічна функція $Ln\,z$ та її головне значення $\ln z$?

3.9. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Для даного визначника Δ і вказаних чисел i та j знайти мінори M_{ij}, M_{ji} і алгебраїчні доповнення A_{ij}, A_{ji} відповідно елементів a_{ij} і a_{ji}. Обчислити визначник Δ трьома способами:

1) розкладаючи його за елементами i-го рядка;

2) розкладаючи його за елементами j-го стовпця;

3) попередньо звівши його до східчастого (трикутного) вигляду з нулями нижче головної діагоналі.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=4$	16	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=1$
2	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=4$	17	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$

3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=3$	18	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=3$
4	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=3$	19	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$
5	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=2$	20	$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=1$
6	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=4$	21	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=1$
7	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=2$	22	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=3$

8	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=4$	23	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$
9	$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=4$	24	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=1$
10	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=1$	25	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=2$
11	$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$	26	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$
12	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$	27	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=2$

13	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=4;\quad j=3$	28	$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=2$
14	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=2$	29	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$
15	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=4$	30	$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=3$

Завдання 2. Дано матриці A і B.

1) Знайти матриці $C = AB$ і $D = BA$.

2) Знайти обернену матрицю A^{-1} і перевірити, що $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$.

3) Розв'язати матричне рівняння $AXB = D$.

4) Побудувати характеристичний многочлен матриці A: $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ і перевірити, що матриця A є коренем свого характеристичного многочлена $f(A) = 0$.

5) Знайти власні числа матриці F, одержаної з A вилученням останнього рядка і останнього стовпця.

№ в-та	Завдання
1	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

9	$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
16	$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

17	$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 8\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 6\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$
18	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ -1 & -5 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 6 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 2 & -6 & 1\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -4 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$
22	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & -1\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -5 & 6 & -1\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 4\\ 5 & -3 & 9\end{pmatrix}$
24	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -3 & 5\\ 7 & 8 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4 & 7 & 3\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$

25	$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 5\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\ -2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$
26	$A=\begin{pmatrix}-2 & -6 & 3\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 1 & -5 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$
28	$A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -7 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & -3 & -1\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 3 & 7 & -1\\ -3 & -2 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$
30	$A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 3\\ -2 & 6 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$

Завдання 3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці;
3) методом Гаусса послідовного вилучення невідомих.

Зробити перевірку.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} 5x+y-2z=4 \\ 5x+8y+4z=12 \\ -2x+4y-3z=11 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -3x+2y+z=-3 \\ -x-3y+2z=4 \\ x+2y-4z=-10 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x+2y+2z=2, \\ x-2y+z=4, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$	17	$\begin{cases} -3x+2y-z=8 \\ 3x-3y+2z=-15 \\ -5x+2y+4z=-9 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 7x-2y-z=5 \\ x+4y+z=3 \\ -4x+5y+6z=8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x-3y+5z=-9, \\ 4x+2y-3z=0, \\ x+3y+4z=5. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x-y+z=5, \\ 3x+2y-2z=-3, \\ 4x+5y-3z=-5. \end{cases}$	19	$\begin{cases} x+5y-z=-9 \\ -2x-y+4z=2 \\ 2x+4y+3z=-1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -3x+5y+8z=2 \\ -x-4y+2z=0 \\ 5x-y-9z=1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+4z=11 \\ -2x-2y-z=-9 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x+2y+4z=-3, \\ 2x+3y+3z=-5, \\ 5x-4y+2z=5. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 4x+y-z=3, \\ 5x+\quad 4z=-4, \\ -2x+3y+5z=1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 6x+5y-z=-13 \\ x+4y+5z=5 \\ 2x+8y+z=-8 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x+y-7z=10 \\ -x+3y+2z=-3 \\ 2x-y+4z=-2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x+2y-z=1 \\ x-3y+2z=0 \\ -5x+2y-4z=-8 \end{cases}$	23	$\begin{cases} -3x+5y+8z=2 \\ -x+6y+3z=1 \\ 5x-y-6z=4 \end{cases}$

9	$\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ x-2y+2z=-1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x-y+2z=9, \\ x+y-z=-2, \\ 4x+4y-3z=-5. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ 3x+2y+3z=8 \\ -2x+3y+6z=7 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 6x-2y-z=3 \\ x+4y-3z=-8 \\ 3x+10y-2z=-3 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x+4y+z=1, \\ 5x+y-3z=-2, \\ 2x+3y+4z=7. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x+2y-3z=-1, \\ 2x+3y+2z=9, \\ 5x-4y+4z=9. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x+5y-7z=-1 \\ -x+6y+2z=0 \\ 5x-y+4z=14 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x+5y-z=3 \\ x+5y-3z=14 \\ -3x+4y+z=-2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ 3x-y+5z=2, \\ 4x+3y+4z=0. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x+5y-z=1 \\ -2x+5y+2z=2 \\ -3x+4y+z=-3 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x-2y-z=-1 \\ x+4y+3z=-1 \\ 4x-y-2z=4 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ 3x+3y-4z=-6 \\ -2x+4y-z=5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -3x+2y+z=2 \\ 5x+y-4z=-5 \\ x+4y-3z=-4 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x+5y-z=5 \\ x+y+2z=0 \\ -3x+4y+7z=-13 \end{cases}$

Завдання 4. Перевірити, що дана квадратна однорідна система $AX = 0$ має безліч розв'язків ($\det A = 0$). Знайти всі ці розв'язки (загальний розв'язок). Знайти будь-який ненульовий частинний розв'язок.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \\ 5x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 3x + 2y - 8z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 10y - 7z = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x - 6y + 5z = 0 \\ 4x - 4y - 3z = 0 \\ 2x - 8y + 13z = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x + 5y - 8z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ -x + 8y + z = 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \\ 4x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x + 5y - z = 0 \\ x + 4y - 6z = 0 \\ x - 3y + 11z = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x - 4y - z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

8	$\begin{cases} 4x+2y-5z=0 \\ 2x-3y+3z=0 \\ 2x+5y-8z=0 \end{cases}$	23	$\begin{cases} -3x+5y+4z=0 \\ x+y-2z=0 \\ x+9y-4z=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x+y-6z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ x+10y-12z=0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x-y+5z=0 \\ x+3y-z=0 \\ x-7y+7z=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x-7y+2z=0 \\ 3x+5y-3z=0 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 6x-2y-3z=0 \\ x+4y-3z=0 \\ 4x-10y+3z=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x-4y+z=0 \\ 5x+y-3z=0 \\ 2x+5y-4z=0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x+2y-6z=0 \\ 2x-4y+3z=0 \\ -x+10y-12z=0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x+5y-z=0 \\ -x-6y+2z=0 \\ x-7y+3z=0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x+5y-6z=0 \\ 4x-3y-3z=0 \\ -2x+8y-3z=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-4y+5z=0 \\ 3x-y-3z=0 \\ -x-3y+8z=0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x+5y-4z=0 \\ -2x+6y+z=0 \\ 4x-y-5z=0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 7x-2y-2z=0 \\ 3x+4y-3z=0 \\ x-10y+4z=0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x+y-7z=0 \\ 3x-3y+4z=0 \\ 5x-2y-3z=0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3x-2y+5z=0 \\ 5x+y-4z=0 \\ 2x+3y-9z=0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x-y-8z=0 \\ x-3y+6z=0 \\ 3x-4y-2z=0 \end{cases}$

Завдання 5. Дано вершини трикутної піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Побудувати зображення піраміди $A_1A_2A_3A_4$ у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$. Засобами векторної алгебри й аналітичної геометрії знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) площу грані $A_1A_2A_3$;

4) об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

5) загальне рівняння площини $A_1A_2A_3$;

6) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$;

7) канонічні рівняння прямих A_1A_2 і A_3A_4;

8) канонічні рівняння висоти піраміди A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

9) канонічні рівняння прямої A_3M, яка паралельна ребру A_1A_2;

10) рівняння площини α, яка проходить через точку A_1 перпендикулярно ребру A_1A_2;

11) довжину висоти A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

12) канонічні рівняння медіани A_1K трикутника $A_1A_2A_3$;

13) координати точки N – основи висоти A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

14) відстань між паралельними прямими A_3M і A_1A_2;

15) відстань між мимобіжними прямими A_1A_2 і A_3A_4;

16) загальні рівняння прямої l, що служить лінією перетину грані $A_1A_2A_3$ і площини β: $x+y+z-1=0$; перейти від загальних рівнянь прямої l до канонічних, а потім до параметричних рівнянь;

17) координати радіус-вектора $\overrightarrow{OA_4}$ у базисі $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, що утворений векторами $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{A_1 A_2}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{A_1 A_3}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{A_1 A_4}$.

№ в-та	Завдання
1	$A_1(-4, 2, 1),\ A_2(-1, 5, 4),\ A_3(-2, -4, 5),\ A_4(1, 2, -7)$
2	$A_1(1, -5, 1),\ A_2(-1, 3, 4),\ A_3(0, -6, 1),\ A_4(1, 2, -8)$
3	$A_1(-4, 2, 0),\ A_2(3, 1, -5),\ A_3(-2, 4, 6),\ A_4(1, -3, -3)$
4	$A_1(7, 0, 1),\ A_2(3, 1, 0),\ A_3(-2, 4, 6),\ A_4(1, 5, -3)$
5	$A_1(-6, 1, 4),\ A_2(-1, 0, -4),\ A_3(1, 5, 2),\ A_4(1, 2, -2)$
6	$A_1(0, -1, 3),\ A_2(-2, 2, 5),\ A_3(5, -6, 1),\ A_4(3, 0, 4)$
7	$A_1(-4, 4, -3),\ A_2(-1, 0, 2),\ A_3(2, 1, -4),\ A_4(1, 2, -5)$
8	$A_1(-1, 3, 7),\ A_2(0, -2, 4),\ A_3(3, 2, -1),\ A_4(4, -1, 2)$
9	$A_1(0, 1, -3),\ A_2(3, -5, -3),\ A_3(3, 1, -5),\ A_4(4, 2, -1)$
10	$A_1(4, 0, 1),\ A_2(-1, 5, 4),\ A_3(-2, -3, 8),\ A_4(1, 2, -7)$
11	$A_1(6, 0, -2),\ A_2(-1, 3, 7),\ A_3(-3, 1, -5),\ A_4(1, 2, -1)$
12	$A_1(-4, 1, 2),\ A_2(4, -2, 0),\ A_3(0, -2, -6),\ A_4(1, -3, 1)$
13	$A_1(5, -3, 7),\ A_2(3, -2, 6),\ A_3(0, -5, -4),\ A_4(-1, 1, 4)$
14	$A_1(0, -7, 1),\ A_2(-4, 0, 2),\ A_3(-3, 1, 3),\ A_4(-1, 2, -3)$
15	$A_1(1, 0, 5),\ A_2(-1, 4, -4),\ A_3(0, -2, 1),\ A_4(3, 2, -5)$
16	$A_1(-3, 0, 1),\ A_2(1, -4, 0),\ A_3(0, -5, 1),\ A_4(-5, 1, -2)$
17	$A_1(1, 6, -2),\ A_2(-1, 3, 4),\ A_3(3, -6, 2),\ A_4(1, 2, -3)$
18	$A_1(-6, 0, 1),\ A_2(1, -4, 0),\ A_3(0, -5, 1),\ A_4(-1, 1, -5)$

19	$A_1(3,-1,-6)$, $A_2(-4,3,4)$, $A_3(1,0,-2)$, $A_4(1,2,0)$
20	$A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,-3,4)$, $A_3(1,0,2)$, $A_4(1,2,-7)$
21	$A_1(6,-2,3)$, $A_2(-1,0,-5)$, $A_3(5,3,-1)$, $A_4(3,4,-4)$
22	$A_1(-3,2,-3)$, $A_2(-1,3,2)$, $A_3(5,1,-2)$, $A_4(1,2,-7)$
23	$A_1(-4,3,6)$, $A_2(-3,-2,4)$, $A_3(3,4,-1)$, $A_4(4,-2,2)$
24	$A_1(5,1,-3)$, $A_2(3,-4,-3)$, $A_3(3,1,2)$, $A_4(1,2,-7)$
25	$A_1(4,-3,1)$, $A_2(-1,3,-4)$, $A_3(2,-3,-2)$, $A_4(1,2,0)$
26	$A_1(0,-6,1)$, $A_2(-1,4,5)$, $A_3(-2,-3,4)$, $A_4(1,0,-3)$
27	$A_1(-4,0,1)$, $A_2(4,-2,6)$, $A_3(0,-5,1)$, $A_4(1,3,-3)$
28	$A_1(-4,-1,0)$, $A_2(5,1,2)$, $A_3(-3,5,-4)$, $A_4(-1,2,4)$
29	$A_1(7,-6,0)$, $A_2(-1,4,-2)$, $A_3(5,0,-4)$, $A_4(3,-4,1)$
30	$A_1(1,6,-3)$, $A_2(-3,3,-5)$, $A_3(3,0,2)$, $A_4(0,2,2)$

Завдання 6. Задано квадратний тричлен az^2+bz+c з дійсними коефіцієнтами a, b, c і комплексною змінною z. Необхідно:

1) знайти корені z_1 і z_2 заданого квадратного тричлена на множині комплексних чисел (в алгебраїчній формі $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$), розкласти тричлен на множники $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$ і перевірити теорему Вієта $z_1+z_2=-b/a$; $z_1 z_2 = c/a$;

2) обчислити вираз $\dfrac{z_1+ci}{z_2+a}+z_1^2(a+bi)-z_2 i$, виконуючи дії в алгебраїчній формі;

3) зобразити числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ на комплексній площині, знайти модуль і аргумент кожного з цих чисел та подати z_1 і z_2 у тригонометричній і показниковій формах;

4) користуючись тригонометричною формою, знайти z_1^4 та $\sqrt[3]{z_2}$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$z^2+6z+13$	11	$5z^2+2z+10$	21	$10z^2-6z+1$
2	$z^2-4z+29$	12	$z^2+8z+25$	22	z^2+4z+8
3	z^2+4z+5	13	$z^2-8z+17$	23	z^2-4z+8
4	$z^2+2z+10$	14	$4z^2+6z+5$	24	$z^2+6z+10$
5	$z^2-6z+13$	15	$z^2-2z+10$	25	$z^2+10z+29$
6	$4z^2+4z+5$	16	$5z^2+8z+5$	26	$5z^2+6z+5$
7	$8z^2-4z+1$	17	z^2-2z+2	27	$5z^2-6z+5$
8	$5z^2+2z+2$	18	z^2+2z+5	28	$5z^2+8z+4$
9	$z^2-4z+13$	19	$2z^2-2z+5$	29	$5z^2-8z+4$
10	$z^2-6z+10$	20	$4z^2+8z+5$	30	$10z^2+6z+1$

Завдання 7. На комплексній площині зобразити область D, що задана нерівностями.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z-2\le 0$, $\lvert z-2i\rvert\le 1$	16	$\lvert z-1-i\rvert\le 1$, $\lvert z+1\rvert< 2$
2	$\lvert z-2i\rvert\le 2$, $\operatorname{Re} z>1$	17	$\lvert z-i\rvert> 4$, $\operatorname{Im} z>1$
3	$\lvert z+2i\rvert\le 2$, $\lvert z\rvert\ge 1$	18	$\lvert z-2\rvert\le 2$, $\lvert z+1\rvert>1$
4	$2\operatorname{Re} z+3\operatorname{Im} z-6\ge 0$, $\lvert z\rvert< 4$	19	$\lvert z-2i\rvert< 4$, $\operatorname{Im} z>-1$
5	$\lvert z-2-2i\rvert\le 4$, $\operatorname{Im} z\le 2$	20	$\lvert z-1+i\rvert\ge 2$, $\operatorname{Re} z<0$

6	$\lvert z+2i\rvert<2$, $\operatorname{Re} z>-1$	21	$\lvert z\rvert\geq 1$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert<2$
7	$\lvert z\rvert<4$, $\lvert\arg z\rvert\leq \pi/4$	22	$\lvert z\rvert\geq 2$, $\lvert\arg z\rvert\leq \pi/4$
8	$\lvert z-2i\rvert\leq 3$, $-\pi/4<\arg z\leq \pi/3$	23	$\lvert z+2i\rvert>2$, $-3\pi/4<\arg z\leq -\pi/4$
9	$\lvert z\rvert\geq 2$, $-3\pi/4\leq \arg z<-\pi/2$	24	$\lvert z-1\rvert\geq 2$, $-\pi<\arg z<-\pi/2$
10	$\operatorname{Re} z>-4$, $-\pi/4\leq \arg z\leq 3\pi/4$	25	$\operatorname{Im} z<2$, $\pi/4\leq \arg z\leq 3\pi/4$
11	$\operatorname{Re} z\leq -1$, $-3\pi/4\leq \arg z<0$	26	$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z+1>0$, $\lvert z\rvert\leq 1$
12	$\lvert z-1+i\rvert\leq 3$, $0<\arg z\leq 3\pi/4$	27	$\lvert z-1-i\rvert\leq 2$, $3\pi/4<\arg z<\pi$
13	$\operatorname{Im} z\geq 2$, $0<\arg z\leq 3\pi/4$	28	$\operatorname{Im} z\leq -1$, $-\pi<\arg z<3\pi/4$
14	$\lvert\operatorname{Re} z\rvert\leq 3$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert\leq 2$	29	$\lvert\operatorname{Re} z\rvert>1$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert\leq 2$
15	$\lvert\operatorname{Re} z\rvert\leq 2$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert>2$	30	$\lvert z\rvert\geq 1$, $\lvert\operatorname{Re} z\rvert<2$

Завдання 8. Обчислити значення заданої функції $w=f(z)$ у зазначеній точці z_0.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$w=i\cos(\pi\bar{z})$, $z_0=-3+2i$	16	$w=(\bar{z}-2i)\,Ln\,z$, $z_0=1-i$
2	$w=i\,Ln\,z$, $z_0=\sqrt{3}+i$	17	$w=i(-1)^z$, $z_0=3-i$

3	$w = z\ tg\,(i\pi z)$, $z_0 = -1 - i$	18	$w = \sin(\pi z^2)$, $z_0 = 1 - i$
4	$w = z\sin(\pi z)$, $z_0 = 1 - i$	19	$w = (3 - 2i)\sin z$, $z_0 = \pi + \pi i$
5	$w = \bar{z}\ \cos(\pi z)$, $z_0 = -2 + i$	20	$w = i\sin(5\pi / z)$, $z_0 = -3 + 4i$
6	$w = i\cos(\pi z)$, $z_0 = -3 + 4i$	21	$w = (1 - 2i)\sin(iz)$, $z_0 = \pi + \pi i$
7	$w = z\ \cos(5\pi / z)$, $z_0 = -3 - 4i$	22	$w = i\cos 2z$, $z_0 = \pi - \pi i$
8	$w = i(\sqrt{3} - i)^z$, $z_0 = -1 - 4i$	23	$w = z\,Ln(z + i)$, $z_0 = -2 + i$
9	$w = z\,Ln(iz)$, $z_0 = 2 + 2i$	24	$w = (1 - 2i)\ tg\ (\pi z)$, $z_0 = 2 - i$
10	$w = z(-1 - \sqrt{3}i)^z$, $z_0 = -2i$	25	$w = i\cos(5\pi i / z)$, $z_0 = 3 - 4i$
11	$w = ctg\,\pi z$, $z_0 = 2 - 3i$	26	$w = i\,tg\,z$, $z_0 = 2\pi - \pi i$
12	$w = i\,ctg\,(iz)$, $z_0 = \pi + \pi i$	27	$w = \sin^2 z$, $z_0 = \pi - \pi i$
13	$w = \cos(\pi z^2)$, $z_0 = -1 + i$	28	$w = (-1 + \sqrt{3}i)^z$, $z_0 = 1 + i$
14	$w = (1 - z)\ tg\,(i\pi z)$, $z_0 = 1 - 2i$	29	$w = z\ (\sqrt{3} + i)^z$, $z_0 = 1 - i$
15	$w = i(z - 2i)^{2-2i}$, $z_0 = \sqrt{3} + 3i$	30	$w = z\ \sin(i\pi\bar{z})$, $z_0 = 2 - 2i$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

2. Бізюк В.В., Якунін А.В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

3. Вища математика. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчик, В.М. Михайленко,; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1997. –304 с.

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.

6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

7. Колосов А.І., Якунін А.В., Наземцева Л.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина перша. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 144 с.

8. Колосов А.І., Якунін А.В., Наземцева Л.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина друга. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 110 с.

9. Комплексний аналіз / А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів: Афіша, 2002. – 208 с.

10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

11. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

12. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т.1 – М.: Наука, 1985. – 430 с.

14. Станішевський С.О. Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

15. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Степан Олександрович Станішевський,
Анатолій Вікторович Якунін,
Валентина Семенівна Ситникова

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А
д л я   е л е к т р о т е х н і к і в

Модуль 1: Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск: М.Й. Кадець

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 26 Н

Підп. до друку 28.10.08 Формат 60х84 1/16 Папір офісний
Друк на ризографі. Умовн.-друк.арк.16,0 Обл.-вид.арк.17,5
Тираж 500 прим. Зам. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12